Санкт-Петербургское отделение Математического
института им. В.А. Стеклова РАН

Санкт-Петербургский государственный университет

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

ММИ им.Эйлера
Санкт-Петербург, Россия
6–8 мая 2010 г.

Тезисы докладов

Санкт-Петербург, 2010

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

О. Л. Виноградов (сопредседатель)
М. А. Скопина (сопредседатель)
И. Б. Башмакова
А. С. Колпаков
Г. Ю. Пуеров

СЕКРЕТАРИАТ

Н. В. Залесская (проживание)
А. В. Кривошеин (ученый секретарь)
Я. А. Шибаева (визы)

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

В. С. Виденский
О. Л. Виноградов
И. К. Даугавет
А. Н. Подкорытов
М. А. Скопина

Т33 Теория приближений. Международная конференция. Санкт-Петербург. 6—8 мая 2010 г. Тезисы докладов.— СПб: ММИ им. Л. Эйлера, ВВМ, 2010. — 148 с.

ISBN 978-5-9651-0451-2

© Авторы, 2010
© ММИ им. Эйлера, 2010

Содержание

О вложении некоторых классов функций

В. А. Андриенко

Одесский национальный университет, Украина
andrienko.v@gmail.com

Пусть Φ — совокупность четных, неотрицательных, конечных и неубывающих на $[0, \infty)$ функций φ с $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Через $\varphi(L)$ ($\varphi \in \Phi$) обозначим класс всех измеримых на $[0, 1]$ функций f, для которых $\int_0^1 \varphi(f(x))dx < \infty$. Пусть $\omega_p(f, \delta)$ — интегральный модуль непрерывности функции $f \in L^p(0, 1)$ и $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности. Через H_p^ω обозначают класс всех функций f из $L^p(0, 1), 1 \leqslant p < \infty$, у которых $\omega_p(f, x) \leqslant \omega(x)$. Через f^* обозначают невозрастающую на $(0, 1)$ равноизмеримую с $|f|$ функцию. В конце 60-х и в начале 70-х гг. прошлого столетия П. Л. Ульянов заложил основы теории вложения классов H_p^ω. В частности, П. Л. Ульянов (1968) поставил вопрос о необходимых и достаточных условиях для вложения

$$H_p^\omega \subset \varphi(L) \tag{1}$$

и получил эти условия в некоторых важных случаях, когда φ растет не быстрее, чем некоторая степенная функция, а также достаточные условия (1970) для ряда вложений (1). Позднее эти исследования развивались в работах В. А. Андриенко, Л. Лейндлера, Э. А. Стороженко, В. И. Коляды и других в случае функций φ, растущих не быстрее степенных.

П. Л. Ульянов (1970) получил первый результат для быстро растущих функций. Он нашел достаточное условие на $\omega_1(f, \delta)$, при котором $f \in e^L$. Развитием этого результата является робота Э. А. Стороженко (1971), где указаны достаточные условия на $\omega_p(f, \delta)$, $p > 1$, обеспечивающие включение $f \in e^L$. Э. А. Стороженко впервые нашла необходимые достаточные условия (1976) для вложения (1) в случае $p = 1$, $\varphi = \exp|x|$ и выпуклого модуля непрерывности ω. Последний результат она перенесла на случай функций φ, удовлетворяющих так называемому ω-условию:

$$\varphi(x+1) = O\{\varphi(x)\}, \quad x \to \infty. \tag{2}$$

Здесь мы получаем необходимые условия для вложения (1) для широкого класса функций φ [1], необходимые и достаточные в случае $p = 1$.

Теорема 1. *Пусть* $\omega(x), 0 \leqslant x \leqslant 1,$ *— выпуклый модуль непрерывности, а функция* φ *удовлетворяет условию* (2) *и либо является целой, растущей быстрее, чем любая степенная функция на* $[0, \infty)$, *либо* $\varphi^{\frac{1}{s}}(x^{\frac{1}{p}})$ *является выпуклой для некоторого* $s > 1$, *а* φ *— непрерывна и строго возрастает на* $[0, +\infty)$. *Тогда условие* $x^{-\frac{1}{p}}\omega(x) \in \varphi(L)$ *или* $x^{-\frac{2}{p}}\left\{\int_0^x \omega^p(2u)du\right\}^{\frac{1}{p}} \in \varphi(L)$ *необходимо для вложения* (1), *а в случае* $p = 1$ *— необходимо и достаточно для вложения* (1).

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1

$$f \in \varphi(L) \Leftrightarrow x^{-1/p}\omega_1(f^{*p}, x) \in \varphi(L). \tag{3}$$

Теорема 3. *Правая часть* (3) *равносильна каждому из условий*

$$x^{-1/p}F_p^{\frac{1}{p}}(x) \in \varphi(L), F_p(x) = \int_0^x f^{*p}(u)du,$$

$$x^{-2/p}\left(\int_0^x F_p(2u)du\right)^{1/p} \in \varphi(L),$$

$$x^{-2/p}\left(\int_0^x \omega_1(f^{*p}, 2u)du\right)^{1/p} \in \varphi(L).$$

Литература

[1] Андриенко В. А., *Необходимые условия вложения в класс* $\varphi(L)$, Сб. трудов ин-та математики НАН Украины, 5 (2008), 1–13 (на укр. языке).

О свойствах монотонной перестановки

С. В. Банкевич

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

sergey.bankevich@gmail.com

Рассмотрим функционал

$$I(u) = \int_{-1}^{1} F(u, |a(x,u)u'|)dx,$$

где $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — неубывающая и выпуклая по второму аргументу непрерывная функция, $u \in W_1^1([-1,1])$ — неотрицательная функция. Хорошо известно, что если $a(x,u) \equiv 1$, то $I(u^*) \leqslant I(u)$, где u^* — возрастающая перестановка u.

