

Симплектические структуры и гамильтоновы потоки (заметки к курсу)

С.В. Иванов

23 мая 2025 г.

Содержание

1	От ньютоновой механики к гамильтоновой	2
1.1	Язык ньютоновой механики	3
1.1.1	Уравнения Ньютона и принцип детерминированности	3
1.1.2	Третий закон Ньютона и сохранение импульса	3
1.1.3	Движение в потенциальном поле, сохранение энергии	4
1.1.4	Потенциальные системы	5
1.1.5	Голономные связи, принцип Даламбера	8
1.2	Лагранжева механика	10
1.2.1	Лагранжевы системы	10
1.2.2	Принцип наименьшего действия	12
1.2.3	Голономные связи	13
1.3	Уравнения Гамильтона	14
1.3.1	Преобразование Лежандра	14
1.3.2	Преобразование Лежандра на многообразии	16
1.3.3	Переход к уравнениям Гамильтона	16
2	Симплектические многообразия	17
2.1	Отступление: дифференциальные формы	17
2.1.1	Определения	17
2.1.2	Внешнее произведение	18
2.1.3	Координатное представление	19
2.1.4	Внешнее дифференцирование	20
2.1.5	Когомологии де Рама	21
2.2	Симплектические формы	21
2.2.1	Определение и первые примеры	21
2.2.2	Двумерный случай	22
2.2.3	Симплектическая линейная алгебра	23
2.2.4	Канонические формы на кокасательном расслоении	23
2.2.5	Симплектический объем	24
2.3	Связь симплектических и комплексных структур	24
2.3.1	Согласованные структуры	24
2.3.2	Форма и метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$	27
2.3.3	Существование согласованных комплексных структур	28

3	Гамильтоновы потоки	29
3.1	Определение. Сохранение гамильтониана	29
3.2	Поверхности уровня гамильтониана. Принцип Мопертюи	30
3.3	Отступление: производная Ли	31
3.3.1	Вычисление производной Ли	32
3.3.2	Волшебная формула Картана	33
3.4	Симплектические потоки и векторные поля	35
4	Теорема Лиувилля и приложения	35
4.1	Теорема Лиувилля	35
4.2	Интегральная формула Сантало	36
4.3	Конформная краевая жесткость	38
5	Построение симплектоморфизмов	39
5.1	Скобка Пуассона	39
5.2	Теорема Дарбу	40
5.3	Трюк Мозера	41
5.4	Сечения	42
5.5	Бильярды	43
6	Интегралы гамильтоновых систем	44
6.1	Интегралы и коммутирование	44
6.2	Нётеровские интегралы	45
6.3	Вполне интегрируемые системы, лиувиллевы торы	46
6.4	Координаты действие-угол	47
6.5	Симплектическая редукция по действию окружности	50

1 От ньютоновой механики к гамильтоновой

Исторически симплектические структуры выросли из классической механики, в том числе в связи с желанием излагать её на инвариантном языке. Можно выделить следующие этапы развития математических оснований механики:

- Ньютонова механика: уравнения движения задаются «силами», действующими на физические объекты.
- Лагранжева механика: траектории механической системы определяются как решения вариационной задачи, движение описывается уравнениями Эйлера-Лагранжа.
- Гамильтонова механика: движение описывается уравнениями Гамильтона.

Уравнения Гамильтона могут быть записаны в бескоординатной форме с помощью симплектической структуры. Симплектическое многообразие — многообразие с заданной на нем симплектической структурой — интересный объект изучения независимо от мотивировок из механики. Этим и занимается симплектическая геометрия и топология.

Сначала рассмотрим путь от ньютоновой механики к лагранжевой и от лагранжевой к гамильтоновой.

1.1 Язык ньютоновой механики

В классической ньютоновской механике физические объекты моделируются материальными точками в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d (обычно $d = 3$). Материальная точка описывается своим положением — вектором из \mathbb{R}^d , который зависит от времени, и массой — положительным числом, которое предполагается постоянным.

1.1.1 Уравнения Ньютона и принцип детерминированности

Пусть n — количество рассматриваемых материальных точек, m_1, \dots, m_n — их массы, $q_1(t), \dots, q_n(t)$ — их положения в момент времени t . Вектор

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \in (\mathbb{R}^d)^n$$

называется *конфигурацией* системы в момент t . Пространство $(\mathbb{R}^d)^n$ (или область в нем, состоящая из допустимых конфигураций рассматриваемой задачи) называется *конфигурационным пространством* данной системы.

Описание законов движения на ньютоновском языке состоит в том, что заданы «силы» F_1, \dots, F_n (где $F_i = F_i(t) \in \mathbb{R}^d$ — сила, действующая на точку q_i), и движение подчинено **уравнениям Ньютона**:

$$\ddot{q}_i = \frac{F_i}{m_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Удобно ввести в рассмотрение *обобщенный импульс*

$$p = (m_1 \dot{q}_1, \dots, m_n \dot{q}_n) \in \mathbb{R}^{dn}$$

и записывать уравнения в виде

$$\dot{p} = F,$$

где $F = (F_1, \dots, F_n) \in \mathbb{R}^{dn}$.

Принцип детерминированности. Силы в каждый момент времени однозначно определяются положениями и скоростями точек в этот момент: $F_i = F_i(q(t), \dot{q}(t), t)$. Конкретный вид этой зависимости определяется физической стороной рассматриваемой задачи.

Предполагается, что зависимость сил F_i от параметров q, \dot{q}, t гладкая. Тогда уравнения Ньютона становятся системой ОДУ второго порядка, которая имеет единственное решение для любых начальных условий $(t_0, q(t_0), \dot{q}(t_0))$. Таким образом, эволюция механической системы однозначно определяется положениями и скоростями точек в произвольный момент времени.

1.1.2 Третий закон Ньютона и сохранение импульса

Обычно предполагается, что все силы — это силы взаимодействия. А именно, для каждой пары точек q_i и q_j определена сила F_{ij} , с которой точка q_j «воздействует» на точку q_i . Вектор F_{ij} зависит только от положений и скоростей этой пары точек, а вид этой зависимости определяется физической природой объектов, представляемых этими точками.

Кроме того, в описании механической системы могут присутствовать *внешние силы*. Обычно это силы взаимодействия с объектами, которые не включены в рассматриваемую систему (например, сила притяжения Земли в задачах о движении вблизи земной поверхности), но в некоторых задачах могут также присутствовать внешние *силы инерции*, связанные с использованием неинерциальной системы отсчёта (например, сила Кориолиса).

Итоговый вектор силы F_i , действующей на точку q_i , равен сумме всех сил взаимодействия и внешних сил, действующих на эту точку:

$$F_i = F_i^e + \sum_j F_{ij},$$

где F_i^e — внешняя сила, действующая на q_i , F_{ij} — сила действия q_j на q_i . Каждое слагаемое в формуле тоже может складываться из сил разной природы, но для общего описания это несущественно.

Для сил взаимодействия постулируется **третий закон Ньютона**: $F_{ji} = -F_{ij}$ («силы действия и противодействия равны по величине и противоположны по направлению»).

Теорема 1.1 (закон сохранения импульса). *Производная суммарного импульса системы равна сумме всех внешних сил, то есть*

$$\frac{d}{dt} \left(\sum m_i \dot{q}_i \right) = \sum F_i^e.$$

В частности, если внешних сил нет, то суммарный импульс $\sum m_i \dot{q}_i \in \mathbb{R}^d$ (не путать с обобщенным импульсом!) остается постоянным.

Доказательство. Тривиальное вычисление, из третьего закона Ньютона. □

Закон сохранения импульса удобно понимать как закон движения центра масс системы, то есть точки $q_c = \frac{1}{M} \sum m_i q_i$, где $M = \sum m_i$. Эта точка движется так же, как если бы она была материальной точкой с массой M , на которую действует сумма всех внешних сил системы $F^e = \sum F_i^e$. Таким образом, можно исключать из рассмотрения внутренние взаимодействия в подсистемах точек, рассматривая вместо них центры масс. Например, в небесной механике можно считать планеты точками, а не подсистемами, состоящими из огромного множества атомов.

1.1.3 Движение в потенциальном поле, сохранение энергии

Система с силовым полем — такая, где сила, действующая на материальную точку, зависит только от положения точки. Из физических соображений (закон сохранения энергии, невозможность вечного двигателя) силовое поле должно быть потенциальным, то есть на конфигурационном пространстве существует гладкая функция U , называемая *потенциальной энергией*, такая, что

$$F = -\text{grad } U,$$

где grad обозначает градиент. Функция U определена с точностью до прибавления константы, физический смысл имеют только разности её значений.

Рассмотрим потенциальное поле в \mathbb{R}^d , в котором движется одна частица $q = q(t)$ с массой m . Уравнения Ньютона принимают вид

$$\ddot{q}(t) = -\frac{1}{m} \text{grad } U(q(t)).$$

Пример 1.2. Для ньютоновского гравитационного поля с центром в нуле потенциальная энергия имеет вид $U(q) = -\frac{Gm}{|q|}$, где G — константа, определяемая массой центрального тела. Сила действует по закону обратных квадратов: $F = -Gm \frac{q}{|q|^3}$.

Упражнение 1.3. Любое центральное силовое поле (т. е. поле радиально направленных сил с величиной, зависящей только от расстояния до центра) потенциально.

Определение 1.4. Кинетической энергией материальной точки $q = q(t)$ с массой m называется величина $\frac{m|\dot{q}|^2}{2}$.

Теорема 1.5 (закон сохранения энергии). При движении в потенциальном поле сумма кинетической и потенциальной энергии остаётся постоянной:

$$\frac{m|\dot{q}(t)|^2}{2} + U(q(t)) = \text{const}.$$

Доказательство. Дифференцируя слагаемые, получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{m|\dot{q}(t)|^2}{2} = m\langle \dot{q}(t), \ddot{q}(t) \rangle = \langle \dot{q}(t), -\text{grad} U(q(t)) \rangle$$

и

$$\frac{d}{dt} U(q(t)) = d_{q(t)} U(\dot{q}(t)) = \langle \dot{q}(t), \text{grad} U(q(t)) \rangle.$$

Сумма производных равна нулю, откуда следует требуемое. \square

1.1.4 Потенциальные системы

Рассмотрим систему из n частиц $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^d$, между которыми имеются силы взаимодействия, зависящие только от взаимных расположений. Из физических соображений взаимодействие в каждой паре точек должно быть потенциальным, то есть для каждой пары частиц q_i и q_j определена потенциальная энергия их взаимодействия

$$U_{ij} = U_{ij}(q_i, q_j),$$

и сила действия q_j на q_i равна

$$F_{ij} = -\text{grad}_{q_i} U_{ij}(q_i, q_j),$$

где $\text{grad}_{q_i} U_{ij}$ обозначает градиент величины $U_{ij}(q_i, q_j)$ как функции от q_i при фиксированном значении q_j .

Кроме сил взаимодействия, допускаем наличие внешних полей с потенциальной энергией $U_i = U_i(q_i)$ для i -й частицы. Общая сила, действующая на i -ю точку, по определению равна

$$F_i = F_i^e + \sum_{j \neq i} F_{ij} = -\text{grad} U_i(q_i) - \sum_{j \neq i} \text{grad}_{q_i} U_{ij}(q_i, q_j). \quad (1.1)$$

Уравнения движения стандартные:

$$\ddot{q} = \left(\frac{1}{m_1} F_1, \dots, \frac{1}{m_n} F_n \right).$$

где m_1, \dots, m_n — массы частиц.

Предположения. Дополнительно предполагаем, что энергия взаимодействия U_{ij} зависит только от вектора $q_i - q_j$ и симметрична:

$$U_{ij} = U_{ji} = U_{ij}(q_i - q_j).$$

Это мотивируется физическими соображениями: однородность пространства (т.е. инвариантность законов физики относительно параллельных переносов) и третий закон Ньютона.

Определение 1.6. Механические системы рассматриваемого типа, удовлетворяющие указанным предположениям, далее будем называть *потенциальными системами*.

Замечание. Физические соображения (изотропность пространства) позволяют также предположить, что вектор $U_{ij}(q_i, q_j)$ пропорционален $q_i - q_j$ и коэффициент пропорциональности зависит только от расстояния $|q_i - q_j|$. Нам это не потребуется.

Сведение к случаю одной точки

Рассмотрим потенциальную систему как выше. Будем обозначать буквой q точку конфигурационного пространства,

$$q = (q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}^d)^n.$$

Определим общую потенциальную энергию системы

$$U(q) = \sum_{i=1}^n U_i(q_i) + \sum_{1 \leq i < j < n} U_{ij}(q_i, q_j). \quad (1.2)$$

Будем рассматривать U как функцию переменных q_1, \dots, q_n и обозначать через $\text{grad}_{q_i} U$ её градиент как функции одной переменной $q_i \in \mathbb{R}^d$ при фиксированных значениях остальных. Формулу (1.1) для силы F_i можно переписать в виде

$$F_i = -\text{grad}_{q_i} U(q), \quad (1.3)$$

так как разность между $U(q)$ и функциями, дифференцируемыми в (1.1), состоит из слагаемых, не зависящих от q_i .

Введём на конфигурационном пространстве $(\mathbb{R}^d)^n$ новое скалярное произведение:

$$\langle v, w \rangle_m := \sum_{i=1}^n m_i \langle v_i, w_i \rangle$$

для всех $v = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ и $w = (w_1, \dots, w_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — обычное скалярное произведение в \mathbb{R}^d .

Теорема 1.7. *В терминах введенной выше структуры ньютоновские уравнения движения можно записать в виде*

$$\ddot{q} = -\text{grad}_m U(q),$$

где $\text{grad}_m U(q)$ — градиент функции U относительно евклидовой метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$, то есть такой вектор из $(\mathbb{R}^d)^n$, что

$$\langle \text{grad}_m U(q), w \rangle_m = d_q U(w)$$

для всех $w \in \mathbb{R}^{dn}$.

Доказательство. Из формулы (1.3) имеем

$$\ddot{q}_i = -\frac{1}{m_i} \text{grad}_{q_i} U(q)$$

для каждого $i = 1, \dots, n$. С другой стороны, вектор $\text{grad}_m U(q)$ выражается через обычный градиент равенством

$$\text{grad}_m U(q) = \left(\frac{1}{m_1} \text{grad}_{q_1} U(q), \dots, \frac{1}{m_n} \text{grad}_{q_n} U(q) \right).$$

Из этих равенств сразу следует требуемое. \square

Таким образом, систему рассматриваемого типа всегда можно свести к движению одной точки с массой 1 в потенциальном поле в (dn) -мерном конфигурационном пространстве. Это конфигурационное пространство как векторное пространство совпадает с $\mathbb{R}^{dn} = (\mathbb{R}^d)^n$,

но его евклидова структура задаётся нестандартным скалярным произведением \langle, \rangle_m . Это скалярное произведение называется *тензором массы*.

В итоге механическая система задаётся парой (X, U) , где X — конечномерное евклидово пространство, $U: X \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция (потенциальная энергия). Или, более общо, тройкой (X, Ω, U) , где $\Omega \subset X$ — открытое множество допустимых конфигураций, а функция U определена только на Ω . Тензор массы входит в эти данные как часть структуры евклидова пространства X .

Замечание. Так как все евклидовы пространства одинаковой размерности изоморфны, можно преобразовать координаты так, чтобы получилось движение в потенциальном поле в \mathbb{R}^{dn} со стандартным скалярным произведением. Например, подходит преобразование координат по правилу

$$q \mapsto \tilde{q} = (\sqrt{m_1}q_1, \dots, \sqrt{m_n}q_n),$$

вместе с соответствующей заменой переменной в функции U :

$$\tilde{U}(\tilde{q}) = U(q) = U\left(\frac{\tilde{q}_1}{\sqrt{m_1}}, \dots, \frac{\tilde{q}_n}{\sqrt{m_n}}\right).$$

Однако в конкретных задачах такое преобразование редко бывает полезным.

Кинетическая и потенциальная энергия

В системе из n материальных точек $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^d$ с массами m_1, \dots, m_n кинетической энергией называется величина

$$T = T(\dot{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i |\dot{q}_i|^2}{2}, \quad (1.4)$$

то есть сумма кинетических энергий всех точек. В терминах тензора массы определение кинетической энергии переписывается в виде

$$T = \frac{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle_m}{2},$$

что согласуется с кинетической энергией системы из одной точки в конфигурационном пространстве с евклидовой структурой, заданной тензором массы. Теперь из закона сохранения энергии для одной точки в потенциальном поле следует закон сохранения для системы нескольких точек с потенциальными взаимодействиями:

$$T(\dot{q}) + U(q) = \text{const},$$

где $U(q)$ — потенциальная энергия системы, определяемая формулой (1.2). Это можно доказать сведением к случаю одной точки как описано выше или прямым вычислением.

Импульсы и силы как ковекторы

Из рассмотрений выше видно, что импульс и силу удобно считать ковекторами:

$$p = \langle \dot{q}, \cdot \rangle_m,$$

$$F = -d_q U.$$

Ньютоновские уравнения движения по-прежнему можно записать в виде

$$\dot{p} = F,$$

где в правой и левой части теперь стоят ковекторы.

Произвольные (не обязательно потенциальные) силы интерпретируются как ковекторы следующим образом: набор сил, представленный набором векторов

$$F = (F_1, \dots, F_n) \in (\mathbb{R}^d)^n,$$

действует на вектор $v = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ по правилу

$$F \cdot v = \sum_{i=1}^n \langle F_i, v \rangle,$$

где \langle, \rangle — обычное скалярное произведение в \mathbb{R}^d (массы в формуле не участвуют). Это правило интерпретации силы как ковектора согласовано с уравнением Ньютона $\dot{p} = F$, где $p = \langle \dot{q}, \cdot \rangle_m$ — обобщенный импульс, понимаемый как ковектор. В механике величина $F \cdot v$ называется *работой сил F на виртуальном перемещении v* .

1.1.5 Голономные связи, принцип Даламбера

Голономная связь — физическое ограничение, заставляющее траектории в конфигурационном пространстве лежать на некотором гладком подмногообразии M (это может быть и многообразие с особенностями, но этот случай не рассматриваем). Примеры: шарик на блюде, маятник, шарнирный механизм.

В ньютоновской механике голономную связь обеспечивают дополнительно вводимые силы (сила реакции опоры, сила натяжения нити, ...). Они называются *силами реакции*.

Принцип Даламбера. Силы реакции ортогональны (в правильно понимаемом смысле) подмногообразию M допустимых положений точки.

Удобно рассматривать силы как ковекторы, тогда условие ортогональности следует понимать так: ковектор сил реакции обращается в ноль на касательном пространстве подмногообразия M в данной точке. Классическая формулировка: работа силы реакции на любом виртуальном перемещении равна нулю.

