

# Гладкие многообразия (заметки к курсу)

С.В. Иванов

20 мая 2026 г.

## Аннотация

Заметки к курсу покрывают несколько начальных тем.

## Содержание

<b>1 Напоминание основных понятий</b>	<b>2</b>
1.1 Топологические многообразия . . . . .	2
1.2 Гладкие многообразия . . . . .	3
1.3 Гладкие отображения . . . . .	4
1.4 Касательное расслоение и дифференцирование . . . . .	6
1.5 Погружения и вложения . . . . .	7
1.6 Прообразы регулярных значений . . . . .	8
<b>2 Паракомпактность и специальные покрытия</b>	<b>8</b>
2.1 Локальная компактность и регулярность . . . . .	8
2.2 Паракомпактность . . . . .	9
2.3 Лемма о сжатии . . . . .	10
2.4 Покрытия координатными шарами . . . . .	10
<b>3 Разбиение единицы и приложения</b>	<b>11</b>
3.1 Гладкое разбиение единицы . . . . .	11
3.2 Сглаживание непрерывных функций . . . . .	12
3.3 Продолжимость гладких функций . . . . .	13
<b>4 Теорема Уитни о вложении</b>	<b>14</b>
4.1 Множества меры ноль . . . . .	14
4.2 Понижение размерности . . . . .	15
4.3 Построение инъективного погружения . . . . .	16
4.4 Собственные отображения . . . . .	17
4.5 От инъективного погружения к вложению . . . . .	18
<b>5 Нормальное расслоение и трубчатые окрестности</b>	<b>18</b>
5.1 Нормальное расслоение . . . . .	19
5.2 Существование трубчатой окрестности . . . . .	20
5.3 Приложение: локальная гладкая продолжимость . . . . .	22

<b>6</b>	<b>Сглаживание непрерывных отображений</b>	<b>23</b>
6.1	Сильная $C^0$ -топология Уитни . . . . .	23
6.2	Теоремы о сглаживании . . . . .	24
6.3	Сглаживание гомотопий . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Гладкие многообразия с краем</b>	<b>26</b>
7.1	Определение и примеры . . . . .	26
7.2	Правильно вложенные подмногообразия . . . . .	28
7.3	Теорема о воротнике . . . . .	29

## 1 Напоминание основных понятий

### 1.1 Топологические многообразия

**Определение 1.1.** Пусть  $n$  — неотрицательное целое число. *Топологическое многообразие размерности  $n$*  — хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой топологии, обладающее свойством *локальной евклидовости*: у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная пространству  $\mathbb{R}^n$ .

**Замечание 1.2.** Число  $n$  — размерность многообразия — входит в определение и должно быть одним и тем же для всех точек. (В частности, несвязное объединение многообразий разной размерности — не многообразие). Для краткости размерность часто указывается верхним индексом: пишут «многообразие  $M^n$ » вместо « $n$ -мерное многообразие  $M$ ».

Размерность многообразия — топологический инвариант: многообразия разных размерностей (кроме пустого множества) не гомеоморфны между собой. Этот нетривиальный факт называется теоремой об инвариантности размерности. У него есть разные доказательства, одно из них будет в курсе.

**Замечание 1.3.** Существование окрестности, гомеоморфной  $\mathbb{R}^n$ , равносильно существованию окрестности, гомеоморфной открытому множеству в  $\mathbb{R}^n$ . Действительно, если у точки есть окрестность, гомеоморфная открытому множеству в  $\mathbb{R}^n$ , то в ней есть подокрестность, гомеоморфная открытому шару в  $\mathbb{R}^n$ , а шар в  $\mathbb{R}^n$  гомеоморфен всему пространству.

### Топологическая классификация многообразий

В малых размерностях есть классификация многообразий (всех или только компактных) с точностью до гомеоморфизма. Прежде всего заметим, что у многообразия компоненты связности открыты и сами являются многообразиями. И обратно, несвязное объединение не более чем счётного набора  $n$ -мерных многообразий —  $n$ -мерное многообразие (счётность множества компонент необходима для наличия счётной базы у объединения). Поэтому задача топологической классификации сводится к классификации связных многообразий. Известные классификационные результаты таковы.

- 0-мерные многообразия — в точности дискретные пространства.
- Любое связное 1-мерное многообразие гомеоморфно прямой или окружности. (Это доказывается элементарно, но не в два слова). Отсюда следует, что любое 1-мерное многообразие — несвязное объединение не более чем счётного набора прямых и окружностей, а любое компактное 1-мерное многообразие — несвязное объединение конечного набора окружностей.

- Любое компактное связное 2-мерное многообразие гомеоморфно либо сфере, либо сфере с несколькими ручками, либо сфере с несколькими плёнками. Доказательство основывается на (сложной) теореме о триангулируемости двумерных многообразий и комбинаторном исследовании триангуляций. Негомеоморфность разных типов поверхностей доказывается либо с помощью «наглядно очевидных» свойств ориентируемости и эйлеровой характеристики, либо средствами алгебраической топологии.
- В размерности 3 и далее подобного «списка всех многообразий» не существует, но имеются классификационные результаты, описывающие многообразия в терминах разложения на более простые «блоки». Один из таких результатов — геометризационная гипотеза Тёрстона, доказанная Перельманом.

## 1.2 Гладкие многообразия

Далее слово «гладкий» всюду подразумевает класс гладкости  $C^\infty$ .

**Определение 1.4.** Пусть  $M^n$  топологическое многообразие. *Картой* или *локальной системой координат* на  $M$  называется пара  $(U, \varphi)$ , где  $U \subset M$  — открытое множество, а  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гомеоморфизм между  $U$  и открытой областью  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Отображения  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow M$  тоже называются картами.

Множество  $U$  называется *носителем* карты  $(U, \varphi)$ . Слово «носитель» обычно пропускают, говоря, например «множество содержится в карте» вместо «содержится в носителе карты». Если носитель содержит точку  $x$ , то карту называют «картой в окрестности  $x$ ».

Для двух карт  $(U, \varphi)$  и  $(V, \psi)$  *отображением перехода* (или *функцией замены координат*) между ними называется отображение

$$\tau_{\varphi\psi} := \psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V).$$

Карты называются *гладко согласованными*, если оба отображения  $\tau_{\varphi\psi}$  и  $\tau_{\psi\varphi}$  гладкие. Карты, носители которых не пересекаются, всегда гладко согласованы.

Набор карт, носители которых покрывают всё многообразие, называется *атласом*. *Гладкий атлас* — атлас, в котором каждые две карты гладко согласованы. *Дифференциальная структура* — максимальный по включению гладкий атлас. *Гладкое многообразие* — топологическое многообразие с заданной на нём дифференциальной структурой.

Нетрудно доказать, что для любого гладкого атласа существует единственный содержащий его максимальный гладкий атлас — он состоит из всевозможных карт, которые гладко согласованы с каждой картой из данного атласа. Таким образом, дифференциальную структуру на многообразии можно задать, указав один гладкий атлас. Два гладких атласа задают одну и ту же дифференциальную структуру тогда и только тогда, когда их объединение — тоже гладкий атлас.

**Соглашение.** Если на рассматриваемом многообразии  $M$  зафиксирована дифференциальная структура, то «картами» называют только карты, принадлежащие этой структуре (а не произвольные локальные гомеоморфизмы в  $\mathbb{R}^n$ ).

### Примеры и конструкции

Обычно гладкие многообразия строятся не описанием гладкого атласа «вручную», а применением одной из стандартных конструкций. Основные конструкции таковы:

- **Открытые области.** Любое открытое множество  $U \subset \mathbb{R}^n$  является гладким многообразием. Дифференциальная структура определяется одной картой: включением  $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ .

Более общо, открытое подмножество  $U$  гладкого многообразия  $M$  тоже является гладким многообразием. Картами дифференциальной структуры  $U$  являются те карты  $M$ , носители которых содержатся в  $U$ .

- **Произведения.** Если  $M$  и  $N$  — гладкие многообразия, то на произведении  $M \times N$  естественно определена структура гладкого многообразия размерности  $m+n$ , которая строится из произведений карт на  $M$  и  $N$ .
- **Подмногообразия.** Пусть  $M^n$  — гладкое многообразие. Множество  $K \subset M$  называется  $k$ -мерным гладким подмногообразием (где  $0 \leq k \leq n$ ), если выполняется следующее условие: для любой точки  $x \in K$  существует такая карта  $(U, \varphi)$  из дифференциальной структуры  $M$ , что  $x \in U$  и

$$\varphi(U \cap K) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k.$$

Здесь в правой части подразумевается, что  $\mathbb{R}^k$  вложено в  $\mathbb{R}^n$  стандартным образом.

Такое подмножество  $K$  естественным образом получает дифференциальную структуру: гладкий атлас состоит из всевозможных карт вида  $(U \cap K, \varphi|_{U \cap K})$ , где  $(U, \varphi)$  — карта на  $M$  описанного выше типа.

Гладкие подмногообразия в  $\mathbb{R}^n$  имеют простое геометрическое описание: это такие подмножества, которые локально совпадают с гладкими графиками. Под *гладким графиком* здесь понимается такое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ , которое при некотором ортогональном преобразовании переходит в график гладкой функции  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , где  $U$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^k$ .

Отметим, что  $n$ -мерные подмногообразия  $n$ -мерного многообразия — в точности его открытые подмножества.

**Замечание 1.5.** Можно строить гладкие многообразия «с нуля», не имея структуры топологического многообразия. А именно, пусть  $X$  — произвольное множество,  $\{U_i\}$  — его покрытие подмножествами, и для каждого  $i$  задано инъективное отображение  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  так, что все образы  $\varphi_i(U_i)$  открыты в  $\mathbb{R}^n$  и все отображения вида  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  определены на открытых множествах и гладкие. Тогда на  $X$  существует единственная топология, для которой каждое отображение  $\varphi_i$  является гомеоморфизмом на образ. Если эта топология хаусдорфова и имеет счетную базу (эти свойства надо проверять отдельно), то  $X$  становится многообразием, а отображения  $\varphi_i$  — картами гладкого атласа.

### 1.3 Гладкие отображения

**Определение 1.6.** Пусть  $M^m$  и  $N^n$  — гладкие многообразия,  $f: M \rightarrow N$  — отображение,  $(U, \varphi)$  и  $(V, \psi)$  — карты на  $M$  и  $N$  соответственно. *Координатным представлением*  $f$  в данных картах называется отображение

$$f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

с естественной областью определения  $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m$  и значениями в  $\mathbb{R}^n$ . Отображение  $f$  называется *гладким*, если все его координатные представления определены на открытых множествах и являются гладкими в обычном смысле из анализа. Класс гладких отображений из  $M$  в  $N$  обозначается  $C^\infty(M, N)$ .

Условие «определены на открытых множествах» обеспечивает непрерывность отображения  $f$  и осмысленность понятия гладкости, которая требуется далее в определении.

Следующее предложение показывает, что гладкость отображения достаточно проверять в сколь угодно малой окрестности каждой точки и в выбранных картах.

**Предложение 1.7.** *Отображение  $f: M \rightarrow N$  гладкое тогда и только тогда, когда для любой точки  $x \in M$  существуют карты  $(U, \varphi)$  и  $(V, \psi)$  для  $M$  и  $N$  соответственно такие, что  $x \in U$ ,  $f(U) \subset V$ , и координатное представление  $f_{\varphi\psi}$  гладкое.*

**Следствие 1.8** (локальность свойства гладкости). *Пусть  $M, N$  — гладкие многообразия,  $\{U_i\}$  — открытое покрытие  $M$ . Пусть отображение  $f: M \rightarrow N$  таково, что для каждого  $i$  сужение  $f|_{U_i}$  гладкое. Тогда  $f$  гладкое.*

Рассматривая координатные представления в подходящих картах, легко доказать следующие свойства, которых достаточно для проверки гладкости отображений в большинстве случаев:

- Тожественное отображение гладкого многообразия в себя — гладкое.
- Композиция гладких отображений — тоже гладкое отображение.
- Для отображений между открытыми областями евклидовых пространств гладкость эквивалентна обычной гладкости в смысле анализа.
- Карты дифференциальной структуры и обратные к ним отображения — гладкие.
- Проекция произведения  $M \times N$  на сомножители — гладкие отображения.
- Пусть  $M, N_1, N_2$  — гладкие многообразия,  $f = (f_1, f_2)$  — отображение из  $M$  в  $N_1 \times N_2$ . Тогда гладкость  $f$  равносильна тому, что  $f_1$  и  $f_2$  оба гладкие.
- Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение из этого подмногообразия.
- Пусть  $K \subset N$  — гладкое подмногообразие,  $f: M \rightarrow N$  — такое гладкое отображение, что  $f(M) \subset K$ . Тогда  $f$ , рассматриваемое как отображение из  $M$  в  $K$ , — тоже гладкое.  
И обратно, если отображение  $f: M \rightarrow K$  гладкое, то оно гладкое и как отображение из  $M$  в  $N$ .

**Определение 1.9.** *Диффеоморфизм* — гладкая биекция между гладкими многообразиями, обратное отображение которой тоже гладкое. Два многообразия *диффеоморфны*, если между ними существует диффеоморфизм.

