Теорема Уитни - план

12 апреля 2021 г.   20:59

Напоминание: погружение, вложение.

Теорема ("простая теорема Уитни"). Для любого компактного гладкого многообразия M^n существует вложение в R^{2n+1}

Доказательство:
Шаг 1: Существует вложение в R^N для некоторого N
Шаг 2: Понижение размерности

Формулировка

12 апреля 2021 г. 21:27

Напоминание: Для гладких многообразий (M, N)

(гладкое) Погружение – гладкое $f: M \to N$ т.ч. $\forall x \in M$ $\ker d_x f = \{0\}$

(гладкое) Вложение — погружение и топологическое вложение

(т.е. f инъективно и f^{-1} непрерывно)

$\boxed{\text{Теорема}}$ ("лёгкая теорема Уитни").

Пусть M^n – компактное гладкое многообразие

Тогда $\exists$ вложение $f: M \to \mathbb{R}^{2n+1}$

Замечание 1. Верно и для некомпактных

2. $2n+1$ можно заменить на $2n$ ("трудная" теорема Уитни

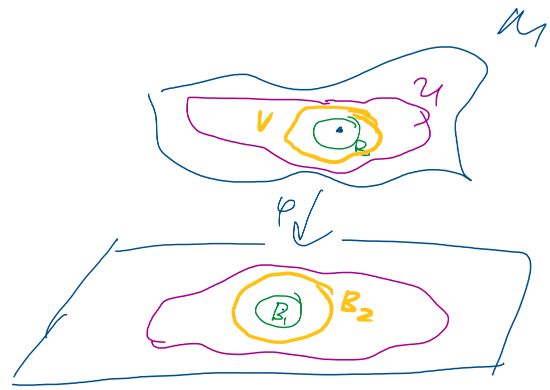
Вложение в R^N для большого N

12 апреля 2021 г. 21:27

Шаг 1 Докажем, что существует вложение $F: M \to \mathbb{R}^N$ если N достаточно велико.

① **Опр** Координатный шар в M – множество $B \subset M$ такое, что $\exists$ карта $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ т.ч.

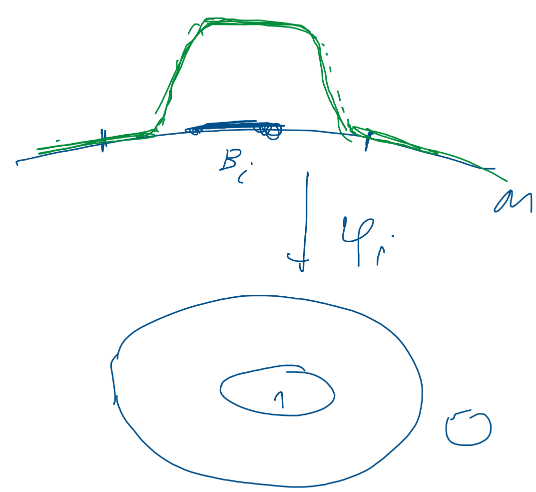
- $B \subset U$
- $\varphi(B) = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$
- $\boxed{\varphi(U) \supset \overline{B}_2(0)}$



Выберем конечное покрытие координатными шарами.

$\{B_i\}_{i=1}^k$.

Пусть
- φ_i – соотв. карты,
- $V_i = \varphi_i^{-1}(B_2(0))$
- $h_i: M \to \mathbb{R}$ гладкая т.ч.
  - $h_i|_{B_i} \equiv 1$
  - $h_i|_{M \setminus V_i} \equiv 0$