В общем случае для того, чтобы неравенство выполнялось для любых u и F, необходимо выполнение следующих условий:

1. $\forall u \in \mathbb{R}, \forall s \in [-1,1]$ $a(s,u) = a(-s,u)$,
2. $\forall u \in \mathbb{R}, \forall s,t \in [-1,1] : 1+s+t \in [-1,1]$
$$a(s,u) + a(t,u) \geqslant a(1+s+t,u).$$

С другой стороны, при выполнении этих условий мы устанавливаем неравенство $I(u^*) \leqslant I(u)$ для $u \in W_\infty^1(-1,1)$. Для функций $u \in W_1^1$ это неравенство установлено при дополнительных ограничениях на вес: a не зависит от u и монотонна в некоторой окрестности точек ± 1. Отметим, что наши условия на a и F значительно слабее, чем в [1].

Доклад основан на совместной работе с А. И. Назаровым.

Работа поддержана грантом РФФИ 09 - 01 - 00729.

Литература

[1] Landes R., *Some remarks on rearrangements and functionals with non-constant density*, Math. Nachr. 280, No. 5–6 (2007), 560–570

Условия положительности всех частных сумм тригонометрического ряда в окрестности нуля

А. С. Белов

Ивановский государственный университет, Россия

asbel@ivanovo.ac.ru

Вместе с тригонометрическим рядом

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)\,, \tag{1}$$

где последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$a_n \geqslant 0 \ \text{ и } \quad a_n \geqslant a_{n+1} \ \text{ при } \quad n \geqslant 1\,, \quad 2a_0 \geqslant a_1\,,\ a_0 > 0\,, \tag{2}$$

будем рассматривать функции $a(t) = 2a_0$ при $t \in [0, 1/2)$, $a(t) = a_n$ при $t \in [n-1/2, n+1/2)$, $n \geqslant 1$;

$$M_{2q}(x) = \int_0^{(4q-1)\pi/(2x)} a(t)\,\cos(tx)\,dt\,, \quad x > 0\,,\ q = 1, 2\,. \tag{3}$$

При всех $n \geqslant 0$ через $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx)$ обозначим частные суммы ряда (1). Пусть

$$s_2(x) = S_{[3\pi/(2x)]}(x)\,, \qquad x > 0\,, \tag{4}$$

где квадратные скобки означают целую часть числа.

В статьях [1], [2] изложены основные идеи нового метода, сводящего изучение частных сумм ряда (1) на неотрицательность к исследованию на интервале $(0\,,\pi)$ функций (3) и (4) на положительность, как это описано в [1] . В [1] доказано, что если для некоторой точки $x_0 \in (0\,,\pi]$ функция

$$M_2(x) > 0 \qquad \text{при всех} \quad x \in (0\,, x_0)\,, \tag{5}$$

то $S_n(x) > 0$ при всех $n \geqslant 0$ и $x \in [0\,, x_0)$.

Пусть $\alpha \in (0,1)$ — единственный корень уравнения

$$\int_0^{3\pi/2} t^{-\alpha} \cos t \, dt = 0 \, .$$

Пусть $v_1(\alpha) = 0$, $v_1(1) = \pi$. Для всех $\gamma \in (\alpha\,, 1)$ существует единственное значение $v = v_1(\gamma) \in (0,\pi)$ такое, что $v^{-\gamma} \int_0^v t \sin t \, dt + \int_v^{3\pi/2} t^{1-\gamma} \sin t \, dt = 0$. Функция $v_1(\gamma)$ строго возрастает и непрерывна на отрезке $[\alpha\,, 1]$, причем легко табулируется. Например, $v_1(1/3)/\pi = 0{,}37627592\ldots$.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* (2) *и для некоторого $\gamma \in (\alpha\,, 1)$ найдется такое натуральное число m, что выполнено условие*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \geqslant \frac{(n+1/2)}{(1-\gamma)} a_n \quad \text{\textit{при всех}} \quad n \geqslant m \, .$$

Тогда при $x_0 = v_1(\gamma)/(m-1/2)$ верна оценка (5) *. Более того, в этом случае функция $M_2(x)$ в окрестности нуля имеет порядок $\int_0^{\pi/x} a(t)\, dt$.*

Теорема 1 описывает один из простейших эффективных способов нахождения точки $x_0 \in (0\,, \pi]$, для которой выполнено условие (5) . Например, при $\gamma = 1/3$ и $m = 2$ можно взять $x_0 = \pi/4$. Заметим, что в своем общем виде предлагаемый нами метод применим к изучению частных сумм рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos((n+\theta)\, x + \psi)$, где последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает, начиная с некоторого номера.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08–01–00302).

Литература

[1] Белов А. С., *О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами,* Матем. сб. 186, №4 (1995), 21–46.

[2] Белов А. С., *Исследование положительности всех частных сумм тригонометрического ряда в окрестности нуля,* Вестник Ивановского госун-та, Вып. 2, Сер. «Биология. Химия. Физика. Математика». (2008), 63–80.

О разрешимости квазиэллиптических систем в полупространстве

Л. Н. Бондарь

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
b_lina@ngs.ru

В настоящей работе продолжается (см. [1]–[3]) изучение краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве $R^n_+ = \{x = (x', x_n) : x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in R^{n-1}, x_n > 0\}$:

$$\mathcal{L}(D_x)u = F(x), \qquad x \in R^n_+, \qquad \mathcal{B}(D_x)u|_{x_n=0} = 0. \tag{1}$$

Рассматривается класс матричных квазиэллиптических операторов $\mathcal{L}(D_x)$, введенный в работе Л. Р. Волевича [4]. Предполагается, что задача (1) удовлетворяет условию Лопатинского.

В работе исследуется вопрос об условиях разрешимости краевых задач вида (1) в соболевских пространствах. Получены достаточные условия разрешимости. Показано, что в ряде случаев эти условия являются необходимыми.

Доказательство результатов основано на использовании методики, разработанной и развитой в работах Г. В. Демиденко (см., например, [1], [5]–[7]). Следует отметить, что этот метод исследований, в отличие от методов других авторов, позволяет находить условия разрешимости в явном виде для квазиэллиптических уравнений и систем. Идея метода заключается в построении последовательности приближенных решений исследуемой краевой задачи, получении L_p-оценок приближенных решений и в доказательстве сходимости. При построении приближенных решений применяется интегральное представление С. В. Успенского [8] суммируемых функций.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429) и Сибирского отделения Российской академии наук (Лаврентьевский грант для молодых ученых, междисциплинарный проект № 107).

Литература

[1] Demidenko G. V., *On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in* R^n_+, J. Anal. Appl. Vol. 4, № 1 (2006), 1–11.

