Теорема о еже

10 мая 2021 г. 21:53

$\boxed{\text{Теорема}}$ (о причёсывании ежа)

$\forall$ непрерывное векторное поле на сфере S^{2n} обращается в 0 хотя бы в одной точке

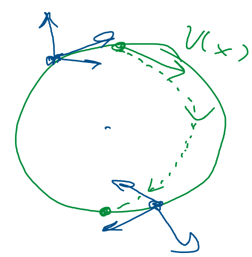
$\boxed{\text{Д-во}}$ От противного. $V: S^{2n} \to TS^{2n}$

$V: S^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+1}$, $\forall x \ V(x) \perp x$

1. Можно считать, что $V \in C^\infty$. Сгладим. и спроецируем на S^{2n}

2. Можно считать, что $|V(x)| = 1$

3. Строим гладкую гомотопию $id \rightsquigarrow -id$



$H(x,t) = \cos(\pi t) \cdot x + \sin(\pi t) V(x)$

$x \in S^{2n}$, $t \in [0,1]$

$\Rightarrow id \sim -id \Rightarrow \deg(id) = \deg(-id)$.

4. $\deg(id) = 1$

$\deg(-id) = -1$ в S^{2n}.

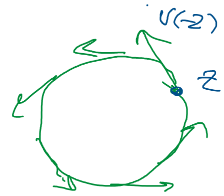
т.к. $-id$ меняет ориентацию. ($2n+1$ нечетно).

$\boxtimes$

Пример в нечетной размерности

10 мая 2021 г. 21:53

Пример На сфере S^{2n-1} $\exists$ гладкое векторное поле, нигде не обращающееся в 0

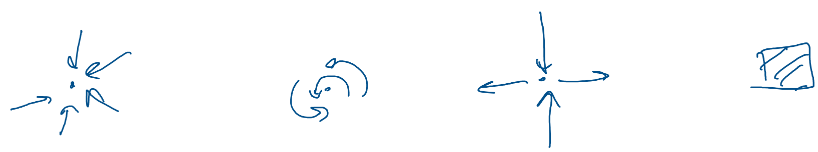


Д-во $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$

Возьмем $V(z) = i \cdot z$ $\left(z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \ \sum |z_i|^2 = 1 \right)$

В вещественной записи

$$V(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) = (-y_1, x_1, -y_2, x_2, \dots, -y_n, x_n)$$



Индекс гиперповерхности - план

17 мая 2021 г. 23:08

Определение индекса

Определение: Параметризованная гиперповерхность в R^n - гладкое отображение f:M->R^n, где M - многообразие размерности n-1. Если f - погружение (вложение), гиперповерхность называется погруженной (вложенной)

Определение: Пусть M компактно и ориентировано, и точка p из R^n не принадлежит образу f. Индекс f относительно p - степень отображения f(x)-p/|f(x)-p| из M в S^{n-1}. При отсутствии ориентации аналогично определяется индекс mod 2.

Замечание: Пусть f - вложение. Вектор v из S^{n-1} - регулярное значение <=> луч из p в направлении v пересекает f(M) трансверсально. Если не вложение, то это тоже верно при правильном определении трансверсальности.

Постоянство на компонентах дополнения

Теорема. Если f,g:M->R^n гомотопны в дополнении p, то их индексы равны.

Следствие. Индекс (как функция точки p) постоянен на компонентах дополнения f(M) в R^n.

Гладкая теорема Жордана

Теорема. Пусть M - компактное связное (n-1)-мерное подмногообразие в R^n. Тогда
1. M разбивает R^n на две компоненты связности.
2. Одна из компонент - ограниченное множество, другая - неограниченное.
3. Замыкание каждой компоненты - гладкое многообразие с краем M.

Следствие. Любая вложенная гиперповерхность в R^n ориентируема.

Следствие. Сферы с ручками нельзя (гладко) вложить в R^n.

Опаределение индекса

17 мая 2021 г. 23:45

Опр (Параметризованная) гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ — гладкое отобр. $f: M \to \mathbb{R}^n$, где M — гладкое многообразие размерности $n-1$.