Строим $F: M \to (\mathbb{R}^{n+1})^k = \mathbb{R}^{k(n+1)}$

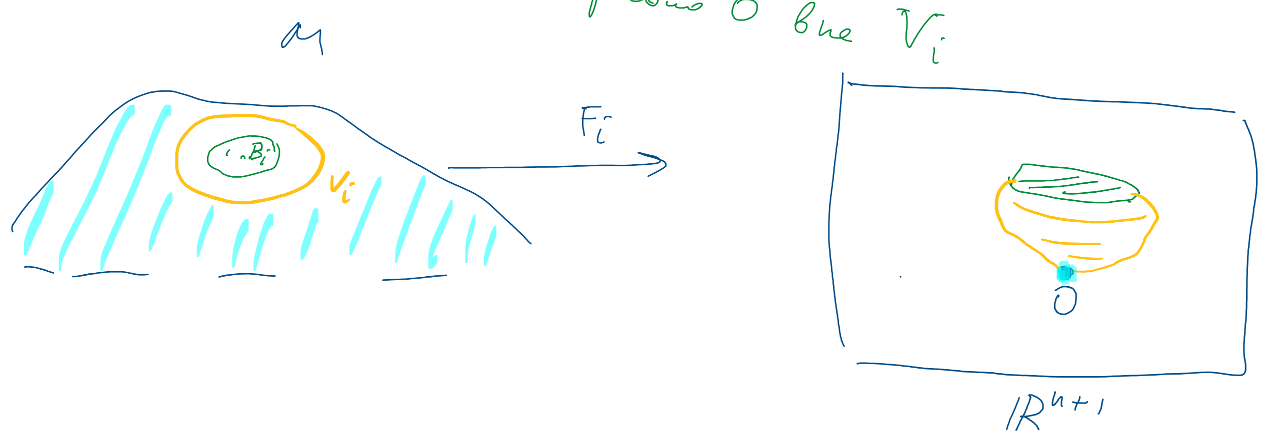
$F = (F_1, \dots, F_k)$ $\quad F_i: M \to \mathbb{R}^{n+1}$

Строим $\underline{F : M \to (\mathbb{R}^{n+1})^k} = \mathbb{R}^{k(n+1)}$

$F = (F_1, \dots, F_k)$, $F_i : M \to \mathbb{R}^{n+1}$

$F_i(x) = (\underline{h_i(x) \cdot \varphi_i(x)}, h_i(x))$ $\boxed{F_i = (h_i \varphi_i, h_i)}$

равно 0 вне V_i



Проверка, что F – вложение

① Погружение.

Фиксируем $\underline{x_0 \in M}$ и доказываем, что $\boxed{\ker d_{x_0} F = \{0\}}$.

$F(x) = (\dots, \underbrace{h_i(x)}_{=1 \text{ вблизи } x_0} \cdot \varphi_i(x), \dots)$ $\boxed{x_0 \in B_i}$

$d_{x_0} F = (\dots, \underbrace{d_{x_0} \varphi_i}, \dots)$.

имеет нулевое ядро

② Топологическое вложение

Так как M компактно,

Значит ...

Теорема: X - ~~хаусдорф~~ компакт, Y - хаусд.
$f : X \to Y$ - ...

Так как M компактно, достаточно проверить инъективность.

... X ~~хаусдорф~~ компакт, Y - хаусд.
$f: X \to Y$ - непрерывно и инъективно
$\Rightarrow f$ - топ. вложение

Пусть $x, y \in M$, $F(x) = F(y)$.

Пусть $\boxed{x \in B_i}$

$$F(x) = (\ldots, h_i(x) \cdot \varphi_i(x), h_i(x), \ldots)$$

$$\begin{cases} h_i(y) = h_i(x) = 1 \\ \cancel{h_i(y)} \cdot \varphi_i(y) = \cancel{h_i(x)} \varphi_i(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ y лежит "в той же карте" φ_i