[2] Бондарь Л. Н., *Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем,* Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. Т. 7, вып. 4 (2007), 9–26.

[3] Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В., *Краевые задачи для квазиэллиптических систем,* Сиб. мат. журн. Т. 49, № 2 (2008), 256–273.

[4] Волевич Л. Р., *Локальные свойства решений квазиэллиптических систем,* Мат. сб. Т. 59, № 3 (1962), 3–52.

[5] Демиденко Г. В., *Об условиях разрешимости смешанных задач для одного класса уравнений соболевского типа,* Краевые задачи для уравнений с частными производными: Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Ин-т математики СО АН СССР. № 1 (1984), 23–54.

[6] Демиденко Г. В., *Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II,* Сиб. мат. журн. Т. 35, № 1 (1994), 41–65.

[7] Демиденко Г. В., Успенский С. В., *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной,* Научная книга, Новосибирск, 1998.

[8] Успенский С. В., *О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов,* Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 117 (1972), 292–299.

Приближение q-полиномами Бернштейна и их модификациями

В. С. Виденский

Российский Государственный педагогический университет, Россия
ilya@viden.lek.ru

Около 15 лет тому назад Г. М. Филлипс ввел в рассмотрение q-полиномы, которые являются обобщением классических полиномов Бернштейна $B_n f$ и совпадают с ними при $q{=}1$. Новые полиномы являются линейными положительными операторами при $0{<}q{<}1$. Для возрастающей последовательности q_n, сходящейся к 1, они оказываются аппроксимирующими.

Аналогия с полиномами $B_n f$, а также простота и красота конструкции q-полиномов, привлекли к ним внимание многих исследователей, которые опубликовали ряд статей.

В докладе для приближения q-полиномами m раз дифференцируемых функций приводится обобщение теоремы Вороновской—Бернштейна, а также построенные автором модификации q-полиномов Бернштейна.

Оценка функционалов посредством степеней отклонений сумматорно-интегральных операторов

О. Л. Виноградов †, В. В. Жук ‡

†‡ *Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

†*olvin@math.spbu.ru* ‡*zhuk@math.spbu.ru*

Далее C — пространство непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой, $C_0 = \Big\{f \in C : \int_{-\pi}^{\pi} f = 0\Big\}$, P — полунорма, заданная на C_0, такая что $P(f(\cdot + h)) = P(f)$ для любых $f \in C_0$ и $h \in \mathbb{R}$, Φ — функционал, заданный на C_0, такой что $\Phi(f) \geqslant 0$, $\Phi(f+g) \leqslant \Phi(f) + \Phi(g)$ для любых $f, g \in C_0$; $C_0^{(r)}$ — множество r раз непрерывно дифференцируемых функций из C_0; символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0.

Для $t > 0$, $r \in \mathbb{N}$ определим операторы V_t и U_t на C_0 равенствами

$$V_t(f,x) = \sum_{j=l}^{m} A_j f(x+jt), \quad U_t(f,x) = \frac{1}{t^r} \sum_{j=l}^{m} A_j f^{(-r)}(x+jt),$$

где $f^{(-r)} \in C_0$ — r-я периодическая первообразная f, A_j — числа. При $r, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ полагаем

$$m_r(\Phi) = \sup_{f \in C_0^{(r)}} \frac{\Phi(f)}{P(f^{(r)})}, \qquad N_{t,k} = \sup_{f \in C_0^{(r)}} \frac{P(V_t^k(f))}{P(f^{(r)})};$$

C_r^k — биномиальные коэффициенты, I — тождественный оператор.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_0$, $t > 0$, $r, p+1 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)}{t^{rk}} N_{t,k} < +\infty.$$

Тогда

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)}{t^{rk}} N_{t,k}\right) P\big((I-U_t)^{p+1}(f)\big).$$

Рассматриваются приложения теоремы 1 к операторам

$$U_t = \frac{2}{C_{2m}^{m}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} C_{2m}^{m-k} S_{kt,r},$$

где $S_{h,r}(f)$ — функции Стеклова порядка r функции f. В частности, при $m=1$ получается неравенство

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)}{t^{rk}} 2^{rk}\right) P\big((I-S_{t,r})^{p+1}(f)\big).$$

В случае, когда $\Phi(f)$ есть наилучшее приближение f по полунорме P тригонометрическими многочленами порядка не выше n, из полученных оценок вытекают неравенства типа Джексона.

О константах в обобщенной теореме Джексона для линейных методов приближения

О. Л. Виноградов [†], В. В. Жук [‡]

[†‡] *Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

[†]*olvin@math.spbu.ru* [‡]*zhuk@math.spbu.ru*

Далее C — пространство непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой, H_n — множество тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$,

$$\delta_t^r(f,x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f\left(x - \frac{rt}{2} + kt\right)$$

— центральная разность, $\omega_r(f,h)=\sup\limits_{|t|\leqslant h}\|\delta_t^r(f)\|$ — модуль непрерывности порядка r, $E_n(f)=\inf\limits_{T\in H_n}\|f-T\|$ — наилучшее приближение функции f.

Обобщенной теоремой Джексона называют следующее утверждение: для любой $f\in C$

$$E_n(f)\leqslant C(r,\alpha)\,\omega_r\Big(f,\frac{\alpha\pi}{n}\Big).$$

Здесь $n,r\in\mathbb{N}$, $\alpha>0$, константа $C(r,\alpha)$ зависит только от написанных аргументов. В докладе изучается константа $C(r,\alpha)$. Не останавливаясь на истории вопроса, укажем лишь на работу [1], которая непосредственно предшествовала нашим исследованиям.

Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство C, P — полунорма на $\mathfrak{M}$. Если выполнены условия: 1) пространство $(\mathfrak{M},P)$ инвариантно относительно сдвига, то есть для любых $f\in\mathfrak{M}$, $h\in\mathbb{R}$ будет $f(\cdot+h)\in\mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot+h))=P(f)$; 2) существует такая постоянная B, что $P(f)\leqslant B\|f\|$ для всех $f\in\mathfrak{M}$, то будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M},P)$ принадлежит классу $\mathcal{A}$. Для $f\in\mathfrak{M}$ полагаем $\omega_r(f,h)_P=\sup\limits_{|t|\leqslant h}P\big(\delta_t^r(f)\big)$. Через Λ_n обозначим множество операторов свертки $Q\colon C\to C$ вида

$$Q(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)K(t)\,dt,\qquad K\in H_n;$$

$$W_{h,2r}(f)=\frac{(-1)^r}{C_{2r}^r h}\int_{-h}^{h}\delta_t^{2r}(f)\Big(1-\frac{|t|}{h}\Big)\,dt,$$

$$\mu_{2r}=\Bigg(\frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant r\\ j\ \text{нечетно}}}\frac{C_{2r}^{r+j}}{C_{2r}^r}\frac{1}{j^2}\Bigg)^{1/2}.$$

Теорема 1. *Пусть $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{A}$, $n,r\in\mathbb{N}$, $\alpha>\mu_{2r}$, $h=\frac{\alpha\pi}{n}$. Тогда существует такой оператор $Q_{h,2r}\in\Lambda_n$, что для любой $f\in\mathfrak{M}$*

$$P\big(f-Q_{h,2r}(f)\big)\leqslant\Big(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\Big)^{-1}P\big(W_{h,2r}(f)\big),\tag{1}$$

$$P\big(f - Q_{h,2r}(f)\big) \leqslant \Big(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\Big)^{-1}\frac{1}{C_{2r}^r}\,\omega_{2r}\big(f, \frac{\alpha\pi}{n}\big).$$

Для пространства $\mathfrak{M} = C$ с равномерной или интегральной нормой константы в неравенстве (1) при $\alpha = 1$ нельзя уменьшить, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение и ограничиться функциями, ортогональными H_n.

Операторы $Q_{h,2r}$ строятся явно. Устанавливаются аналоги приведенных выше утверждений для приближения функций, заданных на $\mathbb{R}$, целыми функциями конечной степени.

Литература

[1] Foucart S., Kryakin Y., Shadrin A., *On the exact constant in the Jackson–Stechkin inequality for the uniform metric,* Constructive Approximation, 29 (2009), 157–179.

Интерполяция сплайнами второй степени

Ю. С. Волков

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия
volkov@math.nsc.ru

При интерполяции сплайнами чётной степени узлы сплайна и точки интерполяции, как правило, не совпадают и лежат строго одни между другими. Наиболее распространены две конструкции: узлы сплайна выбираются посреди между заданными точками интерполяции, либо наоборот, точки интерполяции лежат между узлами сплайна. Первую конструкцию впервые изучал Ю. Н. Субботин [1], а вторую M. Marsden [2]. При внешней схожести подходов такие сплайны, по Субботину и по Марсдену, принципиально различаются на неравномерных сетках. Например, сплайны по Марсдену всегда сходятся к произвольной непрерывной функции на любой последовательности сгущающихся сеток. Для сплайнов же по Субботину есть примеры последовательностей сеток и непрерывных функций, к которым нет сходимости.

В докладе показано как связаны вопросы сходимости интерполяции для сплайнов по Субботину и по Марсдену. Условия на последовательность сеток, обеспечивающие сходимость процессов интерполяции сплайнами по Субботину для любой непрерывной функции, обеспечивают сходимость вторых производных сплайнов по Марсдену для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций. Верно и наоборот, если на какой-то последовательности сеток вторые производные сплайнов по Марсдену сходятся для любой интерполируемой функции из C^2, то на этой же последовательности сеток сами сплайны по Субботину сходятся для любой непрерывной функции [3].

Другой вопрос интерполяции сплайнами второй степени, который изучается в докладе, это формосохранение, т. е. наследование интерполянтом геометрических свойств приближаемой функции, таких как положительность, монотонность, выпуклость. Для обоих конструкций установлены простые достаточные условия на исходные данные, выполнение которых обеспечивает чтобы интерполяционный сплайн второй степени (по Субботину или по Марсдену) был положительным, монотонным и/или выпуклым. Проверка таких условий до построения сплайна позволяет понять будет ли интерполянт обладать необходимыми геометрическими свойствами.

Отметим, что некоторые из этих условий монотонности и выпуклости для сплайнов по Субботину ранее были установлены В. Л. Мирошниченко [4]. Основным инструментом здесь явился замечательный его результат о положительном решении трёхдиагональной системы уравнений с диагональным преобладании для положительной правой части. Нам удалось установить условия и в тех случаях, где системы определяющих уравнений не обладают диагональным преобладанием.

Литература

[1] Субботин Ю. Н., *О кусочно полиномиальной интерполяции,* Матем. заметки. 1, № 1 (1967), 63–70.

[2] Marsden M., *Quadratic spline interpolation,* Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 903–906.

[3] Волков Ю. С., *Две конструкции интерполяционных сплайнов чётной степени,* Новосибирск, 2006. (Препринт № 169 / ИМ СО РАН)

[4] Мирошниченко В. Л., *Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов,* Сплайны и их приложения, Вычисл. системы. 142 (1991), 3–14.

Весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье

С. С. Волосивец [†], Б. И. Голубов [‡]

[†] *Саратовский гоусдарственный университет, Россия*
[‡] *Московский физико-технический институт, Россия*

[†] *VolosivetsSS@mail.ru* [‡] *golubov@mail.mipt.ru*

Пусть дана последовательность $\mathbf{P} = \{p_j\}_{|j|\in\mathbb{N}}$, где $p_j \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant p_j \leqslant N$, $p_{-j} = p_j$, $j \in \mathbb{N}$, $m_j = p_1 \dots p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = 1/m_l$ при $l \in \mathbb{N}$. По последовательности $\mathbf{P}$ определим ядро $\chi(x, y)$, $\mathbf{P}$-преобразование Фурье $\hat{f}(x)$ и операцию $\mathbf{P}$-ичного сложения $\oplus$ на $\mathbb{R}_+$ (см. §1.5 в [1]). Пусть $C^*(\mathbb{R}_+)$ — пространство $\mathbf{P}$-непрерывных функций, для которых $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n(f) = 0$, где $\omega_n(f) = \sup\limits_{0<h<1/m_n} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x)|$. Пусть $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty \downarrow 0$. Будем писать $f \in H^\omega$, если $\omega_n(f) \leqslant C\omega_n$,

