Степень отображения - план

10 мая 2021 г. 14:54

Определение. Степень и степень mod 2 гладкого отображения над точкой deg (f;q).

Теорема. Пусть M компактно, N связно, размерности равны, выбраны ориентации, f:M->N гладкое. Тогда

1. deg(f;q) не зависит от выбора точки регулярного значения q из N. Как следствие, определена степень отображения deg f.
2. Если отображения гладко гомотопны, то их степени равны.

То же верно для степени mod 2 в неориентированном случае.

1 шаг доказательства:
Лемма: Существует окрестность точки q, в которой все точки - регулярные значения, и степени над которыми равны степени над q. То же верно для степени mod 2.

2 шаг доказательства:

Теорема: Пусть M - край некоторого компактного ориентированного X, причем ориентация M совпадает с канонической ориентацией края X. Предположим, что f продолжается до гладкого F их X в M. Тогда степень f над любой регулярной точкой равна 0.
То же верно для степени mod 2 без ориентаций.

3 шаг доказательства:

Следствие: Если два отображения гладко гомотопны, то их степени над любым общим регулярным значением равны.

4 шаг доказательства:

Лемма: Для любых двух точек из N существует диффеоморфизм, переводящий одну в другую, гладко гомотопный id, и (если N ориентируемо) сохраняющий ориентацию.

Отсюда следует теорема.

Одномерный случай

Теорема. Пусть M и N - окружность. Тогда степень f равна элементу фундаментальной группы, представляемому этим отображением (т.е. индексу соответствующего обхода окружности).

Свойства степени

1. Если степень не ноль, то отображение сюръективно.
2. В частности, если N не компактно, то степень любого f равна 0.
3. Степень композиции - произведение степеней.

Информация

Степень в непрерывной категории

Степень для многообразий с краем.

Определение

10 мая 2021 г. 18:19

Пусть M, N — гладкие многообразия, $\dim M = \dim N = n$

$f: M \to N$ — гладкое отображение

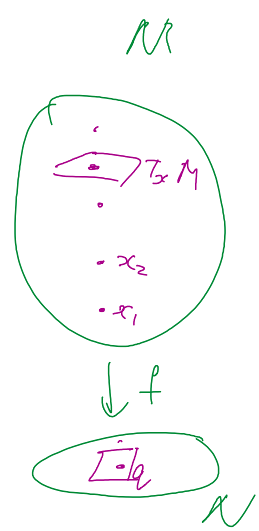
Важное предположение: M компактно, N связно.

Опр (степень отображения).

Пусть M и N ориентированы (т.е. ориентируемы и выбраны ориентации).

Пусть $q \in N$ — регулярное значение f.

Определим $\deg(f;q)$ — степень f над q:



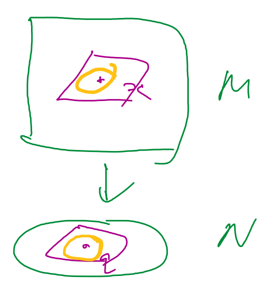
$$\boxed{\deg(f;q) = \sum_{x\in f^{-1}(q)} \operatorname{sign} d_x f} \in \mathbb{Z}$$

где $\operatorname{sign} d_x f = \begin{cases} +1, & \text{если } d_x f: T_xM \to T_qN \text{ сохраняет ориентацию} \\ -1, & \text{если меняет.} \end{cases}$

Замечание $\surd 1$. $\forall x \in f^{-1}(q)$ — регулярная точка.

$\Rightarrow$ $d_x f$ — биекция между T_xM и T_qN

$\Rightarrow$ $\operatorname{sign} d_x f \in \{\pm 1\}$



$\surd 2$. Из т. об обратной функции

$f^{-1}(q)$ — дискретное множество

Т... M ... $\Rightarrow$ $|f^{-1}(q)| < \infty$

Так как M компактно $\Rightarrow$ $|f^{-1}(q)| < \infty$

$\Rightarrow$ В сумме в определении конечное число слагаемых

$\boxed{\text{Опр}}$ (степень mod 2)

Теперь M и N не обязательно ориентированы.

