Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В.А.Стеклова РАН
Международный математический институт им. Л. Эйлера
Фонд Эйлера
Санкт-Петербургское математическое общество

Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева

Санкт-Петербург, Россия
24—29 сентября 2007 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Санкт-Петербург
2007

St. Petersburg State University
St. Petersburg Department of the V. A. Steklov Institute of
Mathematics of the Russian Academy of Science
L. Euler International Mathematical Institute
Euler Foundation
St. Petersburg Mathematical Society

International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of D. K. Faddeev

St. Petersburg, Russia
September 24—29, 2007

ABSTRACTS

St. Petersburg
2007

Гармония в Алгебре

(к столетию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Дмитрия Константиновича Фаддеева)

В нашем эссе речь пойдет о человеке, который был основателем современной алгебраической школы в Ленинграде (Петербурге), человеке, который оказал огромное духовное влияние на своих современников, человеке высочайшей культуры, истинно по-петербургски интеллигентном — о Дмитрии Константиновиче Фаддееве. Дмитрий Константинович родился, как сказали бы мы теперь, в типичной интеллигентской семье начала 20 века. Дед Дмитрия Константиновича происходил из крестьян Самарской губернии, и фамилия его возникла вместе с вольной, которую он получил незадолго до отмены крепостного права.

Отец, Константин Тихонович, был человеком весьма незаурядным, он при поддержке родственников закончил Высшую Техническую Школу в Москве, где был замечен А. Н. Крыловым, который рекомендовал его по окончании Школы на Невский завод в Санкт-Петербурге, откуда его уже инженером послали на стажировку в Германию. Род матери, Любови Германовны, восходил к древнему дворянскому роду Гулевичей. В имении деда, которое находилось в небольшом городке Юхнове Смоленской губернии (ныне Калужская область), и родился 30 июня 1907 года мальчик Митя. В доме матери Митя получил прекрасное музыкальное образование и, имея абсолютный музыкальный слух и большую тягу к музыке, он поступает уже после гражданской войны в консерваторию на композиторское отделение. Параллельно в 1923 году он поступает в Петроградский университет, так как, судя по всему, унаследовал от отца математические способности.

Но такая раздвоенность не могла продолжаться долго, и на третьем курсе Дмитрию пришлось выбирать между музыкой и математикой. Выбор пал на математику, которой в итоге он посвятил всю жизнь, не бросая при этом занятия музыкой на очень высоком, практически профессиональном уровне. Сестра Дмитрия Константиновича, работая в Колтушах у ак. Павлова, пригласила его проверить музыкальный слух. Эту проверку, добровольно, разумеется, проходили многие известные тогда дирижеры. Так вот, Дмитрий Константинович превзошел очень многих из них.

Первыми учителями Дмитрия Константиновича в университете были такие выдающиеся математики, как И. М. Виноградов и Б. Н. Делоне (у первого он писал диплом, а у второго учился в аспирантуре), а потому сначала его заинтересовала в математике классическая теория чисел, точнее, диофантовы уравнения. Ему удалось значительно расширить класс уравнений 3-й и 4-й степеней, допускающих полное решение, он получил оценки ранга группы рациональных точек на эллиптических кривых с параметром A, причем для таких больших A, что Андре Вейль, ознакомившись с этими результатами, не поверил тому, что они были сделаны вручную.

Как рассказывал сам Дмитрий Константинович, после окончания университета найти работу по специальности было достаточно трудно, и он работал в разных местах, в том числе и в Палате мер и весов, где пристрастился к курению из-за больших перерывов в наблюдениях за приборами. И все же ему хватило силы воли позднее бросить эту вредную привычку. Любопытная деталь — характерной чертой того времени был дефицит практически во всем, в том числе и в бумаге, поэтому свои вычисления, а они были достаточно большими, Дмитрию Константиновичу приходилось проводить на обратной стороне обоев.

Начиная с 1933 года, Дмитрий Константинович преподавал в Ленинградском университете, с которым была связана вся его жизнь и деятельность вплоть до кончины 30 октября 1989 года. В 1935 году он защитил диссертацию столь блестяще, что за нее сразу же была присуждена докторская степень, а в 1937 году стал профессором Ленинградского университета. Отметим, что в послевоенные сталинские годы (1952–1954) он занимал очень непростую должность декана математико-механического факультета.

В математическом институте Академии Наук Д. К. Фаддеев работал с момента его создания в 1932 году до 1934 и с 1940 до своей кончины. После переезда в Москву учителя Дмитрия Константиновича — Бориса Николаевича Делоне — Д. К. Фаддеев стал признанным главой ленинградских алгебраистов. Многие годы он руководил лабораторией алгебраических методов в Ленинградском отделении математического института им. В. А. Стеклова (ЛОМИ). С 1964 года Д. К. Фаддеев – член-корреспондент Академии Наук СССР. Он был основателем и руководителем общегородского алгебраического семинара (ныне семинар имени Д. К. Фаддеева). Много лет был президентом Ленинградского математического общества.

Первая, формирующая математическую индивидуальность, часть научного пути Д. К. Фаддеева приходится на эпоху, когда советская математика только складывалась и приобретала ту форму, которую мы знаем по временам расцвета Советского Союза. Это была эпоха, очень интересная своими контрастами. В частности, некоторые области математики тогда находились на очень высоком уровне, в то время как другие, часто очень важные, классические ее разделы были совершенно неизвестны. Почти полная изоляция от математики Запада, наступившая к 1935 году, оставляла преодоление этих контрастов исключительно нашим внутренним силам. И такая работа составляла большую часть тогдашней математической деятельности, часть невидимую, мало, а то и совсем никак не отразившуюся в научных публикациях.

В качестве примера таких контрастов напомним, что у нас тогда сложилась школа теории функции действительного переменного, вряд ли имевшая равную себе в мире (Ф. Егоров и Н. Н. Лузин). Была прекрасно известна теоретико-множественная топология (П. С. Александров и П. С. Урысон). На высоком уровне находился функциональный анализ в духе теории банаховых пространств. Позднее очень популярной стала абстрактная алгебра (А. Курош). Но и в некоторых классических областях поддерживался высокий уровень — продолжалась, например, работа Петербургской (а в это время Ленинградской) школы теории чисел, не ослабевал интерес к теории дифференциальных уравнений (Н. М. Гюнтер, В. В. Степанов).

С другой стороны, совершенно неизвестными оставались такие разделы, как классическая теория компактных римановых поверхностей алгебраических функций, тем более, алгебраическая геометрия. Неизученной была теория полей классов, даже теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве и, тем более, теория расширений операторов стали широко известны лишь к самому концу 30-х годов.

Изучение многих классических разделов математики было не "учебным процессом", происходило не на семинарах и спецкурсах, а больше походило на творческий процесс или, по крайней мере, на сотрудничество с истинными авторами. Во многих случаях само осознание того, что существует совершенно неизвестный глубокий раздел математики, было откровением. Такое положение делало работу математика исключительно интересной. Стиралась грань между изучением математической литературы и собственными научными исследованиями — все это сливалось в один процесс "открытия математики".

Но эта ситуация порождала и большие трудности. Много сил, которые можно было бы потратить на собственные исследования, уходило на продумывание и понимание уже давно сложившихся и неизвестных только у нас разделов. А нередко работа в таких областях грозила тем, что радовавшее душу открытие оказывалось лишь переоткрытием известного результата. Но именно здесь сказалась удивительная черта Дмитрия Константиновича. Он был редким математиком, готовым с радостью выслушать собеседника, чтобы тот ни хотел ему рассказать. В его реакции на математический результат отступало на задний план то, кем он был получен — шла ли речь о его собственном открытии или о результате того, кто ему об этом рассказывал, или о старой, но раньше неизвестной говорящему теореме — основную роль играла красота результата.

Это качество определило ту громадную роль, которую Д. К. Фаддеев играл в развитии нашей математики — роль, далеко не полностью отразившуюся в его научных публикациях.

Чтобы проиллюстрировать характер занятий математикой в 30-е годы, приведем следующий пример. Дмитрий Константинович привез в Москву работу о строении кольца целых чисел поля алгебраических чисел как модуля над кольцом целых чисел некоторого подполя. В частном случае — это "теорема о фундаментальном базисе", присутствующая во всех учебниках теории полей алгебраических чисел, начиная со знаменитого "Обзора" Д. Гильберта. Вскоре выяснилось, что теорема не нова — ее доказал Е. Штейниц в форме теоремы о преобразовании прямоугольных матриц. И все же жаль, что Фаддеев не опубликовал свою работу (например, как методологическое новшество), ведь результат Штейница мало известен алгебраистам, его и сейчас нет в основных руководствах по коммутативной алгебре, а много позже, уже после войны, Э. Артин переоткрыл и опубликовал его!

Дмитрий Константинович внес вклад почти во все разделы современной ему математики, но в центре его творчества всегда была алгебра, ему принадлежат значительные результаты в алгебраической теории чисел, алгебраической геометрии, теории Галуа, теории алгебр, теории представлений, он был одним из создателей гомологической алгебры. Он много работал и в других областях математики — теории функций, геометрии, теории вероятностей, геометрической кристаллографии, и особенно плодотворно, в численных методах математики. В списке его трудов более 160 названий.

При всем разнообразии математических интересов Дмитрия Константиновича была одна тема, которой он отдал больше всего сил, и которая была особенно близка его душе — это теория Галуа и, в частности, так называемая задача погружения. Речь идет о следующем вопросе. Классическая теория Галуа изучает группу, которая появляется в так называемых расширениях полей Галуа и связывает подгруппы этой группы с промежуточными расширениями. "Обратная задача теории Галуа" исследует, каким расширениям соответствует заданная группа. Естественным обобщением обратной задачи теории Галуа является задача погружения, которой занимались ведущие алгебраисты того времени, в том числе и Д. К. Фаддеев.

Смысл решения задачи погружения в том, что, зная, какие группы реализуются как группы Галуа расширения данного поля и как решается задача погружения для них, можно методами теории Галуа описать всю совокупность сепарабельных расширений этого поля. Особенно красива задача погружения с абелевым ядром. В этом случае она тесно связана с обратной задачей теории Галуа для разрешимых групп.

К этому случаю относятся и исследования Д. К. Фаддеева.

Он открыл очень важное условие, необходимое для разрешимости задачи погружения, названное им условием согласности. Некоторое время было неясно, не является ли это условие достаточным. Х.Хассе переоткрыл условие согласности на несколько лет позже (тут сыграла роль слабая циркуляция журналов во время войны) и высказал предположение, что оно и достаточно. Д. К. Фаддеев такой гипотезы не высказывал, и ему принадлежит один из первых примеров недостаточности условия согласности для разрешимости задачи погружения. Разделение условий разрешимости задачи погружения на условие согласности и дополнительные условия — пример очень важного явления, позднее встречающегося в различных вопросах алгебраической теории чисел.

Прогресс в теории Галуа во второй половине двадцатого века обязан в наибольшей степени усилиям московской и ленинградской школ, возглавляемых соответственно И. Р. Шафаревичем и Д. К. Фаддеевым. Так, было доказано, что в случае локальных полей при абелевом ядре условие согласности гарантирует разрешимость задачи погружения (С. П. Демушкин и И. Р. Шафаревич). Полностью задача погружения полей в случае абелева ядра была изящно решена А. В. Яковлевым — учеником Д. К. Фаддеева. Итогом деятельности Д. К. Фаддеева в этой области стала написанная им в соавторстве со своими учениками В. В. Ишхановым и Б. Б. Лурье книга "Задача погружения в теории Галуа" (сам Д. К. Фаддеев не дожил нескольких месяцев до выхода книги в свет).

Занимаясь задачей погружения, Дмитрий Константинович столкнулся с формализмом так называемых "систем факторов", все время в этой связи встречающихся, и обнаружил, что он является частным случаем гораздо более общей конструкции. Так была открыта теория когомологий групп. По воспоминаниям сына Дмитрия Константиновича, когда они находились в эвакуации в городе Казани в 1943 году, в какой-то из вечеров отец ходил по комнате весь возбужденный, восклицая, что он открыл нечто замечательное (как оказалось позже — это были коциклы). Сын спросил его: "А сколько людей в мире поймет то, что ты сейчас сделал?" "Ну человек, может быть пять", — ответил отец. Одновременно теорию когомологий групп открыли С. Эйленберг и С. Маклейн, которые пришли к ней, исходя из совсем другого вопроса. Создание теории когомологий групп было одним из самых значительных математических событий середины этого века. Ряд математиков предчувствовал существование такой теории. Так, А. Вейль в комментариях к своему собранию сочинений вспоминает, как в 30-е годы говорил своим друзьям, что ему хотелось бы определить "числа Бетти конечной группы". Трехмерная группа когомологий встречалась у О. Тейхмюллера, и, приведя соотношение, определяющее трехмерный коцикл, он пишет, что обобщение этого соотношения для случая $n > 3$ ему указал Е. Витт. Возможно, Витт знал общее определение групп когомологий (или, по крайней мере, коциклов), но не опубликовал его. Дело, конечно, не сводилось к одному определению, необходимо было систематическое развитие теории — это сделали Д. К. Фаддеев и независимо С. Эйленберг и С. Маклейн. Теория когомологий групп была зерном, из которого выросло мощное дерево гомологической алгебры, обильно плодоносящее и до сих пор. Одним из наиболее значительных достижений гомологической алгебры было создание алгебраической K-теории. И в этой области в школе Фаддеева были достигнуты воистину впечатляющие успехи. Самым ярким примером является теорема Меркурьева–Суслина, определяющая в явном виде группу Брауэра почти произвольного поля. Известный математик А. Алберт сформулировал еще до войны в виде гипотезы полученный ими позже результат (даже лишь часть его), и чувствовалось, насколько безнадежной и недоступной эта гипотеза казалась. Такой сильный математик, как Р. Брауэр, пытался проверить одно ее следствие (всякое тело имеет поле разложения с разрешимой группой Галуа), но смог сделать это лишь для тел очень небольшой размерности.

Еще есть одна большая и находящаяся только в начале своего развития область алгебры, где влияние Дмитрия Константиновича было исключительно глубоко — это исследование неполупростых объектов (колец, модулей). Классическим примером является теория представлений конечных групп над полем ненулевой характеристики. Пожалуй, никакая другая часть алгебры не имеет таких многочисленных приложений в математике и математической физике. Во всех этих вопросах алгебраическая сторона выяснена в принципе до конца: по-видимому последним завершающим результатом является теорема Меркурьева–Суслина о строении группы Брауэра, упоминавшаяся выше. Но, выходя за пределы полупростых колец и модулей, мы попадаем в совершенно неисследованную область, а несколько десятилетий назад здесь вообще ничего не было известно. К этой области относятся теория представлений неполупростых алгебр, а также конечных групп над полем конечной характеристики. Но к ней же надо отнести и ряд "целочисленных" вопросов, например теорию целочисленных представлений конечных групп. По аналогичной причине сюда же естественно отнести и теорию представлений колец алгебраических чисел.

Уже очень давно Дмитрий Константинович обратил внимание на эту громадную неисследованную область, которой принадлежит большое будущее. В результате исследований, как его самого, так и его многочисленных учеников, здесь теперь имеются существенные продвижения. Они касаются в основном структуры соответствующих колец и строения их представлений. На ряде примеров (представления конечных групп, неполупростых алгебр) было обнаружено существование такого типа задач, которые в некотором смысле (точно определенном) имеют "финитный" ответ, и проведено почти исчерпывающее исследование таких задач (они называются "ручными"). Особенно яркие результаты получены учениками Д. К. Фаддеева — Л.А.Назаровой и А.В. Ройтером. Все достижения Дмитрия Константиновича и его учеников являются первым серьезным прорывом в алгебру неполупростых объектов, когда от хаоса, каким эта область до того представлялась, была отвоевана большая ее часть, управляемая красивыми закономерностями.

Удивительная способность Дмитрия Константиновича видеть простое в сложном проявилась еще в одной, может быть, не столь известной, работе о мультипликативной группе циклического p-расширения локального поля. Он изучал ее относительно двух различных структур — операторов из группы Галуа и символа Гильберта — и увидел прямую связь с обычным линейным, только записанным мультипликативно, пространством с оператором и скалярным произведением, а далее применил аналог хорошо известной теории жордановой формы. Как и многие другие, эта работа стала началом целого цикла исследований мультипликативных структур в локальных полях, а также симплектических пространств с операторами, развитых его учениками, в первую очередь З. И. Боревичем и А. В. Яковлевым. Последний применил разработанную им теорию симплектических пространств к изучению топологической структуры группы Галуа алгебраического замыкания локального поля.

Несколько особняком в научном наследии Д. К. Фаддеева стоят его работы в области вычислительной математики. Но и здесь в полной мере проявилась способность Дмитрия Константиновича видеть глубокие связи и едва намечающиеся тенденции. В основном эти работы относятся к исследованию устойчивости численного решения систем линейных алгебраических уравнений и оценке результатов вычислений.

Надо отметить, что на рубеже 50-х годов в вычислительной математике происходили поистине революционные изменения, связанные с быстрым развитием электронно-вычислительной техники, и монография Д. К. Фаддеева "Вычислительные методы линейной алгебры", написанная совместно с женой Верой Николаевной Фаддеевой, оказалась одной из первых книг, отвечающих на целый ряд вопросов, возникших в этой новой ситуации.

Глубина подхода к рассматриваемым задачам обеспечила этой книге редкое для подобной литературы долгожительство — монография переведена на многие языки, до сих пор переиздается и является настольной книгой новых поколений математиков-вычислителей. За эту монографию была получена Государственная премия.

Подчеркивая свою любовь к вычислениям, Дмитрий Константинович любил часто повторять "Я бухгалтер", выговаривая при этом каждую букву.

Дмитрий Константинович обладал несомненным даром математического предвидения. Вспоминаются его слова, когда до Ленинграда дошла весть, что Великую Теорему Ферма переформулировали на языке эллиптических кривых (Г. Фрей, 1985). Он предсказал, что теперь очень скоро эта знаменитая твердыня падет, что и произошло в недолгом времени (А. Вайлс и Р. Тейлор, 1994), правда, уже, к сожалению, после кончины Дмитрия Константиновича.

Нам неизвестно, насколько религиозным человеком был Дмитрий Константинович (в то время это как-то не обсуждалось как сегодня, и это на наш взгляд лучше нынешнего подчеркивания), но он несомненно ставил Человека, его интеллект, выше всего. Об этом могут свидетельствовать такие два эпизода. Первый раз он радовался превосходству человека над машиной, когда П. С. Новиков в 1957 году в отрицательном смысле решил проблему о тождестве слов в группах, т.е. выяснилось, что невозможно различить элементы группы по разному записанные, и человек, тем самым, оказался незаменимым. Второй случай произошел на защите докторской диссертации Ю. В. Матиясевича, доказавшего отсутствие общего алгорифма для решения диофантовых уравнений (10-я проблема Гильберта). Возник философский спор между С. И. Адяном, который считал отрицательный результат в проблеме Гильберта большой философской неудачей, и Д. К. Фаддеевым, который, напротив, ликовал по поводу превосходства человека над машиной.

Много сил Д. К. Фаддеев отдавал перестройке математического образования. Он автор многих замечательных задачников и учебников для школ и университетов. Достаточно вспомнить знаменитый, многократно переизданный "Сборник задач по высшей алгебре", (написанный совместно с И. С. Соминским), а также "Лекции по алгебре". Нам кажется уместным процитировать самого Дмитрия Константиновича, чтобы был понятен его подход к обучению. "Я считаю, что их (абстрактные понятия) следует вводить по мере того, как удается возбудить в учащихся потребность в обобщении или, по крайней мере, если имеется возможность достаточно иллюстрировать общие понятия более конкретным материалом" (из предисловия к книге "Лекции по алгебре").

Дмитрий Константинович был одним из организаторов Всесоюзных математических олимпиад, стоял у истоков Юношеской математической школы в Петербурге (1960 год), а также знаменитого физико-математического 45-го интерната (1964 год). Он живо откликался на любую просьбу прочитать популярную лекцию для школьников, например, читал лекции в Выборге в первой Летней математической школе (1973 год). Постоянно вне лекционных сеток он вел кружок по алгебре для первокурсников, что тогда было совершенно естественным, а нынче, пожалуй, показалось бы многим экзотикой.