$n \in \mathbb{Z}_+$, а если $\omega_n(f) = o(\omega_n)$, то будем писать $f \in h^\omega$. Если $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k = O(\omega_n)$, то $\omega \in B$ (ω удовлетворяет условию Бари). Р. П. Боасом [2] доказана

Теорема A. *Пусть* $\varphi(x) \downarrow 0$ *при* $x \to +\infty$, $1 < p < \infty$, $x^{1/p}\varphi(x) \in L^p(0,1)$ *и* Φ_s *- синус-преобразование Фурье функции* φ *(понимаемое, как несобственный интеграл). Если* $-1/p < \gamma < 1/p$, *то из* $x^{\gamma+1-2/p}\Phi_s(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ *следует, что* $x^{-\gamma}\varphi(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

Р. П. Боас высказал гипотезу, что при условии $-1/p' < \gamma < 1/p$ аналогичный результат остается справедливым и без предположения $x^{1/p}\varphi(x) \in L^p(0,1)$, причем аналогичный результат справедлив и для косинус-преобразования Фурье. Эта гипотеза была доказана Й. Сагером [3]

Теорема 1. *Пусть* $f(x)$ *убывает на* $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ *и* $f \in L^1[0,1)$. *Тогда при* $1 < q \leqslant p < \infty$ *и* $\gamma < 1/p$ *из условия* $x^{1+\gamma-1/p-1/q}f(x) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ *следует, что* $x^{-\gamma}\hat{f}(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *убывает на* $(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ *и* $f \in L^r(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant r \leqslant 2$. *Если* $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma > -1/p'$ *и* $x^{-\gamma}\hat{f}(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$, *то* $x^{1+\gamma-1/p-1/q}f(x) \in L^q(\mathbb{R}_+)$.

Следствие 1. *Пусть* $f(x)$ *убывает на* $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ *и* $f \in L^r(\mathbb{R}_+)$ *для некоторого* $1 \leqslant r \leqslant 2$. *Если* $1 < p < \infty$ *и* $\gamma \in (-1/p', 1/p)$, *то условия* $x^{-\gamma}\hat{f}(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ *и* $x^{1+\gamma-2/p}f(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ *равносильны.*

Теоремы 1 и 2 аналогичны результатам работы [4], относящимся к синус- и косинус-преобразованиям Фурье. Следствие 1 означает справедливость гипотезы Р. Боаса для мультипликативного преобразования Фурье при дополнительном условии $f \in L^r(\mathbb{R}_+)$ для некоторого $r \in [1,2]$.

Теорема 3. *Пусть $f \in L^1 \cap C^*(\mathbb{R}_+)$ такова, что $\hat{f}(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. Если $\omega \in B$, то условия $f \in H^\omega$ (соответственно, $f \in h^\omega$) и $\int_{m_n}^\infty \hat{f}(t)\,dt = O(\omega_n)$ (соответственно, $\int_{m_n}^\infty \hat{f}(t)\,dt = o(\omega_n)$) равносильны.*

Для классов Липшица ($\omega_n = m_n^{-\alpha}$) теорема 3 является аналогом результата Ф. Морица [5] для классического преобразования Фурье.

Работа первого автора поддержана грантом Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1). Работа второго автора поддержана РФФИ, грант 08-01-00669 и АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/1662.

Литература

[1] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А., *Ряды и преобразования Уолша*, Наука, Москва, 1987.

[2] Boas R. P., *The integrability class of sine transform of a monotone function*, Studia Math. 44 (1972), 365–369.

[3] Sagher Y., *The integrability condition for the Fourier transform*, J. Math. Anal. Appl. 54 (1976), 151–156.

[4] Liflyand E., Tikhonov S., *Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.1, 346 (2008), 1137–1142.

[5] Moricz F., *Absolutely convergent Fourier integrals and classical function spaces*, Arch. Math. (Basel) 91 (2008), 49–62.

Интегральные неравенства для полиномов

П. Ю. Глазырина

Уральский государственный университет им. А. М. Горького, Россия

polina.glazyrina@usu.ru

Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов степени не выше n над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $\mathcal{P}_n^{0,\infty}$ — подмножество многочленов из $\mathcal{P}_n$ все нули которых лежат в области $|z| \geqslant 1$, либо все n нулей лежат в круге $|z| \leqslant 1$. Для многочленов $\Lambda_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_k z^k \in \mathcal{P}_n$ и $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k z^k \in \mathcal{P}_n$ определим многочлен $(\Lambda_n P)(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_k c_k z^k$, называемый композицией Сеге многочленов Λ_n и P.

Пусть Φ^+ — класс функций φ вида $\varphi(u) = \psi(\ln u)$, $u \in (0,\infty)$, где ψ неубывает и выпукла на $\mathbb{R}$. Классу Φ^+ принадлежат, например, функции $\ln u$, $\ln^+ u = \max\{0, \ln u\}$, $\ln(1+u^p)$, u^p при $p > 0$. В 1979 г. В. В. Арестов [1] получил следующую фундаментальную теорему.

Теорема 1. *Для любых $\varphi \in \Phi^+$, $\Lambda_n \in \mathcal{P}_n^{0,\infty}$ на множестве $\mathcal{P}_n$ справедливо точное неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi\big(|\Lambda_n P(e^{it})|\big)\, dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\big(N(\Lambda_n)|P(e^{it})|\big)\, dt, \qquad N(\Lambda_n) = \max\big\{|\lambda_0|, |\lambda_n|\big\}. \tag{1}$$

Равенство достигается на многочленах $P(z) = az^n$, $P(z) \equiv a$, $P(z) = az^n + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$ соответственно при $|\lambda_0| < |\lambda_n|$, $|\lambda_0| > |\lambda_n|$, $|\lambda_0| = |\lambda_n|$.

Частным случаем теоремы В. В. Арестова является точное неравенство Бернштейна $\|T'\|_p \leqslant n\|T\|_p$ для тригонометрических полиномов степени не выше n в пространствах L_p, $p \geqslant 0$, на периоде [1] .

В. В. Арестов поставил автору задачу выяснить, можно ли расширить класс Φ^+ в неравенстве (1). Приведенная ниже теорема 2 говорит о том, что сделать это, вообще говоря, нельзя.