$\Rightarrow \varphi_i(x) = \varphi_i(y) \Rightarrow \boxed{x = y}$

$\boxtimes$

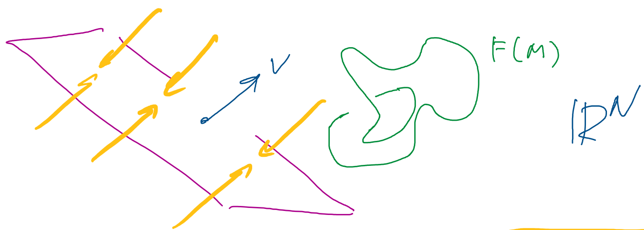
Понижение размерности

12 апреля 2021 г. 21:27

Шаг 2 Если $\exists$ вложение $F: M^n \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 2n+2$, то $\exists$ вложение $\hat{F}: M \to \mathbb{R}^{N-1}$

Обозначение Пусть $v \in \mathbb{R}^N$, $|v| = 1$ $(\Leftrightarrow v \in S^{N-1})$

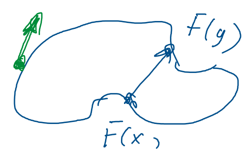
$P_v : \mathbb{R}^N \to v^\perp \simeq \mathbb{R}^{N-1}$ — ортогональная проекция вдоль v.



План Докажем, что $\exists\, v \in S^{N-1}$: $\boxed{P_v \circ F \text{ — тоже вложение.}}$

Пусть $\Sigma = \{$ такие v, для которых это неверно $\}$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$



$$\Sigma_1 = \left\{ v = \frac{F(x) - F(y)}{|F(x) - F(y)|},\ x, y \in M,\ x \neq y \right\} \qquad (P_v(x) = P_v(y))$$

$$\Sigma_2 = \{ v \in \operatorname{Im} d_x F,\ x \in M \}. \qquad (\ker d_x(P_v \circ F) \neq 0)$$

$$d_x(P_v \circ F) = P_v \circ d_x F$$

$$\boxed{\ker P_v = \operatorname{Lin}(v).}$$

$$\Sigma_1 = \operatorname{Im} G, \quad G : M \times M \setminus \Delta \to S^{N-1}$$

$$G(x,y) = \frac{F(x) - F(y)}{|F(x) - F(y)|} \qquad \Delta = \{(x,x) : x \in M\}$$

$$\Sigma_2 = \operatorname{Im} H, \quad H : TM \setminus 0 \to S^{N-1}$$

$$H(v) = \frac{df(v)}{\ldots}$$

$\Sigma_2 = \operatorname{Im} H, \quad H : (TM \setminus 0) \to S$

$$\boxed{H(v) = \frac{df(v)}{|df(v)|}.}$$

$>2n$

$G, H : (2n\text{-мерные}) \to S^{N-1}, \quad N - 1 \geq 2n + 1.$

$N \geq 2n + 2$

Цель Д-ть, что $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ — имеет $(N-1)$-мерную меру 0 в S^{N-1}

Опр M^n — гл. мн-е, $A \subset M$ — имеет меру 0, если $\forall$ карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$

$\varphi(A \cap U)$ — имеет меру Лебега равную 0 (в $\mathbb{R}^n$).

Отсюда следует теорема.