Зная, как легко Дмитрий Константинович отдает свои идеи, как мало он склонен подчеркивать свой личный вклад, как много сил готов тратить на обсуждение работ своих учеников и коллег, можно было предсказать, что его влияние на развитие математики не будет столь наглядно видимо и так широко признано, как оно того заслуживает. Это и произошло. К Д. К. Фаддееву очень подходят слова о Жуковском, которому он и в других отношениях близок по духу, сказанные Пушкиным: "Его переводили бы на все языки, если бы он сам не переводил так много". Только слово "переводить" надо заменить, например, на "цитировать". Действительно, вклад Дмитрия Константиновича в математику оценен сейчас, как нам представляется, совершенно недостаточно. Да и роль Д. К. Фаддеева как одного из двух независимых создателей теории когомологий групп упоминается далеко не всегда. А. Гротендик пришел к своей теории группы Брауэра, видимо, не зная работ Фаддеева. Но и в более поздних исследованиях и обзорах на эту тему ссылки на работы Д. К. Фаддеева чаще всего отсутствуют, хотя теперь видно, что его чисто алгебраический подход в некоторых вопросах, например, в проблеме Люрота, дает более простой и естественный аппарат. Примеры можно было бы умножить.

Самого Дмитрия Константиновича такое положение нисколько не огорчало. И он был, конечно, глубоко прав. Если справедлив принцип "рукописи не горят", то тем более "не горят" математические идеи. И не только в том смысле, что будущие математики или историки математики восстановят истинное положение вещей.

Гораздо существеннее то, что для самого Дмитрия Константиновича важна была лишь красота создаваемых им математических идей, а эта красота будет существовать всегда и будет нести в себе отпечаток его индивидуальности.

Приведем еще одно воспоминание о Фаддееве, принадлежащее писателю Евгению Шварцу.

"Я не могу представить, что он изображает профессора, видит себя со стороны и любуется: "Я декан! Ай да я! Я выдающийся. Мы ученые!.." и тому подобное. От врожденного отсутствия позы он, как таковой, стоит против предмета и смотрит на него не с условной, а с естественной точки зрения, без посредников".

Дмитрий Константинович навсегда запомнится нам таким — обсуждающим математическую работу, с улыбкой, слегка склонив голову, как будто прислушиваясь к какой-то ему одному слышной красивой музыке.

С.В.Востоков, профессор,
И.Р.Шафаревич, академик

Элементарный подход к классификации Breuil'a конечных плоских аннулируемых умножением на p групповых схем, определенных над кольцом нормирования алгебраического расширения поля p-адических чисел

В. А. Абрашкин (Дарем, Великобритания)

В 2000 Breuil дал классификацию конечных групповых схем над кольцом нормирования произвольного алгебраического расширения поля p-адических чисел. Его подход существенно использует аппарат кристаллических когомологий, в частности, кристаллическую теорию Дьедонне (Berthelot-Breen-Messing, LNM 930). В докладе будет объяснен элементарный подход к этой классификации на уровне объектов, аннулируемых умножением на p.

Алгебраическая геометрия над свободной нильпотентной группой ступени 2

М. Г. Амаглобели (Тбилиси, Грузия)

Основы алгебраической геометрии над группами изложены в [1], [2]. В частности, в этих работах введены категория G-групп, понятие G-свободной группы, категория алгебраических множеств над группой G. Там же объяснена необходимость этих понятий при создании алгебраической геометрии над фиксированной группой G.

В работе [3] исследуется алгебраическая геометрия над свободной нильпотентной группой G ступени нильпотентности 2. Более точно, мы изучаем алгебраические множества и координатные группы для систем уравнений от одной переменной над группой G.

Основные результаты состоят в следующем.

В теореме 1 дано полное описание координатных групп для систем уравнений с одной перемененной над свободной нильпотентной группой ступени 2.

С помощью теоремы 1 получены следующие результаты.

Теорема 2. *Любая координатная группа H для системы уравнений от одной переменной является неприводимой координатной группой.*

Теорема 3. *Любое алгебраическое множество над свободной нильпотентной группой H ранга $r > 1$ из $\mathfrak{N}_2$ с точностью до изоморфизма является одним из следующих:*
1) *точка;*
2) *центр $Z(G)$ группы G;*
3) *централизатор элемента $g \in G$, $g \notin Z(G)$;*
4) *вся группа G.*

Список литературы

[1] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory. J. Algebra, 219 (1999), no. 1, 16–79.

[2] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations. J. Algebra, 234 (2000), no. 1, 225–276.

[3] М.Г. Амаглобели, Алгебраические множества и координатные группы для свободной нильпотентной группы ступени 2. Сиб. матем. ж., 48 (2007), є 1, 5–10.

Нерасщепимые однородные супермногообразия с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_2 11}$ $(k_1 > k_2 \geq 2)$

М. А. Башкин (Ярославль, Россия)

Представленная работа посвящена проблеме классификации однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с заданным однородным расщепимым супермногообразием, которое называется их ретрактом. Эта проблема была поставлена А.Л. Онищиком и решается в данной работе в случае, когда в качестве однородного расщепимого супермногообразия рассматривается супермногообразие $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_2 11}$ при $k_1 > k_2 \geq 2$. Через $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_2 11}$ обозначено расщепимое супермногообразие, определяемое голоморфным векторным расслоением $\mathbf{E} \to \mathbb{CP}^1$ ранга 4, представленное в виде прямой суммы линейных расслоений на прямые $\mathbf{E} = \mathbf{L}_{-k_1} \oplus \mathbf{L}_{-k_2} \oplus 2\mathbf{L}_{-1}$, где $k_1 > k_2 \geq 2$.

Покроем $\mathbb{CP}^1$ двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и $y = \frac{1}{x}$ соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_211}$ в $U_0\cap U_1$ имеют вид

$$\begin{cases} y = x^{-1} \\ \eta_1 = x^{-k_1}\xi_1 \\ \eta_2 = x^{-k_2}\xi_2 \\ \eta_3 = x^{-1}\xi_3 \\ \eta_4 = x^{-1}\xi_4 \end{cases},$$

где ξ_i и η_i — базисные сечения расслоения $\mathbf{E}$ над U_0 и U_1 соответственно.

Один из подходов к задаче классификации комплексных супермногообразий с заданным ретрактом $(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ заключается в следующем. Согласно теореме Грина, классы изоморфных супермногообразий такого вида находятся в биективном соответствии с орбитами группы автоморфизмов соответствующего векторного расслоения $\mathbf{E}$ на множестве когомологий $H^1(M,\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ со значениями в пучке $\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$ автоморфизмов пучка $\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$, тождественных по модулю квадрата подпучка нильпотентных элементов. В некоторых случаях вычисление этих неабелевых когомологий удается свести к вычислению обычных (абелевых) когомологий со значениями в пучке $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ векторных полей на $(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. В настоящем исследовании рассматривается случай, когда существует биекция между множеством $H^1(\mathbb{CP}^1,\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ и векторным пространством $H^1(\mathbb{CP}^1,\mathcal{T}_2\oplus\mathcal{T}_4)$ (см. [1]). При этом как абелевы, так и неабелевы когомологии могут быть описаны при помощи комплекса Чеха, связанного со штейновым открытым покрытием многообразия M. При исследовании супермногообразий на однородность и четную однородность существенное значение имеют критерии подъема на супермногообразие с его ретракта векторных полей и действий групп Ли, связанные с инвариантностью класса когомологий, определяющего супермногообразие, относительно этих действий (см. [2] и [3]).

Основным результатом является доказательство того, что с точностью до изоморфизма существует одно однородное нерасщепимое супермногообразие с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_211}$ $(k_1>k_2\geq 2)$, которое может быть представлено в покрытии $\{U_0,U_1\}$ следующим коциклом

$$x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}.$$

Список литературы

[1] Башкин М.А., Онищик А.Л. Однородные нерасщепимые супермногообразия размерности 1|4 над комплексной проективной прямой // Математика в Ярославском университете: Сб. обзорных статей. К 30-летию математического факультета/ Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2006. С. 17–32.

[2] Онищик А.Л. Проблемы классификации комплексных супермногообразий // Математика в Ярославском университете: Сб. обзорных статей. К 25-летию математического факультета/ Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2001. С. 7–34.

[3] Onishchik A.L. A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V. 16. P. 309–333.

О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n

В. А. Белоногов (Екатеринбург, Россия)

В статье [1] описаны все пары равнокорневых (т. е. имеющих одно и то же множество корней) неприводимых характеров симметрической группы S_n ($n \in \mathbb{N}$); это — в точности пары ее ассоциированных неприводимых характеров, т. е. пары вида $(\varphi, \varphi\xi)$, где ξ — неприводимый характер S_n с ядром A_n и $\varphi \neq \varphi\xi$. Представляет интерес также изучение равнокорневых неприводимых характеров знакопеременных групп A_n и, более общо, неприводимых характеров группы S_n, имеющих одно и то же множество корней на множестве A_n.

Принципиальный план такого изучения был предложен в статье [2]. Там же приведены предпосылки и обоснование такого изучения. Применяемый автором метод изучения требует также изучения неприводимых характеров группы S_n, равнокорневых на разности $S_n \setminus A_n$.

Множество всех неприводимых характеров группы S_n находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $P(n)$ всех разбиений числа n (см. [3]). Далее χ^α обозначает неприводимый характер группы S_n, соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$, $d(\alpha)$ — длина главной диагонали диаграммы Юнга разбиения α и α' — разбиение, ассоциированное с α. Мы пишем $\alpha =' \beta$, если $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$. Для $\varepsilon \in \{1, -1\}$ положим $S_n^\varepsilon := \begin{cases} A_n, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ S_n \setminus A_n, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$

Автором получено описание всех пар χ^α и χ^β неприводимых характеров группы S_n $(\alpha, \beta \in P(n))$, равнокорневых на S_n^ε, при условии, что наименьшая из длин $d(\alpha)$ и $d(\beta)$ не превосходит двух. Частью этого описания является следующая

Теорема. *Пусть* χ^α *и* χ^β *— неприводимые характеры группы* S_n*, имеющие одни и те же корни на* S_n^ε *при некотором* $\varepsilon = \pm 1$*. Предположим, что* $d(\beta) > d(\alpha) = 1$*. Тогда* $n \leqslant 11$ *и выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\alpha =' (4),\ \beta = (2,2),\ \varepsilon = 1$*;*
(2) $\alpha =' (5),\ \beta =' (3,2),\ \varepsilon = -1$*;*
(3) $\alpha =' (5,1),\ \beta =' (3,3),\ \varepsilon = 1$*;*
(4) $\alpha =' (6,1),\ \beta =' (4,3),\ \varepsilon = -1$*;*
(5) $\alpha =' (6,1^2),\ \beta = (3,3,2),\ \varepsilon = 1$*;*
(6) $\alpha =' (7,1^2),\ \beta =' (4,4,1),\ \varepsilon = -1$*;*
(7) $\alpha =' (8,1^3),\ \beta =' (4,4,2,1),\ \varepsilon = -1$*.*

Обратно, в каждом из случаев (1)–(7) *выполняется условие теоремы.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00148) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект № 05-01-39000).

Список литературы

[1] В. А. Белоногов. О неприводимых характерах групп S_n и A_n, Сиб. матем. ж., 45, є 5 (2004), 977–994.
[2] В. А. Белоногов. О равнокорневых неприводимых характерах групп S_n и A_n, Алгебра и логика, 46, №1 (2007), 3—25.
[3] Г. Джеймс. Теория представлений симметрических групп. М.: Мир. 1982.

К проблеме транзитивности групп трансляций одного класса группоидов

В. М. Галкин, Л. Н. Ерофеева (Нижний Новгород, Россия)

По терминологии из [1] L-группоид $G(\circ)$ по определению удовлетворяет следующим трем аксиомам:

1). $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ (a \circ c)$;
2). Уравнение $a \circ x = b$ однозначно разрешимо;

3). Уравнение $x \circ a = a$ однозначно разрешимо.

В частности, оказывается в 3) решением является $x = 0$, т.е. L-группоид идемпотентен. Отображения $L_a = (x \mapsto a \circ x)$, называемые левыми трансляциями, в силу 1) являются автоморфизмами L-группоида и порождают подгруппу $Z(G) \subset AutG$ в группе автоморфизмов $G(\circ)$-группу левых трансляций.

В [2] выдвинуто утверждение о транзитивном действии $Z(G)$ на $G(\circ)$ в случае конечного L-группоида. Весьма неожиданно, что это утверждение эквивалентно очень красивому теоретико-групповому утверждению: в объединении двух классов сопряженности конечной группы имеются коммутирующие элементы.

К настоящему времени разработана методика проверки утверждения и проделана достаточно большая работа. Один из этапов – это проверка более сильного утверждения: в простой конечной группе в неединичном классе сопряженности имеются коммутирующие элементы. В докладе приводятся данные о методах и полученные результаты по проверке последнего утверждения.

Список литературы

[1] Ерофеева Л.Н., Об одном классе группоидов, Записки научных семинаров ПОМИ. Т.305.2003.

[2] Ерофеева Л.Н., К проблеме транзитивности группоидов. Международный семинар по теории групп, Екатеринбург, 2001.

Альтернативные Д-биалгебры. Структура альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли-Диксона

М. Е. Гончаров (Новосибирск, Россия)

Биалгебры Ли были введены Дринфельдом для изучения решений классического уравнения Янга-Бакстера. В работе [1] дано определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр. В частности, было определено понятие ассоциативной и йордановой Д-биалгебры, рассмотрен ассоциативный аналог уравнения Янга-Бакстера и ассоциативные Д-биалгебры, связанные с решениями этого уравнения. Класс йордановых Д-биалгебр, связанный с йордановым аналогом уравнения Янга-Бакстера, был определен в [2], где было доказано, что всякая конечномерная йорданова Д-биалгебра, которая полупроста как алгебра, принадлежит этому классу.

Настоящая работа посвящена исследованию альтернативных Д-биалгебр. Получена характеризация альтернативных Д-биалгебр в терминах коумножения. По аналогии с работами [1] и [2] вводится класс биалгебр, связанных с уравнением Янга-Бакстера на альтернативных алгебрах. Показано, что биалгебры этого класса являются альтернативными Д-биалгебрами.

В работе [1] доказывается, что любая конечномерная ассоциативная некоммутативная алгебра над алгебраически замкнутым полем допускает нетривиальную структуру ассоциативной Д-биалгебры. В данной работе этот результат обобщается на случай конечномерных альтернативных некоммутативных алгебр.

В завершении рассматривается матричная алгебра Кэли-Диксона $\mathcal{C}$ над алгебраически замкнутым полем. Дается описание всех структур альтернативных Д-биалгебр, заданных на $\mathcal{C}$. [2, стр.29]

Список литературы

[1] Желябин В. Н. Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли. // Алгебра и логика т.1,36(1997), 3–25.

[2] Желябин В.Н. Об одном классе йордановых Д-биалгебр. //Алгебра и анализ т.11(1999), вып. 4, 64–94

Алгебраическая геометрия над алгебрами Ли

Э. Ю. Даниярова (Омск, Россия)

На докладе будут представлены основные результаты, полученные при исследовании алгебраической геометрии над алгебрами Ли, а именно, над свободной конечно порожденной алгеброй Ли над полем и над свободной конечно порожденной метабелевой алгеброй Ли над полем.

Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами — это новое направление исследований. На сегодняшний день наиболее широко оно представлено в разработке алгебраической геометрией над группами, где получены хорошие результаты. Наиболее яркий успех здесь — это решение основной проблемы алгебраической геометрии о классификации координатных групп и алгебраических множеств в случае свободной группы; соответствующая классификация координатных групп дана на языке свободных конструкций.

Основы алгебраической геометрии над группами были заложены в двух работах G. Baumslag, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov "Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and Ideal Theory" и A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov "Algebraic geometry over groups II: Logical Foundations". Предложенная в этих статьях система определений и набор основных результатов могут быть без труда перенесены на произвольные алгебраические системы (без предикатов), в частности, на алгебры Ли, что и было сделано в статье Э. Ю. Данияровой "Основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли".

Краткое содержание упомянутой работы: 1) прежде всего, в статье приводятся понятия системы уравнений над алгеброй Ли, алгебраического множества, радикала алгебраического множества, координатной алгебры; 2) вводится категория алгебраических множеств над фиксированной алгеброй Ли и категория координатных алгебр, доказывается эквивалентность данных категорий; 3) определяется топология Зарисского, даются понятия неприводимых алгебраических множеств, нетеровых по уравнениям алгебр Ли и областей (топология Зарисского над такими алгебрами Ли обладает рядом приятных особенностей), доказывается, что любая конечно порожденная метабелева (а также любая нильпотентная) алгебра Ли является нетеровой по уравнениям; 4) излагаются логические аспекты алгебраической геометрии над алгебрами Ли; 5) доказывается, что описание неприводимых координатных алгебр над нетеровой по уравнениям алгеброй Ли A эквивалентно описанию конечно порожденных алгебр из универсального замыкания $\mathrm{ucl}(A)$, порожденного алгеброй A, а описание всех координатных алгебр над A эквивалентно описанию конечно порожденных алгебр из квазимногообразия $\mathrm{qvar}(A)$.

Практические результаты, которые на сегодняшний день удалось получить при построении алгебраической геометрии над конкретными алгебрами Ли, относятся к двум областям исследования: к алгебраической геометрии над свободной метабелевой алгеброй Ли F конечного ранга над полем k и к алгебраической геометрии над свободной алгеброй Ли L конечного ранга над полем k.

Над свободной метабелевой алгеброй Ли F полностью решена основная задача алгебраической геометрии: классифицированы неприводимые координатные алгебры и все координатные алгебры над F. Кроме того, найдено аксиоматическое описание квазимногообразия и универсального замыкания, порожденных алгеброй F, построено обоснование алгоритмической разрешимости квазиэквациональной и универсальной теорий алгебры F, а также алгоритмической разрешимости проблемы совместности систем уравнений над F. Полученные результаты существенно отличаются в случаях конечного и бесконечно поля k. Описание неприводимых координатных алгебр над свободной метабелевой алгеброй Ли F над конечным полем k было дано в двух статьях Э. Ю. Даniяровой, И. В. Казачкова, В. Н. Ремесленникова, 2003 г. Дальнейшие исследования проводились Э. Ю. Данияровой, сейчас завершается подготовка цикла из 6–7 работ, из которых одна уже опубликована и три сданы в печать.

Резюмируя результаты, полученные при классификации координатных алгебр над свободной метабелевой алгеброй Ли F, отметим следующее: 1) если поле k конечно, то классификация неприводимых координатных алгебр над алгеброй F сводится к теории конечно порожденных модулей без кручения над кольцом многочленов от $\mathrm{rank}(F)$ переменных над полем k; 2) в случае бесконечного поля k теория неприводимых координатных алгебр над F, помимо модульной теории, полностью включает в себя теорию диофантовых проективных алгебраических многообразий над полем k; 3) произвольная координатные алгебра над F подпрямо вкладывается в конечную прямую сумму неприводимых координатных алгебр над F (в случае поля k произвольной мощности).

Если метабелева алгебра Ли F является нетеровой по уравнениям, то свободная алгебра Ли L является областью. Подходы, используемые при построении алгебраической геометрии над алгеброй F, не работают над алгеброй L. В 2005 году в статье Э. Ю. Данияровой, В. Н. Ремесленникова были описаны так называемые ограниченные алгебраические множества над свободной алгеброй Ли L и все алгебраические множества в размерности один. Как оказалось, существует взаимно однозначное соответствие между ограниченными алгебраическими множествами над алгеброй Ли L и алгебраическими множествами над основным полем k. Отсюда следует, что алгебраическая геометрия над свободной алгеброй Ли L устроена достаточно сложно и включает в себя всю теорию диофантовой алгебраической геометрии поля k. Результаты этой работы без изменений перекладываются на случай свободной антикоммутативной алгебры A. Алгебраическая геометрия над алгебрами L и A в настоящее время продолжает активно изучаться.

Разрешимые линейные группы с ограничениями на неабелевы подгруппы бесконечного абелева секционного ранга

О. Ю. Дашкова (Киев, Украина)

Группа G автоморфизмов векторного пространства A над полем F называется линейной группой. Группа всех таких автоморфизмов обозначается символом $GL(F, A)$. Если размерность векторного пространства A над полем F конечна, G называется конечномерной линейной группой. В этом случае группа $GL(F, A)$ может быть отождествлена с группой невырожденных квадратных матриц размерности $n \times n$, где $n = dim_F A$. Конечномерные линейные группы нашли применение в различных областях науки.

Исследование подгрупп группы $GL(F, A)$ в случае бесконечномерного векторного пространства A над полем F стало проводиться достаточно активно в последнее время.