Пусть Φ — класс непрерывных и неубывающих на $(0,\infty)$ функций φ со свойством $\int_0^{2\pi}\varphi\big(|P(e^{it})|\big)\,dt < \infty$ для любого многочлена $P \in \mathcal{P}_n$. А Φ^- — класс функций $\varphi \in \Phi$ вида $\varphi(u) = \psi(\ln u)$, где функция ψ определена на $\mathbb{R}$ и для нее найдутся точки $v_1 < v_* < v_2$ и вещественное число k такие, что разность $\psi(v) - k\cdot v$ не убывает на $[v_1, v_*]$, не возрастает на $[v_*, v_2]$, и не является постоянной в любой окрестности v_*; таким свойством обладают, к примеру, функции ψ строго выпуклые вниз на некотором интервале из полуоси $(0,\infty)$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \Phi^-$, $\Lambda_n \in \mathcal{P}_n^{0,\infty}$ и $\Lambda_n(z) \neq c(1+e^{i\theta}z)^n$, $c \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда найдется многочлен $P \in \mathcal{P}_n$, для которого неравенство* (1) *с константой $N(\Lambda_n)$ не верно.*

Для гладких функций $\varphi \in \Phi$ теоремы 1 и 2 позволяют сформулировать необходимое и достаточное условие на φ, при котором выполняется (1).

Следствие 1. *Пусть $\Lambda_n \in \mathcal{P}_n^{0,\infty}$ и $\Lambda_n(z) \neq c(1+e^{i\theta}z)^n$, $c \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Если функция $\varphi \in \Phi$ дифференцируема и ее производная φ' локально абсолютна непрерывна, то неравенство* (1) *с константой $N(\Lambda_n)$ верно тогда и только тогда, когда $\varphi \in \Phi^+$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00213) и программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3208.2010.1).

Литература

[1] Арестов В. В., *Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных,* Изв. АН СССР. Сер. матем., 45:1 (1981), 3–22.

[2] Glazyrina P. Yu., *Necessary conditions for φ-metrics in integral Bernstein-type inequalities,* J. Approx. Theory. doi:10.1016/j.jat.2009.12.009

Свёртки с конечным носителем: экстремальные задачи

И. К. Даугавет

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
ikdaug@yandex.ru

Рассматриваемая задача связана с инженерными задачами передачи сигналов и состоит в следующем. Пусть D — множество решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}(u) = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_n u = 0.$$

Дана функция $g \in D$. Требуется найти функцию u с носителем $[0, \Delta]$, свёртка которой с g

$$(u * g)(t) = \int_0^t u(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$$

обращается в 0 при $t > \Delta$ и имеет в некотором банаховом пространстве U заданных на $[0, \Delta]$ функций максимальную норму при заданной $\|u\|_U = 1$. Задача сводится к нахождению нормы оператора свёртки на подпространстве функций, ортогональных на $[0, \Delta]$ всем функциям из $D^* = \{\, v(t) = u(-t) \,|\, u \in D \,\}$, и функции, на которой «реализуется» эта норма. Практический интерес представляют пространства $U = L_2$ и $U = C$.

В случае $U = L_2$ решение есть собственная функция легко выписываемого интегрального оператора с симметричным ядром, соответствующая максимальному по модулю собственному числу.

В случае $U = C$ норма упомянутого сужения оператора свёртки есть

$$\max_x E_D^L(g_x) = E_D^L(g_{x_0}), \quad \text{где } E_D^L(g_x) = \min_{v \in D} \|g_x - v\|_{L(0,\Delta)}.$$

Здесь
$$g_x(t) = \begin{cases} g(t) & \text{при } t < x, \\ 0 & \text{при } t > x. \end{cases}$$
Если найден «полином» наилучшего приближения функции g_{x_0} в пространстве $L(0,\Delta)$, то по нему нетрудно построить и функцию (из $L_\infty(0,\Delta)$), решающую исходную задачу.

В вопросах наилучших приближений в пространстве L существенную роль играют точки, которые будем называть марковскими. Пусть $L_n \subset L(a,b)$ — n-мерное подпространство. Точки $a \leqslant t_1^{(m)} < t_2^{(m)} < \cdots < t_m^{(m)} \leqslant b$ называются *марковскими точками* подпространства L_n, если функция $\operatorname{sign} \prod(t - t_k^{(m)})$ ортогональна всем функциям из L_n. Если L_n чебышевское, то существует и притом единственная система $\{\, t_k^{(n)} \,\}$ n марковских точек. В этих условиях верна

Теорема 1. *Пусть точка $t' \in (a,b)$ отлична от всех $t_k^{(n)}$. Тогда существует единственная система марковских точек $\{\, t_k^{(n+1)} \,\}$, одна из которых совпадает с t'. При этом точки $\{\, t_k^{(n+1)} \,\}$ и $\{\, t_k^{(n)} \,\}$ перемежаются.*

При малых Δ подпространство $D \subset L(0,\Delta)$ чебышевское, и представляет интерес асимптотика его марковских точек.

Теорема 2. *Для n марковских точек $t_k^{(n)}$ подпространства $D \subset L(0,\Delta)$ при $\Delta \to 0$ выполняется асимптотика*
$$t_k^{(n)} = t_k^* \Delta + O(\Delta^2), \quad t_k^* = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}\right).$$

Литература

[1] Герет, Даймонд, *Устранение интерференции между передаваемыми знаками с помощью формирования входных сигналов,* ТИИЭР № 7 (1961), 28–36.

Несколько экстремальных задач для алгебраических многочленов на сфере

М. В. Дейкалова

Уральский государственный университет им. А. М. Горького, Россия
Marina.Deikalova@usu.ru

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, есть m-мерное вещественное евклидово пространство; $\mathbb{S}^{m-1}$ — его единичная сфера; $\mathcal{P}_{n,m}$ — множество алгебраических многочленов

$$P_n(x) = \sum_{\substack{|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \leqslant n, \\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m}} c_\alpha x^\alpha, \qquad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

степени не выше n от m вещественных переменных с вещественными коэффициентами c_α.

