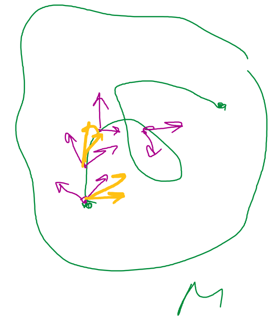
Перенос вдоль пути

12 апреля 2021 г.   22:31



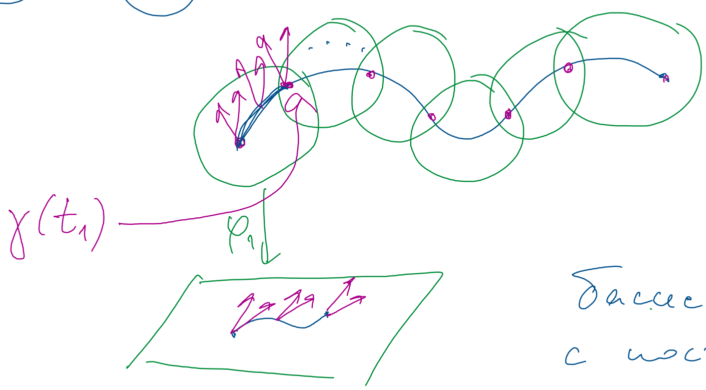
Теорема Пусть $\gamma: [a,b] \to M$ — непрерывный путь. Тогда

V (1) $\exists$ непрерывное сем-во базисов $B(t) \in \mathcal{B}(T_{\gamma(t)}M)$, $t \in [a,b]$

V (2) Оно $\exists$ для любого наперед заданного $B(0)$.

V (3) Если $\{B_1(t)\}$ и $\{B_2(t)\}$ — два таких сем-ва и $B_1(a)$ и $B_2(a)$ одинаково ориентированы, то $B_1(b)$ и $B_2(b)$ — тоже

Д-во (1) и (2)



базис $B_1(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ с пост. коорд в карте φ.

(3) $\{B_1(t)\}$ и $\{B_2(t)\}$

$B_2(t) = B_1(t) \cdot A(t)$ $A(t)$ — матрица перехода $n \times n$. непр. зависит от t.

$\Rightarrow \operatorname{sign} \det A(t) = \mathrm{const}$. $\square$

Опр перенос ориентации вдоль γ.

$p = \gamma(a)$ $q = \gamma(b)$.

Перенос ориентации вдоль γ –

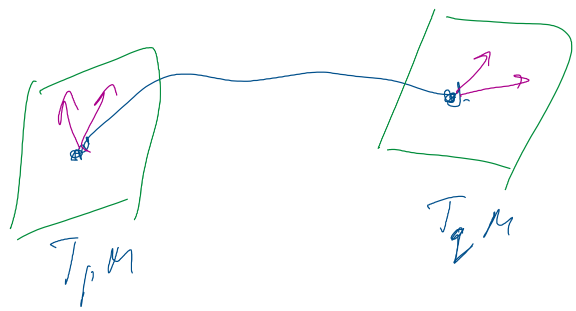
отобр. T_γ : {ориентации T_pM} $\longrightarrow$ {ориентации T_qM}.

τ_p – ориентация T_pM.

выбираем $B(a)$ – базис T_pM, $\tau(B(a))$:

продолжаем до непр. $\{B(t)\}$ как в теореме.

$\tau_q(B(b)) := \tau_p(B(a))$.

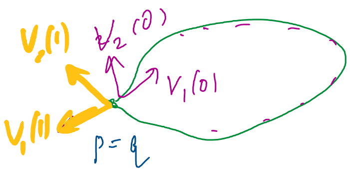


Перенос и ориентируемость

12 апреля 2021 г. 23:11

Опр Пусть $\gamma: [a,b] \to$ петля ("цикл"). т.е. $\gamma(a)=\gamma(b)$

γ — дезориентирующая, если перенос ориентации вдоль γ меняет ориентацию.



$$\boxed{T_\gamma(\tau_p) = -\tau_p}$$

Теорема M ориентируемо $\Longleftrightarrow$ в нем нет дезориентирующих циклов.

