План

3 мая 2021 г. 18:46

$\boxed{\text{Формулировка}}$ M^m, N^n – гладкие многообразия

$f: M \to N$, $f \in C^\infty$

$\Sigma := \{x \in M : \operatorname{rank} d_x f < n\}$ – множество не регулярных точек

Цель: $f(\Sigma)$ имеет меру 0 в любой карте N

Общий план: индукция по $m+n$.

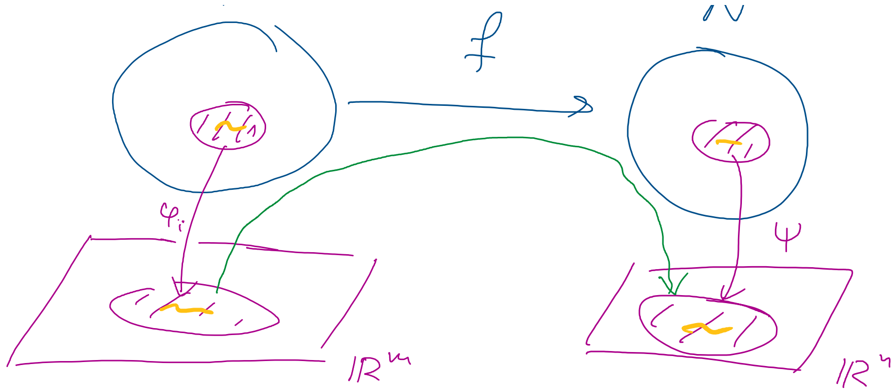
База: $m<n$ (было) или $n=0$ $(\Sigma = \varnothing)$

Предварительный шаг: сводим к случаю

$M = U \subset \mathbb{R}^m$ (открытое), $N = \mathbb{R}^n$

Т.е. если теорема верна для областей в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, то она верна и для многообразий размерностей m и n

$\boxed{\text{Д-во}}$ M имеет счетную базу $\Rightarrow$ M покрывается счетным набором карт φ_i (т. Линделёфа) $\Rightarrow$ $f(\Sigma)$ – счетное объединение аналогичных множеств для $f \circ \varphi_i^{-1}$



N можно заменить на одну карту из-за формулировки "в любой карте"

$$\boxed{\text{Теперь рассматриваем } f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n}$$

Но предположение индукции – для многообразий!

$\boxed{\text{План}}$ Разобьем Σ на подмн-ва $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, где

$$\Sigma_1 = \{ x \in \Sigma : d_x f \neq 0 \}.$$

$\Sigma_2 = \{ x \in U : d_x f = 0$, но $\exists$ старшая производная

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, \text{ к-рая } \neq 0 \text{ в точке } x \}.$$

$\Sigma_3 = \{ x \in U :$ все производные в т. x равны $0 \}$

Докажем, что $f(\Sigma_1)$, $f(\Sigma_2)$, $f(\Sigma_3)$ имеют меру 0

Третье множество

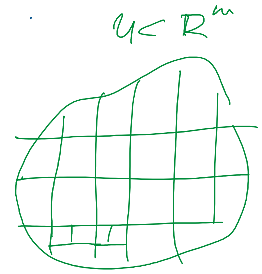
3 мая 2021 г. 18:46

$f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Докажем, что $f(\Sigma_3)$ имеет меру 0

$\Sigma_3 = \{x \subset U,$ все производные в точке x равны $0\}$

① Покроем U счетным набором замкнутых кубов



$A_i \subset U$, $U = \bigcup K_i$

Достаточно доказать, что $\forall i \ f(\Sigma \cap A_i)$ — меры 0.

Перемасштабировав, достаточно доказать для куба $A = [0,1]^m$.