Если H – подгруппа группы $GL(F, A)$, тогда H реально действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Обозначим $dim_F(A/C_A(H))$ символом $centdim_F H$. Если $dim_F(A/C_A(H))$ конечна, будем говорить, что H имеет конечную центральную размерность. В противном случае говорят, что H имеет бесконечную центральную размерность.

В [1] авторами исследовались локально разрешимые линейные группы бесконечной центральной размерности с определенными ограничениями на подгруппы различных бесконечных рангов. В данной работе изучаются разрешимые линейные группы бесконечной центральной размерности с определенными ограничениями на неабелевы подгруппы бесконечного абелева секционного ранга.

Пусть p – простое число. Группа G имеет конечный p-ранг $r_p(G) = r$, если каждая элементарная абелева p-секция группы G имеет порядок, не превосходящий p^r, и существует элементарная абелева p-секция порядка p^r. Группа G имеет конечный 0-ранг $r_0(G) = r$, если G обладает конечным субнормальным рядом, у которого ровно r факторов – бесконечные циклические, а остальные факторы этого ряда являются периодическими. Говорят, что группа G имеет конечный абелев секционный ранг, если каждая ее абелева секция имеет конечный p-ранг, где p – либо простое число, либо 0.

Основным результатом данной работы является теорема.

Теорема. Пусть $G \leq GL(F, A)$ – неабелева разрешимая группа бесконечного абелева секционного ранга. Предположим, что $centdim_F G$ бесконечна. Если каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного абелева секционного ранга имеет конечную центральную размерность, то группа G удовлетворяет следующим условиям:

(i) $G = HQ$, где H – нормальная подгруппа группы G, $H \cap Q = E$, $Q \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q;

(ii) H является p-группой конечной центральной размерности, причем $char F = p$, $q \neq p$;

(iii) $K = H \cap Z(G)$ - конечная подгруппа;

(iv) H/K – бесконечная элементарная абелева p-группа;

(v) H/K – минимальная нормальная погруппа фактор-группы G/K.

Список литературы

[1] Dashkova O.Yu., Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension, *Journal Pure and Applied Algebra.* 208, N 3 (2007), 785-795.

О решетке промежуточных подгрупп полной линейной группы степени 2 над полем рациональных функций, содержащих нерасщепимый максимальный тор

В. С. Дзигоева (Владикавказ, Россия)

Мы продолжаем исследование структуры промежуточных подгрупп полной линейной группы $G = GL(2, k)$ над полем рациональных функций $k = \mathbb{F}_q(t)$ конечного поля констант $\mathbb{F}_q(t)$ нечетной характеристики, содержащих нерасщепимый максимальный тор $T = T(\mu)$, $\mu \in \mathbb{F}_q^2 \backslash \mathbb{F}_q$, связанный с квадратичным расширением $k(\sqrt{\mu})$ основного поля k. Со всякой промежуточной подгруппой H, $T \leq H \leq G$, содержащей элементарную трансвекцию, связан модуль трансвекций $A = A(H)$ и его кольцо множителей $R = R(H)$:

$$A(H) = \left\{ \alpha \in k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H \right\}, \quad R(H) = \{\lambda \in k : \lambda A \subseteq A\}.$$

Пару (R,A) мы называем допустимой, если для некоторой промежуточной подгруппы H, $\ R = R(H)$, $\ A = A(H)$. Очевидно, что решетка всех промежуточных подгрупп $Lat(T, G) = \{H : T \leq H \leq G\}$ представляется в виде дизъюнктного объединения подрешеток $Lat(R, A) = \{H : R = R(H), A = A(H)\}$ для всех допустимых пар (R,A), а потому описание решетки всех промежуточных подгрупп сводится к описанию допустимых пар и соответствующих подрешеток $Lat(R, A)$. Обозначим через R_0 кольцо рациональных функций, степень числителя которых не превосходит степени знаменателя, и знаменатель представляет собой произведение неприводимых многочленов четной степени.

Теорема 1. Пара (R, A) является допустимой тогда и только тогда, когда $R \supseteq R_0$, A - идеал кольца R.

Теорема 2. Подрешетка $Lat(R, A)$ содержит единственную наибольшую $F^0 = F^0(R, A)$ и единственную наименьшую $F_0 = F_0(R, A)$ подгруппы.

Теорема 3. Если стабильный ранг кольца R равен 1, то для любой подгруппы $H \in Lat(R, A)$ имеем

$$N(N(H)) = F^0, \qquad T^{T^H} = F_0.$$

Список литературы

[1] Койбаев В.А. Подгруппы $GL(2, Q)$ группы, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР 1990. Т.312 N1. С.36-38

[2] Боревич З.И., Койбаев В.А. О кольцах множителей, связанных с промежуточными подгруппами для квадратичных торов // Вестн.Санкт-Петербург.универ. Сер.1 1993 N2.С.5-10.

О тривиальности второй группы когомологий конформной алгебры Вейля

И. А. Долгунцева (Новосибирск, Россия)

Одним из главных результатов теории конечномерных алгебр является теорема Веддерберна о строении сепарабельных алгебр: Пусть A — ассоциативная алгебра, $R = \mathrm{Rad}(A)$. Если $A/\mathrm{Rad}(A)$ — сепарабельная алгебра, то существует подалгебра $S \subseteq A$ такая, что $A = S \oplus \mathrm{Rad}(A)$. Известно, что это утверждение является следствием теоремы Хохшильда [1] о тривиальности второй группы когомологий алгебры матриц над полем.

В работе [2] был доказан аналог терореме Веддерберна для ассоциативных конформных алгебр. Возникает вопрос: можно ли объяснить этот результат в терминах когомологий конфорных алгебр?

Нами было дано определение когомологий Хохшильда для ассоциативных конформных алгебр. Понятие когомологий конформных алгебр вводилось и ранее (см. [3]), но, на наш взгляд, оно не дает наглядного представления о связи группы когомологий с расширениями. Мы установили, что существует взаимно однозначное соответствие между элементами второй группы когомологий и расширениями ассоциативой конформной алгебры. В частности, алгебра отщепляема в любом расширении, если ее вторая группа когомологий тривиальна.

Нами доказана теорема о том, что вторая группа когомологий конформной алгебры Вейля со значениями в любом бимодуле тривиальна. Как следствие, конформная алгебра Вейля отщепляема в любом расширении с нильпотентным ядром. Это обобщает результат работы [2], поскольку не требуется, чтобы расширение имело конечное точное представление.

Список литературы

[1] Hochschild G., On the cohomology of an assotiative algebra, Ann. of Math. N.45 (1) (1945), 58–67.
[2] Kolesnikov P., On the Wedderburn principal theorem for conformal algebras, preprint, math.RA/0508105.
[3] Bakalov B., Kac V.G., Voronov A., Cohomology of conformal algebras, Comm. Math. Phys. N.200 (1999), 561–589.

О φ-структуре на исключительных группах типа E

М. Е. Елисеев (Нижний Новгород, Россия)

Доказывается, что автоморфизм φ со свойством: $x\varphi(x^{-1}) \in sTs^{-1} \Rightarrow x \in T$ (T – подгруппа φ-неподвижных элементов) действует тождественно на группах $E_6(q), {}^2E_6(q), E_7(q), E_8(q)$ нечетно.

Группы для которых существует нетривиальный автоморфизм φ с указанным свойством называются далее φ-группами. Сведения о них можно найти в [1, 2, 3]. Введенная таким образом φ-структура наследуется при переходе к φ-инвариантным подгруппам и факторгруппам по φ-инвариантным нормальным делителям.

Доказательство проходит по следующей схеме:

1. Известно [4], что автоморфизм простой группы не может быть регулярным, поэтому $|T| > 1$ (впрочем, этот факт может быть доказан без ссылки).

2. Доказываем, что в T есть полупростые элементы.

3. Доказываем, что в T есть инволюция.

4. Доказываем тождественность φ.

Особую сложность представляет доказательство пункта 2 при нечетном q. При рассмотрении групп $E_6(q)$ существенным образом используется информация из [7] о сопряженности унипотентов со своими степенями, полученная на основе результатов из [6]. В случае ${}^2E_6(q)$ информацию о сопряженности унипотентов можно получить рассмотрев эту группу как подгруппу неподвижных элементов некоторого автоморфизма σ алгебраической группы типа E_6[5].

Список литературы

[1] Галкин, В. М. Леводистрибутивные квазигруппы конечного порядка/В.М. Галкин// Квазигруппы и лупы – Кишинев: Штиинца, 1979.

[2] Галкин, В. М. О симметрических квазигруппах /В.М. Галкин. – УМН, 1984. – Т.39, вып.6.– С. 191-192.

[3] Галкин, В. М. Леводистрибутивные квазигруппы: Дисс. докт.ф.-м. наук/В.М. Галкин. – М.: МГУ, 1991.

[4] Горенстейн, Д. Конечные простые группы./Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985.

[5] Стейнберг, Р. Лекции о группах Шевалле./Р. Стейнберг. – М.: Мир, 1975.

[6] Mizuno, K. The conjugate classes of Chevalley groups of type E_6./K. Mizuno. – J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 24 (1977), 525-563.

[7] Елисеев, М. Е. О φ-структуре на ортогональных группах четной характеристики и группах $E_{6,7,8}(q)$, ${}^2E_6(q)$: Дисс.канд.ф.-м. наук /М. Е. Елисеев. – СПб.: СПбГУ. – 2005.

Теория полей классов (новые аспекты)

Ю. Л. Ершов (Новосибирск, Россия)

В докладе будет рассказано, как можно чисто алгебраически изложить основные результаты абстрактной, глобальной и локальной теорий полей классов, включая теорию Любина-Тейта.

Для представления глобальной теории полей классов используются хорошие и удивительные расширения полей алгебраических чисел, изложению происхождения и основных свойств этих расширений будет уделено заметное внимание.

Список литературы

[1] Ершов Ю.Л., Абстрактная теория полей классов (финитарный подход),Мат.сб., 194, N 2(2003),37-60

[2] Ершов Ю.Л., Хорошие расширения и глобальная теория полей классов, Докл.РАН, 388, N 2(2003),155-158

[3] Ершов Ю.Л., Локальная теория полей классов, Алгебра и Анализ, 15, N 6(2003), 35-47

[4] Ершов Ю.Л., Абстрактная теория полей классов (форматирование модулей). Сиб. электронные мат.известия (http://semr.math.nsc.ru), 1(2004),1-27

[5] Ершов Ю.Л., Расширения Любина-Тейта (элементарный подход), Изв.РАН, сер.мат. в печати.

Вполне регулярных графы с $\mu \leqslant k - 2b_1 + 3$

К. С. Ефимов, А. А. Махнев (Екатеринбург, Россия)

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф, с долями порядков $m_1, ..., m_n$. Если $m_1 = \cdots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. *Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется $m \times n$*-решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Графом Тэйлора называется вполне регулярный граф Γ диаметра 3, в котором для любых двух вершин u, w с $d(u, w) = 3$ получим $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$. Если p — простое число и p^n сравнимо с 1 по модулю 4, то графом Пэли $P(p^n)$ называется граф, вершинами которого являются элементы поля F порядка p^n и две вершины смежны тогда и только тогда, когда их разность является ненулевым квадратом в F. Класс графов Зейделя состоит из полных многодольных графов с долями порядка 2, $n \times n$-решеток, треугольных графов $T(n)$, графов Петерсена, Шрикханде, Клебша, Шлефли и Чанга.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Единственный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$ называется *графом Клейна*.

Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

В теореме Ливингстона–Тэйлора [1, теорема 1.3.3] доказано, что во вполне регулярном графе выполняется неравенство $\mu \geqslant k - 2b_1 + 1$ и описаны графы с $\mu = k - 2b_1 + 1$. В работе [2] Белоусов И.Н. и Махнев А.А. классифицировали графы с $\mu = k - 2b_1 + 2$.

Теорема. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ) *и* $\mu = k - 2b_1 + x$, $x \leqslant 3$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $x = 1$ *и* Γ *— граф икосаэдра или реберный граф регулярного графа без треугольников, имеющего обхват, больший* 4*;*

(2) $x = 2$ *и* Γ *— граф Зейделя или тривалентный граф без треугольников диаметра, большего* 2*, с* $\mu = 1$*;*

(3) $x = 3$ *и* Γ *— один из следующих графов:*

(i) *граф Пэли с параметрами* $(13, 6, 2, 3)$*, куб или граф Клейна,*

(ii) *граф Тэйлора с параметрами* $(6b_1 - 4, 3b_1 - 3, 2b_1 - 4, b_1)$ *и* $b_1 \in \{4, 6, 10\}$,

(iii) *регулярный граф без треугольников степени* 4 *или граф с* $b_1 = 4, k = 6$ *и* $\lambda = 1$.

Пример. Пусть Γ — граф Тэйлора, в котором окрестности вершин являются обобщенными четырехугольниками с $s = 2$. Тогда $t \in \{1, 2, 4\}$ и граф Γ_2 с теми же вершинами, что и Γ, в котором две вершины смежны, если они находятся на расстоянии 2 в Γ, является графом из пункта ($3ii$) заключения теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00046).

Список литературы

[1] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* – Berlin etc: Springer-Verlag, 1989 – 495 pp.

[2] Белоусов И.Н., Махнев А.А. *О почти хороших парах вершин в реберно регулярных графах* // Известия Уральского госуниверситета 2005. Т. 36. С.35–48.

Перестановочные классы Фиттинга

В. Н. Загурский (Витебск, Беларусь)

Рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Фишера [1], если из того, что $K \subseteq H \subseteq G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq G$ и H/K — примарная группа, всегда следует $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть π — непустое множество простых чисел и $\mathfrak{S}^\pi$ — класс всех π-разрешимых групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть перестановочным на множестве $\mathfrak{S}^\pi$, если справедливы следующие условия:

1) в каждой группе G из $\mathfrak{S}^\pi$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G;

2) $\mathfrak{F}$-инъектор каждой группы G из $\mathfrak{S}^\pi$ является системно перестановочной подгруппой в G.

Если $\pi = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют [1] просто перестановочным.

В теории классов Фиттинга известен результат Локетта [2] о том, что разрешимый класс Фишера является перестановочным. В настоящем сообщении мы расширяем результат Локетта на случай π-разрешимых групп, где $\mathfrak{F}$ — произвольный класс Фишера и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{F}$. С использованием результатов Л.А. Шеметкова [3], доказана следующая

Теорема. *Всякий класс Фишера $\mathfrak{F}$ является перестановочным на множестве $\mathfrak{S}^\pi$ для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$.*

Список литературы

[1] Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

[2] Lockett, F.P. On the Theory of Fitting Classes of finite and soluble groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Vol. 131, – P. 103–115.

[3] Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

Численные инварианты проективных алгебраических многообразий

Ф. Л. Зак (Москва, Россия)

Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^N$ — невырожденное неособое комплексное алгебраическое многообразие размерности n, коразмерности $a = N - n$ и степени $d = \deg X$. Рассматриваемое как абстрактное многообразие, X имеет важные численные инварианты, примерами которых являются числа Чженя (например, $c_1^n(X) = (-1)^n(K_X^n)$, где K_X — канонический класс X), числа Бетти $b_i(X)$, $i = 0, \ldots, 2n$ и $b(X) = \sum_{i=0}^{2n} b_i(X)$ и Ходжа $h^{p,q}(X)$, $p, q = 0, \ldots, n$.

Возникает естественный вопрос: каковы взаимоотношения между всеми этими инвариантами и, в частности, в каком диапазоне могут они изменяться при заданных n, a и d? В случае кривых ($n = 1$) основным инвариантом, через который выражаются все остальные, является род g. При $a = 1$ род определяется степенью, а при бóльших a имеются точная оценка сверху $g \leqslant \mathfrak{C}(d, a) = \frac{d^2}{2a} + \cdots$ (где точки обозначают член, мажорирующийся линейной функцией от $\frac{d}{a}$) и классификация кривых максимального рода, полученные Альфаном при $a = 2$ и Кастельнуово при произвольном a.

В случае многообразий бóльшей размерности неравенства, аналогичные неравенству Кастельнуово для кривых, были получены только для геометрического рода $p_g = h^{0,n}(X)$ (Харрис), однако для многомерных многообразий геометрический род не играет роли, сравнимой с ролью рода кривых. Много работ посвящено оценкам для полных чисел Бетти; отметим классические статьи Петровского, Олейник, Милнора, Тома и недавнюю работу Ласло и Витербо. Однако имеющиеся оценки не точны даже асимптотически, они не зависят от коразмерности a, а в большинстве работ — даже от размерности n многообразия X; тем более не имеет смысла ставить вопрос о классификации экстремальных многообразий относительно этих оценок.

Таким образом, до сего времени не существовало полноценного многомерного аналога теории Кастельнуово для кривых. В настоящем докладе мы даем асимптотически точные оценки для основных численных инвариантов и объясняем, как устроены соответствующие экстремальные многообразия (во всяком случае если степень d

достаточно велика). Наши результаты достаточно разнообразны, и мы приведем только небольшую часть из них. Начнем с чисел Бетти.
Теорема 1.

(i) $b(X) \leqslant b(\boldsymbol{X})$, *где* $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ *— неособая гиперповерхность той же размерности* n *и степени* d, *что и многообразие* X, *причем при* $a > 1$ *неравенство строгое.*

(ii) $b(X) < d^{n+1}$, *причем эта оценка асимптотически точна: если* $\boldsymbol{X}_d$ *— неособая гиперповерхность размерности* n *и степени* d, *то* $\lim_{d\to\infty} b(\boldsymbol{X}_d)\big/d^{n+1} = 1$.

(iii) $b(X) < \frac{d^{n+1}}{a^n}$ *при* $d \geqslant 2(a+1)^2$, *причем эта оценка асимптотически точна: существуют последовательности* X_d *многообразий степени* d *такие, что* $\lim_{d\to\infty} \frac{a^n b(X_d)}{d^{n+1}} = 1$.

(iv) *При* $d \gg 0$ *многообразия с числом Бетти, близким к максимальному, являются гиперповерхностями в многообразиях минимальной степени:* $X^n \subset V^{n+1} \subset \mathbb{P}^N$, $\deg V = a$ *(напомним, что классификация многообразий минимальной степени хорошо известна и очень проста).*

Наш подход к получению оценок для чисел Бетти основан на исследовании (при помощи теории Лефшеца) их связи с важными проективными инвариантами, называемыми классами.

Определение. *Двойственным многообразием* X^* к многообразию X называется геометрическое место точек в двойственном пространстве $\mathbb{P}^{N^*}$, соответствующих гиперплоскостям в $\mathbb{P}^N$, касающимся многообразия X (т.е. содержащим касательное подпространство к X).

Число μ_n, равное $\deg X^*$ в случае, если $\dim X^* = N-1$ и нулю, если $\dim X^* < N-1$ называется (старшим) *классом* X.

Обозначим через X_i пересечение X с общим линейным подпространством $\mathbb{P}^{N+i-n} \subset \mathbb{P}^N$, так что $X_i \subset \mathbb{P}^{N+i-n}$ — неособое невырожденное многообразие размерности i. Число $\mu_i(X) = \mu_i(X_i)$ называется i*-ым классом* многообразия X. Ясно, что $\mu_i(X) = \mu_i(X_j)$ для всех $i \leqslant j \leqslant n$.

Пусть $R_L \subset X$ дивизор ветвления проектирования $\pi_L\, X \to \mathbb{P}^n$ с центром в общем линейном подпространстве $L \subset \mathbb{P}^N$, $\dim L = N - n - 1$. Число $r_i = r_i(X) = \deg R^i$ называется i*-ым объемом ветвления* многообразия X. В частности, $r_n = (R^n)$, $r_0 = d$, и $r_i(X) = r_i(X_j)$

для всех $i \leqslant j \leqslant n$. Нетрудно видеть, что $r_1 = \mu_1 = 2\pi + 2d - 2$, где $\pi = g(X_1)$ — секционный род.

Теорема 2.

(i) $r_i \leqslant \frac{r_{i-1}^2}{r_{i-2}} \leqslant \frac{r_{i-2}^3}{r_{i-3}^2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{r_1^i}{d^{i-1}}$, $i = 1, \ldots, n$.

(ii) $\mu_i \leqslant r_i$, $i = 0, \ldots, n$ (причем равенства имеют место только если $i \leqslant 1$ или $a = 1$).