Д-во $\Rightarrow$) Дано: M ориентируемо (фикс $\tau: B(TM) \to \{\pm 1\}$)

$\gamma: [a,b] \to M$ — петля,

$\{B(t)\}$ — непр. сем-во базисов вдоль γ.

Надо. $B(a)$ и $B(b)$ одинаково ориентированы в T_pM ($p = \gamma(a) = \gamma(b)$).

Рассм ф-ю $t \mapsto \tau(B(t)) \in \{\pm 1\}$.

$\Rightarrow$ она const. $\Rightarrow \tau(B(a)) = \tau(B(b))$

$\Rightarrow B(a)$ и $B(b)$ одинаково ориентир

$\Leftarrow$ Дано: нет дезориент. петель.

Надо: построить ориентацию M.

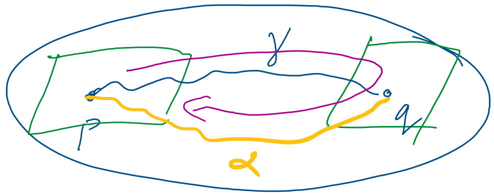
Можно считать, что M связно.

Надо: построить ориентацию ...

Можно считать, что M связно.

Фикс $p \in M$

и ориентацию τ_p на T_pM



Для $q \in M$

определим $\tau_q = T_\gamma(\tau_p)$,

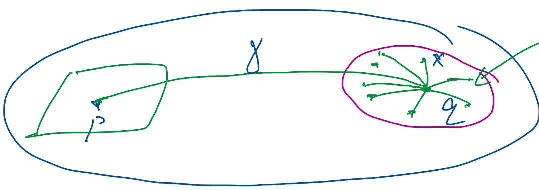
где γ — $\forall$ путь из p в q

1 шаг Не зависит от выбора γ.

$T_\gamma = T_\alpha$ т.к.

$$id = T_{\gamma\alpha^{-1}} = T_\alpha^{-1} \circ T_\gamma \implies T_\alpha = T_\gamma.$$

2 шаг Непрерывность $\{\tau_q\}_{q \in M}$



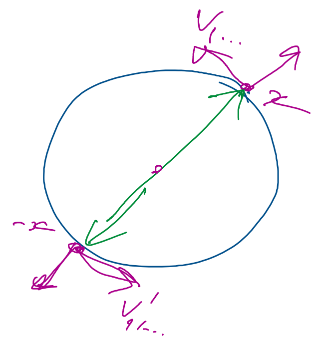
$\forall x$ ориентация как в нек-рой карте

Пример: RP^n

Monday, April 19, 2021 10:39 PM

Теорема $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо $\iff$ n нечетно.

① Общие наблюдения. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$



$$\mathbb{R}P^n = S^n/_{\sim}$$

$$f(x) = -x, \quad f: S^n \to S^n.$$

Утв. при $n \not\vdots\, 2$, f сохр. ориентацию на S^n

при $n \vdots 2$ — меняет.

$\boxed{-id: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \text{ сохр ор в } \mathbb{R}^{n+1} \iff n+1 \vdots 2}$

$-id$ переводит внешнюю нормаль в т. $x \in S^2$ во внешнюю нормаль в т. $-x$

② n нечетно, f — сохр ориентацию.

Определяем ориентацию в т. $q \in \mathbb{R}P^n$.