Пример 1.8. Рассмотрим *шарнирный механизм*: система состоит из n материальных точек $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^d$, некоторые пары точек соединены жесткими стержнями, длины которых фиксированы. Таким образом, в множестве пар номеров (i, j) , $1 \leq i \neq j \leq n$ задано симметричное множество E (рёбер графа), для каждой пары $(i, j) \in E$ задано число $\ell_{ij} > 0$, и голономное ограничение состоит в том, что $|q_i - q_j| = \ell_{ij}$ для всех пар $(i, j) \in E$.

«Школьное» правило расстановки сил в шарнирном механизме состоит в том, что стержень между точками q_i и q_j создает силу реакции F_{ij} , действующую на точку q_i , и силу реакции $F_{ji} = -F_{ij}$, действующую на точку q_j , причем эти силы направлены вдоль прямой $(q_i q_j)$. Проверим, что это правило согласовано с принципом Даламбера.

Пусть $M \subset (\mathbb{R}^d)^n$ — множество допустимых конфигураций шарнирного механизма. Для простоты будем предполагать, что M — гладкое подмногообразие в $(\mathbb{R}^d)^n$ (это предположение верно для почти всех наборов длин стержней). Пусть $q \in M$, $q = (q_1, \dots, q_n)$ в $(\mathbb{R}^d)^n$. Касательное пространство $T_q M$ отождествим с соответствующим линейным подпространством в $(\mathbb{R}^d)^n$. Пусть $v \in T_q M$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ в $(\mathbb{R}^d)^n$. Зафиксируем пару $(i, j) \in E$. Так как на M функция $|q_i - q_j|^2 = \ell_{ij}^2$ постоянна, её производная вдоль v в точке q равна нулю. С другой стороны, эта производная равна $2\langle q_i - q_j, v_i - v_j \rangle$. Таким образом,

$$\langle q_i - q_j, v_i - v_j \rangle = 0.$$

Пусть $F_{ij}, F_{ji} \in (\mathbb{R}^d)^n$ — векторы сил реакции стержня, удовлетворяющие описанному выше «школьному» правилу. Тогда из последнего равенства следует, что

$$\langle F_{ij}, v_i \rangle + \langle F_{ji}, v_j \rangle = \langle F_{ij}, v_i - v_j \rangle = 0. \quad (1.5)$$

Здесь в первом равенстве используется тождество $F_{ji} = -F_{ij}$, а во втором — то, что вектор F_{ij} пропорционален вектору $q_i - q_j$. Складывая равенства (1.5) по всем парам $(i, j) \in E$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^n \langle F_i, v_i \rangle = 0, \quad (1.6)$$

где F_i — сумма сил реакции, действующих на q_i , то есть

$$F_i = \sum_{j:(i,j) \in E} F_{ij}.$$

Равенство (1.6) означает, что вектор сил $F = (F_1, \dots, F_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ ортогонален вектору v : $\langle F, v \rangle = 0$. Так как v — произвольный вектор из $T_q M$, отсюда следует, что $F \perp T_q M$ в стандартной евклидовой метрике пространства $(\mathbb{R}^d)^n$. Это и есть принцип Даламбера (напомним, что массы не участвуют в интерпретации сил как ковекторов).

Следующая теорема показывает, что принцип Даламбера однозначно определяет движение в системе с голономными связями. С физической точки зрения Ω в теореме — конфигурационное пространство механической системы, F — зависимость сил (за исключением силы реакции) от положения и скорости, M — множество конфигураций, допускаемых голономной связью.

Теорема 1.9. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая функция, $M \subset \Omega$ — гладкое подмногообразие, $q_0 \in M$ и $v_0 \in T_{q_0} M$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует единственная гладкая кривая $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ с начальными данными $\gamma(0) = q_0$ и $\dot{\gamma}(0) = v_0$, удовлетворяющая условию «ортогональности силы реакции»:

$$\ddot{\gamma}(t) - F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \perp T_{\gamma(t)} M \quad (1.7)$$

для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $k = \dim M$. Так как утверждение теоремы локально, можно считать Ω малой окрестностью точки q . Если эта окрестность достаточно мала, то M можно представить в виде регулярного прообраза: существует гладкое отображение $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, дифференциал которого всюду имеет ранг $n - k$, такое, что $M = h^{-1}(0)$.

Пусть γ — гладкая кривая в M . Тогда функция $h \circ \gamma$ — константа. Дифференцируя её два раза, получаем равенство

$$0 = (h \circ \gamma)'' = dh(\ddot{\gamma}) + d^2h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \quad (1.8)$$

где $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t)$ и $\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}(t)$, а dh и d^2h обозначают первый и второй дифференциал функции h в точке $\gamma(t)$. Это равенство можно рассматривать как линейное уравнение на вектор $\ddot{\gamma}$. Более общо, рассмотрим произвольные $q \in \Omega$ и $v \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим множество всех векторов $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих уравнению

$$d_q h(\xi) + d_q^2 h(v, v) = 0.$$

Так как $\text{rank } d_q h = n - k$ и $\ker d_q h = T_q M$, уравнение имеет единственное решение ξ_0 в ортогональном дополнении $(T_q M)^\perp$, а всё множество его решений — аффинное подпространство

$\xi_0 + T_q M$. Обозначим вектор ξ_0 через $S_q(v)$. Нетрудно проверить, что S_q — квадратичное отображение, гладко зависящее от q . Уравнение (1.8) теперь можно переписать в виде

$$\ddot{\gamma}(t)^\perp = S_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad (1.9)$$

где $\ddot{\gamma}(t)^\perp$ — проекция вектора $\ddot{\gamma}(t)$ на ортогональное дополнение $(T_{\gamma(t)}M)^\perp$. (Эта формула — многомерный аналог теоремы Менье из дифференциальной геометрии, а отображение S_q играет роль второй формы поверхности M).

Условие «ортогональности силы реакции» (1.7) однозначно определяет проекцию вектора $\dot{\gamma}(t)$ на касательное пространство $T_{\gamma(t)}M$. Более общо, для точки $q \in \Omega$ обозначим через P_q ортогональную проекцию из \mathbb{R}^n на подпространство $\ker d_q h$. Тогда условие (1.7) можно переписать в виде

$$\ddot{\gamma}(t)^\top = P_{\gamma(t)}(F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))), \quad (1.10)$$

где $\ddot{\gamma}(t)^\top = P_{\gamma(t)}(\ddot{\gamma}(t))$. Теперь из равенства $\ddot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}(t)^\perp + \ddot{\gamma}(t)^\top$ следует, что для любой кривой γ , удовлетворяющей условиям теоремы, выполняется равенство

$$\ddot{\gamma}(t) = S_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) + P_{\gamma(t)}(F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))). \quad (1.11)$$

Так как это ОДУ второго порядка, его решение однозначно определяется начальными данными $\gamma(0)$ и $\dot{\gamma}(0)$. Это доказывает единственность в теореме.

Чтобы доказать существование, рассмотрим кривую $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемую как решение уравнения (1.11) с начальными данными $\gamma(0) = q_0 \in M$ и $\dot{\gamma}(0) = v_0 \in T_{q_0}M$. Из уравнения (1.11) следует равенство (1.9), которое равносильно равенству $(h \circ \gamma)'' = 0$, см. (1.8). Так как $v_0 \in T_{q_0}M$, имеем $(h \circ \gamma)'(0) = 0$, откуда $(h \circ \gamma)' = 0$ всюду. Следовательно, $h \circ \gamma$ — константа, а так как $q_0 \in M$, эта константа равна $0_{\mathbb{R}^{n-k}}$. Таким образом, $\gamma(t) \in M$ при всех t . Условие (1.7) следует из (1.10), которое следует из уравнения (1.11). \square

1.2 Лагранжева механика

1.2.1 Лагранжевы системы

Это напоминание из курса вариационного исчисления.

Определение 1.10. *Лагранжева система* — пара (M, L) , где

- M — гладкое многообразие, называемое *конфигурационным пространством*;
- L — *лагранжиан* — гладкая функция на касательном расслоении TM (лагранжиан, не зависящий от времени) или, в общем случае, на $TM \times \mathbb{R}$ (лагранжиан, зависящий от времени).

Для гладкой кривой $q: [a, b] \rightarrow M$ определяем *интеграл действия*

$$I(q) = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t) dt,$$

где $(q(t), \dot{q}(t))$ — касательный вектор скорости кривой в момент t . Кривая q называется *траекторией* лагранжевой системы, если она является стационарной точкой функционала I в смысле вариационного исчисления: для любой гладкой вариации кривой q с фиксированными концами производная функционала I вдоль вариации равна 0.

Далее будем рассматривать только лагранжианы, не зависящие от времени.

Замечание. В некоторых задачах лагранжиан L может быть определён не на всём касательном пространстве TM , а на открытом подмножестве $\Omega \subset TM$. В таких случаях в определении нужно ограничиваться классом допустимых кривых, у которых все векторы скорости принадлежат Ω . Всё остальное без изменений.

Пусть на M заданы локальные координаты x_1, \dots, x_n , и пусть y_1, \dots, y_n — ассоциированные с ними координаты в касательных пространствах. Лагранжиан L можно рассматривать как функцию этих координат и писать соответствующие частные производные.

Теорема 1.11 (уравнения Эйлера–Лагранжа). *Траектории лагранжевой системы — те и только те кривые $q = q(t)$, для которых выполняется система уравнений*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y_i}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(q(t), \dot{q}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. См. курс вариационного исчисления. □

Краткая запись уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

В этой записи символы $q = (q_1, \dots, q_n)$ и $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ используются как формальные аргументы лагранжиана L (вместо x_i и y_i), а обозначение типа $\frac{\partial}{\partial q}$ скрывает за собой список частных производных $\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}$.

Замечание. Для любой кривой $q = q(t)$ (не обязательно стационарной) левая часть уравнения Эйлера–Лагранжа имеет инвариантный смысл как ковектор из $T_{q(t)}^*M$.

Определение 1.12 (невырожденность лагранжиана). Лагранжиан $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ называется невырожденным в точке $(x, v) \in TM$, если второй дифференциал $d_v^2(L|_{T_x M})$ — невырожденная билинейная форма. Лагранжиан называется невырожденным, если он невырожден в каждой точке.

Замечание. В координатах (x_i, y_i) (см. выше) невырожденность лагранжиана равносильна невырожденности матрицы вторых производных по координатам y_i :

$$\det \left(\frac{\partial L}{\partial y_i \partial y_j} \right) \neq 0.$$

Сама эта матрица зависит от выбора координат, но ее вырожденность или невырожденность — не зависит.

Теорема 1.13. *Если лагранжиан невырожден в точке $(x, v) \in TM$, то в окрестности этой точки уравнение Эйлера–Лагранжа эквивалентно системе ОДУ второго порядка, разрешенной относительно вторых производных.*

Как следствие, при невырожденном лагранжиане уравнение Эйлера–Лагранжа имеет единственное решение для любых начальных данных $q(t_0), \dot{q}(t_0)$.

Доказательство. См. курс вариационного исчисления. Или «очевидно». □

Пример 1.14. Геодезические на римановом многообразии M — стационарные точки функционала длины, т.е. они могут рассматриваться как траектории лагранжевой системы с лагранжианом $L(x, v) = |v|$. Однако этот лагранжиан вырожден, и поэтому все перепараметризации геодезической тоже окажутся стационарными точками.

Правильно вместо этого рассматривать квадратичный лагранжиан $L(x, v) = \frac{|v|^2}{2}$, тогда стационарными точками будут в точности геодезические, параметризованные с постоянной скоростью.

1.2.2 Принцип наименьшего действия

В основе лагранжевой механики лежит принцип наименьшего действия Гамильтона, который для наших целей можно сформулировать так: «правильные» механические системы — лагранжевы.

То есть, во многих задачах механики можно определить (достаточно естественно и единообразно) лагранжианы, которые задают правильные уравнения движения. Язык лагранжевой механики дает больше возможностей, чем ньютоновский, и поэтому предпочтителен всюду за пределами «школьной» физики.

Далее описываются правила перевода с ньютоновского языка на лагранжевы для механических систем с потенциальными взаимодействиями и голономными связями. Сначала рассмотрим только потенциальные системы (без голономных связей). Они преобразуются в лагранжевы системы по следующему правилу: конфигурационное пространство M лагранжевой системы — то же самое евклидово пространство X , что и в ньютоновском описании, а лагранжиан полагается равным **разности** кинетической и потенциальной энергии:

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q),$$

где (q, \dot{q}) — произвольный элемент касательного пространства $TX \cong X \times X$, $T(\dot{q})$ — кинетическая энергия «виртуального перемещения» \dot{q} , см. (1.4), $U(q)$ — потенциальная энергия конфигурации q , см. (1.2). Краткая запись: $L = T - U$.

Теорема 1.15. Для потенциальной механической системы решения уравнений Ньютона совпадают с траекториями лагранжевой системы с лагранжианом $L = T - U$.

Доказательство. В силу сведения к случаю одной точки достаточно доказать утверждение для системы из одной точки с массой 1 в потенциальном поле в \mathbb{R}^n со стандартным скалярным произведением. В этом случае лагранжиан имеет вид

$$L(q, \dot{q}) = \frac{|\dot{q}|^2}{2} - U(q),$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \dot{q}_i = \ddot{q}_i$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}(q).$$

Вычитая, получаем, что i -е уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\ddot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0.$$

Всю систему уравнений Эйлера-Лагранжа можно записать в виде

$$\ddot{q} + \text{grad } U(q) = 0,$$

а это эквивалентно уравнению Ньютона $\ddot{q} = -\text{grad } U(q)$. □

Замечание. Нетрудно видеть, что выражение $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ в уравнении Эйлера-Лагранжа для лагранжиана $L = T - U$ совпадает с обобщенным импульсом, рассматриваемым как ко-вектор. Для произвольных лагранжевых систем ко-вектор $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ тоже называют обобщенным импульсом.

1.2.3 Голономные связи

В лагранжовой механике голономная связь вводится очень просто: конфигурационное пространство заменяется на подмногообразие M конфигураций, допускаемых голономной связью, а лагранжиан L сужается на TM .

Теорема 1.16. *Для потенциальной системы с голономной связью сужение лагранжиана на подмногообразии допустимых конфигураций соответствует принципу Даламбера.*

Доказательство. Можно считать, что речь идет о системе из одной точки с массой 1 в потенциальном поле в \mathbb{R}^n со стандартной евклидовой структурой. Тогда лагранжиан имеет вид

$$L(q, \dot{q}) = \frac{|\dot{q}|^2}{2} - U(q).$$

Пусть $q = q(t)$ — кривая в подмногообразии $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $R(t)$ правую часть уравнения Эйлера-Лагранжа в объемлющем пространстве:

$$R(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \ddot{q}(t) + \text{grad } U(q(t)). \quad (1.12)$$

Как известно из вариационного исчисления, производная интеграла действия вдоль вариации с полем вариации $V(t)$ с фиксированными концами равна

$$\int_a^b \langle R(t), V(t) \rangle dt,$$

где a и b — концы отрезка параметров.

Так как мы ограничиваемся только кривыми, лежащими в M , условие стационарности означает, что интеграл обращается в 0 при любом выборе поля $V(t)$ с условием $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ при всех $t \in (a, b)$, а также $V(a) = V(b) = 0$. Как и в доказательстве уравнения Эйлера-Лагранжа, это равносильно поточечному условию: $\langle R(t), v \rangle = 0$ для любых $t \in (a, b)$ и $v \in T_{\gamma(t)}M$. Это означает, что $R(t) \perp T_{\gamma(t)}M$. Но $R(t)$ и есть вектор силы реакции, так как $\ddot{q} = -\text{grad } U + R$ из (1.12). \square

При отсутствии потенциальной энергии траектории голономной системы — то же самое, что геодезические подмногообразия M . Из доказанного вытекает

Следствие 1.17. *Равносильны следующие определения геодезической на гладком подмногообразии $M \subset \mathbb{R}^n$:*

1. Кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ — геодезическая, если $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M$ для всех $t \in [a, b]$.
2. Кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ — геодезическая, если она является стационарной для функционала энергии

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{\gamma}|^2.$$

Замечание. Нетрудно проверить, что стационарные кривые функционала $E(\gamma)$ — то же самое, что стационарные кривые функционала длины $\int |\dot{\gamma}|$, параметризованные с постоянной скоростью.

1.3 Уравнения Гамильтона

1.3.1 Преобразование Лежандра

Определение 1.18. Пусть V — векторное пространство, $\Omega \subset V$ — открытая область, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, у которой второй дифференциал $d_v^2 f$ невырожден в каждой точке $v \in V$. Рассмотрим отображение $\mathbf{L}_f: \Omega \rightarrow V^*$, заданное равенством

$$\mathbf{L}_f(v) = d_v f, \quad x \in \Omega.$$

Из условия невырожденности следует, что \mathbf{L}_f — локальный диффеоморфизм. Предположим, что он инъективен. Положим $\Omega^* = \mathbf{L}_f(\Omega)$ и определим функцию $f^*: \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$f^*(p) = p \cdot v_p - f(v_p), \quad \text{где } v_p = \mathbf{L}_f^{-1}(p),$$

для $p \in \Omega^*$, где умножение обозначает применение ковектора к вектору. Функция f^* называется *преобразованием Лежандра* функции f , а отображение \mathbf{L}_f — *преобразованием Лежандра векторов*, ассоциированным с f .

В приложениях, как правило, f определена всюду на V и есть причины, по которым f^* определена всюду на V^* .

Пример 1.19. Пусть $V = \Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2}{2}$, где $a > 0$. Тогда $f^*(p) = \frac{p^2}{2a}$.

Пример 1.20. Пусть B — невырожденная симметричная билинейная форма на V , и

$$f(v) = \frac{1}{2}B(v, v).$$

Тогда $\mathbf{L}_f(v) = B(v, \cdot)$, то есть \mathbf{L}_f — изоморфизм между V и V^* , задаваемый формой B , и f^* имеет вид

$$f^*(p) = \frac{1}{2}B^*(p, p) = \frac{1}{2}B(v_p, v_p), \quad \text{где } v_p = \mathbf{L}_f^{-1}(p).$$

То есть f^* задается той же формулой, что f , с заменой B на билинейную форму B^* , в которую изоморфизм \mathbf{L}_f переводит форму B . В частности,

1. Если $f(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма на V , то $f^*(p) = \frac{1}{2}(\|p\|^*)^2$, где $\|\cdot\|^*$ — двойственная норма на V^* .

2. Если $V = \mathbb{R}^n$ и f имеет вид $f(v) = \frac{1}{2}v^T A v$, где A — невырожденная симметричная матрица, то $f^*(p) = \frac{1}{2}p A^{-1} p^T$ для всех $p \in V^*$. Здесь в обозначениях имеется в виду, что векторы записываются матрицами-столбцами, а ковекторы — матрицами-строками.

Пример 1.21. Если $g(v) = f(v) + C$, где $C \in \mathbb{R}$ — константа, то $g^*(p) = f^*(p) - C$.