Ясно, что диффеоморфность гладких многообразий — отношение эквивалентности. Диффеоморфизм  $f: M \rightarrow N$  естественно определяет биекцию между максимальными атласами: каждой карте  $(U, \varphi)$  на  $M$  соответствует карта  $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$  на  $N$ . При этом отображения перехода между картами на  $M$  — те же, что между соответствующими картами на  $N$ . Поэтому у диффеоморфных многообразий дифференциальные структуры неотличимы, и любые свойства, формулируемые в терминах только дифференциальной структуры, одинаковы.

**Замечание 1.10.** В размерностях, не превосходящих 3, на каждом топологическом многообразии существует дифференциальная структура, единственная с точностью до диффеоморфизма. Другими словами, при  $n \leq 3$  любое топологическое  $n$ -многообразие гомеоморфно некоторому гладкому, и гомеоморфные гладкие  $n$ -многообразия диффеоморфны. В старших размерностях оба утверждения неверны.

## 1.4 Касательное расслоение и дифференцирование

Каждому  $n$ -мерному гладкому многообразию  $M$  сопоставляется  $2n$ -мерное гладкое многообразие  $TM$ , называемое *касательным расслоением*  $M$ , а каждому гладкому отображению  $f: M \rightarrow N$  между гладкими многообразиями — гладкое отображение  $Tf: TM \rightarrow TN$ , называемое *касательным отображением* или *производной*  $f$ , со следующими дополнительными структурами и свойствами:

- $TM$  — дизъюнктное объединение  $\bigsqcup_{x \in M} T_x M$ , где  $T_x M$  —  $n$ -мерное векторное пространство, называемое *касательным пространством*  $M$  в точке  $x$  или *слоем касательного расслоения над  $x$* .
- Для каждой точки  $x \in M$  касательное отображение  $Tf$  отображает  $T_x M$  в  $T_{f(x)} N$ , причём соответствующее сужение

$$T_x f = Tf|_{T_x M}: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

линейно. Это отображение часто называется *дифференциалом*  $f$  в точке  $x$  и обозначается через  $d_x f$  вместо  $T_x f$ .

- Выполняется теорема о производной композиции:  $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$  для любых гладких отображений  $f$  и  $g$  с подходящими областями определения и значений. Кроме того,  $T(\text{id}_M) = \text{id}_{TM}$  для любого гладкого многообразия  $M$ .
- Если  $U \subset M$  — открытое множество, то  $T_x U = T_x M$  для всех  $x \in U$ , и  $TU$  — открытое множество в  $TM$ .
- Для открытой области  $U \subset \mathbb{R}^n$  имеется каноническое отождествление  $TU = U \times \mathbb{R}^n$ , при этом  $T_x U = \{x\} \times \mathbb{R}^n$ , и векторные операции в  $T_x U$  соответствуют операциям в  $\mathbb{R}^n$  при естественной биекции  $\{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- Для гладкого отображения  $f: U \rightarrow V$ , где  $U \subset \mathbb{R}^n$  и  $V \subset \mathbb{R}^m$  — открытые области, касательное отображение действует по правилу:

$$Tf(x, v) = (f(x), d_x f(v)),$$

где  $d_x f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — дифференциал отображения в смысле анализа.

Элементы касательного расслоения  $TM$  называются *касательными векторами*. Каждый касательный вектор  $v \in TM$  принадлежит ровно одному из касательных пространств  $T_x M$ , где  $x \in M$ . Точка  $x$ , для которой  $v \in T_x M$ , называется *точкой приложения* касательного вектора  $v$ , а  $v$  в этом случае называется *касательным вектором в точке  $x$* . Отображение  $\pi: TM \rightarrow M$ , которое сопоставляет каждому касательному вектору его точку приложения, называется *проекцией* касательного расслоения.

Локальные координаты на  $TM$  строятся из карт  $M$ . А именно, карта  $(U, \varphi)$  определяет диффеоморфизм  $T\varphi: TU \rightarrow T(\varphi(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ , который является картой на  $TM$ . В этой карте касательный вектор  $v \in T_x M$ , где  $x \in U$ , имеет  $2n$  координат, из которых первые  $n$  штук представляют точку  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ , а остальные  $n$  — координаты вектора  $v$  в некотором базисе пространства  $T_x M$ .

Операция  $T$  («касательный функтор») определяется вышеуказанными свойствами по существу однозначно. Построить касательный функтор можно разными способами — например, определить касательный вектор как правило, сопоставляющее каждой карте, содержащей точку приложения вектора, набор координат вектора так, чтобы они правильно менялись при переходе в другую карту. Другие удобные определения касательного вектора: «общий вектор скорости» класса гладких кривых, «оператор дифференцирования вдоль вектора» гладких функций на многообразии.

## Канонические отождествления

Для открытой области  $U \subset \mathbb{R}^n$  и точки  $x \in U$ , касательное пространство  $T_x U = \{x\} \times \mathbb{R}^n$  можно отождествить с  $\mathbb{R}^n$ , забыв точку приложения. Это отождествление используется по умолчанию, например, для гладких числовых функций на многообразии: для гладкой функции  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  выражение  $df$ , как правило, обозначает отображение из  $TM$  в  $\mathbb{R}$ , а не в  $T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $K$  — его гладкое подмногообразие. Рассмотрим отображение включения  $i: K \rightarrow M$ . Нетрудно проверить, что в любой точке  $x \in K$  производная  $d_x i: T_x K \rightarrow T_x M$  инъективна. Это позволяет отождествить касательное пространство  $T_x K$  с его образом  $d_x i(T_x K)$  и таким образом считать его линейным подпространством в  $T_x M$ . Это отождествление используется всегда при рассмотрении подмногообразий.

## Теорема об обратной функции

**Теорема 1.11** (об обратной функции). Пусть  $M, N$  — гладкие многообразия одинаковой размерности,  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение,  $x \in M$ . Предположим, что дифференциал  $d_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  невырожден (т.е. биективен). Тогда существует такая окрестность  $U$  точки  $x$  в  $M$ , что  $f(U)$  открыто в  $N$  и  $f|_U$  — диффеоморфизм между  $U$  и  $f(U)$ .

**Следствие 1.12.** Если гладкое отображение  $f: M^n \rightarrow N^n$  имеет невырожденный дифференциал во всех точках, то оно открытое (т.е. образ любого открытого множества открыт).

**Следствие 1.13.** Пусть  $M$  и  $N$  — гладкие многообразия одинаковой размерности. Отображение  $f: M \rightarrow N$  является диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно гладкое, биективное, и его дифференциал в всех точках невырожден.

## 1.5 Погружения и вложения

**Определение 1.14.** Пусть  $M^m$  и  $N^n$  — гладкие многообразия. Гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$  называется погружением, если  $d_x f$  инъективно для всех  $x \in M$ .

Отображение  $f: M \rightarrow N$  называется вложением, если оно — погружение и гомеоморфизм между  $M$  и  $f(M)$ .

Определение имеет смысл только при  $m \leq n$  (иначе погружений не существует), а при  $m = n$  погружения — это то же самое, что локальные диффеоморфизмы.

**Замечание 1.15.** Более точные термины — «гладкое погружение» и «гладкое вложение», но в этом курсе гладкость подразумевается без явного упоминания.

**Теорема 1.16.** Локально любое погружение является вложением.

А именно, если  $f: M^m \rightarrow N^n$  — погружение и  $p \in M$ , то существует такая окрестность  $U \ni p$ , что  $f|_U$  — вложение.

Более того, существуют такие карты в окрестностях точек  $p$  и  $f(p)$ , что координатное представление  $f$  в этих картах на своей области определения совпадает со стандартным вложением  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Следствие 1.17.** Образ любого вложения  $f: M \rightarrow N$  — гладкое подмногообразие в  $N$ . При этом  $f$ , рассматриваемое как отображение из  $M$  в  $f(M)$ , — диффеоморфизм.

**Следствие 1.18.** Подмножество гладкого многообразия является подмногообразием тогда и только тогда, когда оно совпадает с образом некоторого вложения.

**Теорема 1.19** (касательное пространство образа вложения). Пусть  $f: M \rightarrow N$  — вложение,  $K = f(M)$ ,  $p \in M$ ,  $q = f(p)$ . Тогда  $T_q K = \text{Im } d_p f$ .

## 1.6 Прообразы регулярных значений

**Определение 1.20.** Пусть  $M$  и  $N$  — гладкие многообразия,  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение.

Точка  $x \in M$  называется *регулярной точкой* отображения  $f$ , если  $d_x f$  сюръективно.

Точка  $y \in N$  называется *регулярным значением* отображения  $f$ , если все точки из её прообраза  $f^{-1}(y)$  являются регулярными точками  $f$ .

Отображение  $f$  называется *субмерсией*, если все точки из  $M$  — регулярные точки  $f$ .

Определение формально применимо при любых размерностях  $m = \dim M$  и  $n = \dim N$ , но содержательно оно только при  $m \geq n$ . При  $m < n$  регулярных точек не существует, а регулярные значения — те и только те точки из  $N$ , которые не принадлежат  $f(M)$ . Далее предполагается, что  $m \geq n$ .

**Теорема 1.21.** Множество регулярных точек отображения  $f: M \rightarrow N$  открыто в  $M$ .

**Теорема 1.22** (о локальном строении субмерсии). Пусть  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение,  $p \in M$  — его регулярная точка. Тогда существуют такие карты в окрестностях точек  $p$  и  $f(p)$ , что координатное представление  $f$  в этих картах на своей области определения совпадает со стандартной координатной проекцией  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 1.23** (о прообразе регулярного значения). Если  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение и  $y \in N$  — его регулярное значение, то  $f^{-1}(y)$  — гладкое подмногообразие размерности  $m - n$  в  $M$ .

**Теорема 1.24** (касательное пространство прообраза). Пусть  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение,  $q \in N$  — его регулярное значение,  $K = f^{-1}(q)$ ,  $p \in K$ . Тогда  $T_p K = \ker d_p f$ .

## 2 Паракомпактность и специальные покрытия

### 2.1 Локальная компактность и регулярность

**Напоминание.** Топологическое пространство называется *локально компактным*, если у любой его точки есть окрестность с компактным замыканием. Топологическое пространство называется *регулярным*, если оно хаусдорфово и в нем выполняется свойство отделимости точек от замкнутых множеств. Легко видеть, что регулярность пространства  $X$  равносильна следующему свойству: для любой точки  $x \in X$  и любой окрестности  $U \ni x$  существует подокрестность  $V \ni x$  такая, что  $\text{Cl } V \subset U$ .

**Обозначение.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство,  $A, B \subset X$ . Будем говорить, что  $A$  *компактно вложено* в  $B$  (обозначение:  $A \Subset B$ ), если  $\text{Cl } A \subset B$  и  $\text{Cl } A$  компактно.

Следующая лемма далее будет постоянно использоваться без явного упоминания.

**Лемма 2.1.** Любое многообразие  $M$  локально компактно и регулярно. Более того, для любой точки  $x \in M$  и любой окрестности  $U \ni x$  существует подокрестность  $V \ni x$  такая, что  $V \Subset U$ .

*Доказательство.* Пусть  $M, x, U$  — такие, как в условии. Из определения многообразия следует, что существует подокрестность  $U'$  ( $x \in U' \subset U$ ), гомеоморфная открытому подмножеству в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $\varphi: U' \rightarrow \varphi(U') \subset \mathbb{R}^n$  — соответствующий гомеоморфизм. Можно считать, что  $\varphi(x) = 0$ . Пусть  $r > 0$  таково, что замкнутый шар  $\bar{B} = \bar{B}_r(0)$  содержится

в  $\varphi(U')$ . Положим  $V = \varphi^{-1}(B_r(0))$ . Множество  $V$  открыто в  $U$  и, следовательно, в  $M$ , так как  $U$  открыто в  $M$  и  $\varphi$  — гомеоморфизм.

Рассмотрим множество  $\bar{V} = \varphi^{-1}(\bar{B})$ . Оно компактно как непрерывный образ компакта. Следовательно, оно замкнуто в  $M$ , так как компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. Значит  $\text{Cl } V \subset \bar{V}$  (на самом деле  $\text{Cl } V = \bar{V}$ )  $\square$

**Замечание 2.2.** На самом деле любое локально компактное хаусдорфово пространство регулярно. Это доказывается аналогично теореме о регулярности и нормальности хаусдорфовых компактов.

## 2.2 Паракомпактность

**Определение 2.3.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Семейство  $\{A_i\}_{i \in I}$  подмножеств  $X$  называется *локально конечным*, если для любой точки  $x \in X$  существует окрестность  $U \ni x$ , которая пересекается только с конечным набором из множеств  $A_i$ .

В дальнейшем будут полезны следующие свойства локально конечных семейств.

**Предложение 2.4.** 1. Если семейство множеств  $\{A_i\}$  локально конечно, то семейство их замыканий  $\{\text{Cl } A_i\}$  тоже.

2. Объединение локально конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.

3. Если семейство множеств  $\{A_i\}$  локально конечно, то  $\text{Cl}(\bigcup U_i) = \bigcup \text{Cl } U_i$ .

*Доказательство.* Простая общая топология.  $\square$

**Упражнение.** Если  $X$  имеет счётную базу топологии, то любое локально конечное семейство его непустых подмножеств не более, чем счётно.

**Определение 2.5.** Семейство множеств  $\{A_i\}_{i \in I}$  *вписано* в семейство множеств  $\{B_j\}_{j \in J}$ , если каждое множество  $A_i$  содержится в хотя бы одном из множеств  $B_j$  (для любого  $i \in I$  существует  $j \in J$  такое, что  $A_i \subset B_j$ ).