Если f — погружение, то гиперповерхность — погруженная.

Если f — вложение, то — вложенная.

Замечание Подмногообразие $f(M)$ тоже называется (вложенной) гиперповерхностью

Опр Пусть M компактное, ориентированное $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(M)$.

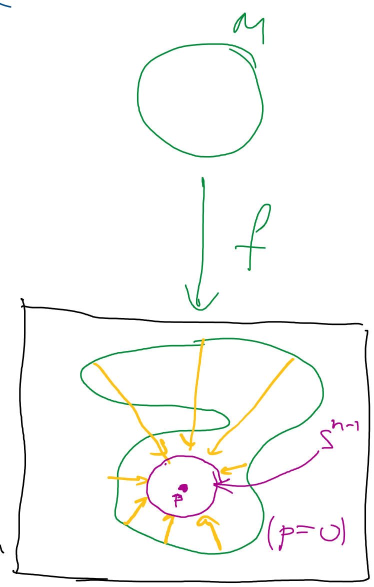
Индекс f относительно p — это

$$\boxed{\operatorname{ind}(f, p) = \deg f_p,}$$

где $f_p : M \to S^{n-1}$,

$$\boxed{f_p(x) = \frac{f(x) - p}{|f(x) - p|}}$$

f_p — композиция f и радиальной проекции



Опр индекс f mod 2 отн. p — определяется аналогично без ориентации,

$$\boxed{\operatorname{ind}_2(f, p) = \deg_2 f_p}$$

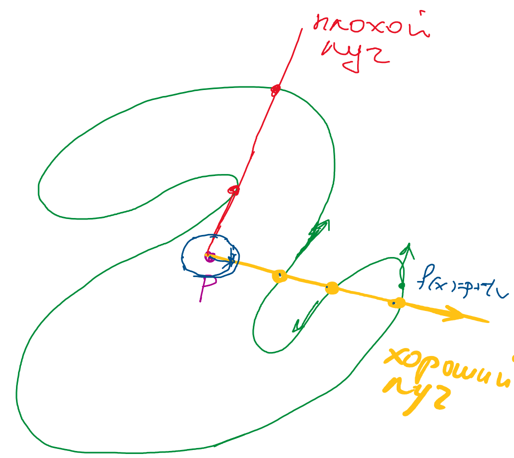
$\boxed{\text{Замечание}}$

① Пусть f - вложение. Тогда

$v \in S^{n-1}$ - регулярное значение f_p

$\Updownarrow$

луч $\{p+tv : t \geq 0\}$ пересекает $f(M)$ трансверсально.



② Если f - не вложение, то трансверсальность заменится на такое условие:

$\forall x \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ т.ч. $p+tv = f(x)$

верно, что $\operatorname{Im} d_x f + \operatorname{Lin}(v) = \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Д-во}}$ $\quad f_p = P \circ f$, где $P : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to S^{n-1}$ - радиальная проекция

$$d_x f_p \text{ невырождено} \iff \begin{cases} \operatorname{rank} d_x f = n-1 & (1) \\ \operatorname{Im} d_x f \cap \ker d_{f(x)} P = \{0\}. & (2) \end{cases}$$

$\ker d_{f(x)} P = \operatorname{Lin}(v)$

$\blacksquare$

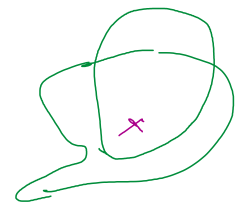
Гомотопическая инвариантность

17 мая 2021 г. 23:45

Теорема Пусть $f, g : M \to \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ гладко гомотопны в $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$.

Тогда $\mathrm{ind}(f,p) = \mathrm{ind}(g,p)$

То же для ind_2.