Рассмотренных выше примеров достаточно для изучения механических систем, определяемых кинетической и потенциальной энергией. Для расширения кругозора рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1.22. Если $g(v) = \lambda f(v)$, где $\lambda > 0$ — константа, то $g^*(p) = \lambda f^*(p/\lambda)$.

Пример 1.23. Пусть $V = \mathbb{R}$, $a > 1$, $f(x) = \frac{x^a}{a}$. Тогда $f^*(p) = \frac{p^b}{b}$, где $b > 1$ таково, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Пример 1.24. Пусть $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и предположим, что f растёт на бесконечности быстрее любой линейной функции. Тогда f^* определена всюду на V^* и

$$f^*(p) = \max_{v \in V} \{pv - f(v)\},$$

для всех $p \in V^*$, где $pv = p(v)$ — применение ковектора к вектору.

Примечание: в этом случае f^* также называется функцией, *двойственной по Юнгу* к f . Для выпуклых функций можно не предполагать гладкость, если в качестве определения f^* использовать формулу с максимумом.

Пример 1.25. Пусть f определена равенством $f(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$, где $\|\cdot\|$ — норма на V (не обязательно евклидова). Тогда $f^*(p) = \frac{1}{2}(\|p\|^*)^2$, где $\|\cdot\|^*$ — двойственная норма на V^* .

Теорема 1.26 (инволютивность преобразования Лежандра). Пусть $f: \Omega \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям из определения преобразования Лежандра: гладкость, невырожденность второго дифференциала и инъективность \mathbf{L}_f . Тогда f^* удовлетворяет тем же условиям, и выполняются равенства

1. $\mathbf{L}_{f^*} = (\mathbf{L}_f)^{-1}$;
2. $f^{**} = f$.

Здесь подразумевается, что V^{**} канонически отождествлено с V .

Доказательство. Гладкость f^* следует из определения и того, что \mathbf{L}_f — диффеоморфизм. Из этой гладкости следует, что определено отображение $\mathbf{L}_{f^*}: \Omega^* \rightarrow V$, заданное равенством $\mathbf{L}_{f^*}(p) = d_p(f^*)$ для всех $p \in \Omega^* = \mathbf{L}_f(\Omega)$.

Проверим, что $\mathbf{L}_{f^*} = (\mathbf{L}_f)^{-1}$. Для этого продифференцируем f^* в точке $p_0 = \mathbf{L}_f(v_0)$, где $v_0 \in \Omega$, в направлении $\xi \in V^*$. Пусть ξ — начальный вектор скорости некоторой кривой $p(t)$ с началом в p_0 , и пусть $v(t) = v_{p(t)} = (\mathbf{L}_f)^{-1}(p(t))$. Дифференцируя определение функции f^* вдоль кривой $p(t)$, получаем

$$d_p f^*(\dot{p}) = f^*(p)'_{t=0} = (pv - f(v))'_{t=0} = \dot{p}v + p\dot{v} - d_v f(\dot{v}),$$

где $v = v(t)$, $p = p(t)$ и т. д. Последние два слагаемых сокращаются, так как $p = d_v f$. Получаем, что $d_p f^*(\dot{p}) = \dot{p}v$. Подставляя $t = 0$, получаем $d_{p_0} f^*(\xi) = \xi v_0$. Так как p_0 — произвольный элемент из V^* , отсюда следует, что $d_{p_0} f^* = v_0$ с учётом канонического отождествления V^{**} с V .

Таким образом, \mathbf{L}_f и \mathbf{L}_{f^*} — взаимно обратные диффеоморфизмы между открытыми множествами $\Omega \subset V$ и $\Omega^* \subset V^*$. В частности, определено преобразование Лежандра f^{**} .

Теперь докажем, что $f^{**} = f$. Зафиксируем $v \in \Omega$ и проверим, что $f^{**}(v) = f(v)$. По определению и доказанному равенству $\mathbf{L}_{f^*} = (\mathbf{L}_f)^{-1}$,

$$f^{**}(v) = pv - f^*(p),$$

где $p = p_v = (\mathbf{L}_{f^*})^{-1}(v) = \mathbf{L}_f(v)$. Вектор v_p из определения равен v , поэтому $f^*(p) = pv - f(v)$. Подставляя, получаем требуемое равенство $f^{**}(v) = f(v)$. \square

Упражнение 1.27. Пусть $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция (не обязательно гладкая), и f^* определено формулой из примера 1.24. Тогда f^* тоже выпуклая и $f^{**} = f$.

1.3.2 Преобразование Лежандра на многообразии

Пусть M — гладкое многообразие, $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Для $x \in M$ обозначаем $F_x = F|_{T_x M}$. Предположим, что для каждого $x \in M$ функция $F_x: T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ имеет преобразование Лежандра F_x^* , определённое на всём кокасательном пространстве $T_x^* M$.

Объединяя эти преобразования, заданные в слоях касательного расслоения, получаем отображение

$$\mathbf{L}_F: TM \rightarrow T^*M$$

и функцию

$$F^*: T^*M \rightarrow \mathbb{R},$$

называемые преобразованием Лежандра функции F (а также гамильтонианом, соответствующим лагранжиану F , см. ниже).

Теорема 1.28. При сделанных предположениях \mathbf{L}_F — диффеоморфизм между TM и T^*M , F^* удовлетворяет тем же предположениям, $\mathbf{L}_{F^*} = (\mathbf{L}_F)^{-1}$, и $F^{**} = F$.

Доказательство. Диффеоморфность следует из теоремы об обратной функции, все остальные утверждения проверяются послойно и следуют из предыдущей теоремы. \square

Пример 1.29. Пусть M снабжено римановой метрикой и задана функция $U: M \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$ определена равенством

$$F(x, v) = \frac{1}{2}|v|^2 - U(x)$$

для всех $x \in M$, $v \in T_x M$, где $|v|$ — длина вектора в римановой метрике. Тогда

$$F^*(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + U(x)$$

для всех $x \in M$, $p \in T_x^* M$, где $|p|$ — норма ковектора относительно римановой метрики.

Замечание. Предположение о том, что F и F^* определены всюду, сделано только для упрощения обозначений. В общем случае, когда они определены на открытых подмножествах $\Omega \subset TM$ и $\Omega^* \subset T^*M$, всё точно так же.

1.3.3 Переход к уравнениям Гамильтона

Определение 1.30. Пусть (M, F) — лагранжева система, и предположим, что определено биективное преобразование Лежандра $\mathbf{L}_F: TM \rightarrow T^*M$. Преобразование Лежандра $F^*: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ лагранжиана F называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*, соответствующим данному лагранжиану. Гамильтониан обычно обозначается буквой H .

Определение 1.31. Пусть $q(t)$ — кривая в многообразии M . Кривая

$$t \mapsto \mathbf{L}_F(q(t), \dot{q}(t))$$

в T^*M называется *преобразованием Лежандра* кривой q (относительно лагранжиана F).

Введем на M локальные координаты q_1, \dots, q_n , и пусть p_1, \dots, p_n — ассоциированные координаты в слоях касательного расслоения. Подставляя определение \mathbf{L}_F , получаем, что преобразование Лежандра кривой $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ имеет вид $(q(t), p(t))$, где $p(t)$ — обобщенный импульс,

$$p(t) = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)).$$

Теорема 1.32. Пусть (M, F) — лагранжева система, H — соответствующий гамильтониан. Введем на T^*M координаты q_i, p_i как описано выше. Пусть $q(t)$ — траектория лагранжевой системы, $(q(t), p(t))$ — её преобразование Лежандра. Тогда для $(q(t), p(t))$ выполняются уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

для $i = 1, \dots, n$. И обратно, любая кривая $(q(t), p(t))$ в T^*M , удовлетворяющая уравнениям Гамильтона, является преобразованием Лежандра некоторой лагранжевой траектории.

Доказательство. По построению и инволютивности преобразования Лежандра,

$$\dot{q} = (\mathbf{L}_{F_q})^{-1}(p) = \mathbf{L}_{H_q}(p) = d_p H_q,$$

где $H_q = H|_{T_q^*M}$. В координатах это равенство принимает вид $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i = 1, \dots, n$. Первое уравнение Гамильтона доказано.

Докажем второе уравнение Гамильтона. Из уравнения Эйлера-Лагранжа,

$$\dot{p}_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Остаётся доказать, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) = -\frac{\partial F}{\partial q_i}(q, v),$$

если $v \in T_q M$ и $p \in T_q^* M$ соответствуют друг другу при преобразовании Лежандра. По определению,

$$H(q, p) = p \cdot v(q, p) - F(q, v(q, p)),$$

где $v(q, p) = \mathbf{L}_{H_q}(p)$. Продифференцируем это равенство по q_i :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) = p \cdot \frac{\partial v}{\partial q_i}(q, p) - \frac{\partial F}{\partial q_i}(q, v) - d_v F_q \cdot \frac{\partial v}{\partial q_i}(q, p).$$

Так как $d_v F_q = \mathbf{L}_{F_q}(v) = p$, первое и последнее слагаемое сокращаются и остаётся требуемое равенство. \square

2 Симплектические многообразия

2.1 Отступление: дифференциальные формы

В этом разделе приведены без доказательства определения и свойства дифференциальных форм, которые используются в дальнейшем.

2.1.1 Определения

Дифференциальная форма на гладком многообразии — это кососимметричный ковариантный тензор. Более подробно это определение можно сформулировать так.

Определение 2.1. Для векторного пространства V обозначим через $\mathcal{A}^k(V)$ пространство кососимметричных k -линейных функций $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (они называются *внешними k -формами* на V). Напомним, что свойство кососимметричности состоит в том, что при перестановке любой пары аргументов значение умножается на -1 .

Пусть M — гладкое многообразие. *Дифференциальная k -форма* на M — это гладкое семейство $\{\alpha_x\}_{x \in M}$, где $\alpha_x \in \mathcal{A}^k(T_x M)$ для каждого $x \in M$.

Например, 0-формы — это в точности гладкие функции на M , 1-формы — то же, что ковекторные поля. Пространство k -форм на M будем обозначать через $\Omega^k(M)$.

Как обычно для тензоров, в дифференциальную k -форму можно подставить набор из k векторных полей и получить гладкую функцию. Дифференциальные k -формы можно поточно складывать и умножать на гладкие функции. Таким образом, $\Omega^k(M)$ — векторное пространство над \mathbb{R} и модуль над кольцом гладких функций $C^\infty(M)$.

Пример 2.2. Для любой гладкой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ её дифференциал df — дифференциальная 1-форма. Значение этой формы на касательном векторе $v \in T_x M$, где $x \in M$, по определению равно $d_x f(v)$ — производной функции f вдоль вектора v .

Пример 2.3 (демистификация символа dx_i). Пусть на гладком многообразии M^n выбрана локальная система координат (карта) $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ в области $U \subset M$. По определению карта состоит из координатных функций $x_i: U \rightarrow \mathbb{R}$. У каждой функции x_i , как у любой гладкой функции, есть дифференциал $dx_i \in \Omega^1(U)$, который называется *координатной 1-формой* данной карты.

Пусть $\partial_1, \dots, \partial_n$ — координатные векторные поля данной карты. При подстановке этих полей в форму dx_i получаются значения

$$dx_i(\partial_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Таким образом, для каждой точки $p \in U$ ковекторы $(dx_i)_p$ образуют стандартный базис кокасательного пространства $T_p^* M$.

Формы dx_i образуют базис пространства $\Omega^1(U)$ над алгеброй функций. Действительно, пусть $\alpha \in \Omega^1(U)$. Определим на U функции $f_i = \alpha(\partial_i)$, $i = 1, \dots, n$, то есть $f_i(x) = \alpha_x(\partial_i(x))$ для всех $x \in U$. Тогда $\alpha = \sum f_i dx_i$. Это равенство следует из совпадения значений правой и левой части на координатных полях.

Определение 2.4 (Обратный перенос или pull-back). Пусть M, N — гладкие многообразия, $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, $\alpha \in \Omega^k(N)$. *Обратный перенос* формы α отображением f — это дифференциальная форма $f^* \alpha \in \Omega^k(M)$, определяемая равенством

$$(f^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_k)).$$

Легко видеть, что операция обратного переноса $f^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ линейна и контравариантна: $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ для любых гладких отображений $f: M \rightarrow N$ и $g: K \rightarrow M$ между гладкими многообразиями M, N, K .

2.1.2 Внешнее произведение

Определение 2.5 (внешнее произведение). Пусть V — векторное пространство, $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$, $\beta \in \mathcal{A}^m(V)$. *Внешнее произведение* α и β — это форма $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{A}^{k+m}(V)$, определяемая равенством

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+m)!}{k! m!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta),$$

где \otimes — тензорное произведение, а Alt — оператор альтернирования (кососимметризации). При подстановке определений \otimes и Alt получается явная формула:

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+m}) = \frac{1}{k! m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+m}} (-1)^{|\sigma|} \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+m)}),$$

где $|\sigma|$ — чётность перестановки.

Если M — гладкое многообразие, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega_k(M)$, то $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+m}(M)$ определяется поточечно: $(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$ для всех $x \in M$.

Если $f \in \Omega^0(M)$, то $f \wedge \beta = f\beta$ — обычное поточечное умножение на функцию.

Свойства внешнего произведения

1. Билинейность:

$$\begin{aligned}\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) &= \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2, \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta &= \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta, \\ (c\alpha) \wedge \beta &= \alpha \wedge (c\beta) = c(\alpha \wedge \beta)\end{aligned}$$

для любых $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^k(V)$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \Omega^m(V)$ и $c \in \mathbb{R}$.

2. Кососимметричность: для $\alpha \in \Omega^k(V)$ и $\beta \in \Omega^m(V)$,

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{km} \alpha \wedge \beta$$

3. Ассоциативность: для любых дифференциальных форм α, β, γ ,

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

4. Уважается обратными переносами:

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

для любого гладкого $f: M \rightarrow N$ и дифференциальных форм α, β на N .

2.1.3 Координатное представление

Пусть на гладком многообразии M^n выбраны локальные координаты x_1, \dots, x_n в области $U \subset M$. Соответствующие координатные векторные поля будем обозначать символами $\partial_1, \dots, \partial_n$. Будем рассматривать дифференциальные формы на U , в их число входят сужения на U дифференциальных форм из $\Omega^k(M)$.

Как объяснено в примере 2.3, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ на U определена координатная 1-форма dx_i . Для набора индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ рассмотрим k -форму

$$\xi_{i_1 \dots i_k} = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (2.1)$$

Из определения внешнего произведения нетрудно найти её значение на любом наборе координатных полей $\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_k}$:

- Если набор индексов (j_1, \dots, j_k) получается из (i_1, \dots, i_k) некоторой перестановкой σ , то $\xi_{i_1 \dots i_k}(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_k}) = (-1)^{|\sigma|}$, где $|\sigma|$ — чётность перестановки.

В частности, $\xi_{i_1 \dots i_k}(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}) = 1$.

- Если же $\{j_1, \dots, j_k\} \neq \{i_1, \dots, i_k\}$, то $\xi_{i_1 \dots i_k}(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_k}) = 0$.

Отсюда видно, что формы вида (2.1) образуют базис пространства $\Omega^k(U)$. А именно, для любой формы $\alpha \in \Omega^k(U)$ верно равенство

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (2.2)$$

где $f_{i_1 \dots i_k}$ — гладкая функция на U , определяемая равенством

$$\alpha_{i_1 \dots i_k} = \alpha(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}),$$

а суммирование производится по всем k -элементным множествам $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$. Равенство (2.2) следует из совпадения значений правой и левой части на любом наборе из k координатных полей.

Пример 2.6. Любая 2-форма в \mathbb{R}^3 имеет вид

$$f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dy \wedge dz + h(x, y, z) dz \wedge dx,$$

где x, y, z — обозначения для координат в \mathbb{R}^3 , f, g, h — произвольные гладкие функции.

Интересен случай $k = n$. В этом случае базисная форма только одна: $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, а её значение на наборе векторов v_1, \dots, v_n — определитель матрицы, составленной из координат этих векторов.

2.1.4 Внешнее дифференцирование

Определение 2.7. Внешнее дифференцирование $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ — линейное отображение, которое однозначно задается следующими свойствами:

1. Для $f \in \Omega^0(M)$, df — обычный дифференциал функции f .
2. $d(df) = 0$ для $f \in \Omega^0(M)$.
3. $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$, если $\alpha \in \Omega^k(M)$
4. Локальность: значение формы $d\alpha$ в точке $x \in M$ однозначно определяется сужением α на любую окрестность этой точки. (На самом деле локальность можно вывести из предыдущих свойств, но проще её постулировать).

Легко видеть, что оператор d , если такой существует, однозначно определяется перечисленными свойствами. Существование такого оператора доказать сложнее. Проще всего определить его локально координатной формулой (см. ниже), проверить свойства из определения 2.7, после чего вывести независимость от выбора координат из единственности.

Свойства внешней производной

1. $d(d\alpha) = 0$ для любой дифференциальной формы α .
2. d коммутирует с обратным переносом:

$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$$

для любого гладкого отображения $f: M \rightarrow N$ и любой дифференциальной формы α на N .

3. Для координатной k -формы вида

$$\alpha = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

внешняя производная имеет вид

$$d\alpha = (df) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

2.1.5 Когомологии де Рама

Определение 2.8. Дифференциальная форма α называется *замкнутой*, если $d\alpha = 0$. Дифференциальная форма $\alpha \in \Omega^k(M)$ называется *точной*, если существует $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ такая, что $\alpha = d\beta$.

Из свойства $d^2 = 0$ следует, что любая точная форма является замкнутой. Локально верно и обратное:

Теорема 2.9 (лемма Пуанкаре, без доказательства). Пусть $k \geq 1$, $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $d\alpha = 0$. Тогда существует $\beta \in \Omega^{k-1}$ такая, что $\alpha = d\beta$.

На произвольном многообразии, вообще говоря, не всякая замкнутая форма точна. Различие между ними измеряется *когомологиями де Рама*: k -мерные когомологии де Рама — это векторное пространство $H_{dR}^k(M)$ над \mathbb{R} , определяемое как факторпространство

$$H_{dR}^k(M) = \{ \text{замкнутые } k\text{-формы на } M \} / \{ \text{точные } k\text{-формы на } M \}.$$

Элементы пространства $H_{dR}^k(M)$ называются *когомологическими классами*. Это классы эквивалентности замкнутых форм из $\Omega^k(M)$ по такому отношению эквивалентности: замкнутые формы $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ эквивалентны, если $\alpha - \beta$ — точная форма.

Когомологии де Рама изоморфны стандартным (сингулярными) группам когомологий над \mathbb{R} . В частности, для компактных многообразий они конечномерны.

Теорема 2.10. Внешнее произведение \wedge спускается на когомологии де Рама.