Очевидно, что вписанность семейств множеств — транзитивное отношение.

**Определение 2.6.** Топологическое пространство  $X$  называется *паракомпактным*, если для любого его открытого покрытия  $\{U_i\}$  существует открытое покрытие  $\{V_j\}$ , вписанное в  $\{U_i\}$ .

**Теорема 2.7.** Любое регулярное топологическое пространство со счётной базой (в частности, любое многообразие) паракомпактно.

*Доказательство.* Пусть  $X$  — рассматриваемое пространство,  $\{U_i\}$  — открытое покрытие. Докажем, что в него можно вписать локально конечное открытое покрытие.

В силу регулярности, у каждой точки есть окрестность, замыкание которой содержится хотя бы в одном из множеств  $U_i$ . Воспользовавшись счётной базой, выберем из таких окрестностей счётное покрытие  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Для каждого  $k$  выберем такой номер  $i(k)$ , что  $\text{Cl } V_k \subset U_{i(k)}$ , и определим

$$W_k = U_{i(k)} \setminus (\text{Cl } V_1 \cup \dots \cup \text{Cl } V_{k-1}).$$

Тогда  $\{W_k\}$  — искомое открытое покрытие, вписанное в  $\{U_i\}$ . Действительно, для точки  $x \in X$  обозначим через  $k(x)$  наименьший номер  $k$ , для которого  $x \in \text{Cl } V_k$ . Тогда  $x \in W_{k(x)}$ , и окрестность  $W_{k(x)}$  не пересекается с  $W_k$  при  $k > k(x)$ .  $\square$

### 2.3 Лемма о сжатии

**Теорема 2.8** (лемма о сжатии). Пусть  $X$  — регулярное паракомпактное пространство,  $\{U_i\}_{i \in I}$  — его открытое покрытие. Тогда существует открытое покрытие  $\{V_i\}_{i \in I}$  такое, что  $\text{Cl} V_i \subset U_i$  для всех  $i$ .

*Доказательство.* В силу регулярности, у каждой точки  $x \in X$  есть окрестность, замыкание которой содержится в одном из множеств  $U_i$ . Воспользовавшись паракомпактностью, впишем в покрытие такими окрестностями локально конечное открытое покрытие  $\{W_j\}_{j \in J}$ . Разобьем множество индексов  $J$  на подмножества  $\{J_i\}$  так, что  $\text{Cl} W_j \subset U_i$  для всех  $j \in J_i$ . (Для этого выберем для каждого  $j \in J$  индекс  $i_j$  так, что  $\text{Cl} W_j \subset U_{i_j}$ , и определим  $J_i = \{j \in J : i_j = i\}$ .) Для каждого  $i$  определим

$$V_i = \bigcup_{j \in J_i} W_j.$$

Тогда  $\{V_i\}$  — искомое покрытие. Действительно, по построению  $\{V_i\}$  — локально конечное покрытие, и для каждого  $i \in I$  имеем

$$\text{Cl} V_i = \text{Cl} \bigcup_{j: k(j)=i} W_j = \bigcup_{j: k(j)=i} \text{Cl} W_j \subset U_i,$$

где второе равенство следует из свойств локально конечных семейств.  $\square$

### 2.4 Покрытия координатными шарами

**Определение 2.9.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $(U, \varphi)$  — карта его дифференциальной структуры. Будем называть множество  $B \subset U$  *координатным шаром* этой карты, если  $\varphi(B)$  — открытый шар в  $\mathbb{R}^n$ , и  $\varphi(U)$  содержит соответствующий замкнутый шар (эквивалентно,  $B \Subset U$ ). Множество  $B \subset U$  будем называть *координатным шаром*, если оно является координатным шаром какой-нибудь карты.

**Теорема 2.10.** В любое открытое покрытие гладкого многообразия можно вписать покрытие координатными шарами.

*Доказательство.* Пусть  $\{U_i\}$  — данное открытое покрытие. Воспользовавшись локальной компактностью и паракомпактностью, впишем в  $\{U_i\}$  открытое покрытие  $\{V_j\}$  множествами, замыкание каждого из которых компактно и содержится в одной карте. Применив к  $\{V_j\}$  лемму о сжатии, построим такое открытое покрытие  $\{W_j\}$ , что  $W_j \Subset V_j$  для всех  $j$ . По построению для каждого  $j$  существует карта  $\varphi_j$  с носителем  $V_j$ . Рассмотрим множество  $\varphi_j(W_j)$ , его замыкание компактно и содержится в  $\varphi_j(V_j)$ . Покроем его конечным набором евклидовых шаров  $B_{j,1}, \dots, B_{j,k_j}$  такими, что соответствующие замкнутые шары содержатся в  $\varphi_j(V_j)$ . Тогда объединение наборов шаров  $\{\varphi_j^{-1}(B_{j,1}), \dots, \varphi_j^{-1}(B_{j,k_j})\}$  по всем  $j$  — искомое покрытие координатными шарами.  $\square$

В дальнейшем потребуются покрывать многообразие парами «концентрических» координатных шаров. Эта конструкция содержится в следующем следствии.

**Следствие 2.11.** В любое открытое покрытие гладкого многообразия можно вписать такие локально конечные покрытия  $\{B_i\}$  и  $\{B'_i\}$ , что для каждого  $i$  существует карта  $(U_i, \varphi_i)$ , для которой

1.  $B'_i \Subset B_i \Subset U_i$ ;

2.  $\varphi_i(B_i)$  и  $\varphi_i(B'_i)$  — шары в  $\mathbb{R}^n$  с общим центром.

*Доказательство.* По предыдущей теореме впишем в данное покрытие локально конечное покрытие  $\{B_i\}$  координатными шарами. По лемме о сжатии построим такое открытое покрытие  $\{V_i\}$ , что  $\text{Cl } V_i \subset B_i$  для всех  $i$ . Можно считать, что все  $V_i$  непусты (иначе уберем из покрытия те шары  $\{B_i\}$ , для которых  $V_i = \emptyset$ ).

Для каждого  $i$  рассмотрим карту  $(U_i, \varphi_i)$  в которой  $B_i$  является координатным шаром. Можно считать, что  $\varphi_i(B_i) = B_1(0)$  — единичный шар с центром в 0. Для данного  $i$  рассмотрим множество  $A = \varphi_i(\text{Cl } V_i)$ . Оно компактно и содержится в  $B_1(0)$ . В силу компактности достигается максимум  $r = \max\{|x| : x \in A\}$ , причем  $r < 1$ . Положим  $B'_i = \varphi_i^{-1}(B_r(0))$ . Тогда  $B'_i \supset V_i$ , следовательно,  $\{B'_i\}$  — покрытие.  $\square$

Далее такие пары множеств, как  $B_i$  и  $B'_i$  из следствия 2.11, будут называться *концентрическими шарами*. При необходимости карты  $(U_i, \varphi_i)$  можно модифицировать так, что  $B'_i$  и  $B_i$  соответствуют фиксированному шарам в  $\mathbb{R}^n$ , например,  $B_1(0)$  и  $B_2(0)$ .

### 3 Разбиение единицы и приложения

#### 3.1 Гладкое разбиение единицы

**Определение 3.1.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. *Носитель* функции  $f$  (обозначение:  $\text{supp } f$ ) — это множество

$$\text{supp } f = \text{Cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Семейство функций  $\{f_i\}$  называется *локально конечным*, если их носители образуют локально конечное семейство множеств.

**Предложение 3.2.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\{f_i\}$  — локальное конечное семейство гладких функций. Тогда поточечная сумма  $f = \sum f_i$  всюду определена и является гладкой функцией. Кроме того,  $\text{supp } f \subset \bigcup \text{supp } f_i$ .

*Доказательство.* Первое очевидно из определения локальной конечности. Второе следует из перестановочности объединения и замыкания для локально конечных семейств множеств.  $\square$

**Теорема 3.3** (гладкое разбиение единицы). Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\{U_i\}$  — его открытое покрытие. Тогда существует локально конечное семейство гладких функций  $f_i: M \rightarrow [0, 1]$  такое, что  $\text{supp } f_i \subset U_i$  для всех  $i$ , и  $\sum f_i = 1$ .

*Доказательство.* Впишем в покрытие  $\{U_i\}$  локально конечные покрытия концентрическими шарами  $\{B_j\}$  и  $\{B'_j\}$  ( $B'_j \Subset B_j$ ) как в следствии 2.11. Для каждого  $j$  выберем такую карту  $(V_j, \varphi_j)$ , что  $\varphi_j(B'_j) = B_1(0)$  и  $\varphi_j(B_j) = B_2(0)$ .

Для каждого  $j$  построим такую гладкую функцию  $h_j: M \rightarrow [0, 1]$ , что

1.  $\text{supp } h_j \subset B_j$ ;
2.  $h_j|_{B'_j} = 1$ .

Это можно сделать так: выберем карту  $(V_j, \varphi_j)$ , для которой что  $\varphi_j(B'_j) = B_1(0)$  и  $\varphi_j(B_j) = B_2(0)$ , зафиксируем такую гладкую функцию  $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ , что  $h(t) = 1$  при  $t \in [0, 1]$  и  $h(t) = 0$  при  $t \geq \frac{3}{2}$ , и определим

$$h_j(x) = \begin{cases} h(|\varphi_j(t)|), & x \in V_j, \\ 0, & x \in M \setminus V_j. \end{cases}$$

Так как набор  $\{B_j\}$  локально конечен, определена гладкая функция  $H = \sum h_j$ , и она положительна, так как  $\{B'_j\}$  — покрытие. Рассмотрим функции  $g_j = h_j/H$ . Они образуют разбиение единицы для покрытия  $\{B_j\}$ . Разобьём множество индексов  $J$  на подмножества  $\{J_i\}_{i \in I}$  так, что  $B_j \subset U_i$  при  $j \in J_i$ , и положим  $f_i = \sum_{j \in J_i} g_j$ . Набор функций  $\{f_i\}$  удовлетворяет требованиям.  $\square$

**Замечание 3.4.** Набор функций  $\{f_i\}$  из разбиения единицы индексирован тем же множеством индексов, что и данное покрытие  $\{U_i\}$ . Это множество может быть несчетным, но все функции  $f_i$ , кроме счетного набора, равны нулю.

### 3.2 Сглаживание непрерывных функций

**Теорема 3.5.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, и  $\varepsilon > 0$ . Тогда существует гладкая функция  $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$|\tilde{f}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех  $x \in M$ .

Теорема 3.5 следует из более общей теоремы 3.7, в которой требуемая степень близости функций — не число  $\varepsilon$ , а положительная функция на  $M$ . Для компактных многообразий между двумя теоремами нет разницы, но в некомпактном случае теорема 3.7 более полезна.

**Определение 3.6.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Функция  $\mathcal{E}: X \rightarrow (0, +\infty)$  (не обязательно непрерывная) называется *локально отделимой от нуля*, если у любой точки  $x \in X$  есть такая окрестность  $U$ , что  $\inf_{x \in U} \mathcal{E}(x) > 0$ .

Например, любая непрерывная положительная функция локально отделима от нуля.

**Теорема 3.7.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, и  $\mathcal{E}: M \rightarrow (0, +\infty)$  — локально отделимая от нуля положительная функция. Тогда существует гладкая функция  $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$|\tilde{f}(x) - f(x)| < \mathcal{E}(x)$$

для всех  $x \in M$ .

*Доказательство.* Пусть  $p \in M$ . Так как функция  $\mathcal{E}$  локально отделима от нуля, существуют окрестность  $V_p \ni p$  и число  $\varepsilon_p > 0$  такие, что  $\mathcal{E}(x) > \varepsilon_p$  для всех  $x \in V_p$ . Так как  $f$  непрерывна, существует подокрестность  $U_p \subset V_p$  такая, что  $|f(x) - f(p)| < \varepsilon_p$  для всех  $x \in U_p$ . Отсюда

$$|f(x) - f(p)| < \mathcal{E}(x)$$

для всех  $x \in U_p$ .

Пусть  $\{h_p\}$  — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию  $\{U_p\}$ . Определим искомую функцию  $\tilde{f}$  равенством

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p \in M} f(p)h_p(x).$$

Это сумма локально конечного семейства гладких функций, поэтому она корректно определена и гладкая. Проверим, что  $\tilde{f}$  приближает  $f$  с требуемой точностью. Зафиксируем

$x \in M$ , и пусть  $p_1, \dots, p_m$  — все такие точки  $p \in M$ , что  $h_p(x) \neq 0$  (множество таких точек конечно в силу локальной конечности семейства  $\{h_p\}$ ). Тогда

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^m f(p_i)h_{p_i}(x).$$

Эта формула означает, что  $\tilde{f}(x)$  — средне-взвешенное набора чисел  $f(p_1), \dots, f(p_m)$  с неотрицательными весами  $h_{p_1}(x), \dots, h_{p_m}(x)$ , сумма которых равна 1. Так как все числа  $f(p_i)$  лежат в интервале  $(f(x) - \mathcal{E}(x), f(x) + \mathcal{E}(x))$ , в нём лежит и средне-взвешенное значение, то есть  $|\tilde{f}(x) - f(x)| < \mathcal{E}(x)$ . Так как  $x$  — произвольная точка из  $M$ , теорема доказана.  $\square$

**Замечание 3.8.** Конструкция из доказательства — частный случай «склеивания функций по разбиению единицы». В общем виде оно определяется следующим образом.