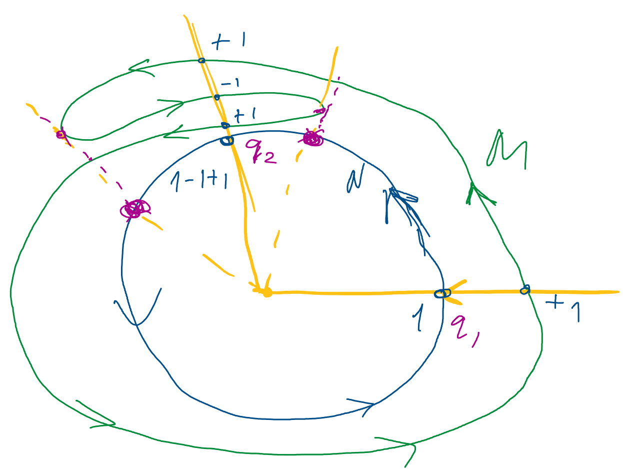
Определяем $\deg_2(f;q)$ — степень f mod 2 над q.

$$\boxed{\deg_2(f;q) = |f^{-1}(q)| \bmod 2} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

($q \in N$ — регулярное значение)

Пример $f: S^1 \to S^1$:

(радиальная проекция из зеленой S^1 в синюю)



$\boxed{\text{Теорема}}$ 1. $\deg(f;q)$ не зависит от выбора регулярного значения q.

То же для $\deg_2$

То же для $\deg_2$

Опр 1'. Как следствие (с помощью теоремы Сарда) определена степень $\deg f = \deg(f; q)$ $\forall q$ - рег. зн.
То же для $\deg_2$

2. Если $f, g: M \to N$ гладко гомотопны, то $\deg f = \deg g$. То же для $\deg_2$

(Определение: гладко гомотопны — $\exists$ гомотопия $H: M \times [0,1] \to N$, $H \in C^\infty$)

Доказательство — следующие несколько страниц

Локальная постоянность

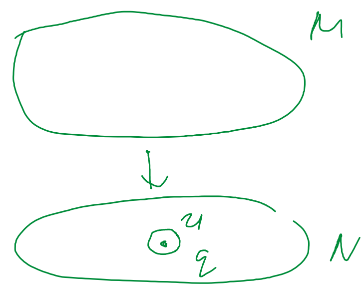
10 мая 2021 г. 18:19

$\boxed{\text{Лемма}}$ Пусть $q \in N$ — регулярное значение f.

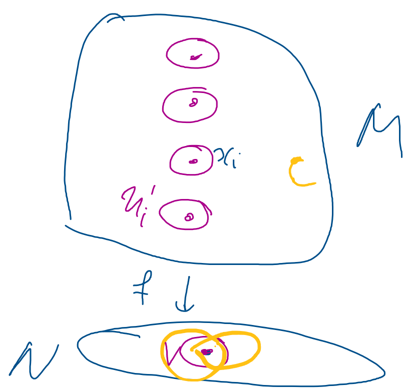
Тогда $\exists$ окрестность $V \ni q$ т.ч. $\forall q_1 \in V$

1. q_1 — регулярное значение f
2. $\deg(f; q_1) = \deg(f; q)$

То же для $\deg_2$



$\boxed{\text{Д-во}}$



$f^{-1}(q) =: \{x_1, \dots, x_m\}$

$\forall i$ $\exists$ окр. $U_i \ni x_i$ т.ч.

$f|_{U_i}$ — диффеом-м из U_i в $f(U_i)$

$V := \bigcap \underbrace{f(U_i)}_{\text{откр.}} \setminus f(\underbrace{M \setminus \bigcup U_i}_{\text{комп}})$

$U_i' = U_i \cap f^{-1}(V)$

∎

Степень сужения на край

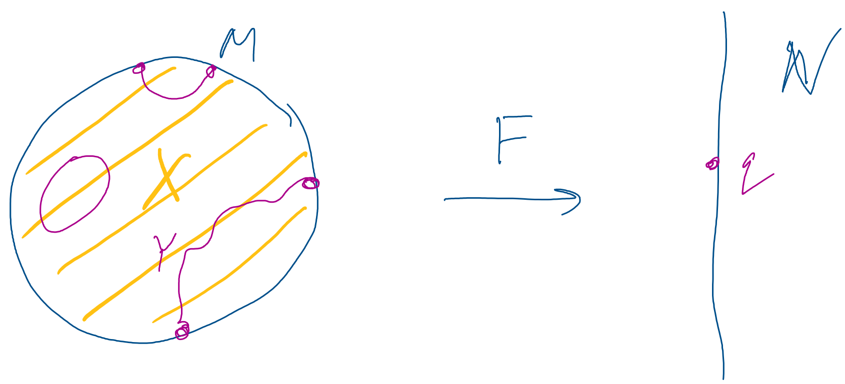
10 мая 2021 г. 18:19

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $M = \partial X$, где X^{n+1} — компактное с краем, X ориентировано, ориентация M — каноническая ориентация края. (ориентации M и X согласованы!)