Итак дано гладкое $f: [0,1]^m \to \mathbb{R}^n$,

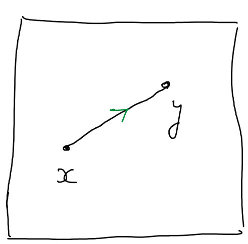
$\Sigma_3 = \{x \in [0,1]^m$: все производные f в $x = 0\}$

Надо: $f(\Sigma_3)$ — меры 0 в $\mathbb{R}^n$

② Зафиксируем большое $k \in \mathbb{N}$ ($k > \frac{m}{n}$ достаточно).

Из формулы Тэйлора $\exists\, C > 0$

(*) $\boxed{|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^k}$ $\forall x \in \Sigma_3$ $\forall y \in [0,1]^m$



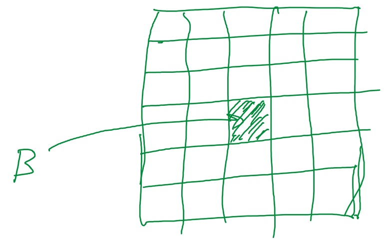
Так как в т. x $d_x f = 0, d_x^2 f = 0, \dots, d_x^{k-1} f = 0$ и $\|d^k f\|$ ограничена на $[0,1]^m$.

③ Выберем $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in 1/\mathbb{N}$) и разобьем $[0,1]^m$ на ε^{-m} кубиков с ребром ε.

③ Выберем $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 1/N$) и разобьем $[0,1]^m$ на ε^{-m} кубиков с ребром ε.

Пусть B – один из кубиков, такой, что

$$\boxed{B \cap \Sigma_3 \neq \varnothing}$$



Тогда из $(*)$

$$\operatorname{diam} f(B) \leq 2C \operatorname{diam}(B)^k \leq C_1 \cdot \varepsilon^k.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Vol}_n f(B) \leq (\operatorname{diam} f(B))^n \leq C_2\, \varepsilon^{kn}$$

Сложим по всем таким кубикам:

$$\operatorname{Vol}_n(f(\Sigma_3)) \leq \underbrace{\varepsilon^{-m}}_{\text{число кубиков}} \cdot \underbrace{C_2\, \varepsilon^{kn}}_{\text{оценка для одного кубика}} = C_2\, \varepsilon^{kn-m}$$

n, m – фиксированы, $\boxed{k > m/n} \Rightarrow kn - m > 0$

$\Rightarrow \varepsilon^{kn-m} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Vol}_n(f(\Sigma_3)) = 0}$$

Второе множество

3 мая 2021 г. 18:46

Докажем, что $f(\Sigma_2)$ имеет меру 0

$f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\Sigma_2 = \{x \in U : d_x f = 0$, не все производные $0\}$.

$\boxed{\text{Лемма}}$ Σ_2 покрывается счетным набором подмногообразий $M_1, M_2, \ldots \subset \mathbb{R}^m$ размерности $m-1$.

Вывод из леммы: $f(\Sigma_2) = \bigcup_i \underline{f(\Sigma_2 \cap M_i)}$ – счетное объединение.

$\Sigma_2 \cap M_i \subset \{$нерегулярные точки $f|_{M_i}\}$.

Применяем индукционное предположение к $\underline{f|_{M_i} : M_i \to \mathbb{R}^n}$ $\square$

$\boxed{\text{Док-во леммы}}$ Пусть $\underline{f = (f_1, \ldots, f_n)}$, $f_i : U \to \mathbb{R}$.

Для $x \in \Sigma_2$ определим и выберем

$\underline{k = k(x)} = \min k : d_x^k f \neq 0$.

$j, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ – такие, что $\boxed{\dfrac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x) \neq 0}$.

Рассмотрим

$\underline{\Sigma_{2,k,j,i_1,\ldots,i_k}} = \{x \in \Sigma_2 :$ для них $k = k(x)$ и подходят эти индексы $\}$

Таких множеств – счетный набор.

Достаточно доказать, что

Таких множеств — счётный набор.

Достаточно доказать, что каждое лежит в подмногообразии.

Зафиксируем $k, j, i_1, \ldots, i_k$.