Пусть на многообразии  $M$  задано открытое покрытие  $\{U_i\}$  и на каждом множестве  $U_i$  определена гладкая функция  $f_i$ . Пусть  $\{h_i\}$  — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию  $\{U_i\}$ . Определим функцию  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  равенством

$$f(x) = \sum_i h_i(x)f_i(x), \quad x \in M,$$

где выражение  $h_i(x)f_i(x)$  считается равным нулю при  $x \notin U_i$ . Так как  $\text{supp } h_i \subset f_i$ , каждое слагаемое является гладкой функцией от  $x \in M$ , и эти функции образуют локально конечное семейство. Поэтому сумма корректно определена, и  $f$  — гладкая функция на  $M$ . Её описывают словами «функция, склеенная из  $\{f_i\}$  по разбиению единицы». Формулу для  $f$  обычно записывают без аргументов:  $f = \sum h_i f_i$ .

В доказательстве теоремы 3.7 эта конструкция применяется к покрытию  $\{U_p\}_{p \in M}$  и семейству констант  $f_p = f(p)$ , определенных на соответствующих областях  $U_p$ .

**Упражнение.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\mathcal{E}$  — локально отделенная от нуля положительная функция на  $M$ . Тогда существует гладкая функция  $\mathcal{E}_0$  на  $M$  такая, что  $0 < \mathcal{E}_0 < \mathcal{E}$  всюду.

### 3.3 Продолжимость гладких функций

**Теорема 3.9** (гладкая лемма Урысона). Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $A, B \subset M$  — замкнутые множества,  $A \cap B = \emptyset$ . Тогда существует гладкая функция  $f: M \rightarrow [0, 1]$  такая, что  $f|_A = 0$  и  $f|_B = 1$ .

*Доказательство.* Рассмотрим покрытие  $M$  двумя открытыми множествами:  $U_1 = M \setminus A$  и  $U_2 = M \setminus B$ . Построим для него разбиение единицы  $(f_1, f_2)$ . В качестве  $f$  подходит  $f_1$ .  $\square$

**Задача.** Для любого гладкого многообразия  $M$  и замкнутого множества  $A \subset M$  существует гладкая функция  $f: M \rightarrow [0, +\infty)$  такая, что  $A = f^{-1}(0)$ .

**Определение 3.10.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $A \subset M$  — произвольное подмножество. Функция  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  называется *локально гладко продолжимой*, если для любой точки  $p \in A$  существует окрестность  $U_p \ni p$  в  $M$  и гладкая функция  $\tilde{f}_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $\tilde{f}_p|_{U_p \cap A} = f|_{U_p \cap A}$ .

Функция  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  называется *гладко продолжимой на окрестность*, если существуют открытое множество  $U \supset A$  и гладкая функция  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $\tilde{f}|_A = f$ .

Аналогично определяются понятия локальной гладкой продолжимости и гладкой продолжимости на окрестность для отображений со значениями в гладких многообразиях.

**Замечание.** Свойство локальной гладкой продолжимости можно использовать в качестве определения понятия гладкости для функций, области определения которых не открыты.

В случае, когда  $A$  — гладкое подмногообразие в  $M$ , такое определение равносильно гладкости относительно дифференциальной структуры подмногообразия. Это легко следует из определения подмногообразия.

**Теорема 3.11.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $A \subset M$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  — локально гладко продолжимая функция. Тогда  $f$  гладко продолжима на окрестность множества  $A$ .

*Доказательство.* Пусть  $U_p$  и  $\tilde{f}_p$  — окрестности и функции из определения локальной гладкой продолжимости. Рассмотрим множество  $U = \bigcup_{x \in A} U_x$ . Оно открыто в  $M$ , следовательно, является гладким многообразием той же размерности. На нём имеется открытое покрытие  $\{U_p\}$  и семейство гладких функций  $\{\tilde{f}_p\}$ , каждая из которых определена на соответствующем элементе покрытия. Определим  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}$  склеиванием функций  $\{\tilde{f}_p\}$  по разбиению единицы. Для каждой точки  $x \in A$  все значения  $\tilde{f}_p(x)$  равны  $f(x)$ , поэтому  $\tilde{f}(x)$  тоже равно  $f(x)$ . Таким образом,  $\tilde{f}$  — искомое гладкое продолжение  $f$ .  $\square$

**Теорема 3.12.** Если в предыдущей теореме множество  $A$  замкнуто, то  $f$  имеет гладкое продолжение на всё  $M$ .

*Доказательство.* Пусть  $f_1: U \rightarrow M$  — гладкое продолжение на окрестность, построенное в предыдущей теореме, и пусть  $f_0: M \setminus A \rightarrow \mathbb{R}$  — нулевая константа. Склеив  $f_0$  и  $f_1$  по разбиению единицы, получим искомое продолжение.  $\square$

## 4 Теорема Уитни о вложении

**Теорема 4.1** (лёгкая теорема Уитни). Для любого гладкого многообразия  $M^n$  существует вложение в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , образ которого — замкнутое множество.

**Замечание 4.2.** Добавление про замкнутый образ интересно только для некомпактных многообразий, так как образ компактного автоматически замкнут.

**Замечание 4.3.** Есть «трудная теорема Уитни»: любое  $n$ -мерное многообразие допускает гладкое вложение в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству теоремы Уитни. Сначала построим инъективное погружение, а потом сделаем из него вложение (для компактного многообразия второй шаг не нужен). Инъективное погружение будет строиться с помощью индукционной конструкции, в которой на каждом шагу будет увеличиваться область, на которой отображение обладает нужными свойствами. В пределе эта область покроет все многообразие, а последовательность отображений сойдется к искомому инъективному погружению. Каждый шаг конструкции состоит из двух частей: сначала увеличим «область инъективности» вместе с размерностью пространства, куда действует отображение, а потом уменьшим эту размерность. Формальное доказательство удобнее начать с общей конструкции понижения размерности.

### 4.1 Множества меры ноль

Вспомним, что в  $\mathbb{R}^n$  мера Лебега совпадает с  $n$ -мерной мерой Хаусдорфа. Отсюда следует, что

- Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  имеет меру 0 тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует счётный набор  $\{A_i\}$  подмножеств  $\mathbb{R}^n$  такой, что  $A \subset \bigcup A_i$  и

$$\sum (\text{diam } A_i)^n < \varepsilon.$$

- Если  $A \subset \mathbb{R}^n$  имеет меру 0 и  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  гладкая (более общо, локально липшицева), то  $f(A)$  тоже имеет меру 0.

**Определение 4.4.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие размерности  $n$ . Будем говорить, что множество  $A \subset M$  имеет меру 0, если оно имеет меру 0 в любой карте, то есть для любой карты  $(U, \varphi)$  многообразия  $M$  верно, что  $\varphi(A \cap U)$  имеет меру 0 в  $\mathbb{R}^n$ .

Определение нулевой меры имеет смысл несмотря на то, что выделенной меры на многообразии нет. Из упомянутых выше свойств следует, что свойство меры 0 достаточно проверить только для карт из произвольного атласа многообразия  $M$  (не обязательно максимального).

Главное для нас свойство: дополнение множества меры 0 непусто и, более того, всюду плотно. Как обычно, мы говорим, что некоторое свойство выполняется для *почти всех* точек многообразия, если оно верно для всех точек, кроме некоторого множества меры 0.

**Теорема 4.5.** Пусть  $M^m$  и  $N^n$  — гладкие многообразия,  $m < n$ ,  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение. Тогда  $f(M)$  имеет меру 0 в  $N$ .

*Доказательство.* С помощью счётной базы многообразий и счётной аддитивности меры Лебега утверждение сводится к случаю  $M = \mathbb{R}^m$  и  $N = \mathbb{R}^n$ .

Покроем  $\mathbb{R}^m$  счётным набором компактных подмножествами (кубов)  $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ . Каждое  $K = K_i$  имеет конечную  $m$ -мерную меру Хаусдорфа, а отображение  $f|_K$  липшицево. Отсюда следует, что  $f(K)$  имеет конечную  $m$ -мерную меру Хаусдорфа и, как следствие, нулевую  $n$ -мерную меру. Из счётной аддитивности следует, что  $f(\mathbb{R}^m)$  имеет меру 0 в  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

## 4.2 Понижение размерности

**Лемма 4.6** (понижение размерности). Пусть  $F: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  — инъективное погружение,  $N > 2n + 1$ . Тогда существует такой единичный вектор  $v \in \mathbb{R}^N$ , что  $\text{pr}_{v^\perp} \circ F$  — тоже инъективное погружение. Здесь  $\text{pr}_{v^\perp}$  — ортогональная проекция вдоль вектора  $v$  на его ортогональное дополнение.

Более того, в качестве  $v$  подходит почти любой вектор из сферы  $S^{N-1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma_1$  — множество тех  $v \in S^{N-1}$ , для которых  $\text{pr}_{v^\perp} \circ F$  не инъективно. Ясно, что  $v \in \Sigma_1$  тогда и только тогда, когда

$$v = \frac{F(x) - F(y)}{|x - y|} =: f_1(x, y)$$

для некоторых  $x, y \in M$ ,  $x \neq y$ . То есть  $\Sigma_1$  — множество значений определенного выше отображения  $f_1: M \times M \setminus \Delta \rightarrow S^{N-1}$ , где  $\Delta$  — диагональ в  $M \times M$ . Так как  $f_1$  гладкое и  $\dim(M \times M) = 2n < N - 1$ , множество  $\Sigma_1$  имеет меру 0 в  $S^{N-1}$ .

Пусть  $\Sigma_2$  — множество тех  $v \in S^{N-1}$ , для которых  $\text{pr}_{v^\perp} \circ F$  — не погружение. Ясно, что  $v \in \Sigma_2$  тогда и только тогда, когда  $v = dF(v)/|v|$  для некоторого ненулевого касательного вектора  $v \in TM$ . Значит  $\Sigma_2$  — образ отображения  $f_2: TM \setminus 0_{TM} \rightarrow S^{N-1}$ , заданного равенством  $f_2(v) = dF(v)/|v|$ . Так как  $f_2$  гладкое и  $\dim(TM) = 2n < N - 1$ , множество  $\Sigma_2$  имеет меру 0 в  $S^{N-1}$ .

Осталось заметить, что для требуемого условия подходит любой вектор  $v$  из дополнения множества  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  в  $S^{N-1}$ .  $\square$

**Лемма 4.7** (улучшенное понижение размерности). Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^N$  — инъективное погружение,  $N > 2n + 1$ . Тогда существует линейное отображение  $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  такое, что  $P \circ F$  — тоже инъективное погружение, и  $P$  тождественно на  $\mathbb{R}^{2n+1}$  (которое считается стандартно вложенным в  $\mathbb{R}^N$ ).

*Доказательство.* Достаточно построить такой проектор  $P$  не в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , а в  $\mathbb{R}^{N-1}$  — потом можно повторять конструкцию до тех пор, пока не получим отображение в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

По предыдущей лемме можно выбрать единичный вектор  $v \in \mathbb{R}^N$  так, что  $v \notin \mathbb{R}^{N-1}$  и  $G := \text{pr}_{v^\perp} \circ F$  — инъективное погружение. Образ отображения  $G$  — гиперплоскость  $v^\perp \subset \mathbb{R}^N$ , причем так как  $v \notin \mathbb{R}^{N-1}$ , сужение  $\text{pr}_{v^\perp}$  на  $\mathbb{R}^{N-1}$  — биекция между  $\mathbb{R}^{N-1}$  и  $v^\perp$ . Пусть  $H$  — обратное отображение этой линейной биекции. Положим  $P = H \circ G$ , оно подходит.  $\square$

### 4.3 Построение инъективного погружения

Следующая лемма позволяет расширять «область инъективности» отображения, добавив к ней один координатный шар.

**Лемма 4.8.** Пусть  $M^n$  — гладкое многообразие,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^N$  — гладкое отображение,  $U \subset M$  — такое открытое множество, что  $f|_U$  — инъективное погружение. Пусть  $(V, \varphi)$  — карта,  $B \Subset V$  — координатный шар этой карты. Тогда существует такое гладкое отображение  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{N+n+1}$ , что

1.  $F|_{U \cup B}$  — инъективное погружение.
2.  $F$  совпадает с  $f$  на  $M \setminus V$ , если считать, что  $\mathbb{R}^N$  стандартным образом вложено в  $\mathbb{R}^{N+n+1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $h: M \rightarrow [0, 1]$  — гладкая функция, равная 1 на  $B$  и 0 на  $M \setminus V$  (она существует по гладкой лемме Урысона). Для каждого  $x \in M$  определим

$$F(x) = (f(x), h(x)\varphi(x), h(x)),$$

где правая часть принадлежит  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{N+n+1}$ . Как обычно, выражение  $h(x)\varphi(x)$  считается равным нулю при  $x \notin V$ . При  $x \in M \setminus V$  вторая и третья компонента формулы для  $F(x)$  обращаются в ноль, откуда  $F(x) = f(x)$  для таких  $x$ . Осталось проверить, что  $F|_{U \cup B}$  — инъективное погружение.