Пусть $\exists$ гладкое $F: X \to N$ т.ч. $F|_M = f$

Тогда $deg(f; q) = 0$ $\forall$ рег. зн. $q \in N$

То же для deg_2



$\boxed{\text{Д-во}}$ 1. По предыдущей лемме и т Сарда, можно заменить q на близкую точку, к-рая регулярное значение для F. и f.

2. $Y := F^{-1}(q)$ — правильно вложенное 1-мерное подмногообразие в X.

$$\boxed{\partial Y = Y \cap \partial X = f^{-1}(q)}$$

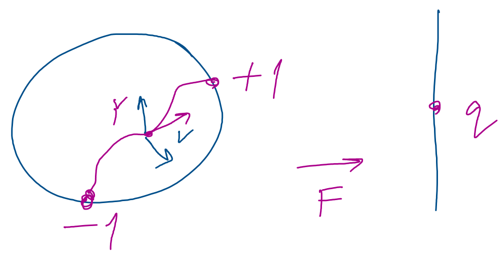
$$\boxed{\partial Y = Y \cap \partial X = f^{-1}(q)}$$

И ∂Y – чётное число концов отрезков.

$\Rightarrow$ Доказали для $\deg_2$

3. Разбиение с ориентацией

Цель:



У каждого отрезка $\operatorname{sign} df$ на концах разные $(+1$ и $-1)$

$\boxed{\text{Опр}}$ Каноническая ориентация $f^{-1}(q) = Y$

$x \in Y = f^{-1}(q)$

$v \in T_x Y = \ker d_x f.$

$$\tau_Y(v) := \tau_X(v, \underline{v_1, \dots, v_n}) \cdot \tau_N(\underbrace{d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_n)}_{\text{базис } T_q N})$$

$v, v_1, \dots, v_n$ – базис $T_x X$

① Корректность $v_1, \dots, v_n \rightsquigarrow v_1', \dots, v_n'$

$$(v, v_1', \dots, v_n') = (v, v_1, \dots, v_n)\, A.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad \det B = \det A$$

$$(df(v_1'), \dots, df(v_n')) = (df(v_1), \dots, df(v_n)) \cdot B$$

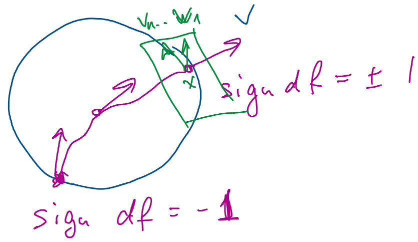
$$(df(v_1'),\dots,df(v_n')) = (df(v_1),\dots,df(v_n))\cdot B$$

② $\tau_Y(-v) = -\tau_Y(v)$. — очев

③ τ_Y — непр — очев.

$\boxtimes$

Утв.



$x \in \partial Y$.

$v \in T_x Y$, наружу. из X.

$v_1,\dots,v_n$ — положительный базис $T_x M$

$(M = \partial X)$

$$\underline{1} = \tau_{\partial X}(v_1,\dots,v_n) = \tau_X(v, v_1,\dots,v_n) = \tau_Y(v)\cdot \tau_N(df(v_1),\dots,df(v_n))$$

$\partial X \cong M$

выбор $v_1,\dots,v_n$.

кан. ориентация края

кан. ориентация прообраза

-1 на другом конце

1, т.к. это +-конец отрезка.

$\Rightarrow$ $d_x f : T_x M \to T_q N$ — сохраняет ориентацию

$\Rightarrow$ $\mathrm{sign}\, d_x f = +1$.

Аналогично, для начала отр-ка $\mathrm{sign}\, d_x f = -1$

$\boxtimes$

Гомотопическая инвариантность

10 мая 2021 г. 18:20

Следствие Пусть $f_0, f_1 : M \to N$ гладко гомотопны, $q \in N$ — регулярное значение для f_0 и f_1.