Д-во: следует из гомотопической инвариантности степени. ∎

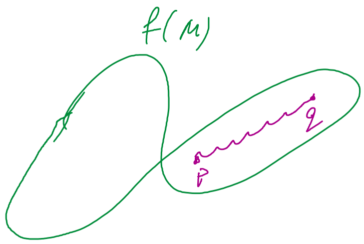
Постоянство на компонентах дополнения

17 мая 2021 г. 23:45

Следствие Если p и q лежат в одной компоненте связности $\mathbb{R}^n \setminus f(M)$, то

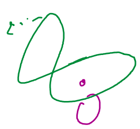
$$\boxed{\operatorname{ind}(f,p) = \operatorname{ind}(f,q)}$$

Д-во



$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus f(M)$ — путь между p и q.

Строим гомотопию между f_p и f_q:



$x \in M$

$t \in [0,1]$

$$H(x,t) = \frac{f(x) - \gamma(t)}{|f(x) - \gamma(t)|}$$

Д-во другими словами: гомотопия $f_t : M \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$f_t(x) = f(x) - \gamma(t).$$

Гладкая теорема Жордана

17 мая 2021 г. 23:46

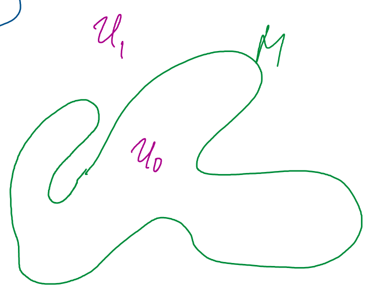
Теорема Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ – компактное гладкое подмногообразие (вложенная гиперповерхность). Тогда

✓ ① $\mathbb{R}^n \setminus M$ состоит из ровно двух компонент связности

✓ ② Одна из компонент – ограниченная, другая – нет

✓ ③ Пусть U – любая из компонент. Тогда замыкание $\overline{U}$ – гладкое n-мерное многообразие с краем (вложенное в $\mathbb{R}^n$) и $\partial \overline{U} = M$.

Д-во



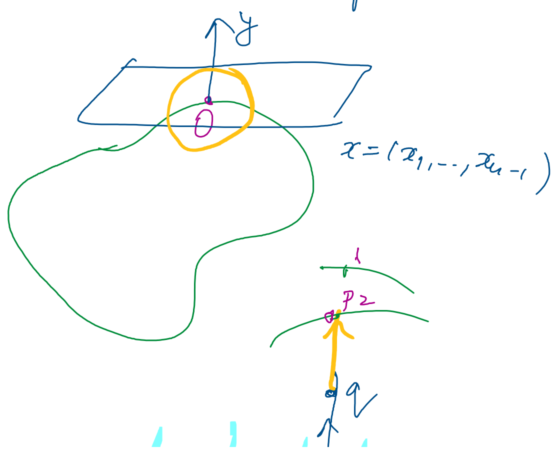
$U_0 = \{p \in \mathbb{R}^n \setminus M : \operatorname{ind}_2(M,p) = 0\}$

$U_1 = \{p \in \mathbb{R}^n \setminus M : \operatorname{ind}_2(M,p) = 1\}$.

Из постоянства индекса на компонентах $\Rightarrow$ U_0 и U_1 открыты

① Осталось доказать, что $U_0, U_1 \neq \emptyset$ и они связны.

Ⓐ $\exists$ точки с разными индексами mod 2.



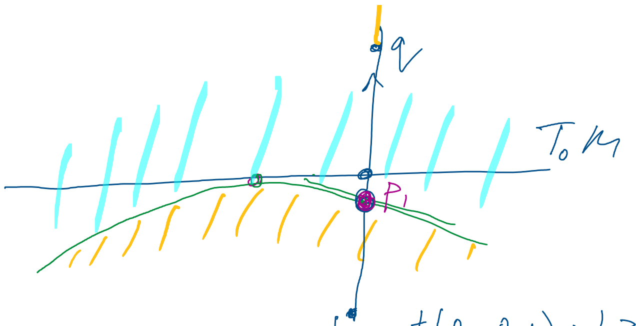
Считаем, что $0 \in M$.