1. *Инъективность.* Пусть  $x, y \in U \cup B$  и  $F(x) = F(y)$ . Тогда, в частности,  $h(x) = h(y)$  из рассмотрения последней координаты в  $F(x)$  и  $F(y)$ . Если  $h(x) = h(y) = 1$ , то  $x$  и  $y$  принадлежат  $B$  и  $\varphi(x) = \varphi(y)$  из рассмотрения второй группы координат в  $F(x)$  и  $F(y)$ , откуда  $x = y$ , так как  $\varphi$  — карта. Если  $h(x) = h(y) \neq 1$ , то  $x$  и  $y$  не принадлежат  $B$ , следовательно, они принадлежат  $U$ . Тогда  $f(x) = f(y)$  из рассмотрения первой группы координат.

2. *Погружение.* Осталось проверить, что при  $x \in U \cup B$  дифференциал  $d_x F$  инъективен. Дифференциал имеет вид

$$d_x F = (d_x f, d_x(h\varphi), d_x h).$$

Если  $x \in U$ , то первая компонента  $d_x f$  инъективна. Иначе  $x \in B$ , тогда  $d_x h = 0$ , так как  $h = 1$  в окрестности точки  $x$ , откуда  $d_x(h\varphi) = d_x \varphi$ , и эта компонента инъективна, так как  $\varphi$  — карта. Из инъективности одной компоненты следует инъективность всего дифференциала.  $\square$

**Следствие 4.9.** Пусть  $M^n$  — гладкое многообразие,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  — гладкое отображение,  $U \subset M$  — такое открытое множество, что  $f|_U$  — инъективное погружение. Пусть  $B$  — координатный шар,  $V$  — окрестность его замыкания. Тогда существует такое гладкое отображение  $g: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ , что

1.  $g|_{U \cup B}$  — инъективное погружение.
2.  $g$  совпадает с  $f$  на  $M \setminus V$ .

*Доказательство.* Уменьшив  $V$  при необходимости, можно считать, что  $V$  — область определения карты, в которой  $B$  является координатным шаром. Применив предыдущую лемму, получим отображение  $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{3n+1}$ , которое является инъективным погружением на  $U \cup B$  и совпадает с  $f$  на  $M \setminus V$ . Положим  $g = P \circ F$ , где  $P$  — проектор из леммы 4.7, построенный для  $f|_{U \cup B}$  вместо  $f$ . Из лемм следует, что  $g$  удовлетворяет требованиям.  $\square$

**Предложение 4.10.** Для любого гладкого многообразия  $M^n$  существует инъективное погружение  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ .

*Доказательство.* По следствию 2.11 существуют локально конечные открытые покрытия  $\{B_i\}_{i=1}^\infty$  и  $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ , где  $B_i$  — координатный шар и  $B_i \Subset V_i$  для каждого  $i$ . Положим  $U_0 = \emptyset$  и  $U_k = \bigcup_{i=1}^k B_i$  для  $k = 1, 2, \dots$ . По индукции построим последовательность отображений  $f_k: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) со следующими свойствами:

1.  $f_k|_{U_k}$  — инъективное погружение;
2.  $f_k$  совпадает с  $f_{k-1}$  на множестве  $M \setminus V_k$ .

Для этого положим  $f_0 = 0$ , а затем каждого  $k = 1, 2, \dots$  определим  $f_k$  как отображение  $g$  из следствия 4.9, примененного к  $f_{k-1}$  в качестве  $f$  с  $U = U_{k-1}$ ,  $B = B_k$ ,  $V = V_k$ .

Из второго условия на  $f_k$  и локальной конечности покрытия  $\{V_i\}$  следует, что у каждой точки  $x \in M$  существует такая окрестность  $W$ , что сужения  $f_k|_W$  стабилизируются, то есть существует такой номер  $k_0$ , что  $f_k|_W = f_{k_0}|_W$  для всех  $k > k_0$ . Следовательно, определен поточечный предел

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x),$$

и построенное таким образом отображение  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  гладкое.

По построению имеется последовательность открытых множеств  $U_1 \subset U_2 \dots$ , объединение которых равно  $M$ , и сужение  $f|_{U_k}$  — инъективное погружение для каждого  $k$ . Так как условия инъективности и погружения проверяются на конечных наборах точек (одной или двух), они выполняются и для всего отображения  $f$ .  $\square$

#### 4.4 Собственные отображения

Чтобы переделать инъективное погружение во вложение с замкнутым образом, нам потребуется понятие собственного отображения.

**Определение 4.11.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства. Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *собственным*, если для любого компакта  $K \subset Y$  верно, что  $f^{-1}(K)$  компактно.

**Пример 4.12.** Рассмотрим вещественную функцию  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ . Она не является собственным отображением из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , но является собственным отображением из  $\mathbb{R}$  в  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

**Упражнение.** Непрерывное отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  является собственным тогда и только тогда, когда  $|f(x)| \rightarrow \infty$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

**Теорема 4.13.** Пусть  $X$  — произвольное топологическое пространство,  $Y$  — локально компактное хаусдорфово,  $f: X \rightarrow Y$  — собственное отображение. Тогда

1. Образ  $f(X)$  замкнут в  $Y$ .
2. Если  $f$  инъективно, то оно — топологическое вложение.

*Доказательство.* Сначала докажем, что  $f(X)$  замкнуто, для этого проверим, что  $Y \setminus f(X)$  открыто. Пусть  $y \in Y \setminus f(X)$ , по локальной компактности найдем у точки  $y$  окрестность  $U$  с компактным замыканием  $K = \text{Cl}U$ . Так как  $f$  — собственное отображение, множество  $A := f^{-1}(K) \subset X$  компактно. Следовательно,  $f(A)$  компактно и, следовательно, замкнуто в  $Y$ . Значит,  $U \setminus f(A)$  — окрестность точки  $y$ , и по построению она не пересекается с  $f(X)$ . Так как  $y$  — произвольная точка из  $Y \setminus f(X)$ , отсюда следует, что  $Y \setminus f(X)$  открыто в  $Y$ .

Теперь предположим, что  $f$  инъективно и докажем, что  $f^{-1}: f(X) \rightarrow Y$  непрерывно. Это равносильно тому, что для любого замкнутого  $A \subset X$  множество  $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$  замкнуто в  $f(X)$ . Легко проверить, что сужение собственного отображения на замкнутое множество — тоже собственное. Применив к  $f|_A$  первую часть теоремы, что  $f(A)$  замкнуто в  $Y$  и, следовательно, в  $f(X)$ .  $\square$

## 4.5 От инъективного погружения к вложению

**Лемма 4.14.** Для любого гладкого многообразия  $M$  существует такая гладкая функция  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ , что для любого  $C > 0$  подуровень  $h^{-1}([0, C])$  компактен.

*Доказательство.* Построим локально конечные покрытия  $M$  концентрическими шарами  $B'_i \Subset B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , как в следствии 2.11. Для каждого  $i$  возьмем гладкую функцию  $h_i: M \rightarrow [0, 1]$  такую, что  $\text{supp } h_i \subset B_i$  и  $h_i|_{B'_i} = 1$ . Функция  $h = \sum_{i=1}^{\infty} i h_i$  подходит. Действительно, для любого натурального  $k$  множество  $f^{-1}([0, k])$  содержится в конечном объединении  $\bigcup_{i=1}^k B_i$ , замыкание которого компактно.  $\square$

**Завершение доказательства теоремы Уитни.** Пусть  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  — инъективное погружение, построенное в предложении 4.10. Скомбинировав его с диффеоморфизмом между пространством  $\mathbb{R}^{2n+1}$  и открытым шаром в нём, можно считать, что  $F(M)$  содержится в шаре  $B_1(0)$  в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Определим  $G: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  равенством  $g(x) = (f(x), h(x))$ , где  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  — функция из леммы 4.14. Отображение  $g$  тоже инъективное погружение, и оно собственное, так как прообраз любого компакта содержится в подуровне функции  $h$ . Пусть  $P = P_{v^\perp}$  — проекция из леммы о понижении размерности, причем вектор  $v$  не пропорционален последнему координатному вектору в  $\mathbb{R}^{2n+2}$ . Тогда нетрудно проверить, что  $P \circ g$  — тоже собственное отображение. Так как оно инъективное погружение, из теоремы 4.13 следует, что оно вложение с замкнутым образом.

Таким образом,  $P \circ g$  является искомым вложением, и теорема Уитни 4.1 доказана.  $\square$

## 5 Нормальное расслоение и трубчатые окрестности

В этом разделе  $M$  —  $k$ -мерное гладкое подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$ .

## 5.1 Нормальное расслоение

**Определение 5.1.** Пусть  $M^k \subset \mathbb{R}^n$  — гладкое подмногообразие. Будем называть его *нормальным расслоением* (обозначение:  $\nu M$ ) множество всех пар  $(x, v)$ , где  $x \in M$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ , и  $v \perp T_x M$ .

Для фиксированной точки  $p \in M$  множество элементов  $\nu M$  вида  $(p, v)$  обозначается через  $\nu_p M$ . Оно естественно отождествляется с ортогональным дополнением  $(T_p M)^\perp$  касательного пространства  $T_p M$  в  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема 5.2.**  $\nu M$  —  $n$ -мерное гладкое подмногообразие в  $M \times \mathbb{R}^n$  (и, как следствие, в  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ).

*Доказательство.* Свойство быть подмногообразием локально, поэтому достаточно проверить его в любой окрестности произвольной точки  $(x_0, v_0) \in \nu M \subset M \times \mathbb{R}^n$ . В качестве такой окрестности возьмём множество  $\Omega := U \times \mathbb{R}^n \subset M \times \mathbb{R}^n$ , где  $U \subset M$  — окрестность точки  $x_0$ , содержащаяся в одной карте.

Пусть  $W_1, \dots, W_k$  — касательные векторные поля на  $U$ , которые линейно независимы в каждой точке (например, координатные поля карты). Для любой точки  $(x, v) \in \Omega$  условие  $(x, v) \in \nu M$  равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} \langle v, W_1(x) \rangle = 0 \\ \dots \\ \langle v, W_k(x) \rangle = 0. \end{cases}$$

То есть пересечение  $\nu M \cap \Omega$  совпадает с прообразом нуля при отображении  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ , определяемом равенством

$$f(x, v) = (\langle v, W_1(x) \rangle, \dots, \langle v, W_k(x) \rangle), \quad x \in U, v \in \mathbb{R}^n.$$

Нетрудно проверить, что это отображение — субмерсия, то есть имеет сюръективный дифференциал в каждой точке (для этого достаточно рассмотреть производные по  $v$  при фиксированном  $x$ ). Следовательно  $\nu M \cap \Omega = f^{-1}(0)$  — гладкое подмногообразие в  $\Omega$  размерности  $\dim \Omega - \dim \mathbb{R}^k = n$ .  $\square$

**Определение 5.3** (векторное расслоение). Пусть  $M^k$  — гладкое многообразие,  $t \in \mathbb{N}$ . *Гладкое векторное расслоение* ранга  $t$  над  $M$  — структура, состоящая из следующих объектов:

- Гладкое многообразие  $E$  размерности  $k + t$ , называемое *тотальным пространством* данного расслоения;
- Гладкое отображение  $\pi: E \rightarrow M$ , называемое *проекцией расслоения*. Для точки  $x \in M$  прообраз  $\pi^{-1}(x)$  называется *слоем* данного расслоения над  $x$  и обозначается  $E_x$ .
- Для каждой точки  $x \in M$  на слое  $E_x$  задана структура  $t$ -мерного векторного пространства.
- Выполняется *условие локальной тривиальности*: у любой точки из  $M$  есть окрестность  $U$ , диффеоморфная  $U \times \mathbb{R}^m$ , причём диффеоморфизм может быть выбран так, что для каждой точки  $x \in U$  слой  $E_x$  переходит в  $\{x\} \times \mathbb{R}^m$  и это отображение слоя — изоморфизм векторных пространств с учётом отождествления  $\{x\} \times \mathbb{R}^m$  с  $\mathbb{R}^m$ .

Эквивалентно, в области  $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} E_x$  можно выбрать локальные координаты

$$(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$$

так, что  $x_1, \dots, x_k$  — координаты точки из  $U$ , а  $y_1, \dots, y_m$  — координаты в соответствующем слое, согласованные с векторными операциями.

Такие локальные координаты или диффеоморфизмы с  $U \times \mathbb{R}^m$  называются *картами векторного расслоения*.

Нормальное расслоение  $\nu M$  имеет естественную проекцию на  $M$ , заданную равенством  $\pi(x, v) = x$ . Каждый слой  $\pi^{-1}(x) = \nu_x M$  естественно отождествляется с линейным подпространством  $(T_x M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ , это определяет на  $\nu_x M$  структуру векторного пространства. То есть векторные операции в  $\nu_x M$  выполняются над второй компонентой пары  $(x, v)$  при фиксированной первой.

**Теорема 5.4.** *Нормальное расслоение с определенными выше структурами является гладким векторным расслоением.*

*Доказательство.* Аналогично касательным векторным полям, *нормальным векторным полем* на  $M$  называется гладкое отображение  $V \rightarrow \nu M$  такое, что  $V(x) \in \nu_x M$  для всех  $x \in M$ . Нормальные векторные поля — это по существу то же самое, что отображения  $V \rightarrow \mathbb{R}^n$  такие, что  $V(x) \perp T_x M$  для всех  $x \in M$ .