(iii)

$$b_i(X) = b_{2n-i}(X) \leqslant \mu_i + \mu_{i-2} + \cdots + \mu_{i-2\left[\frac{i}{2}\right]}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$b(X) \leqslant \mu_n + 2\mu_{n-1} + \cdots + (n+1)\mu_0,$$

$$e(X) = (-1)^n \left[\mu_n - 2\mu_{n-1} + \cdots + (-1)^n (n+1)\mu_0\right].$$

Утверждения (iii) и (ii) теоремы 2 последовательно сводят построение оценок сверху для чисел Бетти к построению аналогичных оценок для классов и объемов ветвления. С другой стороны, согласно утверждению (i) этой же теоремы, объемы ветвления мажорируются функциями от секционного рода, оценка для которого дается теорией Кастельнуово. В результате получаются оценки для чисел Бетти в терминах размерности, коразмерности и степени.

Теорема 3.

(i) $\mu_i(X) \leqslant d(d-1)^i$, *причем равенство имеет место если и только если* $X = \boldsymbol{X}$ — *гиперповерхность.*

(ii) $\mu_i(X) < \frac{d^{i+1}}{a^i}$ *при* $d \geqslant (a+1)^2$, $2 \leqslant i \leqslant n$, *причем эта оценка асимптотически точна.*

(iii) $r_i < d\left(\frac{d}{a} + 1\right)^i$ *при* $d \geqslant \frac{(a-2)^2}{8}$, *причем эта оценка асимптотически точна.*

(iv) *При* $d \gg 0$ *многообразия с классами или объемами ветвления, близкими к максимальным, являются гиперповерхностями в многообразиях минимальной степени.*

Займемся теперь изучением более общих численных инвариантов проективных многообразий. Начнем с чисел Чженя. Пусть $P(c_1, \ldots, c_n)$ — взвешенный однородный многочлен веса n от классов Чженя, определяющий число Чженя $P(X) = \int_X P(c_1, \ldots, c_n)$ (например, если P — моном с коэффициентом 1, то $P(X) = \int_X c_I$, где I, $|I| = n$ — мультииндекс веса n).

Теорема 4.

(i) *Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $M = M(\varepsilon)$ такое, что* $\left|\frac{P(X)}{b(X)} - P(1,\dots,1)\right| < \varepsilon$ *для всех неособых невырожденных многообразий X с $\dim X = n$, $\operatorname{codim} X = a$, $\deg X = d$, для которых $b(X) > M\left(\frac{d}{a}\right)^n$* (в частности, для класса Чженя c_I имеем $P(1,\dots,1) = 1$).

(ii) При $d \gg 0$ многообразия с числом Чженя $P(X)$, близким к максимальному, являются гиперповерхностями в многообразиях минимальной степени.

Перейдем теперь к числам Ходжа $h^{p,q}$ с $p + q = n$. Поскольку $\sum_{p+q=n} h^{p,q} = b_n$, естественно рассмотреть веса (или "вероятности") $\alpha^p = \frac{h^{p,n-p}}{b_n}$, $p = 0,\dots,n$, где $\alpha^p = \alpha^{n-p}$ и $\sum_{p=0}^n \alpha^p = 1$.

Пусть $A(n+1,p)$ — число Эйлера, т.е. число перестановок из $n+1$ элемента с p спусками (количество спусков в перестановке $\pi = a_0\dots a_n$ равно $\operatorname{card}\{i \mid a_i > a_{i+1}\}$). Положим $\alpha_0^p = \frac{A(n+1,p)}{(n+1)!}$. По теореме Лапласа-Стэнли, α_0^p равно объему p-ой дольки единичного $(n+1)$-мерного куба, рассеченного гиперплоскостями $\sum_{i=0}^n x_i = k$, $k = 1,\dots,n$, ортогональными вектору $(1,\dots,1)$: $\alpha_0^p = \operatorname{vol}\left\{(x_0,\dots,x_n) \mid p \leqslant \sum_{i=0}^n x_i \leqslant p+1\right\}$. Ясно, что $\alpha_0^0 = \frac{1}{(n+1)!}$, $\alpha_0^p = \alpha_0^{n-p}$ и $\sum_{p=0}^n \alpha_0^p = 1$.

Теорема 5.

(i) *Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $M = M(\varepsilon)$ такое, что $|\alpha^p(X) - \alpha_0^p| < \varepsilon$ для всех неособых невырожденных многообразий X с $\dim X = n$, $\operatorname{codim} X = a$, $\deg X = d$, для которых $b(X) > M\left(\frac{d}{a}\right)^n$.*

(ii) *При $d \gg 0$ многообразия с числом Ходжа $h^{p,n-p}(X)$, близким к максимальному, являются гиперповерхностями в многообразиях минимальной степени.*

По-видимому, существует понятие "типа" классов многообразий, зависящего от порядка роста численных инвариантов как функций степени; при этом "многообразия основного типа" удовлетворяют условиям теорем 4 и 5.

О подгруппах простого порядка в группе Кремоны плоскости

В. А. Исковских (Москва, Россия)

Группа бирациональных преобразований плоскости $\mathbb{P}^2_k$ над полем k называется *группой Кремоны* $\mathrm{Cr}_2(k)$. Она изоморфна группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}_k k(x,y)$ поля рациональных функций от двух переменных. Классическая задача классификации конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ изучалась еще в конце 19 века в работах Кантора и Вимана. Этой проблематике посвящено много и современных исследований, наиболее полные их них [1] и [2]. Из этих работ следует, в частности, что любая подгруппа $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ простого порядка $p \geqslant 7$ сопряжена подгруппе в $\mathbb{C}^*$ или $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

Ж.-П. Серр [2], изучая границы порядков конечных подгрупп в линейных

алгебраических группах, построил 2-мерный тор T над полем $\mathbb{Q}$ с подгруппой $G \subset T(\mathbb{Q})$ порядка 7. Это дает пример подгруппы порядка 7 в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})$. В связи с этим в [3] поставлен вопрос о существовании элементов простого порядка $p \geqslant 11$ в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})$. В [3] получен следующий результат.

Теорема. (i) *В группе* $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})$ *не существует элементов простого порядка* $p \geqslant 11$*;*

(ii) *Подгруппа порядка 7 в* $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})$*, построенная Серром, является единственной с точностью до сопряжения.*

Список литературы

[1] Blank J., "Finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane. Thesis", *University of Geneva*, 2006, math.AG/0610368.

[2] Dolgachev I., Iskovskikh V. "Finite subgroups of plane Cremona group", math.AG/0610595, 2006.

[3] Dolgachev I., Iskovskikh V. "On elements of prime order in $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})$", math.AG/..., 2007.

[4] Serre J.-P. "Bounds for the orders of the finite subgroups of $G(k)$", *Group Representation Theory*, eds. M. Geck, D. Testerman, J. Thévenaz, EPFL Press, Lausanne, 2006.

Об "эффекте Кохендорфера"в задачах погружения с некоммутативным ядром

В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье (С.-Петербург, Россия)

Классическая теорема Кохендорфера–Фаддеева утверждает, что задача погружения, ядро которой – абелева p-группа, разрешима тогда и только тогда, когда разрешима сопутствующая силовская задача погружения. Если же ядро – некоммутативная p-группа, этот результат в общем случае неверен (в частности, когда ядро – группа кватернионов).

Однако если ядром задачи погружения является группа диэдра восьмого порядка, аналог теоремы Кохендорфера–Фаддеева был доказан авторами. И естественно поставить вопрос – существуют ли другие примеры, где действует "эффект Кохендорфера"?

Существует весьма правдоподобное предположение, что указанный эффект справедлив для ядра, изоморфного обобщенной группе диэдра. Но полностью удалось исследовать случай ядра порядка 16 с образующими α, β и соотношениями $\alpha^8 = \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha^3$.

Итак, пусть $\varphi : G \to F$ – эпиморфизм конечных групп с ядром B, изоморфным указанной группе порядка 16, и F реализовано как группа Галуа расширение K/k. Рассмотрим задачу погружения с заданными условиями. Важную роль в исследовании играют подгруппа H группы G, состоящая из тех элементов G, которые перестановочны с элементом β и чьи коммутаторы с элементом α равны либо 1, либо α^4, а также простая центральная алгебра $\Lambda = (H \times K)(1-\alpha^4)/2$. Получены следующие результаты.

Предложение 1. *Условие погружаемости для нашей задачи равносильно тому, что алгебра Λ подобна в группе Брауэра $Br(k)$ алгебре обобщенных кватернионов. Условие согласности существенно слабее и состоит в том, что Λ подобна кватернионной алгебре при определенном квадратичном расширении.*

Предложение 2. *Задача погружения $(K/k, G, \varphi)$ равносильна сопутствующей силовской 2-задаче $(K/k_2, G_2, \varphi_2)$, где G_2 – силовская 2-подгруппа группы G, φ_2 – ограничение φ на G_2, k_2 – подполе элементов, принадлежащих $\varphi(G_2)$.*

Предложение 3. *Задача погружения* $(K/k, G, \varphi)$ *равносильна присоединенной задаче погружения* $(K/k, G_1 1, \varphi_1)$, *где* G_1 *– подгруппа группы* G, *порожденная подгруппой* H *и элементами* α^2, β, *а* φ_1 *– ограничение* φ *на* G_1. *Эта задача имеет ядро, изоморфное классической группе диэдра.*

Все условия погружения заведомо выполняются, если поля k и K являются числовыми полями.

Список литературы

[1] Ишханов В.В., Лурье Б.Б., Фаддеев Д.К., Задача погружения в теории Галуа. М., Наука, 1990, 272 с.

[2] Ишханов В.В., Лурье Б.Б., Задача погружения над p-расширением. Алгебра и Анализ, т.9, вып.4, 1997, 87-97.

О просто приводимых группах

Л. С. Казарин, В. В. Янишевский (Ярославль, Россия)

Просто приводимыми (или SR-группами) называются конечные группы, все характеры которых вещественны и тензорное произведение любых двух неприводимых представлений которых содержит каждое неприводимое представление группы с кратностью, не превосходящей единицы. Данный класс групп был введен Е.Вигнером [1] и рассматривался С.Струнковым [2]. С использованием классификации конечных простых групп, получен следующий результат.

Теорема 1 Пусть G – SR-группа. Тогда неабелевы композиционные факторы G могут быть изоморфны только знакопеременной группе A_5 или A_6.

В качестве следствия отметим, что SR-группа, порядок которой не делится на 60^6, разрешима. В частности, любая SR-группа порядка, меньшего 10^9, разрешима. Не исключено, что любая SR-группа окажется разрешимой.

В доказательстве рассматривались группы с более слабым условием, названные нами ASR-группами. Это конечные группы, у которых тензорный квадрат любого неприводимого представления содержит неприводимые представления группы с кратностью, не превосходящей единицы. Существуют примеры, показывающие, что классы SR-групп и ASR-групп не совпадают. Неожиданным является одно свойство, которым обладают ASR-группы:

Теорема 2. Пусть G – ASR-группа нечетного порядка. Тогда G абелева.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант є 05-01-01018.

Список литературы

[1] E.P.Wigner, On representations of finite groups, Amer. J. Math. 63(1941), 57 – 63

[2] С.П. Струнков, О расположении характеров просто приводимых групп, Мат. заметки, т.31 (1982), 357 – 362

$\delta-$дифференцирования простых конечномерных йордановых супералгебр

И. Б. Кайгородов (Новосибирск, Россия)

Понятие дифференцирования алгебры обобщалось многими математиками в самых различных направлениях. Так, в [1] можно найти и определение дифференцирования подалгебры в алгебру, и определение (s_1, s_2)-дифференцирования из одной алгебры в другую, где s_1, s_2 — некоторые гомоморфизмы алгебр. В свое время йордановы дифференцирования первичных ассоциативных колец характеристики $p \neq 2$ рассматривал И.Н.Херстейн [2]. Напомним, что *йордановым дифференцированием алгебры* A называется линейное отображение $j_d : A \to A$, удовлетворяющее равенству $j_d(xy + yx) = j_d(x)y + xj_d(y) + j_d(y)x + yj_d(x)$ для произвольных $x, y \in A$. И.Н.Херстейн доказал, что йорданово дифференцирование такого кольца является обычным дифференцированием. В дальнейшем, Н.С.Хопкинс [3] рассматривала антидифференцирования алгебр Ли, определение антидифференцирования опять же можно найти в [1]. С другой стороны, антидифференцирование — это частный случай

δ-дифференцирования, т.е. такого линейного отображения μ алгебры, что $\mu(xy) = \delta(\mu(x)y + x\mu(y))$, где δ — некоторый фиксированный элемент основного поля.

Впоследствии результаты Н.С.Хопкинс обобщил В.Т.Филиппов [4]. Он рассмотрел первичные алгебры Ли над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей и $\frac{1}{2}$. В.Т.Филиппов доказал, что любая первичная Φ-алгебра Ли с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой не имеет ненулевого δ-дифференцирования, если $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. Также в этой работе он дал описание $\frac{1}{2}$-дифференцирований произвольной первичной Φ-алгебры Ли A ($\frac{1}{6} \in \Phi$) с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой. Им доказано, что линейное отображение φ: $A \to A$ является $\frac{1}{2}$-дифференцированием тогда и только тогда, когда $\varphi \in \Gamma(A)$, где $\Gamma(A)$ — центроид алгебры A. Отсюда следует, что если A — центральная простая алгебра Ли над полем характеристики $p \neq 2, 3$ с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой, то любое $\frac{1}{2}$-дифференцирование φ имеет вид $\varphi(x) = \alpha x$, $\alpha \in \Phi$. В дальнейшем В.Т.Филиппов описал δ-дифференцирования первичных альтернативных и нелиевых мальцевских Φ-алгебр с некоторыми ограничениями на кольцо операторов Φ. Он доказал [6], что алгебры из этих классов не имеют ненулевого δ-дифференцирования, если $\delta \neq 0, \frac{1}{2}, 1$.

Тривиальными назовем нулевые отображения, а также 0-дифференцирования и 1-дифференцирования. В данной работе рассматриваются нетривиальные $\delta-$дифференцирования на полупростых конечномерных йордановых алгебрах и простых конечномерных йордановых супералгебрах. Результаты обобщаются в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть φ — нетривиальное δ-дифференцирование полупростой конечномерной йордановой алгебры $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$, где A_i — простые алгебры, над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2. Тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и для $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, где $x_i \in A_i$ выполняется $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_i \in F$.*

Теорема 2. *Пусть A — простая конечномерная йорданова супералгебра, над алгебраически замкнутым полем характеристики*

0, φ — нетривиальное δ-дифференцирование супералгебры A. Тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и $\varphi(x) = \alpha x$ для некоторого $\alpha \in F$ и произвольного $x \in A$.

Список литературы

[1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., Мир, 1964.

[2] Herstein I.N., Jordan derivations of prime rings, Proc. Am. Math. Soc., N 8, (1958) 1104–1110.

[3] Hopkins N.C., Generalizes Derivations of Nonassociative Algebras, Nova J. of Math. V 5, N 3, (1996) 215–224.

[4] Филиппов В.Т., О δ-дифференцированиях алгебр Ли, Сиб. матем. ж., 39, N 6(1998), 1409–1422.

[5] Филиппов В.Т., О δ-дифференцированиях первичных алгебр Ли, Сиб. матем. ж., 40, N 1(1999), 201-213.

[6] Филиппов В.Т., О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр, Алгебра и Логика, 39, N 5 (2000) 618–625.

Отображение Фробениуса в некоммутативной геометрии

Д. Б. Каледин (Москва, Россия)

Под некоммутативной геометрией обыкновенно понимают изучение произвольных ассоциативных алгебр "по аналогии"с коммутативными, и попытки найти для них аналоги привычных алгеброгеометрических структур (попытки, как ни странно, не всегда безуспешные, что и дает жизнь предмету). Одна из важнейших алгеброгеометрических структур – отображение Фробениуса для коммутативных алгебр над полем положительной характеристики; довольно очевидно, что никакого некоммутативного аналога у него нет. Однако удивительным образом оказывается, что такие полученные из отображения Фробениуса структуры, как изомофизм Картье для дифференциальных форм и, более общо, разнообразные структуры "мотивного"типа на кристальных когомологиях, существуют, причем вполне естественным образом, и для некоммутативных алгебр (более того, в определенном смысле коммутативность для их построения вообще не важна). Среди прочего, это позволяет применить известный в алгебраической геометрии метод Деліня-Иллюзи и доказать гипотезу Концевича-Сойбельмана о вырождении некоммутативного аналога спектральной последовательности Ходжа-де Рама. Я постараюсь дать обзор этих тем.

Об умножениях в кольце когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса

М. А. Качалова (С.-Петербург, Россия)

Известно [1], что любая самоинъективная алгебра типа A_n стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо так называемой "алгебре Мёбиуса". В [2] была вычислена алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для полуцепных самоинъективных алгебр, а для алгебры Мёбиуса R в [3] была вычислена подалгебра $\mathrm{HH}^{*r}(R)$ алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая однородными элементами, степень которых делится на r, где r – некоторый параметр, связанный с определяющими соотношениями алгебры R.

Остаётся нерешённой задача о структуре всего кольца когомологий Хохшильда для алгебры Мёбиуса. Мы хотим предложить отличный от [2], более прямой способ вычисления кольца когомологий.

В [4] была построена минимальная проективная бимодульная резольвента для алгебры Мёбиуса.

Затем в [5] эта резольвента была использована для вычисления аддитивной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, т.е. для алгебры Мёбиуса R были вычислены размерности групп $\mathrm{HH}^n(R)$.

В докладе будет сообщено о некоторых частных результатах в задаче описания мультипликативной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$. Мы выделяем некоторое множество однородных элементов, порождающих $\mathrm{HH}^*(R)$ как K-алгебру, и для части из них описываем их попарные произведения. Полученной к настоящему времени информации достаточно, в частности, для описания подалгебры $\mathrm{HH}^{*r}(R)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 06-01-00200.

Список литературы

[1] Riedtmann C., *Representation-finite self-injective algebras of class A_n*. — Lect. Notes Math., 1980, v. 832, 449–520.

[2] Erdmann K., Holm T. *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*. — Forum Math., 1999, v. 11, 177–201.
[3] Erdmann K., Holm T., Snashall N. *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*, II. — Algebras and Repr. Theory, 2002, v. 5, 457–482.
[4] Генералов А.И., Качалова М.А., *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, N 321 (2005), 36–66.
[5] Качалова М.А., *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, N 321 (2005), 36–66.

Об одной гипотезе в теории конечных топологий

В. А. Койбаев (Владикавказ, Россия)

Известно, что подгруппы в линейных группах над полем, содержащие группу диагональных матриц, описываются в терминах сетей. Таким образом, представляют интерес проблемы, связанные с вопросами перечисления сетей. Пусть $T(n)$ – число помеченных топологий, которые можно ввести на конечном множестве из n элементов (или, что то же самое, число всех D–сетей над полем порядка n[1]), $T_0(n)$ — число тех топологий, которые удовлетворяют аксиоме отделимости T_0 (или, что то же самое, число всех T_0–сетей порядка n[1]). В 1977 году З.И. Боревич и В. Наркевич [2] высказали гипотезу о том, что T_0–топологии — это "почти все" топологии, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_0(n)}{T(n)} = 1.$$

Это предположение основывалось на результатах вычислений Ф. Харари, Дж. Эванса, М. Линна, З.И. Боревича, В. Наркевича, В.И. Родионова [1],[2]. Решение этой проблемы тесно связано со скоростью роста числа $T_0(n)$. В работе [2] была получена формула выражения числа $T_0(n)$ через число $V(p_1,\ldots,p_m)$ всех V–сетей порядка n, соответствующих разбиению $[p] = (p_1,\ldots,p_m)$ числа n. В частности, в работе [2] показано, что $T_0(n) > nT_0(n-1)$.

Наши исследования связаны с указанной проблемой, а также вопросами роста числа $T_0(n)$. А именно, справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Имеет место неравенство

$$T_0(n) > n\sum_{[p]} f([p])\frac{(n-1)!}{p_1!\dots p_m!}V(p_1\dots p_m),$$

где $f([p]) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2^{p_i+1}}{(p_{i+1}+1)}\right)$, $p_{m+1} = p_1$, суммирование берется по всем упорядоченным разбиениям $[p]$ числа $(n-1)$.

Следствие. Имеет место неравенство

$$T_0(n) > \frac{1}{2}C_n^2 T_0(n-1),$$

где C_n^2 — число сочетаний.