Доказательство. Утверждение равносильно следующим двум свойствам: (1) если дифференциальные формы α и β замкнуты, то и $\alpha \wedge \beta$ замкнута, (2) если при этом одна из них точна, то $\alpha \wedge \beta$ точна. Проверим эти свойства:

1. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta \pm \alpha \wedge d\beta = 0$, так как $d\alpha = 0$ и $d\beta = 0$.
2. Пусть α точна, $\alpha = d\gamma$, тогда $d(\gamma \wedge \beta) = d\gamma \wedge \beta \pm \gamma \wedge d\beta = \alpha \wedge \beta$, откуда $\alpha \wedge \beta$ точна. \square

2.2 Симплектические формы

2.2.1 Определение и первые примеры

Определение 2.11. Пусть M — гладкое многообразие. *Симплектическая форма* или *симплектическая структура* на M — дифференциальная 2-форма $\omega \in \Omega^2(M)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- Замкнутость: $d\omega = 0$.
- Невырожденность: для любой точки $x \in M$ и любого $u \in T_x M \setminus \{0\}$ существует $v \in T_x M$ такой, что $\omega(u, v) \neq 0$.

Симплектическое многообразие — многообразие с заданной на нём симплектической формой.

Симплектоморфизм — диффеоморфизм между симплектическими многообразиями, сохраняющий симплектическую форму.

Определение 2.12. *Симплектическое векторное пространство* — конечномерное векторное пространство V с заданной на нём невырожденной кососимметричной билинейной формой $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Такая форма тоже называется *симплектической формой*. Два симплектических векторных пространства *изоморфны*, если между ними существует линейная биекция, сохраняющая симплектическую форму.

Если $M = (M, \omega)$ — симплектическое многообразие, то каждое его касательное пространство $T_x M$ с билинейной формой ω_x — симплектическое векторное пространство. Но не всякое гладкое семейство симплектических билинейных форм на касательных пространствах задаёт симплектическую структуру на M , так как еще есть условие замкнутости.

Любое симплектическое векторное пространство (V, ω) можно рассматривать как симплектическое многообразие, превратив ω в дифференциальную 2-форму с постоянными коэффициентами (т.е. инвариантную относительно параллельных переносов). Любая такая форма замкнута, это видно из координатной формулы для внешней производной.

Пример 2.13 (стандартная симплектическая форма на \mathbb{R}^{2n}). Рассмотрим пространство \mathbb{R}^{2n} , обозначим его координаты через $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, а базисные векторы — через $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$. Стандартная симплектическая форма на \mathbb{R}^{2n} — билинейная форма ω_0 на \mathbb{R}^{2n} , которая задается значениями на парах базисных векторов:

$$\omega_0(e_i, f_i) = -\omega_0(f_i, e_i) = 1,$$

значения на всех остальных парах базисных векторов равно 0.

Легко видеть, что это форма действительно симплектическая (т.е. невырожденная). Рассматривая её как дифференциальную форму с постоянными коэффициентами, можно записать определение в виде

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

2.2.2 Двумерный случай

В двумерном случае условия из определения симплектической формы упрощаются: условие замкнутости выполняется для любой 2-формы (так как не существует ненулевых 3-форм), а условие невырожденности равносильно тому, что форма не обращается в ноль ни в какой точке. Действительно, в локальных координатах (x, y) любая 2-форма ω имеет вид

$$\omega = f(x, y) dx \wedge dy.$$

Так как базисная форма $dx \wedge dy$ невырождена, условие невырожденности для ω в точке (x, y) равносильно тому, что $f(x, y) \neq 0$.

Отсюда также видно, что если на двумерном многообразии существует хотя бы одна симплектическая форма ω , то все остальные получаются из нее умножением на гладкие функции, нигде не обращающиеся в ноль.

Теорема 2.14. *На двумерном гладком многообразии M существует симплектическая форма тогда и только тогда, когда оно ориентируемо.*

Доказательство. 1. Предположим, что на M существует симплектическая форма ω . Тогда можно определить ориентацию на M следующим образом: для точки $x \in M$ и базиса (v_1, v_2) в $T_x M$ считаем этот базис положительно ориентированным, если $\omega(v_1, v_2) > 0$, и отрицательно ориентированным, если $\omega(v_1, v_2) < 0$. Случай $\omega(v_1, v_2) = 0$ невозможен, так как ω невырождена.

2. Пусть M ориентируемо, зафиксируем его ориентацию. Выберем на M произвольную риманову метрику g , и пусть ω — форма ориентированной площади. А именно, для точки $x \in M$ и касательных векторов $v_1, v_2 \in T_x M$ значение $\omega(v_1, v_2)$ равно ориентированной площади параллелограмма, образованного векторами v_1 и v_2 в евклидовой плоскости $(T_x M, g_x)$. \square

2.2.3 Симплектическая линейная алгебра

Теперь рассмотрим произвольное симплектическое векторное пространство (V, ω) .

Следствия невырожденности

1. Отображение $v \mapsto \omega(v, \cdot)$ является биекцией между V и V^* .
2. Для линейного подпространства $W \subset V$ назовем его *симплектическим дополнением* линейное подпространство

$$W^\omega := \{x \in V : \forall u \in W \omega(u, x) = 0\}.$$

Из невырожденности ω следует, что $\dim W^\omega = \dim V - \dim W$ и $W^{\omega^\omega} = W$.

Теорема 2.15. Пусть $V = (V, \omega)$ — симплектическое векторное пространство. Тогда

1. Размерность V чётна.
2. Существует базис $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ такой, что $\omega(e_i, f_i) = 1 = -\omega(f_i, e_i)$, а значения ω на всех остальных парах базисных векторов равно 0. (Такой базис называется *симплектическим базисом*).

Следствие 2.16. Любое симплектическое векторное пространство изоморфно стандартному примеру $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ для некоторого n .

Упражнение 2.17. Пусть $V = (V, \omega)$ — симплектическое векторное пространство. Подпространство $W \subset V$ называется *изотропным*, если $\omega|_{W \times W} = 0$, и *лагранжевым*, если оно изотропно и $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$. Докажите, что любое изотропное подпространство содержится в некотором лагранжевом.

2.2.4 Канонические формы на кокасательном расслоении

Пусть $M = M^n$ — гладкое многообразие. Рассмотрим кокасательное расслоение T^*M . Его точки будем чаще всего обозначать через (q, p) где $q \in M, p \in T_q^*M$.

Если на M задана локальная система координат (q_1, \dots, q_n) , то она порождает на слоях T_q^*M координаты (p_1, \dots, p_n) , где $p_i(q, p)$ — результат применения ковектора p к базисному касательному вектору $\frac{\partial}{\partial q_i}$ в точке q .

Определение 2.18. Каноническая 1-форма на T^*M — это дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(T^*M)$, определяемая равенством

$$\alpha_{(q,p)}(\xi) = p(d\pi(\xi)), \quad \xi \in T_{(q,p)}(T^*M),$$

где $\pi: T^*M \rightarrow M$ — проекция расслоения, т.е. $\pi(q, p) = q$.

В координатах (q_i, p_i) каноническая 1-форма имеет вид

$$\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

Краткая запись: $\alpha = p dq$.

Определение 2.19. Каноническая симплектическая форма на T^*M — это дифференциальная форма $\omega \in \Omega^2(T^*M)$, определяемая равенством $\omega = -d\alpha$, где α — каноническая 1-форма.

В координатах (q_i, p_i) форма ω имеет вид

$$\alpha = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i.$$

Краткая запись: $\alpha = dq \wedge dp$.

Замечание. В механике принято другое соглашение о знаках: канонической формой называют форму $d\alpha = dp \wedge dq$.

2.2.5 Симплектический объем

Определение 2.20. Пусть $M = (M^{2n}, \omega)$ — симплектическое многообразие. *Симплектический объем* — это дифференциальная $2n$ -форма $\frac{1}{n!}\omega^{\wedge n}$.

Пример 2.21. Для \mathbb{R}^{2n} со стандартной симплектической формой симплектический объем равен

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

Проверяется раскрытием скобок.

Теорема 2.22. *Симплектический объем невырожден, т.е. не обращаясь в ноль ни в какой точке.*

Доказательство. Так как \wedge — поточечная операция, достаточно доказать невырожденность для случая симплектического векторного пространства. Так как все симплектические векторные пространства изоморфны, это сводится к случаю стандартного \mathbb{R}^{2n} . \square

Следствие 2.23. *Симплектический объем определяет на многообразии ориентацию и гладкую положительную меру (которая тоже называется симплектическим объемом).*

Следствие 2.24. *Любое симплектическое многообразие ориентируемо.*

Теорема 2.25. *Пусть (M^{2n}, ω) — компактное симплектическое многообразие. Тогда ω представляет нетривиальный элемент в $H^2(M)$. В частности, $H^2(M) \neq 0$.*

Доказательство. Предположим, что ω представляет нулевой класс в $H^2(M)$, то есть она точна. Так как внешнее произведение \wedge спускается на когомологии де Рама, внешнее произведение точных форм — снова точная форма. Отсюда следует, что форма ориентированного симплектического объема $\nu = \omega^{\wedge n}$ точна. Но это не так из-за формулы Стокса. \square

Теорема 2.26 (без доказательства). $H^k(S^n) = 0$ при всех k , кроме $k = 0$ и $k = n$.

Следствие 2.27. *При $n > 2$ на сфере S^n не существует симплектической структуры.*

2.3 Связь симплектических и комплексных структур

2.3.1 Согласованные структуры

Определение 2.28. *Комплексная структура* на векторном пространстве V — это линейное отображение $J: V \rightarrow V$ такое, что $J^2 = -\text{Id}$.

Легко видеть, что такой оператор J определяет на V структуру векторного пространства над \mathbb{C} , в которой он является умножением на мнимую единицу.

Определение 2.29. Пусть на векторном пространстве V задана билинейная симплектическая форма ω , комплексная структура J и евклидово скалярное произведение $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Будем называть тройку (ω, J, g) *согласованной*, если для всех $u, v \in V$ выполняются следующие равенства:

1. $\langle Ju, Jv \rangle = \langle u, v \rangle$ (J -инвариантность g);
2. $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$ (J -инвариантность ω);
3. $\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle$;
4. $\langle u, v \rangle = \omega(u, Jv)$.

Список условий в определении 2.29 избыточен (например, каждое из них следует из остальных). Кроме того, каждый элемент согласованной тройки однозначно определяется двумя другими. Чтобы достроить пару до согласованной тройки, требуются некоторые условия согласованности в парах. Для пары (g, J) эти условия наиболее просты, они содержатся в следующей теореме.

Теорема 2.30. Пусть на V заданы комплексная структура J и J -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда билинейная форма ω , определяемая равенством

$$\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle,$$

является симплектической и (ω, J, g) — согласованная тройка.

Доказательство. 0. Проверим, что ω — симплектическая. Из J -инвариантности скалярного произведения и равенства $J^2 = -1$ следует, что J — кососимметричный оператор:

$$\langle Ju, v \rangle = \langle J^2u, Jv \rangle = \langle -u, Jv \rangle = -\langle u, Jv \rangle.$$

Отсюда следует кососимметричность ω :

$$\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle = -\langle u, Jv \rangle = -\omega(v, u).$$

Невырожденность ω следует из соотношения $\omega(v, Jv) = \langle Jv, Jv \rangle > 0$ при $v \neq 0$.

1. J -инвариантность скалярного произведения содержится в предположениях.
2. J -инвариантность ω проверяется вычислением:

$$\omega(Ju, Jv) = \langle J^2u, Jv \rangle = \langle -u, Jv \rangle = \langle Ju, v \rangle = \omega(u, v).$$

3. Равенство $\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle$ — определение ω .
4. $\omega(u, Jv) = \langle Ju, Jv \rangle = \langle u, v \rangle$ из определения и J -инвариантности g . □

Замечание. В условиях теоремы отображение $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, заданное равенством

$$h(u, v) = \langle u, v \rangle + i \cdot \langle u, Jv \rangle = \langle u, v \rangle - i \cdot \omega(u, v),$$

является эрмитовым скалярным произведением. Теорему можно вывести из этого наблюдения и того факта, что любое n -мерное эрмитово пространство изоморфно стандартному \mathbb{C}^n .

Пример 2.31. Рассмотрим пространство \mathbb{C}^n . Будем обозначать координаты в нём буквами z_1, \dots, z_n . отождествим \mathbb{C}^n с вещественным пространством \mathbb{R}^{2n} стандартным способом: обозначим координаты в \mathbb{R}^{2n} буквами $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ и определим биекцию между \mathbb{R}^{2n}

и \mathbb{C}^n равенствами $z_k = x_k + iy_k$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Порядок перечисления координат в \mathbb{R}^{2n} не важен, но важно их соответствие комплексным координатам.

На \mathbb{R}^{2n} имеется стандартное скалярное произведение \langle, \rangle . Биекция между \mathbb{R}^{2n} и \mathbb{C}^n определяет на \mathbb{R}^{2n} комплексную структуру J , соответствующую умножению на i в \mathbb{C}^n . Пусть e_k и f_k — базисные векторы в \mathbb{R}^{2n} , соответствующие координатам x_k и y_k . Тогда $J(e_k) = f_k$ и $J(f_k) = -e_k$, откуда ясно, что J — ортогональный оператор (сохраняет евклидову структуру). По теореме 2.30 на \mathbb{R}^{2n} имеется симплектическая билинейная форма ω , заданная равенством $\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle$ для всех $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$. Посмотрев на её значения на парах базисных векторов, легко видеть, что ω — стандартная симплектическая структура на \mathbb{R}^{2n} :

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \dots + dx_n \wedge dy_n.$$

Упражнение 2.32. Докажите, что любое векторное пространство V с согласованной тройкой (ω, J, g) изоморфно \mathbb{R}^{2n} со стандартными структурами.

Теперь рассмотрим вопрос о построении метрики g по паре (ω, J) .

Определение 2.33. Пусть на V задана билинейная симплектическая форма ω и комплексная структура J .

1. J называется ω -прирученной (ω -tame), если $\omega(v, Jv) > 0$ для всех $v \in V \setminus \{0\}$.

2. J и ω называются согласованными, если J является ω -прирученной и ω сохраняется оператором J , то есть $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$ для всех $u, v \in V$.

Теорема 2.34. Пусть ω — билинейная симплектическая форма на V , J — ω -прирученная комплексная структура J . Тогда билинейная форма g , заданная равенством

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(\omega(u, Jv) + \omega(v, Ju))$$

является J -инвариантным скалярным произведением.

А если J и ω согласованы, то для любых $u, v \in V$ верно равенство

$$g(u, v) = \omega(u, Jv) = \omega(v, Ju),$$

и (g, J, ω) — согласованная тройка.

Доказательство. 1. Билинейность и симметричность g тривиальны, положительная определенность следует из ω -прирученности J , J -инвариантность проверяется вычислением:

$$2g(Ju, Jv) = \omega(Ju, J^2v) + \omega(Jv, J^2u) = \omega(Ju, -v) + \omega(Jv, -u) = \omega(v, Ju) + \omega(u, Jv) = 2g(u, v).$$

2. Пусть ω и J согласованы. Осталось проверить, что функция $(u, v) \mapsto \omega(u, Jv)$ симметрична. Это следует из равенств

$$\omega(u, Jv) = \omega(Ju, J^2v) = \omega(Ju, -v) = -\omega(-v, Ju) = \omega(v, Ju),$$

где первое следует из J -инвариантности ω , второе — из равенства $J^2 = -1$, третье — из кососимметричности ω . \square

Определение 2.35. Почти комплексная структура на гладком многообразии M — гладкое семейство $J = \{J_x\}_{x \in M}$ комплексных структур в касательных пространствах $T_x M$.

Комплексная структура на M — структура комплексного многообразия, то есть атлас из карт со значениями в \mathbb{C}^n , отображения перехода между которыми голоморфны (т.е. гладкие в комплексном смысле).

Всякая комплексная структура естественно порождает почти комплексную. Обратное неверно: не всякая почти комплексная структура соответствует комплексной структуре. Почти комплексные структуры, для которых существуют соответствующие комплексные, называются *интегрируемыми*.

Определение 2.36. Пусть на гладком многообразии M заданы симплектическая форма ω , почти комплексная структура J , и риманова метрика g . Будем называть тройку (ω, J, g) *согласованной*, если эти структуры согласованы (см. определение 2.29) в касательном пространстве $T_x M$ для каждой точки $x \in M$.

Почти комплексная структура J называется ω -*прирученной* (соотв. согласованной с ω), если J_x является ω_x -прирученной (соотв. согласованной с ω_x) для всех $x \in M$.

Если почти комплексная структура J на многообразии согласована с симплектической формой ω , то можно применить теорему 2.34 в каждом касательном пространстве и получить согласованную с J и ω риманову метрику g . (Гладкость этой метрики очевидна из явного вида формул, которыми она определяется). Теорема 2.30 так не работает, потому что не гарантирует замкнутость построенной 2-формы ω .

Определение 2.37. *Кэлерово многообразие* — многообразие с заданными на нём комплексной структурой (интегрируемой!), симплектической формой (замкнутой!) и римановой метрикой, которые образуют согласованную тройку.

2.3.2 Форма и метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ — частный случай проективного пространства над полем. По определению $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, где $\mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, *)$ — мультипликативная группа поля \mathbb{C} , действующая на \mathbb{C}^{n+1} умножениями на скаляры.

На $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ имеются однородные координаты $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$, определённые с точностью до пропорциональности, и аффинные карты. В области $\{z_0 \neq 0\}$ определена аффинная карта

$$(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \mapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right)$$

и т.д. Аффинные карты задают на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ структуру комплексного многообразия.

Пример 2.38 (Форма Фубини-Штуди). Рассмотрим единичную сферу S^{2n+1} в \mathbb{C}^{n+1} . Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ можно считать факторпространством S^{2n+1}/S^1 , где $S^1 \subset \mathbb{C}$ — единичная окружность, действующая на S^{2n+1} умножениями.

Пусть $\pi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ — отображение факторизации. Ясно, что π — субмерсия, то есть дифференциал $d_u \pi$ сюръективен для всех $u \in S^{2n+1}$.

Рассмотрим на \mathbb{C}^{n+1} стандартную симплектическую структуру $\omega = \sum dx_k \wedge dy_k$, где $x_k + iy_k = z_k$ — стандартные координаты в \mathbb{C}^{n+1} . Сужение этой формы на S^{2n+1} — замкнутая 2-форма ω^s (сужение замкнутой формы всегда замкнуто как частный случай обратного переноса). Форма ω^s вырождена, её ядро в каждой точке $u \in S^{2n+1}$ — симплектическое ортогональное дополнение касательного пространства $T_u S^{2n+1}$. Легко проверить, что это ядро порождается вектором J_u и совпадает с касательным пространством орбиты $O_{S^1}(u)$ действия группы S^1 .

Отсюда на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ существует такая невырожденная 2-форма $\hat{\omega}$, что $\pi^* \hat{\omega} = \omega|_{S^{2n+1}}$. Это симплектическая форма. Действительно, $d\hat{\omega} = 0$, так как $\pi^*(d\hat{\omega}) = d\omega|_{S^{2n+1}} = 0$ и $d\pi$ сюръективен в каждой точке.