$\boxed{\checkmark}$

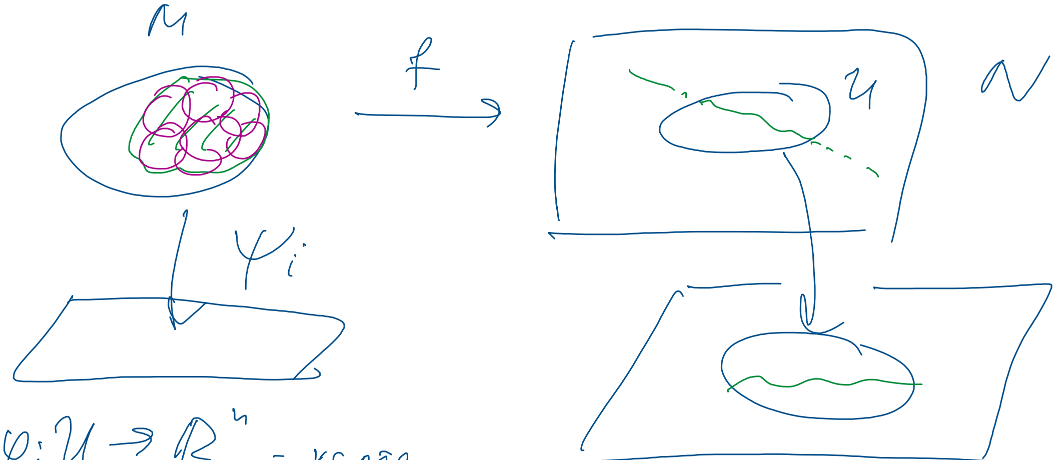
Лемма о нулевой мере образа

12 апреля 2021 г. 21:27

Лемма Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия, $m<n$
$f: M \to N$ — гладкое.

Тогда $f(M)$ имеет меру 0 в любой карте на N

Д-во



$\varphi_i: U \to \mathbb{R}^n$ — карта

Покроем $f^{-1}(U)$ картами φ_i (в M)

Дост. доказать, что $\mathrm{Im}\,(\underbrace{\varphi \circ f \circ \varphi_i}_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n})$ — меры 0

Сведём вопрос к отобр.-ю $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m<n)$
(f опр. на откр. мн-ве)

$$\boxed{f: U \to \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^m \text{ открыто}}$$

Покроем U счётным набором $\{Q_j\}$

покрыл и счётным набором $\{Q_j\}$

Q_j – замк. кубы.

Дост. д-ть, что $\forall j$ $f(Q_j)$ – меры 0.

$f\big|_{Q_j}$ – липшицево с константой

$$C = \max_{x \in Q_j} \|d_x f\|$$

$$Q_j \subset \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathcal{H}^n(Q_j) = 0$$

$$\mathcal{H}^n(f(Q_j)) \leq C^n \cdot \mathcal{H}^n(Q_j) = 0.$$

$\|$

мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ $(f(Q_j))$.

$\boxed{Q_j}$

Ориентация - план

12 апреля 2021 г.   21:36

Напоминание: ориентация векторного пространства

Особый случай: размерность 0

Определения: пространство касательных базисов, ориентация гладкого многообразия, ориентируемые и неориентируемые многообразия

Примеры: сфера ориентируема, лист Мебиуса - нет.

Перенос ориентации вдоль пути

Теорема: 1. Для любого непрерывного пути и любого базиса в начальной точке существует непрерывное семейство базисов в точках пути.

2. Для двух таких непрерывных семейств, если базисы в начале одинаково ориентированы, то и в конце тоже.

Замечание: начальный базис семейства можно выбирать любым.

Определение: перенос ориентации вдоль пути.

Определение: дезориентирующий цикл.

Теорема: Многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда в нем нет дезориентирующих циклов.

Замечание: если многообразие ориентируемо и связно, то ориентаций ровно две.

Ориентирующее накрытие

Теорема. У связного неориентируемого многообразия есть двулистное накрытие, в котором накрывающее пространство связно и ориентируемо.

Следствие. Любое односвязное многообразие ориентируемо

Теорема. Петля - дезориентирующая тогда и только тогда, когда она размыкается при поднятии в ориентирующее накрытие.

Следствие: Если два пути гомотопны, то перенос ориентации вдоль них одинаков

Следствие: не-дезориентирующие циклы - подгруппа индекса 2 в фундаментальной группе

Определение

12 апреля 2021 г. 22:30

$\boxed{\text{Напоминание}}$ — ориентация векторного пр-ва.

Пусть V — конечномерное векторное пр-во над $\mathbb{R}$.