Теорема 2. Пусть $C_{n+1}^2 T_0(n-1) < T_0(n)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{T_0(n)}{T(n)} = 1, \qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{C_n^2 T_0(n-1)}{T_0(n)} = 0.$$

Список литературы

[1] Боревич З.И. К вопросу перечисления конечных топологий// Зап.науч.семинаров ЛОМИ 1977. Т.71. С.47-65.

[2] Боревич З.И., Бумагин В.В., Родионов В.И. Число помеченных топологий на десяти точках // Зап.науч.семинаров ЛОМИ. 1979. Т.86. С.5-10.

Трансфер в унитарной K-теории

В. И. Копейко (Элиста, Россия)

Пусть A – ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция и пусть $\varepsilon = \pm 1$. Применяя к группе $U^\varepsilon(A)$ +-конструкцию Квиллена, Каруби в [4] построил унитарные K-группы $K_nU^\varepsilon(A)$. В частности, $K_1U^\varepsilon(A) = U^\varepsilon(A)/EU^\varepsilon(A)$, где $EU^\varepsilon(A)$ – подгруппа $U^\varepsilon(A)$, порожденная ε-элементарными матрицами. Гиперболическое отображение индуцирует гомоморфизм $K_n(A) \to K_nU^\varepsilon(A)$, коядро которого обозначается через $W_nU^\varepsilon(A)$ и называется ε -унитарной группой Витта.

Теорема. Пусть A – кольцо с инволюцией, в котором 2 – обратимый элемент,

$s(\in A)$- центральный, не делитель нуля, инвариантный относительно инволюции. Тогда определены трансферы $Tr_1^{\pm} : W_1U^{\varepsilon}(A/s) \to W_2U^{\pm\varepsilon}(A)$, удовлетворяющие следующим свойствам:

1) если $\bar{x}$ из $W_1U^{\varepsilon}(A/s)$ поднимается до некоторого элемента из $W_1U^{\varepsilon}(A)$, то $Tr_1^{\pm}(\bar{x})$ – тривиален. В частности получаем комплексы, в которых первый гомоморфизм индуцирован проекцией: $W_1U^{\varepsilon}(A) \to W_1U^{\varepsilon}(A/s) \to W_2U^{\pm\varepsilon}(A)$;

2) последовательности $W_1U^{\varepsilon}(A/s) \to W_2U^{\pm\varepsilon}(A) \to W_2U^{\pm\varepsilon}(A_s)$ являются комплексами, в которых второй гомоморфизм индуцирован локализацией;

3) (формула проекции) если A – коммутативное кольцо, $\bar{y} \in\in W_1U^{\varepsilon}(A/s)$, то $Tr_1^{\pm}(x * \bar{y})$ равен $x * Tr_1^{\pm}(\bar{y})$, если $x \in W_0U^1(A)$, и равен $x * Tr_1^{\mp}(\bar{y})$, если $x \in W_0U^{-1}(A)$ относительно операции $*$, описанной Каруби в [4].

Построенные автором трансферы получаются как композиция явно описанного гомоморфизма $W_1U^{\varepsilon}(A/s) \to k_1(A)$ (см. [1]) и гомоморфизмов $k_1(A) \to W_2U^{\pm\varepsilon}(A)$ из 12-последовательности Каруби [5], где $k_1(A) = \{x \in K_1(A) : x^* = x\}/\{y \in K_1(A) : y = x \cdot x^*\}$.

Замечание. Ранее в [2,3], используя производные и когерентные группы Витта, для любого целого n и при дополнительном условии, что A и A/s – регулярные кольца конечной размерности были построены трансферы $W_nU^{\varepsilon}(A/s) \to W_{n+1}U^{\varepsilon}(A)$, включенные в длинную точную последовательность, аналогичную выписанной в пункте 2 теоремы.

Список литературы

[1] Копейко В.И. Трансфер в унитарной K-теории.- Науч. мысль Кавказа.Спецвыпуск №5 (2006),156-158.

[2] Gille S. On Witt groups with support.-Math.ann., 322(2002),103-137.

[3] Gille S. A transfer morphism for Witt groups.-J. reine angew. Math.,564(2003), 215-233.

[4] Karoubi M. Theory de Quillen et homologie du groupe orthogonal.-Ann. math.,112(1980), 207-257.

[5] Karoubi M. Le theoreme fondamental de la K-theorie hermitienne.- Ann. math.,112 (1980), 259-282.

Об одной топологии на группе расширений абелевых групп

Н. И. Крючков (Рязань, Россия)

Все группы, о которых идет речь являются абелевыми.

Пусть A и B — произвольные (дискретные) группы, $\mathrm{Ext}(B, A)$ — группа (абелевых) расширений группы A с помощью группы B и F — произвольное конечное подмножество группы B. Обозначим через U_F множество всех элементов $E \in \mathrm{Ext}(B, A)$, для которых найдется $E_1 \in \mathrm{Ext}(B/[F], A)$, такой, что $E = E_1\pi$, где $\pi : B \to B/[F]$ — естественный гомоморфизм, а $[F]$ — подгруппа, порожденная множеством F. Легко проверяется, что множества вида U_F являются подгруппами группы $\mathrm{Ext}(B, A)$.

Theorem. *Пусть A и B — произвольные группы и $\mathcal{F}$ — совокупность всех конечных подмножеств B. Семейство всех подгрупп вида U_F, где $F \in \mathcal{F}$ является базисом некоторого фильтра и порождает, таким образом, некоторую линейную топологию на группе* $\mathrm{Ext}(B, A)$.

Топологию, определенную в теореме , в дальнейшем будем называть $\mathcal{F}$-топологией.

Получен критерий недискретности группы расширений в $\mathcal{F}$-топологии и достаточное условие ее компактности.

Одним из основных средств для изучения групп расширений является длинная точная последовательность, связывающая группы гомоморфизмов и расширений. Следующие утверждения показывают «естественность» введенной $\mathcal{F}$-топологии (группы гомоморфизмов, фигурирующие в них снабжены компактно-открытой топологией).

Теорема. *Пусть A и B — произвольные (дискретные) группы, $0 \to H \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} B \to 0$ — проективная резольвента группы B. Имеет место топологический изоморфизм* $\mathrm{Ext}(B, A) \cong \cong \mathrm{Hom}(H, A)/\alpha^*\mathrm{Hom}(F, A)$.

Теорема. *Пусть $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ — короткая точная последовательность (дискретных) групп, A — дискретная группа тогда гомоморфизмы в точной последовательности* $0 \to \mathrm{Hom}(Z, A) \to$

$\to \mathrm{Hom}(Y, A) \to \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Ext}(Z, A) \to \mathrm{Ext}(Y, A) \to \mathrm{Ext}(X, A) \to 0$ *являются непрерывными.*

Градуированные алгебры Ли с транзитивной подалгеброй глубины 1

М. И. Кузнецов (Нижний Новгород, Россия)

Пусть $L = \oplus_{i \in Z} L_i$ – градуированная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, такая, что 1) L_0 – классичекая редуктивная алгебра Ли, 2) L_{-1} – неприводимй L_0-модуль, 3) L_{-1} порождает отрицательную часть L^- и 4) выполняется условие транзитивности: если $0 \neq x \in L_i, i \geq 0$, то $[x, L_{-1}] \neq 0$. Через $M(L)$ обозначается максимальный идеал алгебры L, содержащийся в L^- (радикал Вейсфейлера авлгебры Ли L). Наибольшее q, такое, что $L_{-q} \neq M(L)_{-q}$, называется глубиной алгебры L. Градуированная подалгебра L' в L называется транзитивной, если $L_{-1} \subset L'$. В работе [1] теорема распознавания Каца, описывающая конечномерные алгебры Ли L с условием $M(L) = 0$ и ограниченным L_0-модулем L_{-1}, была обобщена на случай $p > 3$ без дополнительных условий на L_{-1}. При доказательстве теоремы распознавания для случая, когда $p > 2$ и L_{-1} – неограниченный модуль, получена следующая теорема.

Теорема. *Пусть $L = \oplus_{i \in Z} L_i$ – градуированная алгебра Ли характеристики $p > 2$, удовлетворяющая условиям 1)–4) с неограниченным L_0-модулем L_{-1}, L' – транзитивная градуированная подалгебра в L глубины 1. Если $L_{-2} \neq 0$ и $M(L) = 0$, тогда алгебра L бесконечномерна.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 05-01-00580.

Список литературы

[1] Benkart G.M., Gregory T.B., Premet A. The Recognition Theorem for Graded Lie Algebras in Prime Characteristic (preprint).

Максимальные торы исключительных простых p-алгебр Ли

М. И. Кузнецов, О. А. Муляр (Нижний Новгород, Россия)

Для классификации простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p = 3$ интерес представляют структурные свойства известных простых алгебр Ли. В работе рассматриваются простые p-алгебры Ли серии Франк $T(m)$ и серии $R(m_1, m_2)$ ([1], [2]). Авторами получены следующие результаты.

Теорема 1. *Все максимальные торы p-алгебры $T(1)$ двумерны и являются подалгебрами Картана. Имеется лишь конечное число классов сопряженности максимальных торов относительно группы автоморфизмов.*

Теорема 2. *Все максимальные торы p-алгебры $R(1,1)$ двумерны. Существуют параметрические семейства максимальных торов относительно группы автоморфизмов.*

В алгебре $T(1)$ найдены корневые пространства относительно всех максимальных торов и исследованы 1-сечения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 05-01-00580.

Список литературы

[1] Скрябин С.М. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3 // Матем. сб. – 1992. – Т.183(8). – С.3–22.

[2] Кузнецов М.И. Классификация простых градуированных алгебр Ли с неполупростой компонентой L_0 // Матем. сб. – 1989. – Т.180(2). С. 147–158.

Фильтрованные деформации алгебр Ли серии $\mathcal{R}$

А. А. Ладилова (Нижний Новгород, Россия)

В связи с проблемой классификации простых алгебр Ли малой характеристики представляет интерес исследование деформаций известных серий исключительных простых алгебр Ли.

В работе рассматриваются фильтрованные деформации алгебр Ли серии $\mathcal{R}(\overline{m})$ характеристики 3, реализация которых была построена в работе [2].

Определение. *Фильтрованная алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется фильтрованной деформацией градуированной алгебры Ли L, если $gr\,\mathcal{L} = L$.*

Основной подход к описанию фильтрованных деформаций связан с вычислением второй группы когомологий. В работе доказана следующая лемма.

Лемма. *$H^2_+(W(\overline{m}), B^2(\Omega)) = 0$, где $H^2_+(W(\overline{m}), B^2(\Omega))$ — положительная часть естественной градуировки второй группы когомологий $H^2(W(\overline{m}), B^2(\Omega))$.*

В силу того, что $H^2_+(W(\overline{m}), B^2(\Omega)) = 0$, в $\mathcal{L}$ существует подалгебра, изоморфная $W(\overline{m})$, причем она выделяется в $\mathcal{L}$ прямым слагаемым: $\mathcal{L} = W(\overline{m}) \oplus M$. Кроме того, $W(\overline{m})$-модуль M вкладывается в некоторый коиндуцированный модуль. Используя свойство универсальности для коиндуцированных модулей (см. [1]), получаем нижеприведенную теорему.

Теорема. *Если $\mathcal{L}$ – фильтрованная алгебра Ли такая, что $\mathrm{gr}\,\mathcal{L} = \mathcal{R}(\overline{m})$, то $\mathcal{L} \cong \mathcal{R}(\overline{m})$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00580.

Список литературы

[1] Кузнецов М.И. *Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1989, т.53, с.557–589.

[2] Скрябин С.М. *Новые серии простых алгебр Ли.* Матем. сб., 1992, т.183(N 8), с. 3-22.

Гомологии Хохшильда и продолжения структур A_∞-алгебр и A_∞-модулей

М. В. Ладошкин (Саранск, Россия)

В работе [1] при рассмотрении цепных комплексов A_∞-пространств Сташеффом было введено понятие A_∞-алгебры. Это понятие в настоящее время является важным инструментом в различных вычислительных задачах гомологической алгебры и алгебраической топологии. Например, в работе [2] понятие A_∞-алгебры было использовано для описания гомологий дифференциальных алгебр. В частности, в [2] было показано, что на гомологиях любой заданной над полем дифференцильной алгебры имеется структура градуированной A_∞-алгебры. Более того, в [2] было показано, что на гомологиях любого заданного над полем дифференциального градуированного модуля над дифференциальной алгеброй имеется структура градуированного A_∞-модуля над градуированной A_∞-алгеброй.

Целью данной работы является изучение вопросов существования структур нетривиального продолжения A_∞-алгебры и A_∞-модуля с конечным числом отличных от нуля высших умножений и действий. Для решения этой задачи использовался комплекс Хохшильда, гомологии которого в соответствующих размерностях отвечают за возможность указанных выше продолжений. Получено утверждение о том, что если гомологии Хохшильда $H^{-2}(C_\infty(A, A)) = 0$, то любая структура продолжения фиксированной A_∞-алгебры эквивалентна тривиальной. Аналогичное утверждение имеет место для A_∞-модулей. Приводятся примеры использования полученных результатов в конкретных вычислениях. В частности, показано [3], что для кольца граней $k[P]$ простого многогранника P любое продолжение структуры модуля над алгеброй многочленов $P[n]$ до структуры A_∞-модуля над $P[n]$ изоморфно тривиальному.

Список литературы

[1] Stasheff J.D. Homotopy associativity of H-space, 1, 2 // Trans.Amer. Math.Soc., 1963, 108:2, p 275-313.

[2] Кадеишвили Т.В. К теории гомологий расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. вып. 3(213). с. 183-188.

[3] Ладошкин М.В. A_∞-модули над A_∞-алгебрами и когомологии комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами.// Математические заметки. т 79, вып.5, май 2006. С. 717

Операции Стинрода в спектральных последовательностях D_∞-дифференциальных E_∞-алгебр

С. В. Лапин (Саранск, Россия)

В работе [1] было введено понятие D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры, которое является квантовым аналогом понятия E_∞-алгебры, и показано, что структура D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры обладает свойством устойчивости относительно гомотопических эквивалентностей дифференциальных модулей. Кроме того, в [1] была построена спектральная последовательность D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры и установлено, что любая заданная над полем мультипликативная спектральная последовательность, умножение в членах которой коммутативно, является спектральной последовательностью D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры. С другой стороны, в [2] было показано, что на гомологиях $H(X)$ любой E_∞-алгебры X над полем $\mathbb{Z}_2$, рассматриваемой с верхней градуировкой $X^q = X_{-q}$, $q \in \mathbb{Z}$, всегда имеются операции Стинрода $\mathrm{Sq}^n : H^\bullet(X) \to H^{\bullet+n}(X)$, $n \geqslant 0$, для которых имеют место формула Картана и соотношения Адема. Так как над полем каждый член спектральной последовательности D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры является D_∞-дифференциальной E_∞-алгеброй гомологий предыдущего члена, то возникает задача построения квантового аналога операций Стинрода на членах спектральной последовательности D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры

В данной работе на каждом члене X_s заданной над полем $\mathbb{Z}_2$ спектральной последовательности D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры $\{X_s\}$, $s \geqslant 1$, построены операции Стинрода $\mathrm{Sq}^{n,k}_s : (X_s)^\bullet \to (X_s)^{\bullet+n}$, где $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant k \leqslant s-2$, которые являются аппроксимативным квантовым аналогом указанных выше операций Стинрода Sq^n на гомологиях E_∞-алгебр. Показано, что для построенных операций Стинрода $\mathrm{Sq}^{n,k}_s$ справедливы квантовый аналог формулы Картана и квантовый аналог соотношений Адема.

Список литературы

[1] Лапин С.В. D_∞-дифференциальные E_∞-алгебры и мультипликативные спектральные последовательности. // Матем. сб. 2005. Т. 196. N 11. С. 75-108.

[2] May J.P. A general algebraic approach to Steenrod operations // Lect. Notes in Math. 1970. V. 168. P.153-231.

О распространении алгоритма Берлекэмпа-Велча на один класс алгебро-геометрических кодов на проективных кривых

А. Э. Маевский (Ростов-на-Дону, Россия)

Пусть $\mathbf{k} = \mathbf{F}_q$ – конечное поле, $A = \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2] = \bigoplus_{j \geq 0} A_j$ – градуированное по степеням кольцо многочленов от трех переменных над полем $\mathbf{k}$. Пусть $\mathbf{P}^2(\mathbf{k})$ – двумерное проективное пространство над полем $\mathbf{k}$, $\mathcal{P}_F = \{P_1, \ldots, P_n\}$ $(\in \mathbf{P}^2(\mathbf{k}))$ – гладкая проективная кривая рода g, определяемая абсолютно неприводимым однородным многочленом F $(\in \mathbf{k}[x, y, z])$ степени m, $I_F = (F) = \bigoplus_{j \geq 0} (I_F)_j$ – однородный градуированный идеал в A, порожденный F, $\mathbf{k}[\mathcal{P}_F] = A/I_F = \bigoplus_{j \geq 0} (\mathbf{k}[\mathcal{P}_F])_j = \bigoplus_{j \geq 0} A_j/(I_F)_j$ – однородное координатное кольцо $\mathcal{P}_F$ над $\mathbf{k}$. Для всех неотрицательных целых j стандартным образом определим функцию Гильберта кривой $\mathcal{P}_F$ как $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_F}(j) = \dim_{\mathbf{k}} (\mathbf{k}[\mathcal{P}_F])_j = \dim_{\mathbf{k}} A_j - \dim_{\mathbf{k}} (I_F)_j$. Нетрудно показать, что $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_F}(j) = mj - g + 1$, если $j \geq m - 2$, и $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_F}(j) = (j+1)(j+2)/2$, если $j < m - 2$.

Для некоторого целого s (≥ 0) рассмотрим градуировочную компоненту A_s кольца A и $\mathbf{k}$-линейное отображение вычисления на множестве $\mathcal{P}_F$:

$$ev^{(s)}_{\mathcal{P}_F} : A_s \to \mathbf{k}^n, \qquad ev^{(s)}_{\mathcal{P}_F}(f) = (f(P_1), \ldots, f(P_n)).$$

Вслед за [2] образ $\mathrm{Im}(ev^{(s)}_{\mathcal{P}_F})$ отображения $ev^{(s)}_{\mathcal{P}_F}$ назовем *алгебро-геометрическим кодом (АГ-кодом)* $AG_{\mathcal{P}_F}(s)$, а множество $AG_{\mathcal{P}_F} = \{AG_{\mathcal{P}_F}(s)\}_{s \geq 0}$ – *семейством АГ-кодов*, порожденным кривой $\mathcal{P}_F$. Легко видеть, что $\ker ev^{(s)}_{\mathcal{P}_F} = (I_F)_s$, и, следовательно, $AG_{\mathcal{P}_F}(s) \cong A_s/(I_F)_s$. Код $AG_{\mathcal{P}_F}(s)$ имеет длину n, размерность $k(s) = \mathcal{H}_{\mathcal{P}_F}(s)$ и, как показано в [2], конструктивное расстояние $d^*(s) = n - ms$. Отметим, что существуют другие семейства АГ-кодов, определенные с помощью дивизоров и ассоциированных с ними векторных пространств (см. [1]).

На $\mathbf{k}^n$ стандартным образом зададим расстояние Хэмминга между векторами x и y как количество координат, в котором x и y различаются. Рассмотрим следующую задачу: *для произвольно заданного вектора $v \in \mathbf{k}^n$ найти ближайший к нему относительно расстояния Хэмминга вектор $c \in AG_{\mathcal{P}_F}(s)$*. Поиск ближайшего вектора, принадлежащего некоторому коду (подпространству в $\mathbf{k}^n$), в теории помехоустойчивого кодирования называют *декодированием.* Впервые алгоритм декодирования АГ-кодов, работающий за полиномиальное время, был предложен в работе [2].