Построенная симплектическая форма называется *формой Фубини-Штуди*.

Упражнение 2.39. Напишите координатное выражение формы Фубини-Штуди в стандартной карте $(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \mapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right)$ пространства $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Так как $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ — комплексное многообразие, на нём как на вещественном многообразии определена почти комплексная структура J . Также на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ имеется риманова метрика, согласованная с этими структурами, называемая *метрикой Фубини-Штуди*.

Действительно, пусть $u \in S^{2n+1}$ и $p = \pi(u)$. Рассмотрим в касательном пространстве $T_u S^{2n+1}$ подпространство $H_u = (Ju)^\perp$. Это ортогональное дополнение ядра $\ker d_u \pi$ в $T_u S^{2n+1}$, поэтому оно биективно отображается на $T_p \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ дифференциалом $d_u \pi$. Заметим, что H_u J -инвариантно, так как его ортогональное дополнение в \mathbb{C}^n (линейная оболочка u и Ju) J -инвариантно. Поэтому (и так как π — сужение голоморфной проекции $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$) сужение J на H_u переходит в комплексную структуру на $T_p \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ при биекции $d_u \pi|_{H_u}$. Наконец, на $T_p \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ определено скалярное произведение, соответствующее евклидовой метрике на H_u при той же биекции. Это и есть метрика Фубини-Штуди.

Три структуры, построенные на $T_p \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, согласованы, так как согласованы соответствующие структуры на H_u .

Определение 2.40. *Проективное алгебраическое многообразие* в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ — множество решений системы однородных полиномиальных уравнений. *Квазипроективное алгебраическое многообразие* — открытое подмножество проективного.

Теорема 2.41. *Пусть $A \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ — квазипроективное алгебраическое многообразие без особых точек. Тогда сужение формы Фубини-Штуди на A — симплектическая форма.*

Доказательство. Сужение замкнутой формы всегда замкнуто, остается доказать только невырожденность. Форма Фубини-Штуди входит в согласованную тройку (ω, J, g) , где J соответствует комплексной структуре $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Для любой точки $x \in A$ касательное пространство $T_x A$ — комплексное линейное подпространство в $T_x \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, поэтому (на вещественном языке) оно J -инвариантно. Из теоремы 2.30 следует, что сужение согласованной тройки на J -инвариантное подпространство остаётся согласованной тройкой, в частности, сужение ω невырождено. \square

2.3.3 Существование согласованных комплексных структур

Теорема 2.42. *Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие. Тогда на M существует почти комплексная структура, согласованная с ω .*

Доказательство. Выберем произвольную метрику g на M . Идея в том, чтобы для каждой точки $x \in M$ построить в $T_x M$ комплексную структуру J_x , канонически определяемой формой ω_x и метрикой g_x , при этом «каноничность» обеспечит гладкую зависимость от x .

Рассмотрим векторное пространство V^{2n} с заданными на нём евклидовой метрикой $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ и билинейной симплектической формой ω . Пусть $A = A_{g, \omega}: V \rightarrow V$ — оператор, определённый условием $\langle Au, v \rangle = \omega(u, v)$ для всех $u, v \in V$.

Оператор A кососимметричен и невырожден, поэтому имеет диагональную жорданову форму с чисто мнимыми ненулевыми собственными числами. Обозначим через $\mathcal{A}(V)$ множество всех операторов с жордановой формой такого типа, а через $\mathcal{J}(V)$ — множество всех комплексных структур на V . Определим отображение

$$\Psi: \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{J}(V)$$

следующим образом: для $A \in \mathcal{A}(V)$, оператор $\Psi(A)$ имеет те же инвариантные подпространства и собственные числа $\pm i$, получающиеся из исходных делением на их абсолютные величины.

Пусть $A = A_{g, \omega}$ и $J = \Psi(A)$. Проверим, что J и согласована ω . Так как A кососимметричен, V раскладывается в сумму n ортогональных двумерных инвариантных подпространств, соответствующие парам собственных чисел $\pm \lambda_k i$ ($\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, n$). Если

выбрать в каждом из них базис (e_k, f_k) , где $|e_k| = 1$ и $f_k = J(e_k) = A(e_k)/\lambda_k$, то получится ортонормированный базис, для которого $\omega(e_k, f_k) = -\omega(f_k, e_k) = \lambda_k$ для всех k , а на других парах базисных векторов ω обращается в ноль. Условия согласованности $\langle u, Ju \rangle > 0$ и $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$ проверяются разложением по этому базису.

Ясно, что оператор $A_{g,\omega}$ гладко зависит от g и ω . Применяя конструкцию к каждому касательному пространству $T_x M$, где $x \in M$, получим гладкое семейство операторов $A_x \in \mathcal{A}(T_x M)$ и семейство комплексных структур $J_x \in \mathcal{J}(T_x M)$. Чтобы доказать гладкость семейства $\{J_x\}$, достаточно проверить, что отображение $\Psi: \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{J}(V)$ гладкое для любого фиксированного $V \cong \mathbb{R}^{2n}$.

Этот факт можно доказать так. Для $A \in \mathcal{A}(V)$ рассмотрим оператор $Q_A = -A^2$. Он имеет диагональную жорданову форму с положительными собственными числами (вида λ_k^2 , где $\pm \lambda_k i$ — собственные числа A). При этом $\Psi(A) = Q_A^{-1/2} A$. Поэтому вопрос сводится к доказательству гладкости функции квадратного корня из оператора с положительной диагональной жордановой формой. Это можно доказать, например, подставив оператор в ряд Тэйлора вещественной функции $x \mapsto \sqrt{x}$, выбрав центр для ряда Тэйлора достаточно большим, чтобы собственные числа оператора попали в круг сходимости. \square

Замкнутость ω в доказательстве не использовалась. Поэтому верно такое следствие.

Следствие 2.43. *На гладком многообразии существует почти комплексная структура тогда и только тогда, когда на нём существует невырожденная 2-форма.*

Доказательство. Если есть невырожденная 2-форма ω , то (поточечно согласованная с ней) почти комплексная структура J строится как в доказательстве теоремы 2.42.

Обратно, если есть почти комплексная структура J , выберем произвольную риманову метрику g , сделаем её J -инвариантной, заменив на $\hat{g} = g + J^*g$, и определим 2-форму ω равенством $\omega(u, v) = \hat{g}(Ju, v)$. По теореме 2.30 эта форма невырождена. \square

3 Гамильтоновы потоки

3.1 Определение. Сохранение гамильтониана

Пусть $M = (M^{2n}, \omega)$ — симплектическое многообразие.

Определение 3.1. *Гамильтониан* — любая гладкая функция $H: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 3.2. Пусть H — гамильтониан на M . *Симплектический градиент* f в точке $x \in M$ — такой вектор $v \in T_x M$, что

$$\omega_x(v, \cdot) = d_x H.$$

Он существует и единственен в силу невырожденности формы ω .

Симплектический градиент как функция от точки является гладким векторным полем. Оно обозначается $\text{sgrad } H$. Для краткости мы будем также обозначать его через X_H .

Определение 3.3. *Траектория векторного поля. Поток, порождаемый векторным полем.*

Определение 3.4. *Гамильтонов поток, порождаемый гамильтонианом H — поток, порождаемый векторным полем $\text{sgrad } H$.*

Пример 3.5. Рассмотрим \mathbb{R}^{2n} со стандартной симплектической формой $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$. Тогда $\text{sgrad } H$ имеет координаты

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$$

Пример 3.6. Пусть H — гамильтониан на T^*M . Тогда траектории гамильтонова потока в локальных координатах (q_i, p_i) удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Теорема 3.7. Гамильтониан H постоянен вдоль траекторий гамильтонова потока.

Доказательство. Пусть $X = \text{sgrad } H$. Тогда $dH(X) = \omega(X, X) = 0$. □

Замечание. В механике это закон сохранения энергии. Поэтому функцию H часто называют *энергией*.

3.2 Поверхности уровня гамильтониана. Принцип Мопертюи

Определение 3.8. Поверхностью уровня гамильтониана H будем называть прообраз константы за вычетом критических точек (тех, где $dH = 0$).

Ясно, что поверхность уровня — гладкое подмногообразие коразмерности 1, и состоит из целых траекторий (так как критические точки — стационарные точки для потока).

Теорема 3.9. Поверхность уровня определяет содержащиеся в ней траектории однозначно с точностью до замены параметра.

То есть, если у двух гамильтонианов имеется общая поверхность уровня $\Sigma \subset M$, то любая траектория второго гамильтониана, содержащаяся в Σ , получается заменой параметра из некоторой траектории второго гамильтониана. (Замена параметра может включать обращение времени).

Доказательство. Пусть Σ — поверхность уровня. Для каждой точки $x \in \Sigma$ касательная гиперплоскость $T_x \Sigma$ — ядро дифференциала $\ker d_x H$. Она определяет $d_x H$, а с ним и $\text{sgrad } H(x)$, однозначно с точностью до умножения на скаляр. Значит, траектории определены однозначно с точностью до замены параметра. □

Теорема 3.10 (принцип Мопертюи). Пусть $M = (M, g)$ — риманово многообразие. Рассмотрим на M лагранжиан

$$L(x, v) = T - U = \frac{1}{2}g(v, v) - U(x),$$

где $U: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция (потенциальная энергия).

Тогда на фиксированном уровне энергии E , в области, где $E - U \neq 0$, траектории лагранжевой системы совпадают с точностью до замены параметра (!) с геодезическими метрики $\lambda^2 g$, где $\lambda = \sqrt{E - U}$.

Доказательство. Перейдем к гамильтоновой системе на T^*M с $H = \frac{1}{2}g^* + U$. Поверхность уровня $H = E$ совпадает в поверхностью уровня однородного гамильтониана

$$H_1 = \frac{1}{2(E - U)} g^*.$$

Переходя обратно к лагранжевой системе, получаем лагранжиан $\frac{1}{2}(E - U)g$. □

3.3 Отступление: производная Ли

Пусть M — гладкое многообразие. Будем обозначать через $\mathcal{X}(M)$ пространство гладких векторных полей на M и через $\mathcal{F}(M)$ — пространство гладких функций на M . Для $X \in \mathcal{X}(M)$ обозначаем через $\{\Phi_X^t\}$ соответствующий поток.

Определение 3.11. Пусть α — тензор на M (который может быть и контравариантным, в том числе векторным полем). *Производная Ли* тензора α вдоль X — это тензор $\mathcal{L}_X \alpha$ того же типа, определяемый равенством

$$\mathcal{L}_X \alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left((\Phi_X^t)^* \alpha \right),$$

где $(\Phi_X^t)^* \alpha$ — обратный перенос (pull-back) тензора α диффеоморфизмом Φ_X^t .

Определение удобно разбить на два шага: Сначала определяем гладкое семейство тензоров $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ равенством $\alpha_t = (\Phi_X^t)^* \alpha$, а затем в каждой точке $p \in M$ дифференцируем по t при $t = 0$:

$$(\mathcal{L}_X \alpha)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\alpha_t)_p).$$

Так как $(\alpha_t)_p$ — тензор на фиксированном векторном пространстве $T_p M$, производная $\frac{d}{dt}$ в правой части — обычная производная векторнозначной функции.

Пример 3.12. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и $X = e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ — первое координатное векторное поле. Поток, порождаемый этим полем, имеет вид

$$\Phi_X^t(p) = p + te_1$$

для всех $p \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$. Т.е. Φ_X^t — параллельный перенос на вектор te_1 .

Рассмотрим векторное поле $V \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Так как касательные пространства к \mathbb{R}^n во всех точках канонически отождествляются, можно рассматривать V как функцию $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда

$$((\Phi_X^t)^* V)(p) = V(p + te_1),$$

откуда

$$\mathcal{L}_X V = \frac{\partial V}{\partial x_1}.$$

То же самое верно для производной Ли по $\frac{\partial}{\partial x_1}$ любого тензора.

Определение 3.13. Будем говорить, что поток $\{\Phi^t\}$ *сохраняет* тензор α , если для любого $t \in \mathbb{R}$ верно, что $(\Phi^t)^* \alpha = \alpha$ везде, где Φ^t определено.

Теорема 3.14. Поток Φ_X^t , порождаемый векторным полем X , сохраняет тензор α тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_X \alpha = 0$.

Доказательство. Импликация «только тогда» очевидна из определений. Для доказательства другой импликации заметим, что \mathcal{L}_X коммутирует со сдвигами вдоль потока:

$$\mathcal{L}_X ((\Phi_X^s)^* \alpha) = (\Phi_X^s)^* (\mathcal{L}_X \alpha),$$

так как Φ_X^s переводит X в себя. Пусть $\alpha_t = (\Phi_X^s)^* \alpha$, тогда левая часть равна

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\Phi_X^t)^* (\Phi_X^s)^* \alpha) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\Phi_X^{s+t})^* \alpha) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_{s+t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \alpha_t$$

Если $\mathcal{L}_X \alpha = 0$, то это выражение равно нулю, откуда α_t не зависит от t , что и требовалось доказать. \square

Следствие 3.15. Пусть на M задана форма ориентированного объема ν . Этот объем сохраняется потоком тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_X \nu = 0$.

3.3.1 Вычисление производной Ли

Теорема 3.16. Для функции $f \in \mathcal{F}(M)$ имеем $\mathcal{L}_X f = D_X f = df(X)$.

Доказательство. Из равенства $(\Phi^t)^* f = f \circ \Phi^t$. □

Теорема 3.17. Для векторного поля $Y \in \mathcal{X}(M)$ имеем $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$.

Доказательство. Для $M = \mathbb{R}^n$ и $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ формула превращается в координатную формулу для скобки Ли. Отсюда по теореме о выпрямлении векторного поля следует, что формула верна всюду, где X не обращается в ноль. По непрерывности она верна и на замыкании множества $\{X \neq 0\}$. На оставшейся части многообразия, т.е. на внутренности множества $\{X = 0\}$, обе части равны 0 в силу локальности. □

Следствие 3.18. Потoki, порождаемые векторными полями X и Y коммутируют тогда и только тогда, когда $[X, Y] = 0$.

Теорема 3.19. Операция \mathcal{L}_X обладает следующими свойствами:

1. *Линейность:* $\mathcal{L}_X(\alpha + \beta) = \mathcal{L}_X \alpha + \mathcal{L}_X \beta$ и $\mathcal{L}_X(c\alpha) = c\mathcal{L}_X(\alpha)$ для любых тензоров α, β одинакового типа и любого $c \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{L}_X(\alpha \otimes \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes (\mathcal{L}_X \beta)$ для любых тензоров α, β .
3. Для 1-формы $\alpha \in \Omega^1(M)$ и векторного поля $V \in \mathcal{X}(M)$,

$$\mathcal{L}_X(\alpha(V)) = (\mathcal{L}_X \alpha)(V) + \alpha(\mathcal{L}_X(V)).$$

4. Более общо, для ковариантного k -тензора α и $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{X}(M)$,

$$\mathcal{L}_X(\alpha(V_1, \dots, V_k)) = (\mathcal{L}_X \alpha)(V_1, \dots, V_k) + \sum_{i=1}^k \alpha(V_1, \dots, V_{i-1}, \mathcal{L}_X V_i, V_{i+1}, \dots, V_k)$$

Доказательство. Все свойства следуют из того, что рассматриваемые алгебраические операции уважаются обратными переносами. Например, второе сводится к равенству

$$\frac{d}{dt}(\alpha_t \otimes \beta_t) = \left(\frac{d}{dt}\alpha_t\right) \otimes \beta_t + \alpha_t \otimes \left(\frac{d}{dt}\beta_t\right)$$

для гладких семейств $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. А равенство следует из билинейности тензорного произведения. □

Теорема 3.20. Операция \mathcal{L}_X на дифференциальных формах обладает следующими свойствами.

1. Если α — дифференциальная k -форма, то $\mathcal{L}_X \alpha$ тоже.
2. $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$ для любых дифференциальных форм α, β .
3. $\mathcal{L}_X(d\alpha) = d(\mathcal{L}_X \alpha)$ для любой дифференциальной формы α .

Доказательство. 1. Кососимметричность сохраняется при обратном переносе и дифференцировании по t .

2. Из того, что обратные переносы уважают \wedge , и билинейности \wedge .

3. Сводится к равенству

$$\frac{d}{dt}(d\alpha_t) = d\left(\frac{d}{dt}\alpha_t\right)$$

для гладкого семейства $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ дифференциальных форм. Записав это равенство в координатах, легко видеть, что оно следует из симметрии вторых производных $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t}$ для коэффициентов формы α . \square

Пример 3.21. Для поля $X = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ в \mathbb{R}^n имеем $\mathcal{L}_X(dx_k) = df_k$. Это следует из коммутирования производной Ли и внешней производной дифференциальных форм.

Пример 3.22. Найдем производную Ли стандартной формы объема в \mathbb{R}^n , то есть $\mathcal{L}_X\nu$, где $\nu = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, $X = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Из свойств получаем

$$\mathcal{L}_X\nu = \sum_{k=1}^n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge \mathcal{L}_X(dx_k) \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Подставляем $\mathcal{L}_X(dx_k)$ из предыдущего примера:

$$\mathcal{L}_X(dx_k) = df_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i.$$

В длинном \wedge -произведении остается только коэффициент при dx_k , т.е. $\frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_k$. В результате получаем ответ

$$\mathcal{L}_X\nu = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \operatorname{div} X \cdot \nu.$$

В частности, поток сохраняет объем тогда и только тогда, когда его дивергенция равна 0.

Следствие 3.23. Операция \mathcal{L}_X на дифференциальных формах линейна по X .

Доказательство. Для 0-форм, то есть функций, утверждение тривиально. Из него и третьей формулы теоремы 3.20 следует утверждение для 1-форм вида df , где f — функция. Локально пространство дифференциальных форм порождается функциями и 1-формами вида df с помощью операций $+$ и \wedge . С помощью второй формулы из 3.20 и индукции по степени формы отсюда следует линейность по X для всех форм. \square

3.3.2 Волшебная формула Картана

Определение 3.24. Пусть $\alpha \in \Omega^k(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Определим $\iota_X\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ равенством

$$(\iota_X\alpha)(V_1, \dots, V_{k-1}) = \alpha(X, V_1, \dots, V_{k-1})$$

для любых векторных полей V_1, \dots, V_{k-1} . Легко видеть, что правая часть кососимметрична, т.е. действительно дифференциальная форма.

В случае $k = 0$ (т.е. если α — функция) формула не имеет смысла. В этом случае отдельно определяем $\iota_X\alpha = 0$.

Операция подстановки ι — поточечная и линейна по каждому из аргументов X и α .