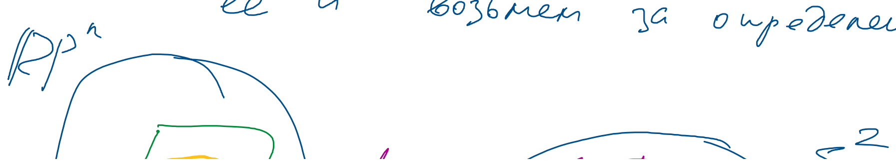
$\pi: S^n \to \mathbb{R}P^n$ — факторизация

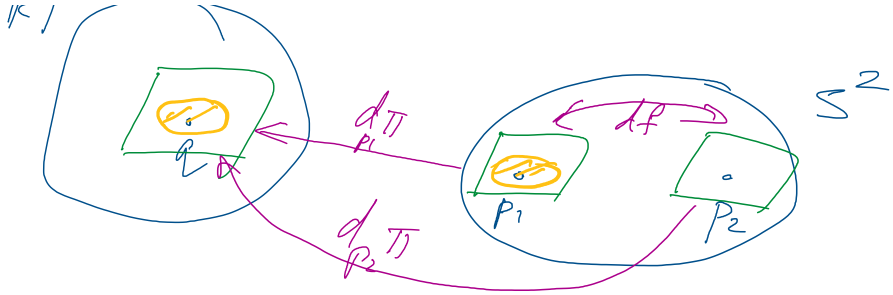
$\pi^{-1}(q) = \{p_1, p_2\} \subset S^n$, $\boxed{\pi \circ f = \pi}$

$\Rightarrow \exists$ ориентация на $T_q(\mathbb{R}P^n)$

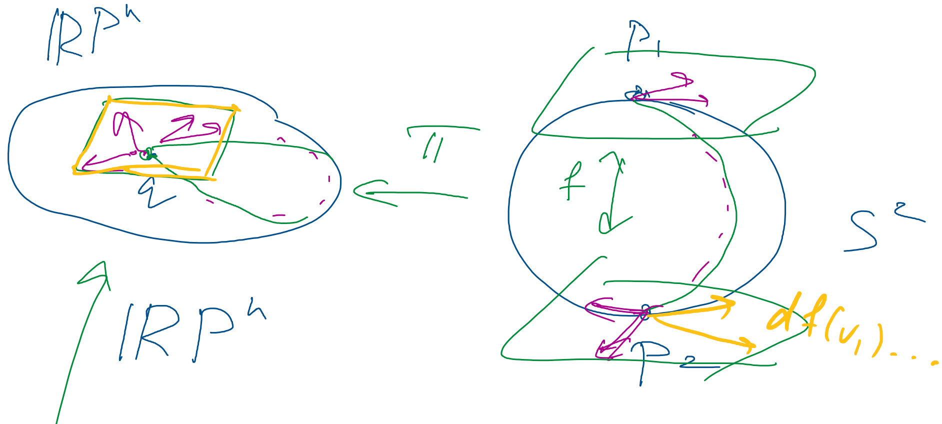
т.ч. $d_{p_1}\pi$ и $d_{p_2}\pi$ сохр. ориентацию.

её и возьмем за определение





③ n четно



дезориентир. цика.

Ориентирующее накрытие

12 апреля 2021 г. 23:13

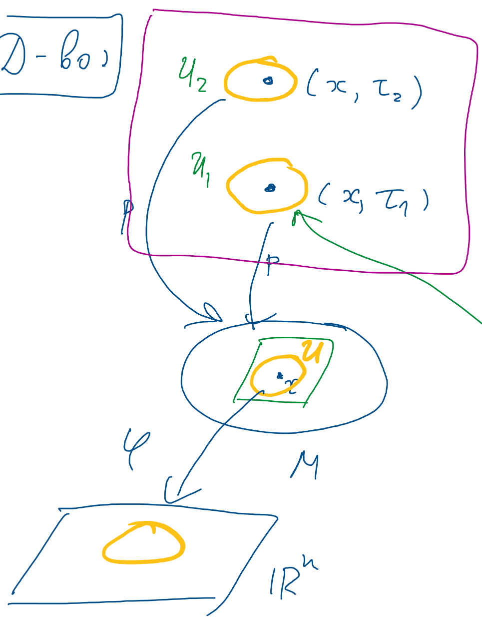
Теорема Пусть M – связно и неориентируемо. Тогда

$\exists$ 2-листное накрытие $p: \tilde{M} \to M$ т.ч.