С помощью числа h, $-1 < h < 1$, определим сферическую шапочку

$$\mathbb{C}(h) = \mathbb{C}(h, e_m) = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} : \ x_m \geqslant h\}.$$

с центром в «северном полюсе» $e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ сферы. Нас интересует наилучшее приближение в пространстве $L(\mathbb{S}^{m-1})$ характеристической функции

$$\chi_h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{C}(h), \\ 0, & x \notin \mathbb{C}(h), \end{cases}$$

сферической шапочки $\mathbb{C}(h)$ пространством многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$, а именно, величина

$$e_{n,m}(\chi_h) = \inf\{\|\chi_h - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} : \ P_n \in \mathcal{P}_{n,m}\}.$$

А. Г. Бабенко и Ю. В. Крякин [1, 2] исследовали величину наилучшего интегрального приближения на периоде $[-\pi, \pi)$

характеристической функции интервала $(-h, h)$ тригонометрическими полиномами. Используя идеи работы [1], автор вычислил [3] величину $e_{n,m}(\chi_h)$ для любых $m \geqslant 3$ для значений параметра h, совпадающих с нулями многочлена одного переменного порядка $n+1$, наименее уклоняющегося от нуля в пространстве L_1^{ϕ} на интервале $(-1, 1)$ с ультрасферическим весом $\phi(t) = (1-t^2)^{\alpha},\ \alpha = (m-3)/2$.

В докладе будет приведено значение величины $e_{n,m}(\chi_h)$ при $m = 3$ для любых значений $h \in (-1, 1)$. Результат получен с применением подхода А. Г. Бабенко и Ю. В. Крякина [2].

Задача вычисления величины $e_{n,m}(\chi_h)$ связана с другими экстремальными задачами на сфере; в частности, с неравенством Джексона—Никольского между равномерной и интегральной нормами алгебраического многочлена на сфере.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 08-01-00213.

Литература

[1] Бабенко А. Г., Крякин Ю. В., *О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике*, Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Информ. 12 (1) (2006), 27–56.

[2] Бабенко А. Г., Крякин Ю. В., *Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами*, Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН 14 (3) (2008), 19–37.

[3] Дейкалова М. В., *Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере,* Матем. заметки 84 (4) (2008), 532–551.

Структура сплайн-вэйвлетной аппроксимации

Ю. К. Демьянович

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
Yuri.Demjanovich@JD16531.spb.edu

В данной работе продолжаются исследования вэйвлетных (всплесковых) разложений пространств сплайнов (см.[1]).

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ из пространства $C^2(\alpha,\beta)$ с равномерно отделенным от нуля вронскианом: $|\det(\varphi,\varphi',\varphi'')| \geqslant c > 0$. Для локально квазиравномерной сетки $X = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\alpha = \lim_{j\to-\infty} x_j$, $\beta = \lim_{j\to+\infty} x_j$, построим линейную оболочку $\mathbb{S}_{(\alpha,\beta)}(X,\varphi) = \{u \mid u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\omega_j \ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}$ сплайнов ω_j, определяемых соотношениями

$$\mathbf{a}_{j-2}\omega_{j-2}(t) + \mathbf{a}_{j-1}\omega_{j-1}(t) + \mathbf{a}_j\omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in (x_j, x_{j+1}) \qquad (1)$$

при условиях $\operatorname{supp}\omega_j \subset [x_j, x_{j+3}]$ $\forall j \in \mathbb{Z}$; здесь $\mathbf{a}_j = \varphi_{j+1}\times \times \det(\varphi_{j+2},\varphi'_{j+2},\varphi'_{j+1}) - \varphi'_{j+1}\det(\varphi_{j+2},\varphi'_{j+2},\varphi_{j+1})$, $\varphi_k = \varphi(x_k)$, $\varphi'_k = \varphi'(x_k)$. При достаточно мелкой сетке X система (1) однозначно разрешима относительно $\omega_j(t)$; при этом $\omega_j \in C^1(\alpha,\beta)$. Для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ положим $\widetilde{x}_j = x_j$ при $j \leqslant k$, $\widetilde{x}_j = x_{j+1}$ при $j \geqslant k+1$, и рассмотрим новую сетку $\widetilde{X}_k = \{\widetilde{x}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Аналогично предыдущему определим функции $\widetilde{\omega}_j$ для сетки $\widetilde{X}_k$. Зависимость рассматриваемых объектов от k отмечаем не всегда.

Теорема 1. *При $t \in (\alpha,\beta)$ справедливы следующие тождества: $\widetilde{\omega}_{k-2}(t) = \omega_{k-2}(t) + a_k\omega_{k-1}(t)$, $\widetilde{\omega}_{k-1}(t) = b_k\omega_{k-1}(t) + c_k\omega_k(t)$, $\widetilde{\omega}_{k-1}(t) = d_k\omega_{k-1}(t) + \omega_k(t)$, $\widetilde{\omega}_j(t) = \omega_j(t)$ при $j < k-2$, $\widetilde{\omega}_j(t) = \omega_{j+1}(t)$ при $j > k$; здесь числа a_k, b_k, c_k и d_k определяются с помощью вектор-функции φ.*

Итак, $\mathbb{S}_{(\alpha,\beta)}(\widetilde{X},\varphi) \subset \mathbb{S}_{(\alpha,\beta)}(X,\varphi) \subset C^1(\alpha,\beta)$, и для векторов $\omega(t) = (\omega_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$, $\widetilde{\omega}(t) = (\widetilde{\omega}_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$ существует числовая матрица $\mathfrak{P} = (\mathfrak{p}_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ (называемая *матрицей вложенности*), с которой

$\widetilde{\omega}(t) = \mathfrak{P}\omega(t)$. Далее строятся функционалы $\widetilde{g}_i \in (C^1(\alpha,\beta))^*$ со свойством $\langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j(t)\rangle = \delta_{ij}$, и вводится *матрица продолжения* $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}_{ij})$, $\mathfrak{q}_{ij} = \langle \widetilde{g}_i, \omega_j\rangle$; матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I$, I — единичная матрица.