Лемма 3.25. Для $\alpha \in \Omega^k(M)$ и $\beta \in \Omega^m(M)$,

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = \iota_X\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X\beta.$$

Доказательство. Вычисление (проще всего на базисе). □

Теорема 3.26 (волшебная формула Картана). Для любой дифференциальной формы α и любого векторного поля X верно равенство

$$\mathcal{L}_X\alpha = d(\iota_X\alpha) + \iota_X(d\alpha)$$

Доказательство. По индукции из леммы. База — случаи $\alpha = f$ и $\alpha = df$, где f — функция. Проверка для $\alpha = f$:

$$\mathcal{L}_X f = D_X f, \quad d(\iota_X f) = d(0) = 0, \quad \iota_X(df) = df(X) = D_X f.$$

Проверка для $\alpha = df$:

$$\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f) = d(D_X f), \quad d(\iota_X(df)) = d(D_X f), \quad \iota_X(d(df)) = \iota_X(0) = 0.$$

Переход: пусть формула верна для $\alpha \in \Omega^k(M)$ и $\beta \in \Omega^m(M)$, тогда она верна и для $\alpha \wedge \beta$. Левая часть:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) &= (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta) \\ &= \left(d(\iota_X\alpha) + \iota_X(d\alpha) \right) \wedge \beta + \alpha \wedge \left(d(\iota_X\beta) + \iota_X(d\beta) \right) \\ &= d(\iota_X\alpha) \wedge \beta + \iota_X(d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge d(\iota_X\beta) + \alpha \wedge \iota_X(d\beta) \end{aligned}$$

(используя предположение про α и β). Правая часть:

$$\begin{aligned} d(\iota_X(\alpha \wedge \beta)) &= d\left(\iota_X\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X\beta \right) \\ &= d(\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1} \iota_X\alpha \wedge d\beta + (-1)^k d\alpha \wedge \iota_X\beta + \alpha \wedge d(\iota_X\beta) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \iota_X(d(\alpha \wedge \beta)) &= \iota_X\left(d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \right) \\ &= \iota_X(d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1} d\alpha \wedge \iota_X\beta + (-1)^k \iota_X\alpha \wedge d\beta + \alpha \wedge \iota_X(d\beta). \end{aligned}$$

При сложении двух последних выражений две пары слагаемых сокращаются и остается формула для $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta)$. □

Замечание. С помощью формулы Картана можно по индукции построить бескоординатное определение внешней производной. Например, для 1-формы α ,

$$\begin{aligned} d\alpha(X, Y) &= \iota_X(d\alpha)(Y) = (\mathcal{L}_X\alpha)(Y) - (d(\iota_X\alpha))Y \\ &= \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \alpha(\mathcal{L}_X Y) - D_Y(\alpha(X)) = D_X(\alpha(Y)) - D_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \end{aligned}$$

3.4 Симплектические потоки и векторные поля

Пусть $M = (M, \omega)$ — симплектическое многообразие.

Определение 3.27. Векторное поле на M называется *гамильтоновым*, если оно равно симплектическому градиенту некоторой функции.

Поток на M называется *симплектическим*, если он сохраняет ω . Векторное поле на M называется *симплектическим*, если оно порождает симплектический поток.

Теорема 3.28. Векторное поле X на (M, ω) является симплектическим тогда и только тогда, когда 1-форма $\iota_X \omega$ замкнута.

Доказательство. По свойствам производной Ли, X — симплектическое поле тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_X \omega = 0$. С другой стороны, по формуле Картана

$$\mathcal{L}_X \omega = \iota_X(d\omega) + d(\iota_X \omega) = d(\iota_X \omega),$$

так как $d\omega = 0$. □

Следствие 3.29. Любое гамильтоново векторное поле является симплектическим. Другими словами, любой гамильтонов поток сохраняет симплектическую форму.

Доказательство. Пусть $X = \text{sgrad } H$. Тогда $\iota_X \omega = dH$ по определению симплектического градиента, откуда $d(\iota_X \omega) = d(dH) = 0$. Осталось применить предыдущую теорему. □

Локально верно и обратное.

Теорема 3.30. Локально любое симплектическое векторное поле является гамильтоновым.

Доказательство. Из предыдущей теоремы и леммы Пуанкаре для 1-форм. □

4 Теорема Лиувилля и приложения

4.1 Теорема Лиувилля

Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие, $H: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — произвольный гамильтониан, $X = \text{sgrad } H$ — соответствующее гамильтоново поле, $\{\Phi^t\} = \{\Phi_X^t\} = \{\Phi_H^t\}$ — соответствующий гамильтонов поток.

Теорема 4.1 (теорема Лиувилля). Гамильтонов поток $\{\Phi^t\}$ сохраняет симплектический объем.

Доказательство. Следует из сохранения симплектической формы. □

Для $s \in \mathbb{R}$ будем обозначать через H_s поверхность уровня гамильтониана со значением $H = s$. Как и раньше, слова «поверхность уровня» подразумевают выкалывание критических точек гамильтониана.

Теорема 4.2. Существует единственное гладкое семейство гладких $(2n-1)$ -мерных мер $\{\mu_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ на гиперповерхностях H_s со следующим свойством: для любого измеримого множества $A \subset M$, не содержащего критических точек H , верно равенство

$$\text{vol}_\omega(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_s(A \cap H_s) ds.$$

Доказательство. Это общий факт из анализа, он верен для любых многообразий, мер и функции без критических точек. Утверждение достаточно проверить локально. Локально можно выбрать координаты так, чтобы H стала первой координатной функцией x_1 . В этих координатах объему соответствует гладкая функция плотности. Сузив её на поверхность уровня, получаем плотность искомой меры μ_s . Единственность следует из однозначной определённости плотности гладкой меры. \square

Определение 4.3. Меры μ_s , построенные в предыдущей теореме, будем называть *мерами Лиувилля*.

Теорема 4.4 (тоже теорема Лиувилля). *Меры Лиувилля на поверхностях уровня сохраняются гамильтоновым потоком.*

Доказательство. Из единственности семейства мер μ_s и сохранения гамильтониана и объема при гамильтоновом потоке. \square

Пример 4.5. Рассмотрим риманово многообразие $M = (M^n, g)$. Пусть TM — касательное расслоение, SM — расслоение единичных сфер римановой метрики. Риманова метрика порождает стандартные объемы на TM и SM , определяемые равенствами

$$\text{vol}_{TM}(A) = \int_M \text{vol}_{T_x M}(A \cap T_x M) d \text{vol}_g(M)$$

и

$$\text{vol}_{SM}(A) = \int_M \text{vol}_{S_x M}(A \cap T_x M) d \text{vol}_g(M),$$

где $\text{vol}_{T_x M}$ и $\text{vol}_{S_x M}$ — соответственно n -мерный евклидов объём на $T_x M$ и $(n - 1)$ -мерный евклидов объём на единичной сфере $S_x M$. Имеется в виду евклидова структура на $T_x M$, определяемая римановой метрикой. Стандартный объём на SM также называется *мерой Лиувилля*.

На TM определён *геодезический поток*, он переводит касательный вектор $(x, v) \in TM$ через время t в касательный вектор $(\gamma_v(t), \dot{\gamma}_v(t))$, где $\gamma_v(t)$ — геодезическая с начальными данными $\gamma_v(0) = x$ и $\dot{\gamma}(0) = v$. Геодезический поток сохраняет длины касательных векторов, поэтому определено его сужение на SM , которое тоже называется геодезическим потоком.

Геодезический поток — лагранжева система с лагранжианом $\frac{1}{2} \|\cdot\|_g^2$. Ему соответствует гамильтонов поток на T^*M с гамильтонианом H , который записывается той же формулой, но с нормой ковекторов вместо векторов. Нетрудно проверить, что при преобразовании Лежандра стандартные римановы объемы на TM и SM переходят в (не зависящий от римановой метрики) канонический симплектический объём на T^*M и меру Лиувилля на поверхности уровня $H_{1/2}$.

Отсюда следует классическая теорема Лиувилля: геодезический поток сохраняет стандартные меры на TM и SM .

4.2 Интегральная формула Сантало

Определение 4.6. Пусть M — компактное риманово многообразие с краем. Будем говорить, что M — *незахватывающее* (non-trapping), если в нём не существует геодезических бесконечной длины (т.е. любая максимально продолженная геодезическая начинается и заканчивается на краю).

Теорема 4.7 (формула Сантало). Пусть M — захватывающее компактное риманово многообразии. Для точки $x \in \partial M$ обозначим через $S_x^+ M$ множество единичных касательных из $S_x M$, направленных внутрь M , а через ν_x — внутреннюю единичную нормаль.

Для $u \in S_x^+ M$ с точкой приложения $x \in \partial M$ обозначим через γ_u максимально продолженную геодезическую с начальными данными $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}_u(0) = u$, а через $\ell(\gamma_u)$ — её длину. Тогда

1. Для риманова объема $\text{vol}(M)$ верно равенство

$$\text{vol}(M) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial M} \int_{S_x^+ M} \ell(\gamma_u) \cos \angle(u, \nu_x) du dx,$$

где du и dx — краткие обозначения для $d \text{vol}_{S_x^+ M}(u)$ и $d \text{vol}_{\partial M}(x)$ соответственно, $|S^{n-1}|$ — $(n-1)$ -мерный объем стандартной единичной сферы в \mathbb{R}^n .

2. Для любой интегрируемой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ в тех же обозначениях верно равенство

$$\int_M f d \text{vol}_M = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial M} \int_{S_x^+ M} \cos \angle(u, \nu_x) \int_0^{\ell(\gamma_u)} f(\gamma_u(t)) dt du dx.$$

3. Для любой интегрируемой функции $F: SM \rightarrow \mathbb{R}$ в тех же обозначениях верно равенство

$$\int_{SM} F d \text{vol}_{SM} = \int_{\partial M} \int_{S_x^+ M} \cos \angle(u, \nu_x) \int_0^{\ell(\gamma_u)} F(\gamma_u(t), \dot{\gamma}_u(t)) dt du dx,$$

где $(\gamma_u(t), \dot{\gamma}_u(t))$ обозначает (избыточно) скорость γ как касательный вектор.

Доказательство. 1. Следует из 2 подстановкой $f \equiv 1$.

2. Следует из 3 подстановкой $F(x, v) = f(x)$.

3. Рассмотрим множества

$$K = \{(x, u) : x \in \partial M, u \in S_x^+ M\}$$

и

$$A = \{(x, u, t) : (x, u) \in K, t \in [0, \ell(\gamma_u)]\} \subset K \times \mathbb{R}$$

и отображение $\Psi: A \rightarrow SM$, заданное равенством

$$\Psi(x, u, t) = (\gamma_u(t), \dot{\gamma}_u(t)).$$

Нетрудно проверить, что Ψ диффеоморфно отображает A на множество полной меры в SM (а именно на множество таких касательных векторов, что максимально продолженная геодезическая с данным начальным вектором не касается края в своей начальной точке).

На K имеется естественная мера $d \text{vol}_{S_x^+} d \text{vol}_{\partial M}$, которую мы для краткости будем обозначать $du dx$. Она порождает меру произведения $\text{vol}_A = du dx dt$ на $A \subset K \times \mathbb{R}$. По формуле замены переменной в интеграле,

$$\int_{SM} F d \text{vol}_{SM} = \int_A F(\Psi(x, u, t)) J_\Psi(x, u, t) d \text{vol}_A(x, u, t),$$

где J_Ψ — якобиан (коэффициент растяжения объема дифференциалом в точке) отображения Ψ . По теореме Фубини интегрирование по A удовлетворяет равенству

$$\int_A \varphi(x, u, t) d \text{vol}_A(x, u, t) = \int_{\partial M} \int_{S_x^+ M} \int_0^{\ell(\gamma_u)} \varphi(x, u, t) dt du dx,$$

для любой интегрируемой функции $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$. Подставим вместо φ выражение из правой части предыдущей формулы, получаем

$$\int_{SM} F d \operatorname{vol}_{SM} \int_0^{\ell(\gamma_u)} F(\Psi(x, u, t)) J_{\Psi}(x, u, t) dt du dx,$$

Остается проверить, что $J_{\Psi}(x, u, t)$ равен косинусу из формул.

По теореме Лиувилля, геодезический поток на SM сохраняет vol_{SM} . При отображении Ψ геодезический поток на SM переходит в координатный поток координаты t на A , который тоже сохраняет меру. Отсюда следует, что якобиан $J_{\Psi}(x, u, t)$ не зависит от t , поэтому достаточно вычислить его при $t = 0$.

Зафиксируем $(\bar{x}, \bar{u}) \in K$ и найдем якобиан $J_{\Psi}(\bar{x}, \bar{u}, 0)$. Введем в окрестности точки \bar{x} координаты (x_1, \dots, x_n) на M так, что $x_n = 0$ на ∂M , и в точке \bar{x} координаты сохраняют метрику касательного пространства и переводят нормаль $\nu_{\bar{x}}$ в n -й координатный вектор $e_n \in \mathbb{R}^n$. Введем координаты ξ_1, \dots, ξ_{n-1} на сферах $S_x M$ так, что функции $x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ образуют карту для SM в окрестности точки (\bar{x}, \bar{u}) . Для удобства сделаем линейную замену координат ξ_1, \dots, ξ_{n-1} так, чтобы в точке \bar{u} они сохраняли евклидову метрику касательного пространства полусферы $S_{\bar{x}}^+$. Тогда в точке (\bar{x}, \bar{u}) плотность меры vol_{SM} относительно координатного объема будет равна 1. Также можно считать, что точка (\bar{x}, \bar{u}) является началом координат.

На A в окрестности точки $(\bar{x}, \bar{u}, 0)$ используем координаты

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, t, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}),$$

в них плотность меры vol_A в точке $(\bar{x}, \bar{u}, 0)$ тоже равна 1. Поэтому якобиан $J_{\Psi}(\bar{x}, \bar{u}, 0)$ равен модулю определителя дифференциала координатного представления отображения Ψ .

При $t = 0$ отображение Ψ в координатах — тождественное, поэтому искомым определитель равен $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x_n(\Psi(\bar{x}, \bar{u}, t)))$. Эта производная равна коэффициенту при $\frac{\partial}{\partial x_n}$ в разложении вектора \bar{u} по базису $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ касательного пространства $T_{\bar{x}}M$, то есть косинусу из формул. \square

4.3 Конформная краевая жесткость

Определение 4.8. Компактное риманово многообразие $M = (M, g)$ с краем называется *простым*, если любая его геодезическая минимальна (откуда в числе прочего следует, что M незахватывающее), и любая пара точек $x, y \in M$ соединяется единственной геодезической $[xy]$, которая гладко зависит от пары (x, y) .

Если (M, g) простое, то говорят также, что g — *простая метрика* на M .

На языке римановой геометрии свойство простоты можно переформулировать так: край выпуклый, все геодезические минимальны и не имеют сопряженных точек. Можно показать, что любое простое риманово многообразие диффеоморфно диску D^n .

Определение 4.9. Метрики g и \tilde{g} на одном многообразии M называются *конформно эквивалентными*, если $\tilde{g} = \lambda^2 g$ для некоторой положительной функции $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 4.10 (Мухометов, 1981). Пусть g и \tilde{g} — конформно эквивалентные простые метрики на D^n , $n \geq 2$. Предположим, что для всех $x, y \in \partial D^n$ верно, что

$$d_g(x, y) = d_{\tilde{g}}(x, y),$$

где d_g и $d_{\tilde{g}}$ — расстояния, определяемые данными метриками. Тогда $g = \tilde{g}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{g} = \lambda^2 g$. Наша цель — доказать, что $\lambda \equiv 1$. Идея в том, чтобы сравнить объёмы метрик с помощью интегральных формул.

Для любой g -геодезической γ с концами $x, y \in \partial M$ имеем

$$\ell_{\tilde{g}}(\gamma) \geq d_{\tilde{g}}(x, y) = d_g(x, y) = \ell_g(\gamma).$$

Пользуясь этим неравенством и формулами Сантало для $M = (D^n, g)$, оценим интеграл λ по многообразию:

$$\begin{aligned} \int \lambda d \operatorname{vol}_g &= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial M} dx \int_{S_x^+} \left(\int_0^{\ell_g(\gamma_v)} \lambda(\gamma(t)) dt \right) \cos \angle(v, \nu_{\partial M}(x)) dv \\ &= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial M} dx \int_{S_x^+} \ell_{\tilde{g}}(\gamma_v) \cos \angle(v, \nu_{\partial M}(x)) \\ &\geq \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial M} dx \int_{S_x^+} \ell_g(\gamma_v) \cos \angle(v, \nu_{\partial M}(x)) dv \\ &= \operatorname{vol}_g(M). \end{aligned}$$

Эквивалентно, для интегрального среднего имеем

$$\frac{1}{\operatorname{vol}_g(M)} \int \lambda d \operatorname{vol}_g \geq 1.$$

Теперь оценим $\operatorname{vol}_{\tilde{g}}(M) = \int_M \lambda^n d \operatorname{vol}_g$ по неравенству Йенсена и предыдущему неравенству:

$$\frac{\operatorname{vol}_{\tilde{g}}(M)}{\operatorname{vol}_g(M)} = \frac{1}{\operatorname{vol}_g(M)} \int_M \lambda^n d \operatorname{vol}_g \geq \left(\frac{1}{\operatorname{vol}_g(M)} \int_M \lambda d \operatorname{vol}_g \right)^{1/n} \geq 1.$$

Равенство в неравенстве Йенсена может достигаться только при $\lambda \equiv 1$.

Таким образом, $\operatorname{vol}_{\tilde{g}}(M) \geq \operatorname{vol}_g(M)$, причём равенство может достигаться только при $\lambda \equiv 1$. Меняя ролями g и \tilde{g} , получаем противоположное неравенство $\operatorname{vol}_g(M) \geq \operatorname{vol}_{\tilde{g}}(M)$. Следовательно, неравенство между объёмами обращается в равенство, откуда $\lambda \equiv 1$. \square

5 Построение симплектоморфизмов

Напоминание: симплектоморфизм — диффеоморфизм между симплектическими многообразиями, сохраняющий симплектическую форму.

5.1 Скобка Пуассона

Определение 5.1. Пусть $M = (M, \omega)$ — симплектическое многообразие, $F, H: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции. Их *скобка Пуассона* — функция $\{F, H\}: M \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая равенством

$$\{F, H\} = \omega(\operatorname{sgrad} F, \operatorname{sgrad} H).$$

Замечание. В некоторых источниках определение отличается знаком.

Пример 5.2. Пусть $M = \mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической формой $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$. Тогда

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

Теорема 5.3 (другое определение скобки Пуассона). $\{F, H\}$ равно производной функции F вдоль гамильтонова потока, порождаемого гамильтонианом H .

Доказательство. Пусть $X = \text{sgrad } H$. Тогда $\{F, H\} = \omega(\text{sgrad } F, X) = dF(X)$. \square

Следствие 5.4. F сохраняется гамильтоновым потоком с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда $\{F, H\} = 0$.

Следствие 5.5. $\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}$ для любых функций F, G, H .