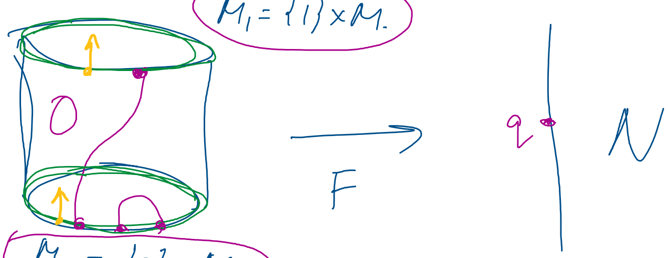
Тогда $\deg(f_0; q) = \deg(f_1; q)$.

Д-во Применим предыдущее к

есть каноническая ориентация

$X = [0,1] \times M$, $F : X \to N$ — гомотопия между f_0 и f_1

$M_1 = \{1\} \times M$ — копия M



$M_0 = \{0\} \times M$ — копия M с другой ориентацией.

$$\boxed{\begin{aligned} 0 = \deg(F|_{\partial X}; q) &= \deg(F|_{M_0}; q) + \deg(F|_{M_1}; q) \\ &= -\deg(f_0; q) + \deg(f_1; q) \end{aligned}}$$

$\boxtimes$

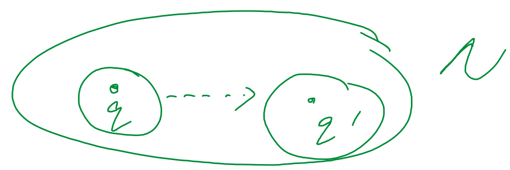
Транзитивность диффеоморфизмов

10 мая 2021 г. 18:20

Лемма Пусть N — связное гладкое мног-е., $q, q' \in N$.

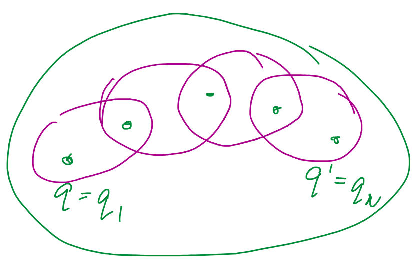
Тогда $\exists$ диффеоморфизм $G: N \to N$ т.ч.

1. $G(q) = q'$



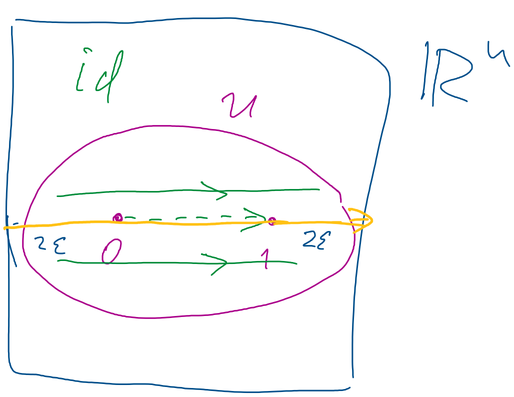
2. $G \sim id$ гладкая гомотопия
3. G сохраняет ориентацию (если N ориентировано)

Д-во



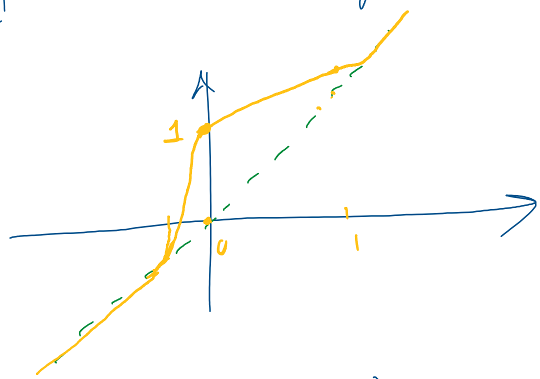
$\exists\ q_1 = q,\ q_2, \dots, q_N = q'$ т.ч. $\forall i$ q_i и q_{i+1} лежат в одном координатном шаре

$\Rightarrow$ Достаточно доказать для q и q' в одном таком шаре



Достаточно построить диффеоморфизм из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, тождественный вне U и переводящий 0 в 1.

и переводящий 0 в 1.



$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g' > 0$

$g(0) = 1$

$g(1) = 1 + \varepsilon$

$g = id$ на $(-\infty, -\varepsilon]$ и $[1 + 2\varepsilon, \infty)$.