В данной работе построен новый конструктивный алгоритм декодирования АГ-кодов, принципиально отличающийся от алгоритма из [2], но работающий также за полиномиальное время, оцениваемое как $O(n^3)$. При его разработке использовались идеи работы алгоритма Берлекэмпа-Велча декодирования кодов Рида-Соломона [3]. Основу алгоритма составляет следующая

Теорема. *Рассмотрим АГ-код $AG_{\mathcal{P}_F}(s)$ длины n с конструктивным расстоянием $d^\star(s)$, порожденный гладкой проективной кривой $\mathcal{P}_F$ степени m рода g. Пусть $v = (v_1, ..., v_n)$ – произвольный вектор из $\mathbf{k}^n$, α – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству*

$$m\alpha \geq (d^*(s) + 1)/2 + g - 1.$$

Тогда:

(i) *Существуют многочлены $D, N \in \mathbf{k}[\mathcal{P}_F]$ степеней α и $\alpha + s$ соответственно такие, что*

$$\forall i \in [1, n] : \quad N(P_i) = v_i D(P_i); \qquad (1)$$

(ii) *Многочлены N и D могут быть найдены за полиномиальное время путем решения системы линейных уравнений (1) относительно неизвестных коэффициентов многочленов N, D;*

(iii) *Многочлен $f = -N/D$ обладает тем свойством, что вектор $ev^{(s)}_{\mathcal{P}_F}(f)$ является ближайшим к v по отношению к расстоянию Хэмминга, причем*

$$d(v, ev^{(s)}_{\mathcal{P}_F}(f)) < (d^*(s) - 1)/2 - g + 1.$$

Отметим, что семейство АГ-кодов на кривой, определяемой многочленом $F = x_0 + x_1 + x_2$, совпадает с семейством кодов Рида-Соломона, а метод декодирования, вытекающий из теоремы, совпадает в этом случае с методом Берлекэмпа-Велча. Поэтому метод декодирования, предлагаемый в этой работе, можно рассматривать как распространение метода Берлекэмпа-Велча на более широкий класс АГ-кодов.

Список литературы

[1] Влэдуц С.Г., Ногин Д.Ю., Цфасман М.А. Алгеброгеометрические коды. Основные понятия. М. 2003.

[2] Justensen J., Larsen K.J., Jensen H.E., Havemose A., Høholdt T. Construction and decoding of a class of algebraic geometry codes. // IEEE Trans. Inform. Theory. 1989. V. 35. P. 811-821.

[3] Berlekamp E.R., Welch L.R. Error correction for algebraic block codes. U.S. Patent No. 4,633,470. 1986.

О локально грассмановых графах

А. А. Махнев, Д. В. Падучих (Екатеринбург, Россия)

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a. Пусть $a^\perp$ — шар радиуса 1 с центром a.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *вполне регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и $|[a] \cap [b]| = \mu$ для любых вершин a, b, находящихся на расстоянии 2. Подграф $[a] \cap [b]$ назовем *μ-подграфом*, если вершины a, b находятся на расстоянии 2.

Вполне регулярный граф диаметра 3 степени k на $2k + 2$ вершинах называется *графом Тэйлора. Графом Джонсона* $J(n, m)$ называется граф, вершинами которого являются m-подмножества данного n-множества X, и вершины a, b смежны тогда и только тогда, когда они пересекаются по $(m - 1)$-множеству. Граф Грассмана $J_q(n, m)$ в качестве вершин имеет множество всех m-мерных подпространств заданного n-мерного пространства V над конечным полем порядка q, причем вершины a и b смежны, только если размерность $a \cap b$ равна $m - 1$.

Локально Грассмановым графом будем называть граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Грассмана $J_q(n, 2)$. В работе [1] доказано, что связные компоненты μ-подграфов в локально Грассмановых графах являются графами Джонсона $J(6,3)$ или дополнительными графами к 4×4 решетке, в частности, $q = 2$. Графы знакопеременных и квадратичных форм над полем порядка 2 являются вполне регулярными локально Грассмановыми графами с $\mu = 20$ (см. [2]). В данной статье изучены вполне регулярные локально Грассмановы графы с $\mu = 16$.

Теорема. *Пусть* Γ *— связный вполне регулярный граф с* $\mu = 16$*, в котором окрестность каждой вершины является графом Грасмана* $J_2(n,2)$*. Тогда* $n = 4$ *и* Γ *является графом Тэйлора на* 72 *вершинах.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00046) и РФФИ-ГФЕН Китая (грант 05-01-39000).

Список литературы

[1] Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В. О локально решетчатых подграфах в графах Грассмана // Алгебра, логика и кибернетика. Тез. докл. Иркутск 2004. 149–151.

[2] Munemasa A., Pasechnik D.V., Shpectorov S.V. A local characterization of the graphs of alternating forms and the graphs of quadratic forms over GF(2) // Finite Geometry and Comb. London Math. Soc. Lecture Note Series 191. Cambr. Univ. Press 1993. P. 303–317.

Линейные уравнения над свободной антикоммутативной алгеброй

И. В. Онскуль (Омск, Россия)

На докладе будет представлена структура решения линейного уравнения общего вида над свободной антикоммутативной алгеброй A, а также некоторых отдельных видов линейных уравнений, например, $(xu)w = 0$, где $u, w \in A$, или $x_1u_1 + \ldots + x_nu_n = 0$, $u_i \in A$. Решения таких уравнений образуют ограниченные с параметрами алгебраические множества над алгеброй A.

Пусть A – свободная конечно порожденная антикоммутативная алгебра над полем k ранга r и L – свободная алгебра Ли над полем k ранга r.

В 2005 году вышла статья [1] Э. Ю. Данияровой и В. Н. Ремесленникова "Ограниченная алгебраическая геометрия над свободной алгеброй Ли" (Алгебра и логика, 44(3), 269–304). В ней были определены и классифицированы так называемые ограниченные алгебраические множества над алгеброй L. Было показано, что *существует взаимно однозначное соответствие между алгебраическими множествами над полем k и ограниченными алгебраическими множествами над алгеброй Ли L.*

Ограниченные алгебраические множества составляют широкий пласт в категории всех алгебраических множеств над алгеброй L. Оказалось, что все результаты упомянутой выше работы [1] без изменений переносятся с алгебры Ли L на антикоммутативную алгебру A. Этот факт стал основанием для того, чтобы в дальнейшем изучать алгебраическую геометрию над алгебрами L и A параллельно.

В 2006 году В. Н Ремесленников и Р. Штер написали работу [2] "The equation $[x, u] + [y, v] = 0$ in free Lie algebras" (http://eprints. ma. man. ac. uk/272/). В ней исследованы решения уравнений $[x, u]+ [y, v] = 0$ $(u, v \in L)$ над алгеброй Ли L. Как оказалось, такие уравнения решаются сложно, а их решения не являются ограниченными множествами.

Данный доклад посвящен изучению подобных уравнений над свободной антикоммутативной алгеброй A. Выяснилось, что над алгеброй A подобные линейные уравнения решаются значительно проще, чем над алгеброй L, а их решения образуют ограниченные множества.

В частности, показано, что в случае линейной независимости элементов $u_1, \dots, u_n$ набор $x_1, \dots, x_n$ является решением уравнения $x_1u_1+ \dots + x_nu_n = 0$ тогда и только тогда, когда существует такая симметрическая матрица C размера $n \times n$ над полем k, что

$$(x_1, \dots, x_n) = (u_1, \dots, u_n)C. \tag{1}$$

Для уравнения $x_1 + x_1u_1 + \dots + x_nu_n$ доказано, что в случае линейной независимости его коэффициентов множество его решений будет являться ограниченным аглебраическим множеством. Для доказательства строится специальное подмножество линейного базиса алгебры, зависящее от коэффициентов уравнения. Доказано, что улучшить этот результат нельзя.

Для произвольного линейного уравнения показано, что множество его решений будет являться алгебраическим множеством, ограниченным с параметрами.

Полученные результаты являются своеобразным базисом для построения алгебраической геометрии над свободной антикоммутативной конечно порожденной алгеброй.

Группы со свойством D_π

Д. О. Ревин (Новосибирск, Россия)

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Напомним, если что π-подгруппа H конечной группы имеет индекс, не делящийся на числа из π, то H называется *холловой π-подгруппой.* Согласно определению Ф.Холла, если конечная группа G обладает холловой π-подгруппой H, и всякая π-подгруппа в G сопряжена с подгруппой из H, то говорят, что *G обладает свойством D_π*. Знаменитая теорема Холла утверждает, что конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда она обладает свойством D_π для любого множества π простых чисел. Если множество π фиксировано, то класс групп со свойством D_π может оказаться существенно шире класса всех разрешимых групп, поскольку, скажем, всякая π-группа обладает этим свойством.

С помощью классификации конечных простых групп доказана

Теорема 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, G — конечная группа. Тогда группа S обладает свойством D_π если и только если каждый ее композиционный фактор обладает этим свойством.*

Из классификационной теоремы следует, что всякая простая конечная группа может быть задана некоторыми числовыми параметрами. Для пары (S, π), где S — простая конечная группа, π — множество простых чисел, в терминах параметров, задающих группу S, найдены условия I–VII (см. ниже) так, что справедлива

Теорема 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и S — конечная простая группа. Тогда группа S обладает свойством D_π если и только если пара (S, π) удовлетворяет одному из условий* I–VII.

Из теорем 1 и 2 вытекает утверждение, обобщающее сами эти теоремы и содержащее в качестве частных случаев теоремы Силова и Холла:

Следствие. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Тогда конечная группа обладает свойством D_π если и только если для каждого ее композиционного фактора S пара (S, π) удовлетворяет одному из условий* I–VII.

Таким образом, для любых множества π и конечной группы с известными композиционными факторами можно сказать, обладает эта группа свойством D_π или нет.

Далее всюду $\pi(S)$ — множество простых делителе порядка группы S.

Условие I. Скажем, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* I, если $\pi(S) \subseteq \pi$ или $|\pi \cap \pi(S)| \leqslant 1$.

Условие II. Скажем, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* II, если имеет место один из следующих случаев.

(1) S изоморфна одной из групп M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24} или $O'N$ и $\pi \cap \pi(S) = \{5, 11\}$;
(2) S изоморфна одной из групп M_{23}, M_{24}, Co_1, Co_2, Co_3, $M(23)$, $M(24)'$ или Fi_2 и $\pi \cap \pi(S) = \{11, 23\}$;
(3) $S \simeq J_1$ и $\pi \cap \pi(S)$ совпадает с одним из множеств $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{3, 19\}$, $\{5, 11\}$;
(4) $S \simeq J_4$ и $\pi \cap \pi(S)$ совпадает с одним из множеств $\{5, 7\}$, $\{5, 11\}$, $\{5, 31\}$, $\{7, 29\}$, $\{7, 43\}$;
(5) $S \simeq Ly$ и $\pi \cap \pi(S) = \{11, 67\}$;
(6) $S \simeq Ru$ и $\pi \cap \pi(S) = \{7, 29\}$;
(7) $S \simeq O'N$ и $\pi \cap \pi(G) = \{5, 31\}$;
(8) S изоморфна одной из групп Fi_1 или Fi_2 и $\pi \cap \pi(S) = \{23, 47\}$;
(9) $S \simeq Fi_1$ и $\pi \cap \pi(S) = \{29, 59\}$.

Условие III. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathrm{GF}(q)$ характеристики p. Положим $\tau = \pi \cap \pi(S) \setminus \{p\}$. В этом случае будем говорить, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* III, если $\tau \subseteq \pi(q-1)$ и никакое число из π не делит порядок соответствующей группы Вейля (известен для всех групп лиева типа).

Для определения условий IV и V нам понадобится следующее обозначение. Пусть r — нечетное простое число и q — целое число, взаимно простое с r. Через $e(q,r)$ обозначим наименьшее натуральное число e, для которого $q^e \equiv 1 \pmod r$.

Условие IV. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathrm{GF}(q)$ характеристики p, но не изоморфна группам ${}^2B_2(q)$, ${}^2F_4(q)$, ${}^2G_2(q)$. Пусть $2, p \notin \pi$. Обозначим через r наименьшее число из $\pi \cap \pi(S)$ и пусть $\tau = \pi \cap \pi(S) \setminus \{r\}$. Положим $a = e(q,r)$. В этом случае будем говорить, что пара (S,π) *удовлетворяет условию* IV, если существует $t \in \tau$, для которого $b = e(q,t) \neq a$, и имеет место одно из следующих утверждений.

(1) $S \simeq A_{n-1}(q)$, $a = r-1$, $b = r$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right]$ и для любого $s \in \tau$ справедливы соотношения $e(q,s) = b$, $n < bs$;

(2) $S \simeq A_{n-1}(q)$, $a = r-1$, $b = r$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right] + 1$, $n \equiv -1 \pmod r$ и для любого $s \in \tau$ справедливы соотношения $e(q,s) = b$, $n < bs$;

(3) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 1 \pmod 4$, $a = r-1$, $b = 2r$, $(q^n-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right]$ и для любого $s \in \tau$ выполнено равенство $e(q,s) = b$;

(4) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 3 \pmod 4$, $a = \dfrac{r-1}{2}$, $b = 2r$, $(q^n-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right]$ и для любого $s \in \tau$ выполнено равенство $e(q,s) = b$;

(5) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 1 \pmod 4$, $a = r-1$, $b = 2r$, $(q^n-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right] + 1$, $n \equiv -1 \pmod r$ и для любого $s \in \tau$ выполнено равенство $e(q,s) = b$;

(6) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 3 \pmod 4$, $a = \dfrac{r-1}{2}$, $b = 2r$, $(q^n-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right] + 1$, $n \equiv -1 \pmod r$ и для любого $s \in \tau$ выполнено равенство $e(q,s) = b$;

(7) $S \simeq {}^2D_n(q)$, $a \equiv 1 \pmod 2$, $n = b = 2a$ и для любого $s \in \tau$ либо $e(q,s) = a$, либо $e(q,s) = b$;
(8) $S \simeq {}^2D_n(q)$, $b \equiv 1 \pmod 2$, $n = a = 2b$ и для любого $s \in \tau$ либо $e(q,s) = a$, либо $e(q,s) = b$.

Условие V. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathrm{GF}(q)$ характеристики p, но не изоморфна группам ${}^2B_2(q)$, ${}^2F_4(q)$, ${}^2G_2(q)$. Пусть $2, p \notin \pi$. Обозначим через r наименьшее число из $\pi \cap \pi(S)$ и пусть $\tau = \pi \cap \pi(S) \setminus \{r\}$. Положим $c = e(q,r)$. В этом случае будем говорить, что пара (S,π) *удовлетворяет условию* V, если для любого $t \in \tau$ верно равенство $e(q,t) = c$, и имеет место одно из следующих утверждений.

(1) $S \simeq A_{n-1}(q)$ и для любого $s \in \tau$ справедливо $n < cs$;
(2) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $c \equiv 0 \pmod 4$ и для любого $s \in \tau$ справедливо $n < cs$;
(3) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $c \equiv 2 \pmod 4$ и для любого $s \in \tau$ справедливо $2n < cs$;
(4) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $c \equiv 1 \pmod 2$ и для любого $s \in \tau$ справедливо $n < 2cs$;
(5) S изоморфна одной из групп $B_n(q)$, $C_n(q)$ или ${}^2D_n(q)$, c четно и для любого $s \in \tau$ справедливо $2n < cs$;
(6) S изоморфна одной из групп $B_n(q)$, $C_n(q)$ или $D_n(q)$, c нечетно и для любого $s \in \tau$ справедливо $n < cs$;
(7) $S \simeq D_n(q)$, c четно и для любого $s \in \tau$ справедливо $2n \leqslant cs$;
(8) $S \simeq {}^2D_n(q)$, c нечетно и для любого $s \in \tau$ справедливо $n \leqslant cs$;
(9) $S \simeq {}^3D_4(q)$;
(10) $S \simeq E_6(q)$ и если $r = 3$ и $c = 1$, то $5, 13 \notin \tau$;
(11) $S \simeq {}^2E_6(q)$ и если $r = 3$, $c = 2$, то $5, 13 \notin \tau$;
(12) $S \simeq E_7(q)$ и если $r = 3$ и $c \in \{1,2\}$, то $5, 7, 13 \notin \tau$, а если $r = 5$ и $c \in \{1,2\}$, то $7 \notin \tau$;
(13) $S \simeq E_8(q)$ и если $r = 3$ и $c \in \{1,2\}$, то $5, 7, 13 \notin \tau$, а если $r = 5$ и $c \in \{1,2\}$, то $7, 31 \notin \tau$;
(14) $S \simeq G_2(q)$;
(15) $S \simeq F_4(q)$ и если $r = 3$ и $c = 1$, то $13 \notin \tau$.

Условие VI. Будем говорить, что пара (S,π) *удовлетворяет условию* VI, если имеет место одно из следующих утверждений.

(1) S изоморфна ${}^2B_2(2^{2m+1})$ и $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств $\pi(2^{2m+1} - 1)$, $\pi(2^{2m+1} \pm 2^{m+1} + 1)$;

(2) S изоморфна ${}^2G_2(3^{2m+1})$ и $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств $\pi(3^{2m+1}-1) \setminus \{2\}$, $\pi(3^{2m+1} \pm 3^{m+1}+1) \setminus \{2\}$;

(3) S изоморфна ${}^2F_4(2^{2m+1})$ и $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств $\pi(2^{2(2m+1)} \pm 1)$, $\pi(2^{2m+1} \pm 2^{m+1}+1)$, $\pi(2^{2(2m+1)} \pm 2^{3m+2} \mp 2^{m+1} - 1)$, $\pi(2^{2(2m+1)} \pm 2^{3m+2} + 2^{2m+1} \pm 2^{m+1} - 1)$.

Условие VII. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathrm{GF}(q)$ характеристики p. Пусть $2 \in \pi$, а $3, p \notin \pi$. Положим $\tau = \pi \cap \pi(G) \setminus \{2\}$ и пусть φ — множество простых чисел Ферма, принадлежащих τ. В этом случае будем говорить, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* VII, если $\tau \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, где $\varepsilon = \pm 1$ — такое число, что 4 делит $q - \varepsilon$, и имеет место одно из следующих утверждений.

(1) S изоморфна одной из групп $A_{n-1}(q)$, ${}^2A_{n-1}(q)$, для любого $s \in \tau$ выполнено $s > n$ и для любого $t \in \varphi$ выполнено $t > n+1$;

(2) $S \simeq B_n(q)$ и для любого $s \in \tau$ выполнено $s > 2n+1$;

(3) $S \simeq C_n(q)$ для любого $s \in \tau$ выполнено $s > n$ и для любого $t \in \varphi$ выполнено $t > 2n+1$;

(4) S изоморфна одной из групп $D_n(q)$, ${}^2D_n(q)$, и для любого $s \in \tau$ выполнено $s > 2n$;

(5) S изоморфна одной из групп $G_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ и $7 \notin \tau$;

(6) $S \simeq F_4(q)$ и $5, 7 \notin \tau$;

(7) S изоморфна одной из групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ и $5, 7 \notin \tau$;

(8) $S \simeq E_7(q)$ и $5, 7, 11 \notin \tau$;

(9) $S \simeq E_8(q)$ и $5, 7, 11, 13 \notin \tau$;

(10) $S \simeq {}^3D_4(q)$ и $5, 7 \notin \tau$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05-01-00797, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ, грант МК-1730.2005.1 и СО РАН, грант №29 для молодых ученых и интеграционный проект 2006.1.2

Разделяющие функции и спектры звездных графов

И. К. Редчук (Киев, Украина)

В [1] для произвольного конечного множества S с бинарным отношением $\Delta \subset S \times S$ вводится функция $P(S)$ со значениями в $\mathbb{Q}^+$. Если Δ — частичный порядок, то функция P характеризует частично упорядоченные множества конечного ($P(S) < 4$) и ручного ($P(S) \leq 4$) представленческого типов. Если S — объединение цепей $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$, элементы которых попарно несравнимы и $|Z_i| = n_i$, $i = \overline{1, s}$, то

$$P(S) = \rho(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \sum_{i=1}^{s} \frac{2n_i}{n_i + 1}.$$

Функция ρ характеризует схемы и расширенные схемы Дынкина, а также описывает размерности определенных подалгебр препроективных алгебр $\Pi^0(Q)$ колчана Q, имеющего звездный тип и три ветви (точное определение звездного графа см. ниже) [2, 3].

В работе [4] было предложено следующее обобщение функции ρ — разделяющие функции ρ_t, заданные для любого $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\rho_t(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\sqrt{t} v_{n_i}(t)}{v_{n_i+1}(t)},$$

где $v_n(t) = U(\sqrt{t}/2)$, $U(x)$ — полином Чебышева 2-го рода. (Легко видеть, что $\rho_4 \equiv \rho$.)

Функции ρ_t тесно связаны с преобразованиями Кокстера на графе, имеющем индекс $\sqrt{t}$, см. [4, 5].

В работе [3] была получена характеризация спектров звездных графов в терминах функций ρ_t.