Определим $F: U \to \mathbb{R}$

$$\boxed{F(x) = \frac{\partial^{k-1} f_j}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{k-1}}}}$$

$F: U \to \mathbb{R}$

Искомое многообразие

$$M_{k,j,i_1,\ldots} = \underbrace{\{x \in U : d_x F \neq 0\}}_{U_1} \cap$$

$$\cap \{x \in U : F(x) = 0\}$$

открытая область

прообраз регулярного значения 0 для $F|_{U_1}$

Первое множество

3 мая 2021 г. 18:46

Докажем, что $f(\Sigma_1)$ имеет меру 0

$f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\Sigma_1 = \{x \in U : d_x f \neq 0$ но $\operatorname{rank}(d_x f) < n\}$

Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i : U \to \mathbb{R}$.

$$\Sigma_{1j} = \{x \in \Sigma_1 : d_x f_j \neq 0\}.$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_{11} \cup \Sigma_{12} \cup \dots \cup \Sigma_{1n}$$

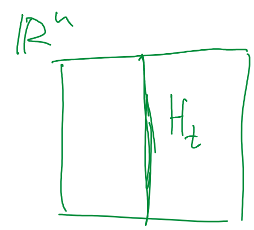
Достаточно доказать, что $f(\Sigma_{1j})$ имеет меру 0 $\forall j$

$\boxed{\text{Н.У.О. } j = 1}$ $f(\Sigma_{11})$ – меры 0.

$\Sigma_{11} \subset U_1 := \{x \in U : d_x f_1 \neq 0\}$. ← открыто.

U_1 открыто, рассматриваем только $f|_{U_1}$

Для $t \in \mathbb{R}$ положим $H_t = \{y \in \mathbb{R}^n : y_1 = t\}$



План Докажем, что

$f(\Sigma_{11}) \cap H_t$ имеет $(n-1)$-мерную меру 0 в гиперпл-ти H_t

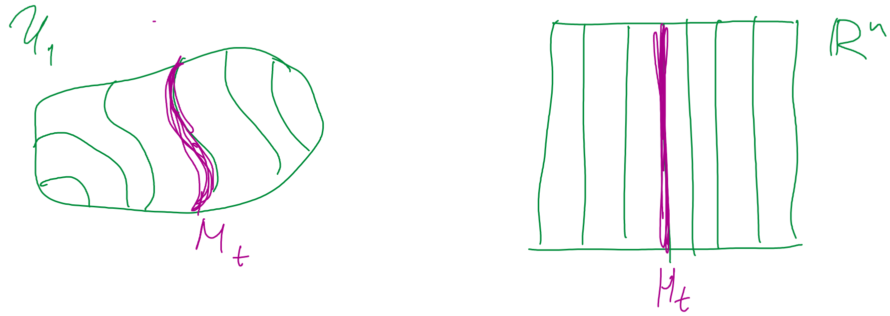
Отсюда по теореме Фубини последует, что $f(\Sigma_{11})$ имеет меру 0 в $\mathbb{R}^n$.

Положим $M_t = f_1^{-1}(t) \cap U_1 = f^{-1}(H_t) \cap U_1$.

Положим $M_t = f_1^{-1}(t) \cap U_1 = f^{-1}(H_t) \cap U_1$

$M_t = (f_1|_{U_1})^{-1}(t)$, t — регулярное значение

$\Rightarrow$ M_t — гладкое подмн-е размерности $m-1$



$M_t \to H_t$

$$f(\Sigma_{11}) \cap H_t = f(\Sigma_{11} \cap M_t).$$

Докажем, что $\Sigma_{11} \cap M_t \subset \{$ нерегулярные точки $f|_{M_t} \}$

Отсюда и т. Сарда (индукционное предположение) для $\boxed{f|_{M_t} : M_t \to H_t}$ последует требуемое.