$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \circlearrowleft \qquad G(x, y) = \big(h(y) \cdot g(x) + (1 - h(y)) \cdot x\,,\ y\big).$

$h : \mathbb{R}^{n-1} \to [0, 1]\,, \qquad h(0) = 1$

$h\big|_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus B_\varepsilon(0)} = 0$

$\blacksquare$

Конец доказательства: независимость от точки

10 мая 2021 г. 21:32

Доказательство главной теоремы

$f: M \to N$, $q, q' \in N$ — регулярные значения

Докажем, что $\deg(f; q) = \deg(f; q')$

Пусть $g: N \to N$ — диффеоморфизм, $g \sim id$, $g(q) = q'$

$id \sim g \Rightarrow f \sim g \circ f$

$\checkmark \Rightarrow \deg(g \circ f; q') = \deg(f; q')$ из гомотопической инвариантности.

С другой стороны

$(g \circ f)^{-1}(q') = f^{-1}(g^{-1}(q')) = f^{-1}(q)$

Ориентации те же

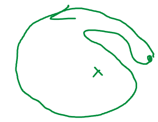
$\Rightarrow \deg(g \circ f; q') = \deg(f; q)$

$\boxtimes$

Одномерный случай

10 мая 2021 г.   18:20

$\boxed{\text{Напоминание}}$ Для петли $\gamma: [0,1] \to S^1$



определен индекс — "число оборотов вокруг 0" — элемент фундаментальной группы $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $f: S^1 \to S^1$ гладкое.

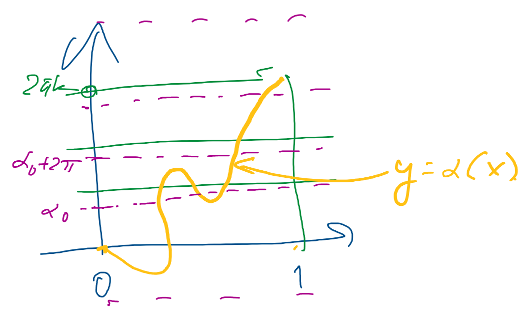
Тогда $\deg f =$ индекс соответствующей петли $\gamma(t) = f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

$\boxed{\text{Д-во}}$ $\alpha(t)$ — непр. аргумент $\gamma(t)$. $f(\cos, \sin) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$

индекс $\gamma = k$, $(k \geq 0)$.

Можно считать, что

$\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 2\pi k$



$q = (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0) \in S^1$.

$\alpha_0, \alpha_0 + 2\pi, \ldots, \alpha_0 + (k-1)2\pi$ — вносят вклад 1 в $\deg f$

Остальные вносят вклад 0

$\boxed{\text{ч.т.д.}}$

Некоторые свойства степени

10 мая 2021 г.   18:20

Св-ва:

① Если $\deg f \neq 0$, то $f(M) = N$

Д-во: от противного.

$\exists q \in N \setminus f(M) \Rightarrow \deg(f;q) = 0$

② Если N не компактно, то $\deg f = 0$

$(\forall f: M \to N)$

③ $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K$ (Упр).

$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.

Дальнейшая информация

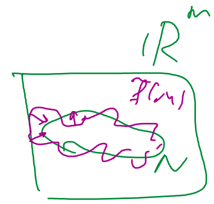
10 мая 2021 г. 18:21

① Негладкий случай. Пусть $f: M \to N$ непрерывно

1. Т. о сглаживании.

   Сколь угодно близко к f $\exists$ гладкое $\tilde{f}: M \to N$

2. Достаточно близкие отобр-я из M в N гомотопны



3. (Т. о сглаживании гомотопии)

   Если два гладких отображения из M в N гомотопны, то они гладко гомотопны.

4. Отсюда можно определить $\deg f$ для непрерывного f : $\deg f = \deg \tilde{f}$.

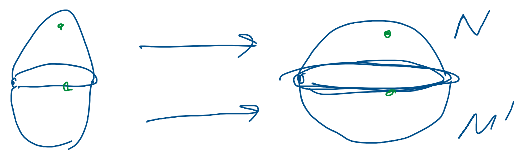
Это определение корректно и гомотопически инвариантно

(2) Степень можно определить для многообразий с краем. M, N и отображений f таких, что $f(\partial M) \subset \partial N$.

Все аналогично.

Кроме того, $\boxed{\deg(f) = \deg f\big|_{\partial M \to \partial N}}$.

Доказывается удвоением многообразий.



КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 13