- $\tilde{M}$ ориентируемо
- $\tilde{M}$ связно

Опр Это ориентирующее накрытие

Д-во



① Конструкция

$\tilde{M} = \{(x,\tau) : x \in M,$
τ – ориентация $T_x M\}$.

$p: \tilde{M} \to M$.

$p(x,\tau) = x$.

$U_1 = \{(y,\tau) : y \in U,$
τ – результат переноса τ_1 вдоль $U\}$.
U – область опр-я нек-рой карты

Топология на $\tilde{M}$ – наименьшая топол., в к-рой U_1 и U_2 откр, $p|_{U_i}$ – непр.

Дифф. структура – такая что p – лок. диффео.

Карты в U_1 и U_2 – $\boxed{\varphi \circ p|_{U_i}}$

② $\tilde{M}$ ориентируемо.

$T \tilde{M} = (dp)^*$

(2) $\tilde{M}$ ориентируемо.

Опр ориентацию на $T_{(x,\tau)}\tilde{M} = (dp)^{*}\tau$.

$$dp = d_{(x,\tau)}p : T_{(x,\tau)}\tilde{M} \to T_x M$$

линейный изоморфизм.

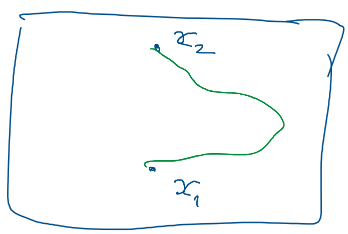
$$\tau : \mathcal{B}(T_x M) \to \{\pm 1\}.$$

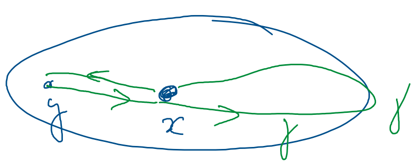
$$(dp)_* : \mathcal{B}(T_{(x,\tau)}\tilde{M}) \to \mathcal{B}(T_x M).$$

$$\tau'(B) = \tau_M((dp)_*(B))$$

базис наверху

(3) $\tilde{M}$ связно





γ – дезориентирующий,

$\tilde{\gamma}$ – поднятие γ

$\Rightarrow$ $\tilde{\gamma}$ не замкнута.

Зам. M связно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall$ точки y $\exists$ дезориент. цикл с началом y. ☒

Односвязность и ориентируемость

13 апреля 2021 г. 1:41

$\boxed{\text{Следствие}}$ M односвязно $\Rightarrow$ M ориентируемо.

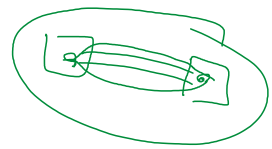
Перенос ориентации и поднятия

13 апреля 2021 г. 1:46

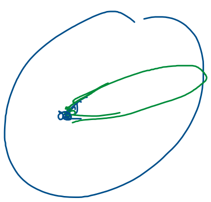
Задача

1. Петля в M – дезориентирующая $\Longleftrightarrow$ она размыкается при поднятии в ориентирующее накрытие

2. Для гомотопных путей перенос ориентации одинаков.



3. Пусть M связно и неориентируемо. Тогда не дезориентирующие циклы образуют подгруппу индекса 2 в



Многообразия с краем - план

19 апреля 2021 г. 18:14

Определение, примеры, свойства

Определение: гладкость функции, определенной на не открытом множестве.
Определение: Гладкое многообразие с краем размерности n

Свойства:
1. Край замкнут, он является (n-1)-мерным гладким многообразием без края.
2. Внутренность открыта, она является n-мерным многообразием без края.
3. Произведение многообразия с краем и многообразия без края - многообразие с краем.

Пример: подуровень или надуровень регулярного значения гладкой функции.

Теорема о воротнике (без доказательства).

Касательное пространство, ориентация

Определение: касательное пространство к M в точке края.
Замечание: TM - тоже многообразие с краем.