Сначала заметим, что для любых  $p \in M$  и  $v_0 \in (T_p M)^\perp$  существует нормальное векторное поле  $V$  на  $M$  такое, что  $V(p) = v_0$ . Действительно, можно определить

$$V(x) = \text{pr}_{(T_x M)^\perp}(v_0)$$

для всех  $x \in M$ , где  $\text{pr}_{(T_x M)^\perp}$  обозначает ортогональную проекцию на подпространство  $(T_x M)^\perp$  в  $\mathbb{R}^n$ . Нетрудно проверить, что так построенное отображение  $V$  гладкое.

Теперь построим в малой окрестности точки  $p$  в  $M$  набор нормальных полей  $V_1, \dots, V_{n-k}$ , которые в каждой точке  $x$  из окрестности образуют базис пространства  $\nu_x M$ . Для этого выберем базис  $v_1, \dots, v_{n-k}$  в  $\nu_p M$  и продолжим каждый вектор  $v_i$  до векторного поля  $V_i$ . По непрерывности поля  $V_i$  сохраняют линейную независимость в достаточно малой окрестности  $U \subset M$  точки  $p$ .

Теперь построим карту векторного расслоения для  $\nu M$  над  $U$ . Определим отображение  $\Psi: U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \nu M$  равенством

$$\Psi(x, y) = \left( x, \sum_{i=1}^{n-k} y_i V_i(x) \right),$$

где  $y_1, \dots, y_{n-k}$  — координаты вектора  $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Нетрудно проверить, что это диффеоморфизм между  $U \times \mathbb{R}^{n-k}$  и множеством  $\pi^{-1}(U) \subset \nu M$ . Это доказывает условие локальной тривиальности векторного расслоения.  $\square$

## 5.2 Существование трубчатой окрестности

**Теорема 5.5.** *Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  — гладкое подмногообразие. Тогда существует открытое множество  $U \subset \mathbb{R}^n$ , содержащее  $M$ , и гладкое отображение  $\pi: U \rightarrow M$  такое, что для любой  $x \in U$  точка  $\pi(x)$  — единственная ближайшая к  $x$  точка из  $M$  (в частности,  $\pi(x) = x$  при  $x \in M$ ).*

**Замечание.** Из доказательства теоремы видно, что можно построить окрестность  $U$  специального «трубчатого» вида: существует непрерывная функция  $\rho: M \rightarrow (0, +\infty)$  такая, что

$$U = \bigcup_{x \in M} B_{\rho(x)}^{\perp}(x),$$

где  $B_{\rho(x)}^{\perp}(x)$  — шар радиуса  $\rho(x)$  с центром  $x$  в аффинном нормальном подпространстве  $x + (T_x M)^{\perp}$ ; при этом все эти шары дизъюнкты, и каждый из них при отображении  $\pi$  переходит в свой центр. Такая окрестность называется *трубчатой окрестностью* многообразия  $M$  в  $\mathbb{R}^n$ .

Перед доказательством теоремы докажем две леммы о ближайших точках. Во-первых, так как  $M$  не предполагается замкнутым, вообще говоря, не у каждой точки из  $\mathbb{R}^n$  есть ближайшая точка в  $M$ . Следующая лемма показывает, что в достаточно малой окрестности многообразия такой проблемы нет.

**Лемма 5.6.** *Множество точек в  $\mathbb{R}^n$ , для которых существует хотя бы одна ближайшая точка в  $M$ , содержит некоторую окрестность  $M$ .*

*Доказательство.* От  $M$  здесь требуется только локальная компактность.

Пусть  $p \in M$ , и пусть  $V \subset M$  — окрестность точки  $p$  в  $M$ , замыкание которой в  $M$  компактно (как следствие, оно совпадает с замыканием  $V$  в  $\mathbb{R}^n$ ). Так как  $V$  открыто в  $M$ , существует открытое  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  такое, что  $\tilde{V} \cap M = V$ . Пусть  $r > 0$  таково, что  $\tilde{V}$  содержит шар  $B_{2r}(p)$ . Докажем, что множество точек из  $\mathbb{R}^n$ , имеющих ближайшие точки в  $M$ , содержит шар  $B_r(p)$ . Пусть  $x \in B_r(p)$ . По компактности существует точка  $y$ , ближайшая к  $x$  в  $\text{Cl } V$ . При этом  $|x - y| < r$ , так как  $|x - p| < r$ . С другой стороны, по неравенству треугольника расстояние от  $x$  до любой точки из  $M \setminus V$  больше  $r$ , откуда  $y$  — ближайшая к  $x$  среди всех точек  $M$ .  $\square$

Следующая лемма говорит, что все ближайшие точки в подмногообразии — основания опущенных на него перпендикуляров. (Примечание: обратное верно не всегда).

**Лемма 5.7.** *Пусть  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $p$  — ближайшая к  $q$  точка из  $M$ . Тогда  $q - p \in (T_p M)^{\perp}$ .*

*Доказательство.* Положим  $f(x) = |x - q|^2$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ . Тогда  $f$  — гладкая функция, и её сужение на  $M$  достигает минимума в точке  $p$ . Следовательно,  $d_p f(v) = 0$  для всех  $v \in T_p M$ . С другой стороны,  $d_p f(v) = 2\langle q - p, v \rangle$ . Значит, вектор  $q - p$  ортогонален любому касательному вектору  $v \in T_p M$ .  $\square$

**Доказательство теоремы 5.5.** Определим отображение  $I: \nu M \rightarrow \mathbb{R}^n$  равенством

$$I(x, v) = x + v,$$

для всех  $x \in M$  и  $v \in (T_x M)^{\perp}$ . Заметим, что это гладкое отображение между гладкими многообразиями  $\nu M$  и  $\mathbb{R}^n$  одинаковой размерности  $n$ .

Зафиксируем  $p \in M$  и рассмотрим точку  $(p, 0) \in \nu M$ . Легко проверить, что в этой точке отображение  $I$  удовлетворяет условиям теоремы об обратной функции. Действительно, производные  $I$  в точке  $(p, 0)$  по направлениям вдоль подмногообразия

$$M_0 = \{(x, 0) : x \in M\} \subset \nu M$$

порождают подпространство  $T_p M \subset \mathbb{R}^n$ , а производные  $I$  по второй компоненте при фиксированном  $p$  порождают  $(T_p M)^{\perp}$ . По теореме об обратной функции существуют окрестность

$W \subset \nu M$  точки  $(p, 0)$  в  $M$  и окрестность  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  точки  $p$  в  $\mathbb{R}^n$  такие, что  $I|_W$  — диффеоморфизм между  $W$  и  $\Omega$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  столь мало, что  $W$  содержит множество

$$W_\varepsilon(p) := \{(q, v) \in \nu M : |q - p| < \varepsilon \text{ и } |v| < \varepsilon\}.$$

Такое  $\varepsilon$  существует, так как топология на  $\nu M$  является топологией подпространства в произведении  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

По лемме 5.6 существует такое  $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ , что для любой точки  $x$  из шара  $B_\delta(p)$  существует точка  $q$ , ближайшая к  $x$  в  $M$ . Докажем, что такая точка  $q$  единственна и гладко зависит от  $x$ . По лемме 5.7 вектор  $v := x - q$  ортогонален  $T_q M$ , то есть  $(q, v) \in \nu M$  и  $x = I(q, v)$ . Так как  $\delta < \varepsilon/2$ , из неравенства треугольника следует, что  $|q - p| < \varepsilon$  и  $|v| < \varepsilon$ , то есть  $(q, v) \in W$ . Отсюда и из инъективности  $I|_W$  следует единственность ближайшей точки  $q =: \pi(x)$ . Построенное отображение  $\pi$  гладкое, так как оно является композицией  $I^{-1}$  и забывания второй координаты.

Обозначим построенный шар  $B_\delta(p)$  через  $U_p$ . Искомая окрестность  $U$  всего многообразия получается объединением окрестностей  $U_p$  по всем точкам  $p \in M$ . Построенные отображения  $\pi$  на разных окрестностях согласованы между собой, так как описываются словами «единственная ближайшая точка в  $M$ ».  $\square$

### 5.3 Приложение: локальная гладкая продолжимость

**Определение 5.8.** Пусть  $M, N$  — гладкие многообразия,  $A \subset M$  — произвольное множество. Будем называть отображение  $f: A \rightarrow N$  *гладким*, если оно локально гладко продолжимо, то есть у любой точки  $p \in A$  существует окрестность  $U_p$  в  $M$  и гладкое отображение  $\tilde{f}_p: U_p \rightarrow N$  такие, что  $\tilde{f}_p|_{A \cap U_p} = f|_{A \cap U_p}$ .

**Замечание.** Если  $A$  — гладкое подмногообразие, то данное определение гладкости согласовано с дифференциальной структурой подмногообразия.

**Теорема 5.9.** Пусть  $M, N$  — гладкие многообразия,  $A \subset M$ ,  $f: A \rightarrow N$  — гладкое отображение. Тогда  $f$  гладко продолжимо на окрестность множества  $A$ , то есть существует открытое множество  $U \subset M$ , содержащее  $A$ , и гладкое отображение  $\tilde{f}: U \rightarrow N$  такое, что  $\tilde{f}|_A = f$ .

*Доказательство.* Благодаря теореме о вложении можно считать, что  $N$  — гладкое подмногообразие в некотором  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $f_1, \dots, f_n$  — координатные функции отображения  $f$ , рассматриваемого как отображение в  $\mathbb{R}^n$ . Для числовых функций гладкая продолжимость на окрестность уже доказана в теореме 3.11. Применив её к функциям  $f_1, \dots, f_n$ , получим гладкие продолжения  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$  на некоторые окрестности множества  $A$ . Пусть  $U_0$  — пересечение этих окрестностей. На  $U_0$  определено гладкое отображение

$$\tilde{f}_0 = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$$

со значениями в  $\mathbb{R}^n$ , продолжающее  $f$ . Однако его значения не лежат в  $N$ .

Чтобы это исправить, построим для  $N$  трубчатую окрестность  $V \subset \mathbb{R}^n$  и соответствующую гладкую ретракцию  $\pi: V \rightarrow N$ . Положим  $U = \tilde{f}_0^{-1}(V)$ . Множество  $U$  открыто в  $U_0$  и, следовательно, в  $M$ . Кроме того,  $A \subset U$ , так как  $\tilde{f}_0(A) = f(A) \subset N$ . Теперь определим  $\tilde{f}: U \rightarrow N$  равенством  $\tilde{f} = \pi \circ \tilde{f}_0|_U$ . Это и есть искомое гладкое продолжение  $f$ .  $\square$

**Замечание.** В отличие от числовых функций, даже в случае замкнутого  $A$  отображение  $f: A \rightarrow N$  из теоремы 5.9 может не продолжаться до отображения из всего  $M$  в  $N$ . Например, по теореме Борсука тождественное отображение окружности  $S^1$  в себя не продолжается до отображения из  $\mathbb{R}^2$  в  $S^1$ .

## 6 Сглаживание непрерывных отображений

### 6.1 Сильная $C^0$ -топология Уитни

Для формулировки теорем о сглаживании необходимо выбрать топологию на пространстве непрерывных отображений  $C(M, N)$ , где  $M$  и  $N$  — рассматриваемые многообразия. В топологии на пространствах отображений обычно вводят компактно-открытую топологию (которой в анализе соответствует топология равномерной сходимости на компактах). Но нам потребуется другая топология, называемая *сильной топологией Уитни*, которая определяется ниже.

**Определение 6.1.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства. Через  $C(X, Y)$  обозначим множество всех непрерывных отображений из  $X$  в  $Y$ . Для отображения  $f \in C(X, Y)$  обозначим через  $\Gamma_f$  его график:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Для открытого множества  $U \subset X \times Y$  определим множество  $\Gamma_U \subset C(X, Y)$  равенством

$$\Gamma_U = \{f \in C(X, Y) : \Gamma_f \subset U\}.$$

*Сильная топология Уитни* на  $C(X, Y)$  — наименьшая топология, в которой все множества вида  $\Gamma_U$  открыты. Пространство  $C(X, Y)$  с этой топологией обозначается  $C_s(X, Y)$  или  $C_s^0(X, Y)$ .

**Замечание.** Обозначение  $C_s^0(X, Y)$  используется только в случае, когда  $X$  и  $Y$  — гладкие многообразия. Оно намекает на то, что есть определение сильной топологии Уитни на  $C^r(X, Y)$  для всех  $r \in [0, +\infty]$ . Мы это обобщение не рассматриваем.

**Замечание.** Множества вида  $\Gamma_U$ , где  $U$  открыто в  $X \times Y$ , образуют базу топологии  $C_s(X, Y)$ . Это следует из равенства  $\Gamma_{U \cap V} = \Gamma_U \cap \Gamma_V$  для всех  $U, V \subset X \times Y$ .

**Определение 6.2.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *полу непрерывной снизу*, если для любого  $a > 0$  прообраз  $f^{-1}((a, +\infty))$  открыт.

Нетрудно видеть, что если функция полу непрерывна снизу и положительна, то она локально отделена от нуля.