От противного. Пусть $\exists x \in \Sigma_{11} \cap M_t$

x — регулярная для $f|_{M_t}$

(со значением в H_t).

x - регулярная для $f|_{M_t} \Rightarrow \mathrm{Im}\, d_x f \supset \underbrace{T_{f(x)} H_t}_{\text{вертикальное } \mathbb{R}^{n-1} = H_0}$

$$\boxed{\mathrm{Im}\, d_x f = H_0 \equiv T_{f(x)} H_t}$$

$d_x f_1 \neq 0 \Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^m : d_x f_1(v) \neq 0$

$$d_x f_1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\exists v \in \mathbb{R}^m} : \underline{d_x f_1(v) \neq 0}$$

! $\Rightarrow$ $d_x f(v)$ имеет не нулевую 1-ю координату.

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\, d_x f \supset \underbrace{TH_t}_{\text{вертикальная гиперпл-во}} + \underbrace{d_x f(v)}_{\nparallel \text{ верт. гиперпл.-ти}} = \mathbb{R}^n.$$

$\Rightarrow$ x — регулярная точка для f.

$\Rightarrow$ $x \notin \Sigma$ — противоречие.

Теорема доказана! $\blacksquare$

Добавление: про бэровские категории

3 мая 2021 г. 18:46

$\boxed{\text{Опр}}$ X — топ. пр-во

$A \subset X$ нигде не плотно, если $\operatorname{Int} Cl(A) = \emptyset$.

Теорема Бэра X — полное метр. $(X = \mathbb{R}^n)$, то

(1) $X \neq$ счетное объединение нигде не плотных

$\Uparrow$

(2) $B =$ (счетное объединение нигде не плотных)

$\Rightarrow \operatorname{Int} B = \emptyset$.

Опр X — бэровское, если для него верно (2)

Примеры: 1) Полные метрические

2) Многообразия.

Опр X — бэровское пр-во, $A \subset X$.

A — множество I категории по Бэру,

если оно — счетное объединение

нигде не плотных множеств

A — II категории, если неверно, что оно I категории.

Св-ва: 1) Счетное $\cup$ мн-в I кат — снова I кат.

2) (в бэровском пр-ве).

мн-во I категории имеет $\emptyset$ внутренность.

Зам Дополнение мн-ва I категории содержит счетное пересечение открытых всюду плотных (и наоборот)

Теорема M^m, N^n – гл. мн-я.

$f: M \to N$, $f \in C^\infty$.

$\Sigma \subset M$, $\Sigma = \{$нерегулярные точки$\}$.

Утв. $f(\Sigma)$ – мн-во I категории в N.

Можно считать что $N = \mathbb{R}^n$

Д-во (1) $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, K_i – компакты.

(2) Σ – замкнутое мн-во.

(1) и (2) $\Rightarrow$ $f(\Sigma) = \bigcup_i \underbrace{f(\Sigma \cap K_i)}_{\text{компакт.}}$

$f(\Sigma)$ – счетное $\cup$ компактов меры 0.

Очевидно: замкнутое мн-во A меры 0 в $\mathbb{R}^n$ – нигде не плотно.

$\Updownarrow$

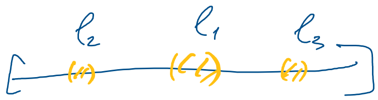
$Int(A) = \varnothing$.

Итак, $f(\Sigma)$ — счётное объединение замк. мн-в меры 0 $\Rightarrow$ I категории. $\boxtimes$

Примеры: Бывает

1) Мн-во меры > 0, но I категории.
2) Мн-во меры 0, но не I категории.

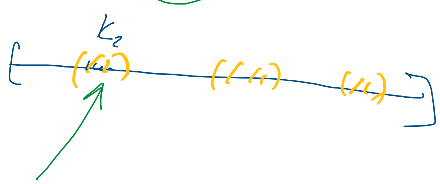
① Мн-во типа Канторового



$\sum l_i < 1$

K_0 — дополнение всех отрезков

②



K_2 — "копия K_1"

K_0 строим так, что сумма мер $= 1$.

$[0,1] - \bigcup K_i$ — меры 0.

его дополнение — I категории

$\boxtimes$.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 12