Теорема: край ориентируемого многообразия ориентируем.
Доказательство: каноническая ориентация края.

Подмногообразия

Напоминание: подмногообразия в случае без края.
Определение: подмногообразие - образ вложения.

Определение: правильно вложенное подмногообразие.
Свойство: для правильно вложенного многообразия край равен пересечению подмногообразия с краем объемлющего.

Теорема: прообраз дважды регулярного значения - правильно вложенное подмногообразие.

Определения

19 апреля 2021 г. 20:06

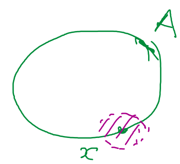
Опр (гладкость функции с не открытой областью определения)

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}^m$.

f — гладкое, если оно локально гладко продолжимо, т.е.

$\forall x \in A \ \exists$ окр-ть $U \ni x$ в $\mathbb{R}^n$ и

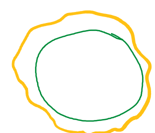
$\tilde{f}: U \to \mathbb{R}^m$: $\tilde{f} \in C^\infty$, $\tilde{f}|_{A\cap U} = f|_{A \cap U}$



Замечание 1. Аналогично определяется для случая $A \subset M$, где M — гладкое мног-е

2. Определение согласовано с гладкостью на подмногообразии

Задача Из локальной гладкой продолжимости следует глобальная: $\exists$ открытое $U \supset A$ и $\tilde{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{f} \in C^\infty$, $\tilde{f}|_A = f$.



Опр (гладкое многообразие с краем).

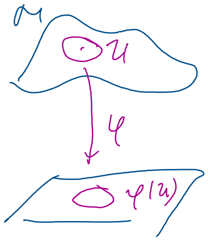
Гладкое n-мерное многообразие с краем — $(M, \partial M, \text{макс. атлас})$

край

- Топологическое пр-во M
- Замкнутое мн-во $\partial M \subset M$ — край
- Максимальный атлас из $\boxed{\text{гладко согласованных}}$ карт двух видов:

карт двух видов:

(1). $\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, где $U \subset M \setminus \partial M$

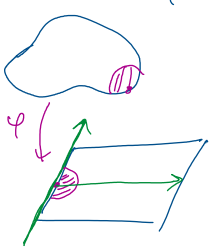


$\varphi(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, φ – гомеоморфизм между U и $\varphi(U)$.

(все как в определении гладкого многообразия.)

$\boxed{\text{покрывают } M \setminus \partial M}$

(2) $\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n_+ := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$



$\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ $(=: \partial\mathbb{R}^n_+)$.

U открыто в M, U - гомеоморфизм на $\varphi(U)$

$\boxed{\text{покрывают окрестность } \partial M \text{ в } M}$

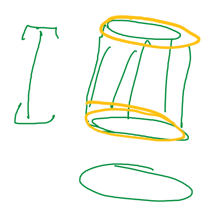
Дальше надо повторять всю теорию.
Но мы не будем ... Почти все – так же

Свойства

1) ∂M – гладкое многообразие без края размерности $n-1$

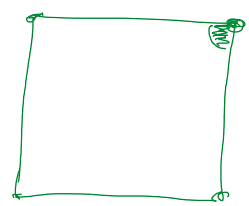
2) $M \setminus \partial M$ (внутренность) – гладкое мн-е без края размерности n.

3) Произведения:
если M – многообразие с краем, N – без края, (гладкие)
то $M \times N$ - гладкое мн-е с краем

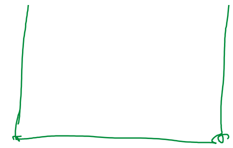


$$\partial(M \times N) = (\partial M) \times N$$

Зам Если M и N оба с краем, то $M \times N$ – "с краем и углами"
– не является гладким многообразием



$\boxed{\text{Зам}}$ Если M и N обе с краем, то $M \times N$ — "с краем и углами"



— не является гладким многообразием с краем

Конец лекции 10