Теорема 5.6. Для любых функций F и H ,

$$-\text{sgrad}\{F, H\} = [\text{sgrad } F, \text{sgrad } H] = [-\text{sgrad } F, -\text{sgrad } H]$$

Доказательство. Пусть $X = \text{sgrad } H$. Тогда

$$[\text{sgrad } H, \text{sgrad } F] = \mathcal{L}_X(\text{sgrad } F) = \text{sgrad}(\mathcal{L}_X F) = \text{sgrad}\{F, H\}.$$

Второе равенство следует из тождества $\mathcal{L}_X(dF) = d(\mathcal{L}_X F)$ и сохранения симплектической структуры гамильтоновым потоком. \square

Следствие 5.7. Скобка Ли гамильтоновых векторных полей — тоже гамильтоново векторное поле.

Следствие 5.8. Скобка Ли симплектических векторных полей — тоже симплектическое векторное поле.

Доказательство. Следует из предыдущего и того, что локально любое симплектическое векторное поле является гамильтоновым. \square

Следствие 5.9. Скобка Пуассона задает структуру алгебры Ли на $C^\infty(M)$.

5.2 Теорема Дарбу

Определение 5.10. Координаты Дарбу на симплектическом многообразии — такие локальные координаты $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, что симплектическая форма имеет стандартный вид $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$.

Теорема 5.11. В любом симплектическом многообразии в окрестности любой точки существуют координаты Дарбу.

Другими словами, любое симплектическое многообразие локально симплектоморфно стандартному \mathbb{R}^{2n} .

Лемма 5.12. Пусть U — область в симплектическом многообразии, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — карта с координатными функциями $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$. Эта карта задаёт координаты Дарбу тогда и только тогда, когда $\{f_i, g_i\} = -\{g_i, f_i\} = 1$ при всех i , а все остальные попарные скобки Пуассона равны 0.

Доказательство. Импликация «только тогда» тривиальна, докажем «тогда». Рассмотрим $X_i = \text{sgrad } g_i$. Поток этого векторного поля — гамильтонов поток с гамильтонианом g_i . Так как $\{f_i, g_i\} = 1$, а скобки Пуассона остальных координатных функций с g_i равны 0, f_i меняется вдоль потока со скоростью 1, а остальные координатные функции — не меняются. Поэтому X_i — координатное векторное поле, соответствующее координате f_i . Аналогично $Y_i := -\text{sgrad } f_i$ — координатное векторное поле, соответствующее координате g_i . Из определения скобки Пуассона и предположений леммы следует, что $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ имеют правильные ω -произведения в каждой точке. \square

Доказательство теоремы. Индукция по размерности, база 0.

Переход: строим координаты Дарбу в окрестности точки $x_0 \in M$. В качестве g_1 выберем любую гладкую функцию, у которой дифференциал не обращается в ноль и $g_1(x_0) = 0$. Обозначим $X_1 = \text{sgrad } g_1$ (это будущее первое координатное векторное поле).

В качестве f_1 берем любую функцию, для которой $\mathcal{L}_{X_1} f_1 = 1$ и $f_1(x_0) = 0$. Существование следует, например, из теоремы о выпрямлении векторного поля. Пусть $Y_1 = -\text{sgrad } f_1$ (это будущее второе координатное векторное поле).

Заметим, что $\{f_1, g_1\} = \mathcal{L}_{X_1} f_1 = 1$ и

$$[X_1, Y_1] = \text{sgrad}\{f_1, g_1\} = \text{sgrad } 1 = 0.$$

Из того, что $\{f_1, g_1\} \neq 0$, следует, что df_1 и dg_1 линейно независимы в каждой точке. Следовательно, в окрестности x_0 множество

$$\Sigma := \{x \in M : f_1(x) = g_1(x) = 0\}$$

является $(2n - 2)$ -мерным гладким подмногообразием. Касательное пространство к Σ в каждой точке — симплектическое ортогональное дополнение к линейной оболочке X_1 и Y_1 . Так как $\omega(X_1, Y_1) \neq 0$, получаем, что для всех $x \in \Sigma$ линейная оболочка векторов X_1 и Y_1 в точке x дополняет касательное пространство $T_x \Sigma$ до $T_x M$. Отсюда следует, что сужение ω на Σ — невырожденная 2-форма, то есть $(\Sigma, \omega|_{\Sigma})$ — симплектическое многообразие.

По индукционному предположению построим координаты Дарбу $f_2, \dots, f_n, g_2, \dots, g_n$ на Σ и распространим их на окрестность точки x_0 в M так, чтобы они сохранялись потоками X_1 и Y_1 . Это возможно, так как X_1 и Y_1 коммутируют. Нетрудно проверить, что скобки Пуассона построенных функций получатся такими, как нужно. \square

5.3 Трюк Мозера

Теорема 5.13 (изотопия Мозера). Пусть M компактно, ω_0 и ω_1 — две симплектические формы, представляющие один класс в $H^2(M)$ и такие, что при всех $t \in [0, 1]$ 2-форма

$$\omega_t := (1 - t)\omega_0 + t\omega_1$$

невырождена. Тогда существует гладкое семейство диффеоморфизмов $F_t: M \rightarrow M$, где $t \in [0, 1]$, что $F_0 = \text{id}_M$

$$F_t^* \omega_t = \omega_0$$

при всех t . В частности (M, ω_0) и (M, ω_1) симплектоморфны.

Доказательство. По условию $\omega_1 - \omega_0 = d\alpha$ для некоторой 1-формы α . Зафиксируем α и заметим, что $\omega_t = \omega_0 + t d\alpha$. Для каждого t построим векторное поле $X_t \in \mathcal{X}(t)$ такое, что

$$\iota_{X_t} \omega_t = -\alpha.$$

Из невырожденности ω_t следует, что X_t однозначно определено и гладко зависит от времени. Для каждого $x \in M$ и $t \in [0, 1]$ найдем $F_t(x)$ из дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} F_t(x) = X_t(F_t(x))$$

с начальными данными $F_0(x) = x$. Для существования решения используем предположение компактности. По лемме (ниже)

$$\frac{d}{dt} F_t^* \omega_t = F_t^* \left(\frac{d}{dt} \omega_t + \mathcal{L}_{X_t} \omega_t \right)$$

По построению, $\frac{d}{dt}\omega_t = d\alpha$ и (по формуле Картана)

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega_t = d(\iota_{X_t}\omega_t) + \iota_{X_t}(d\omega_t) = -d\alpha,$$

откуда $F_t^*\omega_t = \text{const} = \omega_0$. \square

Лемма 5.14. Пусть M — гладкое многообразие, $\{F_t\}$ — гладкое семейство диффеоморфизмов, $\{X_t\}$ — гладкое семейство векторных полей, определяемое равенством $\frac{d}{dt}F_t(x) = X_t(F_t(x))$, $\{\omega_t\}$ — гладкое семейство дифференциальных форм (на самом деле любых тензоров). Тогда

$$\frac{d}{dt}F_t^*\omega_t = F_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t\right).$$

Доказательство. Достаточно доказать равенство в точке $t_0 = 0$. Равенство сохраняется при замене F_t на $F_0^{-1} \circ F_t$ и X_t на $F_0^*X_t$, поэтому можно считать, что $F_0 = id$. Превращаем поле X_t в не зависящее от времени поле X на $M \times \mathbb{R}$ стандартным способом: $X(p, t) = (X_t, p)$ для всех $p \in M$ и $t \in \mathbb{R}$. Семейство $\{\omega_t\}$ превращаем в дифференциальную форму ω на $M \times \mathbb{R}$ естественным способом. Теперь в левой части стоит $\mathcal{L}_X\omega$, а в правой — сумма производных Ли по t -компоненте и M -компоненте поля X . Теперь равенство следует из линейности \mathcal{L}_X по X (см. следствие 3.23). \square

Следствие 5.15. Пусть M — компактное гладкое многообразие, ω_0, ω_1 — две симплектические формы из одного кохомологического класса, соединимые непрерывным путём $\{\omega_t\}_{t \in [0,1]}$ в множестве симплектических форм в том же кохомологическом классе. Тогда существует диффеоморфизм, изотопный тождественному, переводящий ω_0 в ω_1 .

Под непрерывным путём понимается путь, непрерывный в C^0 -топологии на пространстве $\Omega^2(M)$.

Доказательство. Выберем настолько мелкое разбиение $\{t_i\}$ отрезка $[0, 1]$, чтобы отрезки между каждой парой ω_{t_i} и $\omega_{t_{i+1}}$ состояли из невырожденных форм (условие невырожденности открыто). Применим к каждой паре $\omega_{t_i}, \omega_{t_{i+1}}$ предыдущую теорему и возьмём композицию полученных диффеоморфизмов. \square

Следствие 5.16. Пусть M_1 и M_2 — диффеоморфные компактные ориентируемые двумерные многообразия, на которых заданы меры μ_1 и μ_2 с положительными гладкими плотностями. Предположим, что $\mu_1(M_1) = \mu_2(M_2)$. Тогда существует диффеоморфизм между M_1 и M_2 , переводящий μ_1 в μ_2 .

Доказательство. отождествим M_1 с M_2 с помощью произвольного диффеоморфизма и зафиксируем ориентации. Это превратит меры μ_1 и μ_2 в невырожденные 2-формы ω_1 и ω_2 на одном компактном ориентированном многообразии M , причём ω_1 и ω_2 обе положительны по отношению в выбранной ориентации. Так как $\int_M \omega_1 = \int_M \omega_2$, эти две формы принадлежат одному кохомологическому классу в $H^2(M)$. Так как они обе положительны, все формы вида $t\omega_1 + (1-t)\omega_2$ тоже положительны. Применяя теорему 5.13, получаем искомый диффеоморфизм. \square

5.4 Сечения

Определение 5.17. Пусть M — гладкое многообразие, X — векторное поле на M , $\{\Phi^t\}$ — порождаемый им поток. Пусть $\Sigma_0, \Sigma_1 \subset M$ — гладкие гиперповерхности (то есть подмногообразия коразмерности 1), трансверсальные полю X , то есть не касающиеся X ни в какой точке.

Для точки $x \in \Sigma_0$ обозначим через $t(x)$ наименьшее $t > 0$, для которого $\Phi^t(x) \in \Sigma_1$ (если такое существует) и положим $P(x) = \Phi^{t(x)}(X)$. Построенное таким образом частично определённое отображение $P = P_{\Sigma_0, \Sigma_1} : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ называется *сечением* потока.

Это отображение не определено для тех $x \in \Sigma_0$, для которых полутраектория $\{\Phi^t(x) : t > 0\}$ не пересекает Σ_1 . Также для удобства будем считать P не определённым в таких точках $x \in \Sigma_0$, что $x \in \Sigma_0 \cap \Sigma_1$ и Σ_1 не совпадает с Σ в окрестности x .

Особенно важен случай, когда $\Sigma_0 = \Sigma_1$. В этом случае отображение $P_{\Sigma_0} = P_{\Sigma_0, \Sigma_0}$ называется *отображением первого возвращения*, *отображением Пуанкаре* или *сечением Пуанкаре*.

Теорема 5.18. *Сечение определено на открытом множестве и является локальным диффеоморфизмом из этого множества и в Σ_1 .*

Доказательство. Из теоремы о неявной функции. □

Теорема 5.19. *Пусть $M = (M^{2n}, \omega)$ — симплектическое многообразие, H — гамильтониан. Рассмотрим сужение гамильтонова потока на поверхность уровня гамильтониана M_c ($c \in \mathbb{R}$). Пусть $\Sigma_0, \Sigma_1 \subset M_c$ — $(2n - 2)$ -мерные подмногообразия, трансверсальные векторному полу потоку. Тогда сужения ω на Σ_1 и Σ_2 — симплектические формы, и сечение $P = P_{\Sigma_0, \Sigma_1}$ — локальный симплектоморфизм.*

Доказательство. 1. Пусть Σ — одно из подмногообразий Σ_0 и Σ_1 . Проверим невырожденность $\omega|_{\Sigma}$. Пусть $p \in \Sigma$. Предположим, что вектор $v \in T_p \Sigma \setminus \{0\}$ ω -ортогонален всему касательному пространству $T_p \Sigma$. Тогда его ω -ортогональное дополнение совпадает с $T_p M_c$, так как имеет размерность $(2n - 1)$ и содержит $T_p \Sigma$ и X_p . Отсюда $(T_p M_c)^\omega$ равно линейной оболочке v . Это противоречит трансверсальности, так как $(T_p M_c)^\omega$ равно линейной оболочке X_p .

2. Пусть $p \in \Sigma_0$, $t_0 = t(p)$, $q = P(p)$. Нетрудно проверить, что для любой точки $p \in \Sigma$ и $v \in T_{x_0} \Sigma_0$ вектор $dP(v) - d\Phi^{t_0}(v)$ пропорционален X_q . Так как поток сохраняет ω и X ω -ортогонально поверхности уровня, отсюда следует, что $d_p P$ сохраняет ω . □

5.5 Бильярды

Пусть M — риманово многообразие с краем. Риманова метрика определяет биекцию между TM и T^*M . С помощью этой биекции каноническая симплектическая форма на T^*M переносится на TM .

Определение 5.20. *Бильярдная траектория* в M — кусочно-гладкая натурально параметризованная кривая в M , у которой любой интервал, содержащийся в M , является геодезической, все изломы происходят на краю так, что разность векторов скорости до и после излома пропорциональна нормали к краю. Касание траекторий и края запрещаем.

Бильярдный поток — разрывный поток на SM (расслоении единичных касательных векторов), сдвигающий касательный вектор вдоль траектории аналогично геодезическому потоку.

Бильярдное отображение — частично определённое отображение из $S^+ \partial M$ в себя (напоминание: $S^+ \partial M$ — множество единичных векторов, касательных к M в точках края и направленных внутрь), которое вектору $v \in S_x^+ \partial M$ сопоставляет вектор скорости бильярдной траектории, начинающейся в точке x в направлении v , после первого отражения от края.

Проверим, что бильярдное отображение сохраняют естественную симплектическую структуру на $S^+ M$ (происходящую из отождествления TM и T^*M). Это несложно доказать так:

бильярдное отображение — композиция сечения геодезического потока $P_{S^+\partial M, S^-\partial M}$ и отражения относительно края, переводящего $S^-\partial M$ в $S^+\partial M$. Из свойств сечений следует, что достаточно доказать, что отражение сохраняет симплектическую форму. Это можно проверить в координатах, но мы пойдём другим путём.

Пусть $V\partial M \subset T\partial M$ — расслоение открытых единичных шаров, то есть множество векторов, касательных к ∂M и имеющих длину меньше 1. Пусть $\Pi: S^+\partial M \rightarrow V\partial M$ — ортогональная проекция. Докажем, что она сохраняет симплектическую форму. При переходе в кокасательное расслоение проекция превращается в более естественный оператор сужения ковектора на касательное пространство к краю. Теперь требуемое утверждение выводится из следующего.

Теорема 5.21. Пусть Σ — $(2n - 2)$ -мерное подмногообразие в $T^*M|_{\partial M}$, $\Pi: \Sigma \rightarrow T^*\partial M$ — оператор сужения на касательное пространство края. Тогда $\Pi^*\omega_{\partial M} = \omega_M|_{\Sigma}$, где ω_M и $\omega_{\partial M}$ — канонические симплектические формы на кокасательных расслоениях M и ∂M соответственно.

Доказательство. Вспомним, что $\omega_M = -d\alpha_M$, где α_M — каноническая 1-форма. Достаточно доказать утверждение для α вместо ω , так как обратный перенос Π^* и сужение на Σ коммутируют с внешним дифференцированием. Это легко следует из определения α . \square

6 Интегралы гамильтоновых систем

Определение 6.1. Интеграл динамической системы — гладкая функция, постоянная вдоль траекторий.

Далее будем рассматривать только гамильтоновы системы. Гамильтонов поток с гамильтонианом H будем обозначать через Φ_H .

6.1 Интегралы и коммутирование

Теорема 6.2. Пусть $M = (M, \omega)$ — симплектическое многообразие, $F, H \in C^\infty(M)$. Тогда следующие условия равносильны:

1. F — интеграл потока Φ_H .
2. H — интеграл потока Φ_F .
3. $\{F, H\} = 0$.

Доказательство. Третье условие равносильно первому по определению скобки Пуассона через производную вдоль потока. Так скобка Пуассона кососимметрична, оно равносильно и второму. \square

Следствие 6.3. Если F — интеграл H , то потоки Φ_H и Φ_F коммутируют.

Доказательство. Следует из равенства $[\text{sgrad } F, \text{sgrad } H] = -\text{sgrad}\{F, H\}$. \square

Следствие 6.4. Если M компактно и гамильтоновы потоки Φ_F и Φ_H коммутируют, то F — интеграл H .

Доказательство. Из равенства $\text{sgrad}\{F, H\} = -[\text{sgrad } F, \text{sgrad } H] = 0$ следует, что $\{F, H\}$ — константа. Обозначим эту константу через C . По определению скобки Пуассона через производную вдоль потока, производная F вдоль любой траектории Φ_H равна C . Так как M компактно, F ограничена, откуда $C = 0$. \square

Замечание. Вместо компактности многообразия достаточно потребовать, чтобы хотя бы у одного из потоков существовала траектория, определенная на бесконечном интервале времени и лежащая в компактном подмножестве.

6.2 Нётеровские интегралы

Теорема 6.5 (теорема Нётер, гамильтонов вариант). Пусть M — гладкое многообразие, $H: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ — гамильтониан. Пусть $\{\Psi^t\}$ — поток на M такой, что для каждого t индуцированное отображение

$$\Psi_*^t: T^*M \rightarrow T^*M$$

сохраняет H , и пусть Y — векторное поле на M , порождающее этот поток.

Тогда функция $F: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, заданная равенством

$$F(q, p) = p \cdot Y(q), \quad q \in M, p \in T_q^*M,$$

является интегралом для Φ_H .

Доказательство. Пусть \tilde{Y} — векторное поле на T^*M , порождающее поток $\{\Psi_*^t\}$. Достаточно доказать, что $\tilde{Y} = \text{sgrad } F$, т.е. что $\iota_{\tilde{Y}}\omega = dF$.

Вспомним про каноническую 1-форму $\alpha = p dq$ на M и заметим, что

$$F = \alpha(\tilde{Y}) = \iota_{\tilde{Y}}\alpha.$$

Так как поток Ψ_*^t порождается диффеоморфизмами Ψ^t , он сохраняет α , то есть $\mathcal{L}_{\tilde{Y}}\alpha = 0$. По формуле Картана

$$0 = \mathcal{L}_{\tilde{Y}}\alpha = d(\iota_{\tilde{Y}}\alpha) + \iota_{\tilde{Y}}(d\alpha) = dF - \iota_{\tilde{Y}}(\omega),$$

так как $\omega = -d\alpha$. Получили требуемое равенство $\iota_{\tilde{Y}}\omega = dF$ □

Следствие 6.6 (теорема Нётер, лагранжев вариант). Рассмотрим лагранжеву систему (M, G) , где $G: TM \rightarrow \mathbb{R}$ — невырожденный лагранжиан. Пусть $\{\Psi^t\}$ — поток на M такой, что для каждого t индуцированное отображение

$$\Psi_*^t: TM \rightarrow TM$$

сохраняет G , и пусть Y — векторное поле, порождающее этот поток. Тогда для любой лагранжевой траектории γ верно, что

$$\mathbf{L}_G(\dot{\gamma}(t)) \cdot Y(\gamma(t)) = \text{const},$$

где \mathbf{L}_G — преобразование Лежандра на векторах, определяемое лагранжианом G .