**Обозначение.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $Y$  — метрическое пространство,  $f \in C(X, Y)$ ,  $\varepsilon: X \rightarrow (0, +\infty)$  — положительная функция на  $X$ . Определим множество  $\mathcal{U}_{f, \varepsilon} \subset C(X, Y)$  равенством

$$\mathcal{U}_{f, \varepsilon} = \{g \in C(X, Y) : d_Y(g(x), f(x)) < \varepsilon(x) \text{ для всех } x \in X\}.$$

**Теорема 6.3.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $Y$  — метрическое пространство,  $f \in C(X, Y)$ . Тогда всевозможные множества вида  $\mathcal{U}_{f, \varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — полу непрерывная снизу положительная функция на  $X$ , образуют базу окрестностей точки  $f$  в пространстве  $C_s(X, Y)$ .

*Доказательство.* Сначала проверим, что каждое множество  $\mathcal{U}_{f, \varepsilon}$  открыто. Для этого заметим, что  $\mathcal{U}_{f, \varepsilon} = \Gamma_{U(f, \varepsilon)}$ , где множество  $U(f, \varepsilon) \subset X \times Y$  определено формулой

$$\Gamma_{U(f, \varepsilon)} = \{(x, y) \in X \times Y : d_Y(y, f(x)) < \varepsilon(x)\}.$$

Нетрудно проверить, что для полунепрерывной снизу функции  $\varepsilon$  множество  $U(f, \varepsilon)$  открыто в  $X \times Y$ .

Теперь проверим, что каждое базовое открытое множество  $\Gamma_U \subset C_s(X, Y)$ , содержащее функцию  $f$ , содержит и некоторую окрестность вида  $\mathcal{U}_{f, \varepsilon}$ . Пусть  $p \in X$ . Так как  $U$  открыто в  $X \times Y$  и содержит точку  $(p, f(p))$ , оно содержит и окрестность вида  $V_p \times B_{r_p}(f(p))$ , где  $V_p$  — некоторая окрестность точки  $p$  в  $X$ ,  $B_{r_p}(f(p))$  — шар в  $Y$  с центром в  $f(p)$  и некоторым радиусом  $r_p \in (0, 1)$ . Положим  $\varepsilon_p = r_p/2$ . В силу непрерывности  $f$  существуют такая подокрестность  $W_p \subset V_p$  точки  $p$ , что  $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon_p$  для всех  $x \in W_p$ . Определим

$$\varepsilon(x) = \sup_{p: x \in W_p} \varepsilon_p$$

для всех  $x \in M$ . Легко проверить, что полученная функция  $\varepsilon: M \rightarrow (0, +\infty)$  полунепрерывна снизу. По построению  $\mathcal{U}_{f, \varepsilon} = \Gamma_{U(f, \varepsilon)}$ .  $\square$

**Следствие 6.4.** *Если (при тех же условиях)  $X$  компактно, то топология  $C_s(X, Y)$  совпадает с топологией равномерной сходимости.*

*Доказательство.* Утверждение следует из теоремы 6.3 и того, что полунепрерывная функция на компакте достигает минимума.  $\square$

**Лемма 6.5.** *Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $f: M \rightarrow (0, +\infty)$  — положительная локально отделенная от нуля функция. Тогда существует такая гладкая функция  $g: M \rightarrow (0, +\infty)$ , что  $0 < g(x) < f(x)$  для всех  $x \in M$ .*

*Доказательство.* Из локальной отделенности  $f$  от нуля следует, что локальные функции с требуемым свойством существуют в достаточно малой окрестности любой точки. Склеив такие локальные функции по разбиению единицы, получим требуемую  $g$ .  $\square$

**Следствие 6.6.** *Если  $X$  — гладкое многообразие, то в теореме 6.3 вместо класса полунепрерывных снизу функций можно брать класс гладких или класс непрерывных функций.*

## 6.2 Теоремы о сглаживании

**Теорема 6.7.** *Для любых гладких многообразий  $M$  и  $N$  множество гладких отображений  $C^\infty(M, N)$  плотно в  $C_s(M, N)$ .*

*Доказательство.* Для числовых функций утверждение уже доказано в теореме 3.7. Выведем из этого общий случай. По теореме о вложении можно считать, что  $N$  — подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$  (где  $n = 2 \dim N + 1$ , но это не важно). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — трубчатая окрестность  $N$  как в теореме 5.5. Будем считать  $N$  метрическим пространством, расстояние в котором получено сужением евклидова расстояния из  $\mathbb{R}^n$ .

С учётом теоремы 6.3 достаточно проверить, что для любой непрерывной функции  $f: M \rightarrow N$  и любой положительной непрерывной функции  $\varepsilon: M \rightarrow (0, +\infty)$  существует гладкая функция  $\tilde{f}: M \rightarrow N$  такая, что  $|\tilde{f}(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$  для всех  $x \in M$ . Уменьшая при необходимости функцию  $\varepsilon$ , можно считать, что  $\varepsilon(x)$  не превосходит толщины трубчатой окрестности в точке  $x$ , то есть  $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset U$  для всех  $x \in M$ . Пусть  $f_1, \dots, f_n$  — координатные функции  $f$  как отображения из  $M$  в  $\mathbb{R}^n$ . По теореме 3.7 существуют такие гладкие функции  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n: M \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$|\tilde{f}_i(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon(x)}{2n}$$

для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$  и всех  $x \in M$ . Для  $x \in M$  определим

$$\widehat{f}(x) = (\widehat{f}_1(x), \dots, \widehat{f}_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда  $|\widehat{f}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon(x)}{2}$ , откуда следует, что  $\widehat{f}(x) \in U$ . Пусть  $\widetilde{f}(x)$  — ближайшая точка к  $\widehat{f}(x)$  в  $M$ , то есть  $\widetilde{f}(x) = \pi(\widehat{f}(x))$  в обозначениях из теоремы 5.5. Из свойств трубчатой окрестности следует, что полученное отображение  $\widetilde{f}: M \rightarrow N$  — гладкое. По неравенству треугольника

$$|\widetilde{f}(x) - x| \leq 2|\widehat{f}(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$$

для всех  $x \in M$ , что и требовалось.  $\square$

Для дальнейшего потребуется следующее уточнение теоремы о сглаживании, в которой задано подмножество, на котором отображение зафиксировано и не должно меняться при сглаживании.

**Теорема 6.8.** Пусть  $f \in C(M, N)$ , где  $M, N$  — гладкие многообразия,  $A \subset M$  — замкнутое множество. Предположим, что  $f|_A$  — гладкое (см. определение 5.8). Тогда в любой окрестности отображения  $f$  в  $C^s(M, N)$  существует такое гладкое отображение  $\widetilde{f}: M \rightarrow N$ , что  $\widetilde{f}|_A = f|_A$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать утверждение в случае  $N = \mathbb{R}$ , после этого можно повторить рассуждения из доказательства теоремы 6.7. Далее считаем, что  $N = \mathbb{R}$ .

Можно считать, что рассматриваемая окрестность  $f$  в  $C^s(M, \mathbb{R})$  имеет вид  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{f, \varepsilon}$ , где  $\varepsilon: M \rightarrow (0, +\infty)$  — положительная непрерывная функция. По теореме 6.7 существует гладкая функция  $f_1 \in \mathcal{U}$ . По теореме 5.9 существует гладкое продолжение  $f_2$  функции  $f$  на некоторую окрестность  $V \supset A$ . Рассмотрим множество

$$U = \{x \in V : |f_2(x) - f(x)| < \varepsilon(x)\}.$$

Ясно, что оно открыто в  $M$ . Искомое  $\widetilde{f}$  можно определить формулой  $\widetilde{f} = h_1 f_1 + h_2 f_2$ , где  $(h_1, h_2)$  — разбиение единицы, подчинённое покрытию  $(M \setminus A, U)$ .  $\square$

### 6.3 Сглаживание гомотопий

Смысл результатов этого раздела в том, что для гладких многообразий гладкая теория гомотопий не отличается от непрерывной.

**Теорема 6.9.** Пусть  $M, N$  — гладкие многообразия. Тогда любое непрерывное отображение  $f: M \rightarrow N$  гомотопно некоторому гладкому.

*Доказательство.* По теореме о вложении можно считать, что  $N$  — гладкое подмногообразие в некотором  $\mathbb{R}^n$ . Построим для него трубчатую окрестность  $U \subset \mathbb{R}^n$  и ретракцию  $\pi: U \rightarrow N$ . Для  $x \in M$  пусть  $\rho(x)$  — толщина трубчатой окрестности в точке  $x$ , то есть радиус наибольшего шара с центром в  $x$ , содержащегося в  $U$ . По теореме о сглаживании построим гладкое отображение  $\widetilde{f}: M \rightarrow N$  такое, что

$$|\widetilde{f}(x) - f(x)| < \rho(x)$$

для всех  $x \in M$ . Тогда можно определить гомотопию между  $f$  и  $\widetilde{f}$  формулой

$$H(x, t) = \pi((1-t)f(x) + t\widetilde{f}(x)), \quad x \in M, t \in [0, 1].$$

Это композиция прямолинейной гомотопии в  $\mathbb{R}^n$  и проекции на  $N$  с помощью  $\pi$ . Она определена, так как отрезок между  $f(x)$  и  $\widetilde{f}(x)$  содержится в  $U$ .  $\square$

**Определение 6.10.** Два отображения называются *гладко гомотопными*, если между ними существует гладкая гомотопия. (Для определения того, что значит гладкость для гомотопии, вложим  $M \times [0, 1]$  в многообразие  $M \times \mathbb{R}$  и сошлемся на определение 5.8).

**Теорема 6.11.** Пусть  $M, N$  — гладкие многообразия. Тогда любые два гомотопных гладких отображения из  $M$  в  $N$  гладко гомотопны.

*Доказательство.* Пусть  $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$  — гомотопия, и отображения  $H(\cdot, 0)$  и  $H(\cdot, 1)$  гладкие. Чтобы не связываться раньше времени с многообразиями с краем, продолжим  $H$  на  $M \times \mathbb{R}$  равенствами  $H(x, t) = H(x, 0)$  при  $t < 0$  и  $H(x, t) = H(x, 1)$  при  $t > 1$ . Применим теорему 6.8 к отображению  $H$ , зафиксированному на подмножестве  $A = M \times \{0, 1\}$ . Получится искомая гладкая гомотопия.  $\square$

## 7 Гладкие многообразия с краем

### 7.1 Определение и примеры

Далее через  $\mathbb{R}_+^n$  обозначается полупространство в  $\mathbb{R}^n$ , состоящее из тех точек, у которых первая координата неотрицательна. То есть

$$\mathbb{R}_+^n = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Гиперплоскость, ограничивающую  $\mathbb{R}_+^n$  в  $\mathbb{R}^n$ , будем обозначать  $\partial\mathbb{R}_+^n$ .

**Определение 7.1.** Топологическое многообразие размерности  $n$  — это хаусдорфово пространство  $M$  со счетной базой, в котором у любой точки есть окрестность, гомеоморфная либо  $\mathbb{R}^n$ , либо  $\mathbb{R}_+^n$ .

Точки в многообразии с краем делятся на два типа:

1. *Внутренние* — те, у которых существует окрестность, гомеоморфная  $\mathbb{R}^n$ .

Множество внутренних точек называется *внутренностью* многообразия с краем (не путать с внутренностью множества в топологическом пространстве!).

2. *Краевые* — те, у которых есть окрестность, гомеоморфная  $\mathbb{R}_+^n$ , причем при гомеоморфизме данная точка переходит в точку на границе  $\mathbb{R}_+^n$ .

Множество краевых точек называется его *краем* и обозначается  $\partial M$ .

Однако не очевидно, что точка не может относиться к обоим типам сразу. Этот факт называется теоремой об инвариантности края и будет доказан в курсе позже. Пока это не доказано, удобнее включить разделение точек на внутренние и краевые в определение многообразия с краем. Уточненное определение можно сформулировать следующим образом.

Многообразие с краем размерности  $n$  — это пара  $(M, \partial M)$ , где  $M$  — хаусдорфово пространство со счетной базой,  $\partial M \subset M$  — такое замкнутое подмножество, что  $M \setminus \partial M$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие (без края), и у каждой точки  $x \in \partial M$  существует окрестность  $U$  в  $M$  и такой гомеоморфизм  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ , что  $\varphi(U \cap \partial M) = \partial\mathbb{R}_+^n$ .

В дальнейшем нам потребуется теорема о классификации компактных одномерных многообразий (без доказательства):

**Теорема 7.2.** Любой компактное одномерное многообразие с краем гомеоморфно несвязному объединению конечного набора окружностей и отрезков.

**Определение 7.3.** Пусть  $(M, \partial M)$  — топологическое многообразие с краем размерности  $n$ . Его *картой* будем называть пару  $(U, \varphi)$ , где  $U \subset M$  — открытое множество,  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное отображение, и верно одно из двух:

1.  $U \cap \partial M = \emptyset$ , и  $\varphi$  — гомеоморфизм между  $U$  и открытым множеством в  $\mathbb{R}^n$ ;
2.  $U \cap \partial M \neq \emptyset$ ,  $\varphi$  — гомеоморфизм между  $U$  и открытым множеством в  $\mathbb{R}_+^n$ , и

$$\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap \partial \mathbb{R}_+^n.$$

Карты этого типа будем называть *краевыми*.

Две карты  $(U, \varphi)$  и  $(V, \psi)$  называются *гладко согласованными*, если оба отображения перехода  $\psi \circ \varphi^{-1}$  и  $\varphi \circ \psi^{-1}$  гладкие (на своих естественных областях определения). Под гладкостью отображений, определенных на открытых подмножествах  $\mathbb{R}_+^n$ , как обычно, понимается локальная гладкая продолжимость, см. определение 5.8.