$\mathcal{B}(V)$ — множество всех его базисов

Базисы одинаково ориентированы, если

$\det$ (матрицы перехода) > 0

Ориентация V — отображение $\tau : \mathcal{B}(V) \to \{+1, -1\}$

т.ч. $\tau(B_1) \cdot \tau(B_2) = \operatorname{sign} \cdot \det$ (матрицы перехода от B_1 к B_2)

$\forall \; B_1, B_2 \in \mathcal{B}(V)$

Пусть M — гладкое многообр-е.

Обозначение: $\mathcal{B}(TM) = \bigcup\limits_{x \in M} \mathcal{B}(T_x M)$.

Замечание: $\mathcal{B}(TM) \subset \underbrace{TM \times TM \times \ldots \times TM}_{n \text{ раз}}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}(TM)$ имеет естественную топологию.

$\boxed{\text{Опр}}$ Ориентация M — непрерывное отображение

$\tau : \mathcal{B}(TM) \to \{\pm 1\}$ т.ч.

$\forall x \in M$ $\tau\big|_{\mathcal{B}(T_x M)}$ — ориентация на $T_x M$.

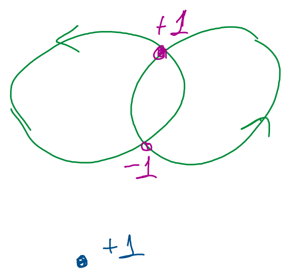
$\forall x \in M \quad \tau\big|_{B(T_x M)}$ — ориентация на $T_x M$.

Опр $\quad M$ — <u>ориентируемо</u>, если $\exists$ ориентация на M

M — <u>неориентируемо</u>, если $\nexists$ —//—

0-мерный случай $\quad V = \{0\}$.

$B(V) = \{\varnothing\}$.



① $\tau_+ : B(V) \to \{\pm 1\}$

$\tau(\varnothing) = 1$

② $\tau_- : B(V) \to \{\pm 1\}$

$\tau(\varnothing) = -1$.

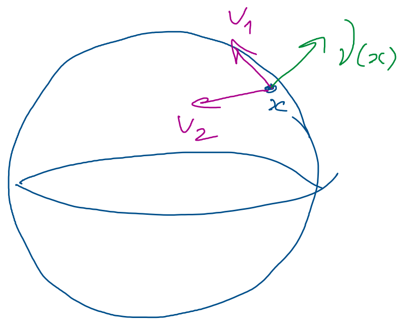
Примеры

12 апреля 2021 г. 22:30

Примеры (1) Сфера S^2 — ориентируема

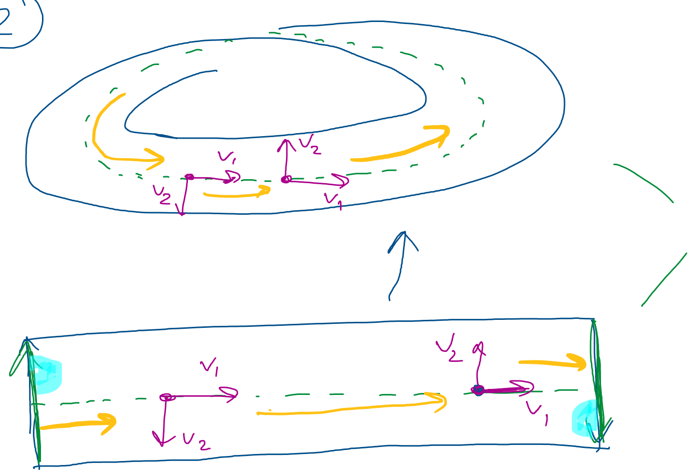
(2) Лист Мёбиуса — нет

Д-во (1)



$$\tau(v_1, v_2) := \operatorname{sign}[v_1, v_2, \nu(x)]$$

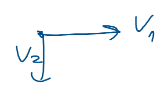
(2)



две картинки про одно и то же.

$B(t) \in \mathcal{B}(TM)$

$B(0) =$ 

$B(1) =$ 

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 9