Доказательство. После преобразования Лежандра получаем предыдущую теорему. □

Пример 6.7. Применяя к параллельным переносам в механике, получаем закон сохранения импульса.

Пример 6.8. Применяя к поворотам, получаем закон сохранения кинетического момента.

Пример 6.9. Геодезические сохраняют скалярное произведение с киллинговым полем. Например, имеем интеграл Клеро на поверхности вращения.

6.3 Вполне интегрируемые системы, лиувиллевы торы

Определение 6.10. Гамильтонова система (M^{2n}, ω, H) называется *вполне интегрируемой*, или *интегрируемой по Лиувиллю*, если существуют n гладких функций F_1, \dots, F_n таких что

- Все F_i — интегралы гамильтоновой системы;
- Они попарно коммутируют: $\{F_i, F_j\} = 0$ для всех i, j .
- Условие «функциональной независимости»: dF_1, \dots, dF_n линейно независимы на открытом всюду плотном множестве.

Замечание. Одним из интегралов F_i может быть сам гамильтониан H . Более того, в большинстве примеров так и есть.

Замечание. Из условия функциональной независимости следует, что «почти все» M разбивается на n -мерные многообразия, на которых F_i — константы.

Пример 6.11. При $n = 2$, если существует хотя бы один интеграл системы, функционально независимый с H , то система интегрируема по Лиувиллю. В качестве второго интеграла можно выбрать H , так как любой интеграл коммутирует с H (по теореме 6.2). Например, геодезический поток на поверхности вращения — вполне интегрируемая система.

Теорема 6.12. Пусть (M^{2n}, ω, H) — вполне интегрируемая гамильтонова система с интегралами F_1, \dots, F_n . Пусть Σ — компактное связное n -мерное подмногообразие, на котором все F_i — константы, и их дифференциалы линейно независимы. Тогда

1. Σ — лагранжево подмногообразие (т.е. $\omega|_{\Sigma} = 0$);
2. Σ диффеоморфно тору $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$;
3. При подходящем отождествлении Σ с \mathbb{T}^n гамильтонов поток на Σ действует «параллельными переносами» в направлении фиксированного вектора $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi_H^t(x) = x + tv, \quad x \in \mathbb{T}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Из линейной независимости dF_i следует, что локально Σ совпадает с прообразом константы при отображении (F_1, \dots, F_n) .

Пусть $X_i = \text{sgrad } F_i$. Тогда

- (1) Поля X_i коммутируют: $[X_i, X_j] = -\text{sgrad}\{F_i, F_j\} = 0$.
 - (2) Поля X_i касаются Σ , так как $\mathcal{L}_{X_i} F_j = \{F_j, F_i\} = 0$.
 - (3) Поля X_i образуют базис $T_p \Sigma$ в каждой точке $p \in \Sigma$ (в силу линейной независимости).
- Отсюда получаем действие \mathbb{R}^n на Σ :

$$(p, (t_1, \dots, t_n)) \mapsto \Phi_{X_n}^{t_n} \circ \dots \circ \Phi_{X_1}^{t_1}(p), \quad p \in \Sigma, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}.$$

Это действие определено при всех (t_i) в силу компактности Σ .

Из линейной независимости dF_i следует, что X_i порождают касательное пространство Σ_i в каждой точке. Отсюда по теореме об обратной функции следует, что каждая орбита действия — открытое подмножество в Σ . Так как Σ связна, отсюда следует, что орбита ровно одна.

Отсюда $\Sigma \simeq \mathbb{R}^n / \Gamma$, где $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — стабилизатор любой точки. Заметим, что Γ — дискретная подгруппа в \mathbb{R}^n , и она ко-компактна, поэтому существует линейная биекция $\Lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая переводит Γ в \mathbb{Z}^n . Таким образом, $\Sigma \simeq \mathbb{T}^n$.

Пусть $X = \text{sgrad } H$. Тогда $[X, X_i] = \text{sgrad}\{F_i, H\} = 0$, поэтому координаты X в разложении по базису X_i постоянны, следовательно, H действует сдвигами. \square

Замечание. Как видно из доказательства, сдвигами действует не только H , но и гамильтоновы потоки всех F_i .

Определение 6.13. Такие торы, как в теореме 6.12, называются *лиувиллевыми торами*.

6.4 Координаты действие-угол

Далее будем обозначать через B_ε^n шар радиуса ε в \mathbb{R}^n с центром в нуле.

Теорема 6.14 (теорема Арнольда-Лиувилля). *В тех же предположениях, что в предыдущей теореме, существуют $\varepsilon > 0$ и симплектоморфизм между окрестностью тора Σ и произведением $B_\varepsilon^n \times \mathbb{T}^n$, на котором задана стандартная симплектическая структура*

$$\sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\varphi_i,$$

где x_1, \dots, x_n — декартовы координаты в $B_\varepsilon^n \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — циклические координаты в \mathbb{T}^n .

При этом координатные торы вида $\{p\} \times \mathbb{T}^n$, где $p \in B_\varepsilon^n$, соответствуют поверхностям уровня $F = \text{const}$, где $F = (F_1, \dots, F_n)$.

Координаты из теоремы называются «координаты действие-угол». Доказательство теоремы разобьём на несколько лемм. Зафиксируем лиувиллев тор Σ и прибавим к интегралам F_i такие константы, чтобы их значения на Σ были равны 0. Через F будем обозначать отображение из M в \mathbb{R}^n , с координатными функциями F_1, \dots, F_n .

Лемма 6.15. *У тора Σ есть окрестность, которая разбивается на лиувиллевы торы с разными значениями набора интегралов $F = (F_1, \dots, F_n)$.*

Доказательство. Так как dF_i линейно независимы на Σ , для любой точки $p \in \Sigma$ существует карта (U_p, ψ_p) в окрестности p , в которой координатные представления интегралов F_1, \dots, F_n совпадают с координатными функциями x_1, \dots, x_n . Уменьшим окрестность U_p так, чтобы её образ $\psi_p(U_p)$ в \mathbb{R}^{2n} имел вид $B_{\varepsilon_p}^n \times V_p$, где $\varepsilon_p > 0$, а V_p — некоторая окрестность нуля в \mathbb{R}^n . По компактности тора Σ покрывается конечным набором таких карт $\{U_{p_i}\}$, пусть ε — минимальное из соответствующих чисел ε_{p_i} . Уменьшим каждую окрестность U_{p_i} до окрестности U'_{p_i} так, что $\psi_i(U'_{p_i}) = B_\varepsilon^n \times V_p$. В качестве искомой окрестности U подходит объединение U'_{p_i} по всем i . \square

В следующей лемме строится гладкое семейство угловых координат на всех лиувиллевых торах, близких к данному.

Лемма 6.16. *У тора Σ существуют окрестность U как в предыдущей лемме и такое гладкое отображение $\varphi: U \rightarrow \mathbb{T}^n$, что отображение*

$$(F, \varphi): U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$$

является диффеоморфизмом между U и множеством вида $B_\varepsilon^n \times \mathbb{T}^n$, причём каждая траектория каждого потока Φ_{F_i} отображается при φ в линейное движение на \mathbb{T}^n .

Доказательство. Зафиксируем $p_0 \in \Sigma$ и выберем маленький n -мерный диск $D \subset M$, содержащий p_0 , трансверсально пересекающий Σ и содержащийся в окрестности из предыдущей леммы. По теореме об обратной функции, $F|_D$ диффеоморфно отображает окрестность точки p_0 в Λ на окрестность нуля в \mathbb{R}^n . Уменьшая D , можно считать, что $F|_D$ — диффеоморфизм на шар вида $B_\varepsilon^n \subset \mathbb{R}^n$.

Для $p \in D$ обозначим через Σ_x лиувиллев тор, содержащий p . Как в доказательстве теоремы 6.12, на Σ_p имеется действие \mathbb{R}^n , порождаемое потоками Φ_{F_i} , и это действие даёт диффеоморфизм между Σ_p и \mathbb{R}^n/Γ_p , где Γ_p — некоторая решётка в \mathbb{R}^n (а именно, стабилизатор точки p). Из теоремы об обратной функции легко видеть, что можно, уменьшая при необходимости диск D , выбрать в каждой решётке Γ_p набор образующих $\gamma_1(p), \dots, \gamma_n(p)$ так, чтобы они гладко зависели от p . Пусть $\Lambda_p: \Gamma_p \rightarrow \mathbb{Z}^n$ — гомоморфизм, переводящий $\gamma_1(p), \dots, \gamma_n(p)$ в стандартные образующие группы \mathbb{Z}^n . С помощью Λ_p вышеупомянутая биекция между Σ_p и \mathbb{R}^n/Γ_p превращается в диффеоморфизм φ_p между Σ_p и стандартным тором \mathbb{T}^n . Объединяя эти φ_p по всем $p \in D$, получаем искомое отображение φ . \square

Отображение φ , построенное в лемме 6.16, состоит из координатных функций со значениями в S^1 , которые мы будем называть угловыми координатами. Для теоремы 6.14 угловые координаты ещё потребуется исправить, правильно выбрав начало отсчёта на каждом торе. Этот выбор мы уточним позже.

Временно отождествим окрестность U с множеством $B_\varepsilon^n \times \mathbb{T}^n$ с помощью отображения (F, φ) из предыдущей леммы. На множестве $B_\varepsilon^n \times \mathbb{T}^n$ введём декартовы координаты x_1, \dots, x_n на первом сомножителе (они соответствуют интегралам F_1, \dots, F_n) и угловые координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на втором (они соответствуют координатным функциям отображения φ из леммы 6.16). Обозначим через Y_1, \dots, Y_n векторные поля, соответствующие координатам $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на $B_\varepsilon^n \times \mathbb{T}^n$.

Лемма 6.17. *Векторные поля Y_i — гамильтоновы, и соответствующие гамильтонианы постоянны на лиувиллевых торах.*

Доказательство. Сначала проверим, что эти поля — симплектические. Это равносильно тому, что коэффициенты симплектической формы в координатах $(x_1, \dots, x_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ не зависят от $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Докажем это, продифференцировав эти коэффициенты по координате φ_i и проверив, что производная равна нулю. Вспомним, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi_i} = \mathcal{L}_{Y_i} \omega = d(\iota_{Y_i} \omega).$$

Выражение $\frac{\partial \omega}{\partial \varphi_i}$ обозначает координатную производную симплектической формы ω , это 2-форма, составленная из производных её коэффициентов в данных координатах.

Пусть X_1, \dots, X_n — гамильтоновы поля интегралов F_1, \dots, F_n (т.е. $X_i = \text{sgrad } F_i$). По построению они имеют постоянные координаты на каждом лиувиллевом торе. Кроме того, они линейно независимы в каждой точке. Следовательно, поля Y_i выражаются через X_i с коэффициентами, которые постоянны на каждом торе:

$$Y_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} X_j,$$

где λ_{ij} — функции, зависящие только от координат x_1, \dots, x_n . Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получаем

$$\iota_{Y_i} \omega = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \iota_{X_j} \omega = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} dF_j = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} dx_j.$$

Здесь использовалось равенство $\iota_{X_j} \omega = dF_j$ (определение симплектического градиента) и равенство $F_j = x_j$, которое следует из определения рассматриваемых координат. Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi_i} = d(\iota_{Y_i} \omega) = \sum_{j=1}^n d\lambda_{ij} \wedge dx_j.$$

Коэффициенты правой части зависят только от x -координат, поэтому они постоянны вдоль траекторий поля $Y_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$. С другой стороны, эти траектории — периодические, поэтому интеграл $\frac{\partial \omega}{\partial \varphi_i}$ вдоль каждой из них. Отсюда $\frac{\partial \omega}{\partial \varphi_i} = 0$, как и было обещано. Таким образом, Y_i — симплектическое поле.

Теперь докажем, что Y_i — гамильтоново поле. Это равносильно тому, что 1-форма $\iota_{Y_i} \omega$ точна, а не только замкнута. Как вычислено выше, $\iota_{Y_i} \omega = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} dx_j$. Правая часть не зависит от координат φ_i , поэтому её можно рассматривать как 1-форму на B_ε^n . Мы уже доказали, что она замкнута. По лемме Пуанкаре любая замкнутая форма на диске точна. Следовательно, $\iota_{Y_i} \omega$, рассматриваемая как 1-форма на B_ε^n , имеет первообразную $G_i: B_\varepsilon^n \rightarrow \mathbb{R}$. Поднимая G_i в $B_\varepsilon^n \times \mathbb{T}^n$, получаем искомым гамильтониан. \square

Теперь уточним выбор угловых координат φ_i . Цель состоит в том, чтобы их скобки Пуассона были нулевыми. Примечание: скобка Пуассона корректно определена для функций со значениями в S^1 , так как она зависит только от производных, но не от значений функций.

Лемма 6.18. *Угловые координаты φ можно выбрать так, что все подмногообразия вида $\{\varphi = \text{const}\}$ будут лагранжевыми. При таком выборе координатные функции φ_i коммутируют: $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$ при всех i, j .*

Доказательство. Пусть p_0 — точка на Σ , в которой $\varphi = 0$. Построим маленький лагранжев диск D_0 , трансверсально пересекающий Σ в точке p_0 . Переходом в координаты Дарбу это построение сводится к построению лагранжева линейного подпространства, дополняющего данное, а это несложная линейная алгебра.

Уменьшив диск D_0 и торическую окрестность U , с которой мы работаем, сделаем так, чтобы D_0 трансверсально пересекал все лагранжевы торы из окрестности. Теперь сдвинем начало координат φ на каждом торе в точку на D_0 . В результате получим угловые координаты, в которых множество $\{\varphi = 0\}$ — лагранжево подмногообразие. По доказанному выше, поля $Y_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ — симплектические, поэтому сдвиги вдоль этих полей переводят лагранжевы подмногообразия в лагранжевы. Следовательно, все множества уровней $\{\varphi = \text{const}\}$ — лагранжевы подмногообразия.

Остается проверить, что функции φ_i коммутируют. Для этого достаточно доказать, что поля $\text{sgrad } \varphi_i$ касаются лагранжевых подмногообразий $\{\varphi = \text{const}\}$. Пусть Z_1, \dots, Z_n — координатные поля, соответствующие F_1, \dots, F_n в системе координат (F, φ) . Тогда

$$\omega(\text{sgrad } \varphi_i, Z_j) = dF_i(Z_j) = 0$$

для всех i, j . Следовательно, $\text{sgrad } \varphi_i$ лежит в ω -ортогональном дополнении подпространства, порождённого Z_1, \dots, Z_n , то есть в самом этом подпространстве, так как оно лагранжево. \square

Окончание доказательства теоремы 6.14. Построим угловые координаты как в предыдущей лемме, тогда $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$ для всех i, j . По лемме 6.17 поля Y_i — гамильтоновы. Пусть J_i — соответствующие гамильтонианы, то есть $Y_i = \text{sgrad } J_i$. Из той же леммы мы знаем, что J_i постоянны на торах. Функции J_i и будут искомыми координатами действия (с точностью до знака). Действительно,

$$\{J_i, J_j\} = \omega(Y_i, Y_j) = 0,$$

так как лиувиллевы торы — лагранжевы, и $\{\varphi_j, J_i\} = \mathcal{L}_{Y_i} \varphi_j = \delta_{ij}$. Таким образом, набор функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n, J_1, \dots, J_n$ образует координаты Дарбу. \square

Замечание. Предположим, что ω — точная форма, $\omega = d\alpha$. Тогда координаты действия можно выписать явно следующим образом: пусть $\gamma_1(c), \dots, \gamma_n(c)$ — образующие циклы тора $\Sigma_c = F^{-1}(c)$. Тогда в качестве координаты J_i на торе Σ_c можно взять величину $\int_{\gamma_i(c)} \alpha$.

Это доказывается так: Если $\alpha = \alpha_0 := \sum J_i d\varphi_i$, то утверждение очевидно. А если нет, то из формулы Стокса разность интегралов по $\gamma(c)$ и $\gamma(c')$ не зависит от α , откуда $J_i^\alpha - J_i^{\alpha_0} = \text{const}$.

6.5 Симплектическая редукция по действию окружности

Будем рассматривать симплектические действия окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на симплектическом многообразии $M = (M^{2n}, \omega)$. Действие окружности — то же самое, что 1-периодический поток. Действие называется *гамильтоновым*, если соответствующий поток гамильтонов.

Примеры: стандартное действие S^1 на \mathbb{C}^n , кинетические моменты и тому подобные неётеровские интегралы, сдвиги вдоль угловых координат в интегрируемых системах.

Теорема 6.19. Пусть F — гамильтониан на M , порождающий действие окружности, $\Sigma = F^{-1}(c)$ — регулярная поверхность уровня. Предположим, что действие окружности на Σ свободно.

1. Тогда факторпространство $\overline{M} := \Sigma/S^1$ можно снабдить структурой симплектического многообразия $(\overline{M}, \overline{\omega})$ так, что отображение факторизации $\pi: \Sigma \rightarrow \overline{M}$ — субмерсия и $\pi^*\overline{\omega} = \omega|_\Sigma$.

2. Пусть H — гамильтониан, сохраняющийся при рассматриваемом действии окружности. Тогда $H = \overline{H} \circ \pi$, где $\overline{H} \in \mathcal{F}(\overline{M})$, и для гамильтоновых потоков Φ_H на Σ и $\Phi_{\overline{H}}$ на \overline{M} верно равенство

$$\Phi_{\overline{H}}^t \circ \pi = \pi \circ \Phi_H^t.$$

Доказательство. 1. Локальные координаты на \overline{M} строятся с помощью локальных транверселей, здесь нет специфики окружности (кроме компактности). Возможность переноса ω в фактор следует из симплектичности сечений потока.

2. Гамильтониан H спускается в \overline{M} , так как он постоянен на орбитах. Так как H — интеграл F , вектор $\text{sgrad } H$ касается поверхности уровня F в каждой точке, следовательно, у него определена проекция на \overline{M} . Несложное вычисление показывает, что эта проекция совпадает с симплектическим градиентом \overline{H} . \square

Пример 6.20. Форма Фубини-Штуди на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ — частный случай, где $M = \mathbb{C}^n$, Σ — единичная сфера, $F(z) = |z|^2/2$.

Пример 6.21. Факторизация риманова многообразия M по изометрическому действию окружности. Гамильтонов поток на M/S^1 совпадает с редукцией геодезического потока с точностью до замены времени. Замена времени происходит из-за принципа Мопертюи.