Аналогично обычному определению гладкого многообразия для многообразий с краем определяется понятие гладкого атласа и максимального гладкого атласа. *Гладкое многообразие с краем* — это топологическое многообразие с краем с заданным на нём максимальным гладким атласом, который называется дифференциальной структурой.

Далее гладкие многообразия с краем будут называться просто многообразиями с краем (гладкость подразумевается).

Из определения очевидно следует, что

- $M \setminus \partial M$  — многообразие без края той же размерности  $n$ .
- $\partial M$  — многообразие без края размерности  $n - 1$ .
- Многообразия без краем — частный случай многообразий с краем (край — пустое множество).

**Пример 7.4** (подуровни и надуровни). Пусть  $M$  — гладкое многообразие (без края),  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция,  $c \in \mathbb{R}$  — регулярное значение  $f$ . Тогда  $f^{-1}((-\infty, c])$  и  $f^{-1}([c, +\infty))$  — гладкие многообразия с краем. Край каждого из них совпадает с  $f^{-1}(c)$ .

Это нетрудно вывести из доказательства теоремы о прообразе регулярного значения.

**Пример 7.5.** Если  $M$  — многообразие с краем,  $N$  — многообразие без края, то  $M \times N$  — многообразие с краем,  $\partial(M \times N) = (\partial M) \times N$ .

Произведение двух гладких многообразий с непустым краем — топологическое многообразие с краем, но не гладкое многообразие с краем. (То есть на нём невозможно ввести дифференциальную структуру, удовлетворяющую привычным свойствам произведения).

Большая часть терминологии, связанной с гладкими многообразиями, переносится на многообразия с краем без изменений, но некоторые понятия требуют уточнения.

- Касательное пространство  $T_p M$  для точки  $p \in \partial M$  — векторное пространство (изоморфное  $\mathbb{R}^n$ ) с дополнительной структурой: в нём имеется выделенная гиперплоскость  $T_p \partial M$ , а два полупространства, на которые она делит  $T_p$ , отмечены как «внутреннее», обозначаемое  $T_p^+ M$ , и «внешнее», обозначаемое  $T_p^- M$ . Касательные векторы соответственно разбиваются на касательные к краю, направленные внутрь и направленные наружу.

Среди явных определений касательного вектора на многообразия с краем лучше всего переносится координатное: вектор определяется своими координатами в любой карте,

при этом при переходе в другую карту координаты преобразуются по стандартным формулам (с помощью дифференциала отображения перехода).

Касательное расслоение  $TM$  является гладким многообразием с краем, его край состоит из векторов, точки приложения которых принадлежат  $\partial M$ .

Дифференциал гладкого отображения между многообразиями с краем определяется аналогично случаю многообразий без края, при этом требуется (тривиальная) проверка корректности для определения дифференциала гладкой функции, заданной на полупространстве  $\mathbb{R}_+^n$ .

- Подмногообразие в многообразии с краем — образ гладкого вложения. Определение с «выпрямляющими» картами в многообразии с краем не работает, но оно годится для «правильно вложенных» многообразий, см. ниже.

## 7.2 Правильно вложенные подмногообразия

**Определение 7.6.** Пусть  $M^n$  — многообразие с краем, Подмногообразие  $K^k \subset M$  (тоже с краем) называется *правильно вложенным*, если

1.  $\partial K = K \cap \partial M$ .
2. Для любой точки  $x \in \partial K$  существует такая (краевая) карта  $(U, \varphi)$  для  $M$ , что

$$\varphi(U) \cap K = \varphi(U) \cap \mathbb{R}_+^k,$$

где  $\mathbb{R}_+^k$  рассматривается как подмножество в  $\mathbb{R}_+^n$  стандартным образом.

**Теорема 7.7** (о дважды регулярном прообразе). Пусть  $M^m$  — гладкое многообразие с краем,  $N^n$  — гладкое многообразие (без края),  $m > n$ ,  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение. Пусть  $q \in N$  — регулярное значение и для  $f|_{M \setminus \partial M}$ , и для  $f|_{\partial M}$ . Тогда  $f^{-1}(q)$  — правильно вложенное подмногообразие размерности  $m - n$  в  $M$ .

*Доказательство.* Из обычной теоремы о прообразе регулярного значения следует, что  $f^{-1}(q) \cap (M \setminus \partial M)$  — подмногообразие в  $M \setminus \partial M$ . Построим «выпрямляющую карту» как в определении в окрестности точки  $p \in f^{-1}(q) \cap \partial M$ .

Переходом в карты доказываемое утверждение сводится к случаю, когда  $M = \mathbb{R}_+^m$ ,  $N = \mathbb{R}^n$ ,  $p = 0_{\mathbb{R}^m}$ ,  $q = 0_{\mathbb{R}^n}$ . Можно считать, что  $f$  гладко продолжено с полупространства на все  $\mathbb{R}^m$ . Построим отображение  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  вида

$$\varphi(x) = (x_1, L(x), f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{R}^n,$$

где  $x_1$  — первая координата точки  $x$ ,  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n-1}$  — такое линейное отображение, что дифференциал  $d_0\varphi$  невырожден. Такое  $L$  существует, так как дифференциал отображения  $x \mapsto (x_1, f(x))$  имеет максимальный ранг  $(m + 1)$ . Это следует из условия регулярности точки  $q$  для  $f|_{\partial M}$ .

Так как  $d_0\varphi$  невырожден,  $\varphi$  является локальным диффеоморфизмом в некоторой окрестности  $U \ni 0$  в  $\mathbb{R}^m$ . При этом  $\varphi(\mathbb{R}_+^m) \subset \mathbb{R}_+^m$ , поэтому множество  $U \cap \mathbb{R}_+^m$  переходит в окрестность нуля в полупространстве  $\mathbb{R}_+^m$ . Наконец,  $U \cap f^{-1}(0)$  переходит в множество тех точек из  $\varphi(U)$ , у которых последние  $n$  координат равны нулю, то есть в  $\varphi(U) \cap \mathbb{R}_+^{m-n}$ . Следовательно,  $(U, \varphi)$  — искомая карта.  $\square$

### 7.3 Теорема о воротнике

**Теорема 7.8.** Для любого гладкого многообразия с краем  $(M, \partial M)$  существует окрестность  $U$  его края, диффеоморфная  $\partial M \times [0, 1]$ , причем можно выбрать диффеоморфизм  $\Phi: U \rightarrow \partial M \times [0, 1]$  так, что  $\Phi(x) = (x, 0)$  для всех  $x \in \partial M$ .

*Доказательство.* Сначала построим гладкую ретракцию  $\pi: U_1 \rightarrow \partial M$ , где  $U_1$  — некоторая окрестность края. Это можно сделать, например, так. Вложим  $M$  в  $\mathbb{R}^N$  (теорема о вложении для многообразий с краем точно такая же, как для многообразий без края) и далее будем считать, что  $M$  — подмногообразие (с краем) в  $\mathbb{R}^N$ . Пусть  $\Omega$  — трубчатая окрестность подмногообразия  $\partial M$  в  $\mathbb{R}^N$ ,  $P: \Omega \rightarrow \partial M$  — соответствующая ретракция. Положим  $U_1 = \Omega \cap M$  и  $\pi = P|_{U_1}$ , это дает искомую окрестностную ретракцию. Далее в процессе доказательства окрестность  $U$  будет уменьшаться, однако уменьшенные окрестности тоже будут обозначаться буквой  $U$ .

Теперь построим гладкую функцию  $h: U \rightarrow [0, +\infty)$  такую, что  $h|_{\partial M} = 0$  и для любой точки  $x \in \partial M$  и любого касательного вектора  $v \in T_x^+ M$  (то есть направленного внутрь  $M$ ) верно, что  $d_x h(v) > 0$ . Такая функция существует в окрестности любой точки края, например, подходит расстояние до края в карте. Из локально определенных функций можно построить искомую функцию  $h$  склеиванием по разбиению единицы (разбиение единицы для многообразий с краем строится точно так же, как для многообразий без края). Нетрудно проверить, что условие  $d_x h(v) > 0$  для всех  $x \in \partial M$  и  $v \in T_x^+ M$  сохранится при склеивании функций по разбиению единицы (здесь помогает то, что все функции обращаются в ноль на краю).

Определим  $\Psi: U \rightarrow \partial M \times [0, +\infty)$  равенством

$$\Psi(x) = (\pi(x), h(x))$$

для всех  $x \in U$ . Для всех  $x \in \partial M$  верно, что  $\Psi(x) = (x, 0)$  и  $d_x \Psi$  невырождено. По теореме об обратной функции получаем, что у каждой точки  $x \in \partial M$  есть окрестность  $U_x$  в  $M$  такая, что  $\Psi$  диффеоморфно отображает  $U_x$  на окрестность точки  $(x, 0)$  в  $\partial M \times [0, +\infty)$ . Уменьшив  $U$ , можно считать, что  $U$  равно объединению таких  $U_x$  по всем  $x$ , в частности,  $d\Psi$  невырожден всюду на  $U$ . С помощью следующей леммы покажем, что  $\Psi$  диффеоморфно отображает некоторую окрестность  $\partial M$  в  $M$  на окрестность множества  $\partial M \times \{0\}$  в  $\partial M \times [0, +\infty)$ .

**Лемма 7.9.** Пусть  $X$  и  $Y$  — метризуемые топологические пространства,  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение,  $A \subset X$  — произвольное подмножество. Предположим, что  $f|_A$  — топологическое вложение (то есть гомеоморфизм на образ) и у каждой точки  $a \in A$  есть такая окрестность  $U_a$  в  $X$ , что  $f|_{U_a}$  инъективно. Тогда  $f$  инъективно на некоторой окрестности множества  $A$ .

*Доказательство.* Зафиксируем метрики  $d_X$  и  $d_Y$  на  $X$  и  $Y$ . Для каждой точки  $a \in A$  выберем такой радиус  $r_a$ , что шар  $B_{3r_a}(a)$  пространства  $X$  содержится в  $U_a$ . Обозначим  $B_a = B_{r_a}(a)$  и заметим такое свойство: если  $a, b \in A$  и  $B_a \cap B_b \neq \emptyset$ , то  $f$  инъективно на  $B_a \cap B_b$ . Действительно, можно считать, что  $r_a \geq r_b$ , иначе поменяем ролями  $a$  и  $b$ . Тогда по неравенству треугольника  $B_b \subset U_a$ , откуда следует требуемая инъективность.

Так как отображение

$$(f|_A)^{-1}: f(A) \rightarrow A$$

непрерывно в точке  $f(a)$ , существует такое  $\varepsilon_a > 0$ , что для всех  $a' \in A$ , удовлетворяющих условию  $d_Y(f(a), f(a')) < \varepsilon_a$ , верно, что  $a' \in B_a$ .

Так как  $f$  непрерывно в точке  $a$ , существует такая окрестность  $V_a$  точки  $a$  в  $X$ , что  $d_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon_a}{2}$  для всех  $x \in V_a$ . При необходимости уменьшим  $V_a$  так, чтобы она содержалась в  $B_a$ . Пусть  $V$  — объединение окрестностей  $V_a$  по всем  $a \in A$ . Тогда  $V$  — искомая окрестность, на которой  $f$  инъективно.

Действительно, пусть  $x, y \in V$  и  $f(x) = f(y)$ . По построению  $x \in V_a$  и  $y \in V_b$  для некоторых  $a, b \in A$ , откуда по неравенству треугольника

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq d_Y(f(a), f(x)) + d_Y(f(b), f(y)) < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} \leq \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}.$$

Можно считать, что  $\varepsilon_a \geq \varepsilon_b$ , иначе поменяем ролями  $a$  и  $b$ . Тогда предыдущее неравенство принимает вид  $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon_a$ , откуда  $b \in B_a$  (по определению  $\varepsilon_a$ ). Следовательно,  $B_a \cap B_b \neq \emptyset$ . Как показано выше, отсюда следует, что  $f$  инъективно на  $B_a \cup V_b$  и тем более на  $V_a \cup V_b$ . Отсюда  $x = y$ , что доказывает инъективность  $f|_V$  и завершает доказательство леммы.  $\square$

Применяя лемму к  $X = U$ ,  $Y = \partial M \times [0, +\infty)$  и  $f = \Psi$ , получаем, что окрестность  $U$  можно уменьшить так, что  $\Psi|_U$  станет инъективным. Так как  $d\Psi$  невырожден на  $U$ , отсюда следует, что  $\Psi$  диффеоморфно отображает  $U$  на открытое множество  $\Psi(U) \subset \partial M \times [0, +\infty)$ . Еще уменьшая окрестность, можно добиться того, что  $\Psi(U)$  — подграфик положительной гладкой функции  $\varepsilon: \partial M \rightarrow (0, +\infty)$ , то есть

$$\Psi(U) = \{(x, y) : x \in \partial M, 0 < y < \varepsilon(x)\}$$

(см. лемму 6.5). Теперь искомый диффеоморфизм  $\Phi$  между  $U$  и  $\partial M \times [0, 1)$  получается композицией  $\Psi$  и диффеоморфизма

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{y}{\varepsilon(x)}\right)$$

пространства  $\partial M \times [0, +\infty)$ . Теорема о воротнике доказана.  $\square$