$\exists$ U – окр-ть 0 т.ч.

$M \cap U$ – график

$y = h(x)$, $x \in V \subset T_0 M \simeq \mathbb{R}^{n-1}$

Применим т. Сарда



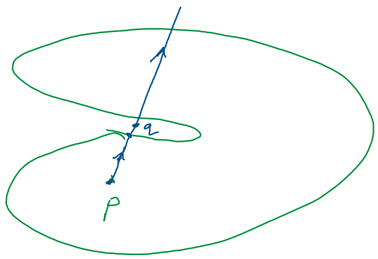
Применим т. Сарда

$pr_{\mathbb{R}^{n-1}}\big|_M$

$\{p + t(0,\dots,0,1) : t \geq 0\} \pitchfork M.$

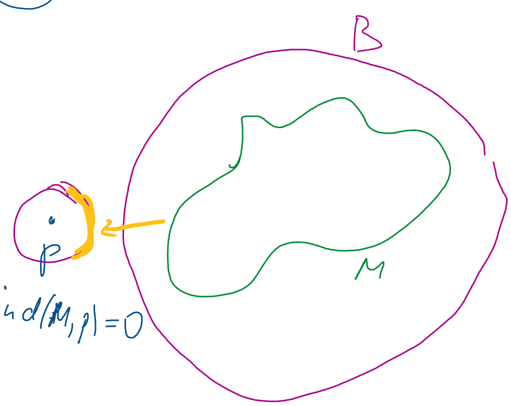
$\boxed{|\operatorname{ind}_2(f,p) - \operatorname{ind}_2(f,q)| = 1} \Rightarrow \operatorname{ind}_2(f,p) \neq \operatorname{ind}_2(f,q)$

$\Rightarrow \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1 \neq \varnothing.$



Альтернатива: выбрать p, хороший луч из p, поместить q после первого пересечения.

2



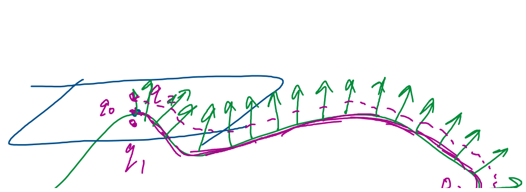
$\mathbb{R}^n \setminus B$ – связно $\Rightarrow$

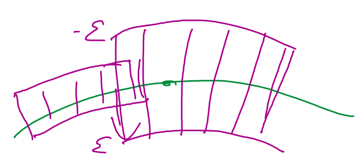
$\underline{\mathbb{R}^n \setminus B \subset \mathcal{U}_0}$

$\underline{\mathcal{U}_1 \subset B}$

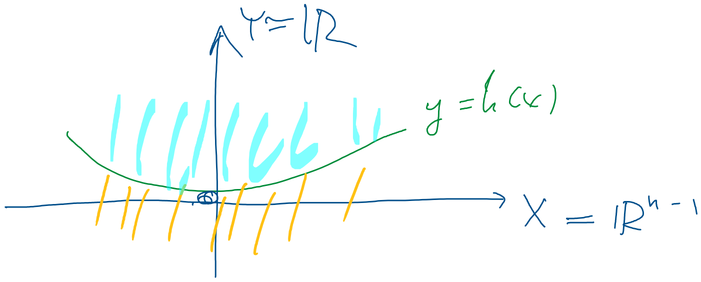
1Б

$\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{U}_1$ – связны.





3



$$(x, y) \mapsto (x - h(y), y)$$

Ориентируемость вложенных гиперповерхностей

17 мая 2021 г. 23:46

$\boxed{\text{Следствие}}$ Если $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — компактное гладкое подмногообразие, то M ориентируемо.

$\boxed{\text{Д-во}}$ $M = \partial \overline{U}_0$, $\overline{U}_0$ — ориентируемо (из $\mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow$ M ориентируемо

$\boxed{\text{Следствие}}$ Сферы с плёнками не вкладываются гладко в $\mathbb{R}^3$.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 14