Пусть G — некоторый простой неориентированный граф, G_v — множество вершин графа G, G_e — множество ребер ($G_e \subset G_v \times G_v$). Назовем вершину g графа G *точкой ветвления*, если ее естепень больше 2. Граф G называется *звездным графом*, если G — дерево и G имеет не более одной точки ветвления. Для звездного графа G множество G_v может быть представлено в виде

$$G_v = B_0 \sqcup B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_s,$$

где $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i, j = \overline{0, s}$, $B_0 = \{g_0\}$, g_0 — точка ветвления в G (если она существует) и $g, h \in B_i$ для некоторого i если и только если путь минимальной длины с началом в g и концом в h не содержит g_0. Множества B_i называются *ветвями* графа G; если $|B_i| = n_i$, то соответствующий звездный граф будем обозначать $S(s; n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Спектром $\sigma(G)$ *графа* G называется спектр его матрицы инцидентности. Обозначим $\sigma^+(G) = \{\lambda \in \sigma(G) \,|\, \lambda > 0\}$.

Предложение 1. [3] *Пусть* $S(s; n_1, n_2, \ldots, n_s)$ *— звездный граф. Для любого* $t = \lambda^2$ *такого, что* $\lambda \in \sigma^+(G)$ *либо* $t = \rho_t(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, *либо существуют такие* k, l, $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq s$, *что* $t = \rho_t(n_k - 1) = \rho_t(n_l - 1)$.

Обратно: если либо $\rho_t(n_1, n_2, \ldots, n_s) = t$, *либо существуют такие* k, l, $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq s$, *что* $\rho_t(n_k - 1) = \rho_t(n_l - 1) = t$, *то* $\sqrt{t} \in \sigma^+(G)$.

Граф называется целым, если он имеет целочисленный спектр. В настоящее время классификация целых графов получена для некоторых классов графов, см. [7].

Предложение 2. [4] *Для фиксированного* $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 4$ *список всех целочисленных векторов* $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, *удовлетворяющих уравнению* $\rho_t(n_1, n_2, \ldots, n_s) = t$ *имеет вид*

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{t}), \quad (\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{t-1}), \quad (\underbrace{1, 3, 3, \ldots, 3}_{t-1}), \quad (\underbrace{1, 2, 5, 5, \ldots, 5}_{t-1}). \tag{2}$$

Из предложений 1, 2, а также известной теоремы Смита (максимальное собственное значение графа меньше 2 для графов Дынкина и только для них), непосредственно следует утверждение:

Следствие 1. [8] *Все целые звездные графы исчерпываются графами* A_1 *(граф из одной точки),* $S(t;\ 1, 1, \ldots, 1)$ *и* $S(t-1;\ 2, 2, \ldots, 2)$, *где* $t = r^2$ *для некоторого* $r \in \mathbb{N}$.

Список литературы

[1] Назарова Л.А., Ройтер А. В. Норма отношения, разделяющие функции и представления маркированных колчанов. // Укр. мат. журн. – 2002. – **54.**, N 6. – с. 18-54.

[2] Власенко М.А., Меллит А.С., Самойленко Ю.С. Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром. // Функциональный анализ и его приложения – 2005. – **39.**, вып. 3.

[3] Редчук И.К. Разделяющие функции и их приложения. Зап. Науч. Сем. ПОМИ, т. 338, 2006, стр. 202-212.
[4] Редчук И.К., Ройтер А. В. Сингулярные локально-скалярные представления колчанов в гильбертовых пространствах и разделяющие функции. // Укр. Мат. Жур. – 2004. – **56.**, N 6. – с. 796-809.
[5] Редчук И.К. Разделяющие функции, спектральная теория графов и локально-скалярные представления в гильбертовых пространствах. // Укр. Мат. Жур. – 2006. – **58.**, N 1. – с. 36-46.
[6] Cvetkovic D., Doob M., Sachs H. Spectra of graphs – New York: Academic press, 1979 – 368 pp.
[7] Balinska K., Cvetkovic D., Radolavljevic Z., Simic S., Stevanovic D. A survey on integral graphs. Univ. Beograd Publ. Elektotehn. Fak., Ser. Mat., 13 (2002), 42-65.
[8] Watanabe M., Schwenk A. J. Integral starlike trees. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 28 (1979), no. 1, 120–128.

Вычисление групп когомологий алгебр Ли серий B_n и C_n

Д. В. Решетников (Нижний Новгород, Россия)

Вторая группа когомологий классических алгебр Ли с коэффициентами в присоединенном модуле в характеристике $p = 2$ была найдена для алгебр Ли с однородной системой корней в работе [1]. Вычисление второй группы когомологий для остальных классических алгебр Ли представляет большую трудность.

Результаты численного эксперимента для когомологий классических алгебр Ли серии C_n, $3 \leqslant n \leqslant 8$, показали, что размерность группы когомологий $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ равна $2n^2 + 5n - 1$, где n – ранг алгебры $\mathfrak{g}$, а базисные коциклы доставляют следующие веса (в обозначениях [2]):

1. для $\mu = 0$ имеем $\dim H^2_\mu(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) = n - 1$;
2. для $\mu = \pm 2\varepsilon_i$, $\leqslant i \leqslant n$ имеем $\dim H^2_\mu(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) = 3$;
3. для $\mu = \pm 2(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ имеем $\dim H^2_\mu(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) = 1$;

Результаты численного эксперимента для когомологий классических алгебр Ли серии B_n, $3 \leqslant n \leqslant 7$, показали, что $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) = 0$, если $n \neq 4$. Для алгебры Ли типа B_4 вторая группа когомологий имеет размерность 16, а базисные коциклы доставляют веса

$\mu = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$, где знаки выбираются произвольно. Вычисления показывают, что коцикл веса $\mu = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ принимает значения в центре алгебры и имеет следующий вид:

$$\varphi_\mu = X_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2} \wedge X_{-\varepsilon_3-\varepsilon_4} \otimes H_{\varepsilon_4} + X_{-\varepsilon_1-\varepsilon_3} \wedge X_{-\varepsilon_2-\varepsilon_4} \otimes H_{\varepsilon_4} + X_{-\varepsilon_1-\varepsilon_4} \wedge X_{-\varepsilon_2-\varepsilon_3} \otimes H_{\varepsilon_4}.$$

Остальные базисные коциклы получаются из φ_μ действием группы Вейля [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00580.

Список литературы

[1] Чебочко Н.Г. Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике 2. Матем. сб., 2005, т.196, № 9, с. 125-156.

[2] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл IV-VI. М.: Мир, 1972.

[3] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.

Обратная проблема для нахождения спектров Галуа многочленов третьей степени над полями характкеристики два

А. Э. Сергеев (Краснодар, Россия)

Приведем определение спектра Галуа многочлена

Определение 1. *Пусть K – поле, A – некоторое подмножество из K. Назовем последовательность транзитивных неизоморфных между собой подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_s$ группы S_n r-параметрическим спектром Галуа многочлена $f \in K[t_1, \ldots, t_r, x]$ над K по отношению к множеству A, если при изменении параметров $t_1, \ldots, t_r$ в A группа Галуа многочлена f над K, в случае его неприводимости в $K[x]$, принимает "значения" $G_1, G_2, \ldots, G_s$.*

Этот факт будем обозначать так:

$$SpGal_K(f; t_1, \cdots, t_r \in A) = \{G_1, G_2, \cdots, G_s\}.$$

В работах [1] и [2] была решена обратная задача для нахождения спектров Галуа многочленов третьей и четвертой степени над полем $\mathbb{Q}$, состоящая в следующем:

Проблема. Пусть $\{G_1, G_2, \ldots, G_r\}$ - набор транзитивных подгрупп группы S_n и пусть $1 \leqslant r \leqslant n$. Существует ли такой неприводимый многочлен f из кольца $K[t_1, t_2, \ldots, t_r, x]$, спектр Галуа которого над K в точности равен $\{G_1, G_2, \ldots, G_r\}$?

Решим обратную проблему для нахождения спектров Галуа многочленов третьей степени над полем характеристики два, а именно $\mathbb{Z}_2(t)$.

Заметим, что над полями характеристики два функция

$$\beta(f) = \sum_{i<j} \frac{x_i}{x_i + x_j},$$

где x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $f(x) = x^3 + ax + b$ играет роль дискриминанта $D(f)$ над полями характеристики нуль, причем β удовлетворяет соотношению $\beta^2 + \beta + \nu = 0$, где $\nu = \sum_{i<j} \frac{x_{ij}}{x_i^2 + x_j^2}$ [3]. Для многочлена третьей степени уравнение $\beta^2 + \beta + \nu = 0$ имеет вид $\beta^2 + \beta + \frac{a^3 + b^2}{b^2} = 0$. Приведем критерий нахождения групп Галуа над полями характеристики два для многочленов третьей степени [3].

Теорема 1. *Пусть $f(x) = x^3 + ax + b$ – неприводимый над полем K характеристики два многочлен. Тогда группа Галуа $Gal_K f$ есть A_3 или S_3, в зависимости от того, будет ли многочлен $Y^2 + bY + a^3 + b^2$ иметь или не иметь корень в поле K.*

Как известно, существует всего две транзитивные подгруппы группы S_3 - это сама симметрическая группа 6-го порядка S_3 и циклическая (знакопеременная) группа 3-го порядка A_3.

Теорема 2. *Всего может быть три различных спектра Галуа неприводимых над $\mathbb{Z}_2(t)$ многочленов третьей степени, а именно: $SpGal_{\mathbb{Z}_2(t)} f(a(t); X) = \{S_3\}$, $SpGal_{\mathbb{Z}_2(t)} f(a(t); X) = \{A_3\}$ и $SpGal_{\mathbb{Z}_2(t)} f(a(t); X) = \{S_3, A_3\}$, где $a(t)$ – любая рациональная функции от t, с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. 1) Пусть $f(X) = X^3 + t^2 X + a(t)$, где $a(t)$ – любая рациональная функция от t, t – трансцендентный элемент над $\mathbb{Z}_2$. Тогда уравнение $\beta^2 + \beta + \frac{a^3 + b^2}{b^2} = 0$ для этого многочлена имеет вид: $\beta^2 + \beta + \frac{t^6 + (a(t))^2}{(a(t))^2} = 0$. Из теоремы 1, следует, что группа A_3 для этого многочлена реализуется только для функции $a(t) = t^3$, а при всех остальных функциях, сохраняющих неприводимость данного многочлена, реализуется группа S_3, т.е. $SpGal_{\mathbb{Z}_2(t)} f(a(t); X) = \{S_3, A_3\}$.

2) Пусть $f(X) = X^3 + (a(t))^2 X + (a(t))^3$, где $a(t)$ – любая рациональная функция от t, t – трансцендентный элемент над $\mathbb{Z}_2$. Тогда уравнение $\beta^2 + \beta + \frac{a^3+b^2}{b^2} = 0$ для этого многочлена имеет вид: $\beta^2 + \beta = 0$, которое, очевидно, всегда имеет корень в $\mathbb{Z}_2(t)$. Таким образом, по теореме 1, $SpGal_{\mathbb{Z}_2(t)} f(a(t); X) = \{A_3\}$ для любых рациональных функций $a(t)$, сохраняющих неприводимость данного многочлена.

3) Пусть $f(X) = X^3 + a(t)$, где $a(t)$ – любая рациональная функция от t, t – трансцендентный элемент над $\mathbb{Z}_2$. Тогда уравнение $\beta^2 + \beta + \frac{a^3+b^2}{b^2} = 0$ для этого многочлена имеет вид: $\beta^2 + \beta + 1 = 0$, которое, очевидно, не имеет корня в $\mathbb{Z}_2(t)$. Следовательно, по теореме 1, $SpGal_{\mathbb{Z}_2(t)} f(a(t); X) = \{S_3\}$ для любых рациональных функций $a(t)$, сохраняющих неприводимость данного многочлена.

Таким образом, теорема доказана. □

Список литературы

[1] Сергеев А.Э., Яковлев А.В. О спектрах Галуа многочленов, зависящих от целочисленных параметров. – Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 321, 2005, 275–280.

[2] Сергеев А.Э. Обратная задача для спектров Галуа полиномов. – Деп. в ВИНИТИ, 881-В2004 (25.05.2004), 1–35.

[3] Сергеев А.Э. О задаче И. Капланского. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. є 1, 2001, 14–17.

Об алгебре, порожденной циркулянтами

В. М. Сидельников, Л. С. Казарин (Ярославль, Россия)

Рассматривается строение подалгебры $A(\mathfrak{D}_n)$ алгебры $n \times n$-матриц над конечным полем F, порожденной левыми и правыми циркулянтами и матрицей, обращающей порядок следования (транспонирование). Напомним, что левым (правым) циркулянтом называется матрица, у которой каждая следующая строка получается из предыдущей циклическим сдвигом влево (вправо) на одну позицию. Оказывается алгебра $A(\mathfrak{D}_n)$ является гомоморфным образом групповой алгебры группы диедра порядка $2n$ и имеет размерность $2n-1$, если n нечетно и $2n-2$, если n четно.

Данное представление оказывается весьма экономным. Оно содержит любое нелинейное неприводимое представление группы диедра порядка $2n$ ровно один раз. Строение алгебры $A(\mathfrak{D}_n)$ определяется разложением многочлена $x^n - 1$ в произведение $f_1(x)f_2(x)\ldots, f_k(x)$ неприводимых над F многочленов степеней $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Имеется два случая в зависимости от характеристики поля F.

Теорема 1 Пусть n взаимно просто с характеристикой поля F и V – стандартный регулярный $F[H]$-модуль циклической группы H порядка n. Тогда $n - \varepsilon = m_1 + m_2 + \cdots + m_l$, где $\varepsilon = 1$ при нечетном n и $\varepsilon = 2$ при четном n, а $m_i = n_i$, если нелинейный многочлен из разложения $x^n - 1$ является возвратным (т.е. вместе с корнем α имеется и корень α^{-1}) и $m_i = 2n_i$ в противном случае. При этом $A(\mathfrak{D}_n)$ – прямая сумма полных матричных колец, каждое из которых изоморфно $M_2(q_i)$, где $q_i = |F|^{m_i/2}$. В частности, группа обратимых элементов этого кольца – прямое произведение групп, изоморфных $GL_2(q_i)$.

Для случая, когда $(n, p) = p$ справедлива

Теорема 2. Пусть $(n, p) = p$ – характеристика поля F, $n = p^\nu h$, где $(h, p) = 1$ и V – стандартный регулярный $F[H]$-модуль циклической группы порядка n. Тогда $h - \varepsilon = m_1 + m_2 + \cdots + m_l$, где $\varepsilon = 1$ при нечетном h и $\varepsilon = 2$ при четном h, а $m_i = n_i$, если нелинейный многочлен из разложения $x^h - 1$ является возвратным и $m_i = 2n_i$ в противном случае. При этом $A(\mathfrak{D}_n)$ – прямая сумма колец, каждое из которых по своему радикалу Джекобсона изоморфно $M_2(q_i)$, где $q_i = |F|^{m_i/2}$. В частности, группа обратимых элементов этого кольца – расширение p-группы при помощи прямого произведения групп, изоморфных $GL_2(q_i)$.

Полученные результаты имеют приложения в теории кодирования, в теории сложности вычислений и в криптографии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант є 05-01-01018.

Список литературы

[1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М. Наука, Физ.-мат. лит., 1969.

Перестановочные преобразования Фурье

С. М. Ситник (Воронеж, Россия)

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) — это один из самых полезных математических инструментов при решении практических задач. Оно применяется в электродинамике и оптике, кодировании и криптографии, теории информации, вычислительной томографии, анализе сигналов и фильтрации. Важное значение имеют быстрые варианты ДПФ.

В докладе рассматривается одна из модификаций ДПФ — перестановочное дискретное преобразование Фурье (ПДПФ).

Определение 1. *Перестановочным ДПФ называется преобразование вида $P_n = LF_nR$, где F_n — обычное ДПФ с матрицей $n \times n$, L и R — матрицы перестановок.*

Ясно, что в результате получится некоторая обобщенная матрица Вандермонда. Всего при данном n получится $(n!)^2$ различных ПДПФ.

Известен спектр обычного ДПФ, найденный для произвольного n математиком Исайей Шуром в 1921 году [1]. Решение этой непростой задачи отсутствует в известных учебниках, оно требует знания формулы для квадратичных тригонометрических сумм Гаусса [2], которые являются следами ДПФ (по словам Гаусса, он затратил на вычисление этих сумм больше лет, чем дней на решение других задач). При этом вопреки интуиции корни из единицы входят в спектр неравноправно. Например, при $n = 4$ числа $-1, -i$ являются простыми собственными значениями, число 1 имеет кратность два, а число i вообще не входит в спектр. Это связано с тем, что в ДПФ по умолчанию используется естественное "человеческое" упорядочивание корней из единицы, которое является лишь одним из многих возможных и приводит к неудачным спектральным свойствам. За счет свободы перестановок корней в ПДПФ спектральные свойства преобразований удается улучшить. Такие преобразования более похожи на свой непрерывный аналог в плане равноправности точек спектра и могут оказаться полезнее в различных приложениях.

Изучение спектра ПДПФ проводилось на компьютере. Для размерности $n = 4$ вычислены спектры и собственные векторы всех ПДПФ. При этом оказалось, что у всех преобразований спектр простой, кроме ДПФ и его обратного [3]–[7]. Таким образом, с точки зрения простоты устройства спектра выбор стандартного ДПФ является самым неудачным. Для $n = 5$ рассчитана часть из $(120)^2$ ПДПФ. Вычислениями подтверждается

Гипотеза. Спектр всех ПДПФ простой, кроме тех случаев, когда корни из единицы при формировании строк матрицы ПДПФ обходятся по окружности, начиная не с первообразного корня.

Определение 2. *Перестановочной квадратичной суммой Гаусса называется выражение*

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} ixp(\frac{p(k)q(k)}{n}),$$

где $ixp(x) = \exp(2\pi ix)$, $\{p(1), \ldots, p(n)\}$ *и* $\{q(1), \ldots, q(n)\}$ *— перестановки множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *соответствующие матрицам из определения ПДПФ.*

Вычисление сумм G_n в явном виде необходимо для доказательства результатов о спектре. По-видимому, это нерешенная и очень трудная задача [8]. Представляют интерес также быстрые варианты ПДПФ. Определено непрерывное перестановочное преобразование Фурье на оси.

В заключение отметим, что ДПФ широко применяются в криптографии. На основании результатов настоящей работы можно в принципе предложить следующий алгоритм шифрования информации. Отправитель и получатель заранее знают, какой из вариантов ПДПФ данного порядка используется при обмене, а противнику это не известно. Ввиду огромности числа $(n!)^2$ подобный алгоритм может быть не менее стойким, чем стандартные алгоритмы с большой длиной ключа. Кроме того, при данном методе требуется минимальная модификация существующих алгоритмов и программ, сводящаяся к простой замене одной матрицы на другую.

Список литературы

[1] Schur I. Über die Gaussschen Summen// Nach. Gessel. Göttingen, Math-Phys. Klasse, 1921, 147–153.

[2] Berndt B.C., Evans R.J., Williams K.S. Gauss and Jacobi sums. Wiley, 1998.

[3] Ситник С.М. Модифицированные дискретные преобразования Фурье// Вестник Воронежского Института МВД России. 2006, є 1 (26), С. 108–113.

[4] Ситник С.М. Спектральные свойства модифицированных дискретных преобразований Фурье// Труды четвертой Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи". Часть 4. Самара, 2007, с. 95–97.

[5] Ситник С.М. Об одном обобщении дискретного преобразования Фурье, определяемом перестановками// III Международная конференция: "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики". Материалы. Нальчик, 2006, с. 264–266.

[6] Ситник С.М., Телкова С.А. Об одном варианте дискретного преобразования Фурье// Черноземный альманах научных исследований. Серия "Прикладная математика и информатика". Воронеж, 2006, є 1 (2), С. 154–159.

[7] Ситник С.М. Перестановочные аналоги дискретного преобразования Фурье// Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. Абрау-Дюрсо, 'Лиманчик', 2006, С. 156–158.

[8] Berndt Bruce. Личное сообщение.

О максимально быстром выходе из подмножества в ориентированном графе

В. И. Трофимов (Екатеринбург, Россия)

Пусть Γ — ориентированный граф, X — конечное подмножество множества вершин графа Γ и $x \in X$. Нас будет интересовать (в связи с возможными применениями соответствующих результатов в теории групп) вопрос о длине кратчайшего ориентированного пути графа Γ, начинающегося в x и заканчивающегося вне X.

Для ориентированного графа Γ и вершины x графа Γ следующим образом определим функцию $\alpha_{\Gamma,x} : \mathbf{Z}_{\geq 0} \to \mathbf{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, характеризующую максимально быстрое удаление от вершины x в графе Γ по ориентированным путям. Пусть $\overline{\Gamma}$ — неориентированный граф, получающийся из Γ снятием ориентации. Тогда $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ для $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ задается следующим образом: если в графе Γ существуют ориентированные пути, начинающихся в x и заканчивающихся вне шара радиуса n с центром x графа $\overline{\Gamma}$, то $\alpha_{\Gamma,x}(n) + 1$ есть наименьшая из длин таких путей; если же в графе Γ нет ориентированных путей, начинающихся в x и заканчивающихся вне шара радиуса n с центром x графа $\overline{\Gamma}$, то полагаем $\alpha_{\Gamma,x}(n) = \infty$.

Нас будет интересовать поведение функции $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ для ориентированных локально конечных регулярных графов Γ со связными графами $\overline{\Gamma}$. (Напомним, что ориентированный граф Γ называется локально конечным регулярным, если in-степени всех его вершин равны одному и тому же неотрицательному целому числу, обозначаемому через $\deg^-(\Gamma)$, и out-степени всех его вершин равны одному и тому же неотрицательному целому числу, обозначаемому через $\deg^+(\Gamma)$.) Заметим, что, если подмножество X множества вершин графа Γ содержит шар радиуса n_1, $n_1 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, с центром x графа $\overline{\Gamma}$ и содержится в шаре радиуса n_2, $n_2 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, с центром x графа $\overline{\Gamma}$, то длина кратчайшего среди ориентированных путей графа Γ, начинающихся в x и заканчивающихся вне X (если такие пути существуют), ограничена снизу величиной $\alpha_{\Gamma,x}(n_1) + 1$ и ограничена сверху величиной $\alpha_{\Gamma,x}(n_2) + 1$. В частности, эта длина ограничена сверху величиной $\alpha_{\Gamma,x}(diam_{\overline{\Gamma}}(X)) + 1$, где $diam_{\overline{\Gamma}}(X)$ — диаметр множества X в графе $\overline{\Gamma}$.

Приводимые далее результаты получены в работах автора [1], [2].

В [1] для произвольного ориентированного локально конечного графа Γ с транзитивной на множестве вершин группой автоморфизмов и со связным графом $\overline{\Gamma}$ доказано, что в случае $\deg^+(\Gamma) \neq \deg^-(\Gamma)$ справедливо $\alpha_{\Gamma,x}(n) = n$, где x — произвольная вершина графа Γ и n — произвольное неотрицательное целое число, а в случае $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma) > 0$ справедливо $\alpha_{\Gamma,x}(n) \leq kn^2$, где x — произвольная вершина графа Γ, k — вещественное число, зависящее лишь от $\deg^+(\Gamma)$ (например, можно положить $k = 3(\deg^+(\Gamma) + 1)\log_2(2\deg^+(\Gamma)))$, и n — произвольное неотрицательное целое число, если граф Γ бесконечен, и произвольное неотрицательное целое число, не превосходящее $\frac{diam(\overline{\Gamma})+1}{2}$, если граф Γ конечен.

Применяя последнюю оценку к графам Кэли групп, получаем следующий результат.

Теорема. *В произвольной бесконечной конечно порожденной группе $G = \langle g_1, ..., g_d \rangle$ для каждого $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ существуют слово длины $\leq 3(d+1)\log_2(2d)n^2 + 1$ над алфавитом $\{g_1, ..., g_d\}$, представляющее элемент группы G, который не может быть представлен словом длины $\leq n$ над алфавитом $\{g_1, g_1^{-1} ..., g_d, g_d^{-1}\}$.*

В [2] показывается, что при переходе к (более широкому, чем класс ориентированных локально конечных графов Γ с транзитивной на множестве вершин группой автоморфизмов и со связным графом $\overline{\Gamma}$) классу ориентированных локально конечных регулярных графов Γ со связными графами $\overline{\Gamma}$ возможное поведение функций $\alpha_{\Gamma,x}(n)$

становится существенно более разнообразным. А именно, в [2] доказывается, что в случае $\deg^+(\Gamma) > \deg^-(\Gamma)$ функция $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ ограничена сверху линейной функцией от n (но значения $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ могут, вообще говоря, превосходить n); в случае $\deg^+(\Gamma) = \deg^-(\Gamma)$ функция $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ ограничена сверху экспоненциальной функцией от n, причем существуют как бесконечные, так и сколь угодно большие с фиксированными in- и out-степенями конечные графы Γ, у которых функции $\alpha_{\Gamma,x}(n)$ для подходящих вершин x ограничены снизу фиксированной экспоненциальной функцией от n; наконец, в случае $\deg^+(\Gamma) < \deg^-(\Gamma)$ для произвольных положительных целых чисел k, l с условием $k < l$ существуют (с необходимостью бесконечные) графы Γ с $\deg^+(\Gamma) = k$, $\deg^-(\Gamma) = l$ и со связными графами $\overline{\Gamma}$ такие, что $\alpha_{\Gamma,x}(n) = \infty$ для некоторой вершины x графа Γ и некоторого $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00378.

Список литературы

[1] Trofimov V. I. On geometric properties of directed vertex-symmetric graphs // Europ. J. Combinatorics. 2006. V. 27. P. 690-700.

[2] Трофимов В.И. О максимально быстром удалении от вершины в ориентированном регулярном графе // (направлена в печать)

Категория p-локальных абелевых групп без кручения конечного ранга

В. Х. Фарукшин (Москва, Россия)

Абелева группа G называется p-локальной группой (Z_p-группой), если она является естественным модулем над кольцом дискретного нормирования Z_p. Категорию p-локальных групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов обозначим через $TFR(Z_p)$. Рассмотрим категорию $L(\widehat{Z}_p)$, объектами которой являются квазигомоморфизмы свободных модулей конечного ранга над кольцом p-адических чисел $\widehat{Z}_p$ с фиксированными базисами. В качестве морфизмов $L(\widehat{Z}_p)$ для объектов $\varphi\colon M \to N$ и $\psi\colon M_1 \to$

N_1 возьмем пару квазигомоморфизмов (α_1, α_2), где $\alpha_1 \colon M \to M_1$, $\alpha_2 \colon N \to N_1$, для которой выполняется равенство $\alpha_2\varphi = \psi\alpha_1$.

Теорема 1. *Категории $TFR(Z_p)$ и $L(\widehat{Z}_p)$ эквивалентны.*

Заметим, что свободной Z_p-группе соответствует «свободный» объект $0 \to N$, а делимой Z_p-группе соответствует «делимый» объект $M \to 0$.

Следствие 2. *Двойственность в категории $TFR(Z_p)$ соответствует двойственности в категории квазигомоморфизмов $L(\widehat{Z}_p)$ определяемой функтором $\mathrm{Hom}_{\widehat{Z}_p}(-, \widehat{Z}_p)$, причем:*

1. *Свободному объекту $0 \to N$ двойственный объект $\mathrm{Hom}_{\widehat{Z}_p}(N, \widehat{Z}_p) \to 0$ является делимым того же ранга;*
2. *Делимому объекту $M \to 0$ двойственен свободный объект $0 \to \mathrm{Hom}_{\widehat{Z}_p}(M, \widehat{Z}_p)$ того же ранга;*
3. *Двойственные объекты имеют равные ранги;*
4. *Сумма p-рангов двойственных объектов равна рангу этих объектов;*
5. *Объекты двойственные данному квазиизоморфны;*
6. *Редуцированному объекту двойственен корредуцированный объект;*
7. *Корредуцированному объекту двойственен редуцированный объект;*
8. *Вполне редуцированному объекту двойственен вполне редуцированный объект.*

Список литературы

[1] Fomin A.A., Finitely presented modules over the ring of universal numbers, Contemp. Math., V. 171, 1994, 109–120.

[2] Vinsonhaler C. and Wickless W., Dualities for torsion free abelian groups of finite rank, J. of Algebra, V. 128, 1990, 474–487.

Градуированные алгебры ли малого ранга малой характеристики

Н. А. Хорева (Нижний Новгород, Россия)

Важную роль в классификации простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$ играет теорема распознавания В.Каца [1], доказанная в [3] для $p > 3$. Эта теорема дает описание градуированных алгебр Ли $L = \bigoplus_{i=-q}^{r} L_i$, где L_0-прямая сумма классических алгебр Ли, L_{-1} неприводимый L_0 модуль, отрицательная часть порождается L_{-1} и выполняется условие транзитивности: если $x \in L_i,\ i \geq 0,\ x \neq 0$, то $[x, L_{-1}] \neq 0$. В случае $p = 3$ теорема распознавания доказана в [2] для $q = 1$.

В данной работе рассматриваются градуированные алгебры Ли характеристики 3, с комнпонентой $L_0 = \mathfrak{sl}(2)$ или $\mathfrak{gl}(2)$.

Теорема 1. *Пусть L конечномерная градуированная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 3, такая что $L_0 = \mathfrak{sl}(2)$ или $\mathfrak{gl}(2)$, а L_{-1} - ограниченный неприводимый L_0-модуль, отрицательная часть порождается L_{-1}, выполняются условия транзитивности и 1-транзитивности: если $x \in L_i,\ i \leq 0$ и если $[x, L_1] = 0$, то $x = 0$. Тогда L изоморфна одной из следующих алгебр: $\mathfrak{psl}(3)$, $\mathfrak{pgl}(3)$, подалгебре в алгебре G_2, 10-мерной алгебре серии $L(\varepsilon)$, алгебре Франк $\mathtt{Fr}(n)$, контактной алгебре $K(3, \bar{n})$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 05-01-00580.

Список литературы

[1] Кац В. *Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста*// Изв.АН СССР, сер. матем. – 1968.– т. 32 – с. 1323-1367

[2] Кострикин А.И., Острик В.В. *К теореме распознавания для алгебр Ли характеристики 3*// Математический сборник – 1995. – т. 186. – № 10.– с. 73-88.

[3] Benkart G., Gregory T., Premet A. *The Recognition Theorem for Graded Lie Algebras in Prime Characteristic.* – preprint

Псевдорациональный тип факторно делимой группы

А. В. Царев (Москва, Россия)

В кольце целых универсальных чисел

$$\widehat{Z} = \prod_{p \in P} \widehat{Z}_p$$

рассмотрим подкольцо R, аддитивная группа которого сервантно порождается идеалом

$$T = \bigoplus_{p\in P} \widehat{Z}_p$$

и единицей кольца,

$$R = \langle 1, \bigoplus_{p\in P} \widehat{Z}_p \rangle_* \subset \widehat{Z}.$$

Это кольцо называется кольцом *псевдорациональных чисел.* Оно было независимо введено А.А. Фоминым и П.А. Крыловым.

Кольцо R состоит из всех элементов $r = (\alpha_p) \in \prod_{p\in P} \widehat{Z}_p$, для которых существует такое рациональное число $|r| = \frac{m}{n}$, что $n\alpha_p = m$ почти при всех простых p.

Определение. Группа G называется *факторно делимой*, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу конечного ранга F, что G/F — периодическая делимая группа.

Любой базис свободный группы F из определения факторно делимой группы G будем называть фундаментальной системой группы G.

Если G — факторно делимая группа, то ядро естественного гомоморфизма $\alpha\colon G \to \widehat{G}$, где $\widehat{G}$ — Z-адическое пополнение группы G, равно $divG$ — ее делимой части. Так как $\widehat{G}$ — $\widehat{Z}$-модуль, то $\widehat{G}$ — R-модуль. Тогда рассмотрим R-модуль $\mathcal{R}(G) = divG \oplus \langle \alpha(G) \rangle_R$, который называется *псевдорациональным типом* группы G. Так как существует вложение из G в $\mathcal{R}(G)$, то будем отождествлять G с ее образом в $\mathcal{R}(G)$.

Теорема 1. *Любой гомоморфизм из одной факторно делимой группы в другую можно продолжить до гомоморфизма их псевдорациональных типов.*

Следствие 2. *Пусть G, H — факторно делимые группы, X — фундаментальная система в G, тогда гомоморфизмы $\alpha, \beta \in$ $\in \mathrm{Hom}(G, H)$ совпадают $\Leftrightarrow$ когда они одинаково действуют на множество X.*

Теорема 3. 1. *Факторно делимая группа вполне разложима (т.е. раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга* 1*) $\Leftrightarrow$ когда в ней существует независимая над R фундаментальная система.*

2. *Факторно делимая группа почти вполне разложима (т.е. квазиизоморфна вполне разложимой факторно делимой группе)* $\Leftrightarrow$ *когда в ней существует независимая над R максимальная линейно независимая (над Z) система.*

Работа поддержана грантом Президента РФ, № МК-3345.2007.1.

Деформации алгебры Ли типа $\bar{A}_5$ над полем характеристики 2

Н. Г. Чебочко (Нижний Новгород, Россия)

Описание глобальных деформаций алгебр Ли представляет интерес в связи с классификацией простых алгебр Ли над полями малой характеристики.

Пусть R – система корней типа A_5 с базисом $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5\}$, L – алгебра Ли типа $\bar{A}_5$ над полем K характеристики 2. В работе [1] найдена вторая группа когомологий $H^2(L, L)$. Доказано, что $\dim H^2(L, L) = 20$. Весовые подпространства $H^2_\mu(L, L)$ одномерны и натянуты на коцикл $\psi_\mu = \sum\limits_{-\gamma-\delta+\mu\in R} e^*_{-\gamma}\wedge e^*_{-\delta}\otimes e_{-\gamma-\delta+\mu}$ (e_γ – векторы базиса Шевалле).

Множество весов $H^2(L, L)$ есть $\Lambda = \{\pm\alpha_1 \pm \alpha_3 \pm \alpha_5,\ \pm\alpha_1 \pm (\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5),\ \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) \pm \alpha_5,\ \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5),\ \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5)\}$.

Необходимым условием продолжаемости коцикла ψ до глобальной деформации является тривиальность коцикла $\psi \cup \psi$ из $Z^3(L, L)$, где $\psi \cup \psi(x, y, z) = \psi(\psi(x, y), z) + \psi(\psi(y, z), x) + \psi(\psi(z, x), y)$. Для любого $\mu \in \Lambda$ выполняется $\psi_\mu \cup \psi_\mu = 0$. Следовательно, ψ_μ продолжается до глобальной дефоормации и $[\ ,\ ] + t\psi_\mu$ задает лиевское умножение.

Для любых $\mu,\ \lambda \in \Lambda$ коцикл $[\psi_\mu, \psi_\lambda] = \psi_\mu \cup \psi_\lambda + \psi_\lambda \cup \psi_\mu$ является тривиальным и любая комбинация коциклов ψ_μ продолжается до глобальной деформации алгебры Ли L.

Алгебры Ли полученные в результате деформаций являются простыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант є05-01-0058.

Список литературы

[1] Чебочко Н. Г. Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике 2. I// Мат. сборник. 2005. Т.196. N9, С.125 – 156.

Множество всех приводимых кос

В. К. Шалашов (Ярославль, Россия)

Пусть $B_n = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}; \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, если $|i-j| \geq 2$ и $i, j = 1, \ldots, n-1$, $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$, если $i = 1, 2, \ldots, n-2\rangle$ — группа кос на n нитях. Через π_n обозначается полугруппа положительных кос, т.е. кос, в записи которых нет образующих с отрицательными показателями. Две положительные косы P и Q равны на круге в полугруппе π_n ($P \ominus Q$), если одну из них можно перевести в другую, используя определяющие соотношения полугруппы π_n и преобразования вида $AB \mapsto BA$. Через Δ_n обозначается коса $\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}\sigma_1 \ldots \sigma_{n-2} \ldots \sigma_1\sigma_2\sigma_1$.

Коса $\beta \in B_n$ называется плюс-приводимой, если она сопряжена косе вида $\beta'\sigma_{n-1}$, где $\beta' \in B_{n-1}$. Для $n \geq 3$, $s \in \mathbb{Z}_+$ и произвольного слова w из π_{n-1} введем следующие обозначения:

$$\tau(n, s, w) = (\sigma_{n-1} \ldots \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1})^s w\sigma_{n-1},$$

$$T(n, s, w) = \{P \in \pi_n \,|\, P \ominus \tau(n, s, w)\},\ \mathcal{T}(n, s) = \bigcup_{w \in \pi_{n-1}} T(n, s, w),$$

$$R_+(n, s) = \{\Delta_n^{-2s} P \,|\, P \in \mathcal{T}(n, s)\},\ R_+(n) = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}_+} R_+(n, s).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Множество всех плюс-приводимых кос на n нитях совпадает с множеством $R_+(n)$.*

Коса $\beta \in B_n$ называется минус-приводимой, если она сопряжена косе вида $\beta'\sigma_{n-1}^{-1}$, где $\beta' \in B_{n-1}$. Для $n \geq 3$, $s \in \mathbb{N}$ и произвольного слова w из π_{n-1} введем следующие обозначения:

$$\lambda(n, s, w) = (\sigma_{n-1} \ldots \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1})^s w\sigma_{n-2} \ldots \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \ldots \sigma_{n-2},$$

$$\Delta(n, s, w) = \{P \in \pi_n \,|\, P \ominus \lambda(n, s, w)\},\ \mathcal{L}(n, s) = \bigcup_{w \in \pi_{n-1}} \Lambda(n, s, w),$$

$$R_-(n, s) = \{\Delta_n^{-2s} P \,|\, P \in \mathcal{L}(n, s-1)\},\ R_-(n) = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} R_-(n, s).$$

Теорема 2. *Множество всех минус-приводимых кос на n нитях совпадает с множеством $R_-(n)$.*

Коса $\beta \in B_n$ называется приводимой (см. [1]), если она является плюс-приводимой или минус-приводимой.

Теорема 3. *Множество всех приводимых кос совпадает с множеством $R_+(n) \cup R_-(n)$.*

Доказательство этих теорем основано на уточненной версии критерия приводимости кос работы [2].

Список литературы

[1] Birman, J. Braids, Links, Mapping Class Groups / J/ Birman // Ann. Math. Stud. — Princeton Univ. Press, 1975. — V. 82.

[2] Шалашов, В.К. Приводимые косы / В.К. Шалашов // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. — Яросл. гос. ун-т. — Ярославль: ЯрГУ, 2003. — С. 1–12.

О радикальных насыщенных формациях

О. А. Шпырко (Севастополь, Украина)

Рассматриваются только конечные группы. Напомним необходимые сведения из теории классов групп, [1]. Формацией называется класс, замкнутый относительно факторгрупп и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если для любой группы G из условий $G/N \in \mathfrak{F}$, $N \subseteq \Phi(G)$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

Классом Фиттинга называется класс $\mathfrak{X}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. Класс Фиттинга называют также радикальным классом.

Радикальной формацией называют класс групп, который одновременно является формацией и классом Фиттинга. В частности, радикальными насыщенными формациями являются следующие классы групп: $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — класс всех π'-групп, $\mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{N}_\pi$ — классы всех разрешимых и нильпотентных π-групп, соответственно. Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп.

Произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ двух классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ определяется как класс всех групп G, содержащих нормальную подгруппу N такую, что $N \in \mathfrak{X}$ и

$G/N \in \mathfrak{Y}$, т.е. $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \{G \in \mathfrak{E} \mid \exists N \lhd G, N \in \mathfrak{X}, G/N \in \mathfrak{Y}\}$. Как обычно $\mathfrak{X}^k$ означает произведение k копий класса $\mathfrak{X}$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Пусть k — натуральное число. Тогда:*

1) *класс $(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{S}_\pi)^{(k)}\mathfrak{E}_{\pi'}$ состоит из всех π-разрешимых групп π-длины $\leqslant k$ и является радикальной насыщенной формацией,*

2) *класс $(\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi)^{(k)}\mathfrak{E}_{\pi'}$ состоит из всех π-разрешимых групп нильпотентной π-длины $\leqslant k$ и является радикальной насыщенной формацией,*

3) *класс $\mathfrak{L}_\pi(k)$ состоит из всех разрешимых групп π-длины $\leqslant k$ и является радикальной насыщенной формацией,*

4) *класс $\mathfrak{L}^n_\pi(k)$ состоит из всех разрешимых групп нильпотентной π-длины $\leqslant k$ и является радикальной насыщенной формацией.*

Список литературы

[1] *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп // Москва: Наука. 1978. 267с.