Введем линейные пространства исходных потоков (векторов) $\mathcal{C} = \{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} = (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}$, основных потоков $\mathcal{A} = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T \quad \forall a_j \in \mathbb{R}^1\}$ и вэйвлетных потоков $\mathcal{B} = \ker \mathfrak{Q}$; пусть $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Разложение исходного потока (вектора) $\mathbf{c}$ на основной поток $\mathbf{a}$ и вэйвлетный поток $\mathbf{b}$ может быть представлено *оператором декомпозиции* $\mathfrak{D} : \mathcal{C} \to \mathcal{F}$ в виде $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^T = (\mathfrak{Q}, I - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q})^T\mathbf{c} \iff \mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \quad \mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q})\mathbf{c}$; *оператор реконструкции* $\mathfrak{R} : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ может быть представлен в виде $\mathbf{c} = \mathfrak{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})^T \iff \mathbf{c} = \mathfrak{P}^T\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Теорема 2. *Операторы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$ взаимно обратны.*

Теорема 3. *Существует конструктивно реализуемая пермутация пространства $\mathcal{F}$ (т.е. линейный изоморфизм, сводящийся к перестановке координатных направлений), после проведения которой операторы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$ представляются нижнетреугольными матрицами $\mathcal{D}$ и $\mathcal{R}$.*

Рассмотрим сетку $X_{(N)} = \{x_j\}_{j=-1,\ldots,N+1}$, положим $a = x_0$, $b = x_N$ и сузим все рассматриваемые функции на отрезок $[a, b]$. Повторение предыдущих построений приведет в этом случае к прямоугольным матрицам $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ размеров $N+1 \times N+2$, а также к нижнетреугольным неособенным квадратным матрицам $\mathcal{D}$ и $\mathcal{R}$ размера $N + 2$. Все предыдущие утверждения сохраняются и в этом конечномерном случае; например, $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I$, где I — квадратная единичная матрица размера $N + 1$.

Литература

[1] Демьянович Ю. К., *Всплесковые (вэйвлетные) разложения на неравномерной сетке*, Труды СПбМО, Т.13 (2007), 27–51.

Приближение функций сингулярными интегралами с положительными ядрами в пространствах $L_p\left(\mathbb{R}^2\right)$ и $L_p\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ по направлениям

Н. Ю. Додонов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

dodonov@math.spbu.ru

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Полагаем

$$\triangle^r_{t,\alpha}(f,x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C^k_r f(x_1 + kt\cos\alpha, x_2 + kt\sin\alpha),$$

$$\omega_{r,\alpha}(f,h)_{p,G} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \|\triangle^r_{t,\alpha}(f)\|_{p,G},$$

где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $G \in \left\{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2_+\right\}$, $\|\cdot\|_{p,G}$ — норма в пространстве $L_p(G)$. Полагаем $L_\infty(G) = C(G)$. Величина $\omega_{r,\alpha}(f,h)_{p,G}$ называется модулем непрерывности порядка r с шагом h по направлению $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ функции f в пространстве $L_p(G)$.

Устанавливаются результаты следующего типа.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $G \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2_+\}$; E и A — промежутки в $\mathbb{R}_+$, $A \subset E$, $\psi_n\colon E \to \mathbb{R}_+$, $\psi_n \in L_1(E)$, $x \in G$, $f \in L_p(G)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, когда $G = \mathbb{R}^2$ и $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, когда $G = \mathbb{R}^2_+$. Положим*

$$U_{n,\alpha}(f,x) = \int\limits_E \triangle^r_{t,\alpha}(f,x)\psi_n(t)dt, \quad \triangle_{n,k} = \int\limits_A t^k \psi_n(t)dt.$$

Тогда если при некотором $r \in \mathbb{N}$ и всех $m \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения $\triangle_{m,r} > 0$, $\triangle_{m,r+1} < \infty$ и выполнены равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\triangle_{n,r+1}}{\triangle_{n,r}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \triangle^{-1}_{n,r} \int\limits_{E\setminus A} \psi_n = 0,$$

то соотношения

$$\varliminf_{n\to\infty} \triangle_{n,r}^{-1} \|U_{n,\alpha}(f)\|_{p,G} \leqslant K, \tag{1}$$

$$\sup_{t\in(0,\infty)} t^{-r}\omega_{r,\alpha}(f,t)_{p,G} \leqslant K \tag{2}$$

эквивалентны, то есть выполнение одного из соотношений (1) *и* (2) *влечёт за собой выполнение другого.*

Результаты такого типа для 2π-периодических функций ранее были получены в работе [1].

Приведём примеры приложений теоремы 1. Положим

$$\Phi_{n,1}(t) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^2, \quad \Phi_{n,2}(t) = \frac{12}{\pi n^3}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^4.$$

Функции $\Phi_{n,1}$ и $\Phi_{n,2}$ являются классическими ядрами Фейера—Валле Пуссена и Джексона—Валле Пуссена соответственно (см., например [3, с.150]).

Пример 1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $G \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2_+\}$, $x \in G$; $\alpha \in [0, 2\pi]$, когда $G = \mathbb{R}^2$ и $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, когда $G = \mathbb{R}^2_+$; $f \in L_p(G)$,

$$\sigma_{n,\alpha}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \triangle_{t,\alpha}^1(f,x)\Phi_{n,1}(t)dt.$$

Тогда соотношения

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\pi n}{\ln n} \|\sigma_{n,\alpha}(f)\|_{p,G} \leqslant K,$$

$$\sup_{t\in(0,\infty)} t^{-1}\omega_{1,\alpha}(f,t)_{p,G} \leqslant K$$

эквивалентны.

Пример 2. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $G \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2_+\}$, $x \in G$; $\alpha \in [0, 2\pi]$, когда $G = \mathbb{R}^2$ и $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, когда $G = \mathbb{R}^2_+$; $f \in L_p(G)$,

$$I_{n,\alpha}(f, x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \triangle^2_{t,\alpha}(f, x)\Phi_{n,2}(t)dt.$$

Тогда соотношения

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{2}{3} n^2 \|I_{n,\alpha}(f)\|_{p,G} \leqslant K,$$

$$\sup_{t\in(0,\infty)} t^{-2}\omega_{2,\alpha}(f, t)_{p,G} \leqslant K$$

эквивалентны.

Литература

[1] Жук А. С., Жук В. В., *О приближении периодических функций линейными методами аппроксимации*, Зап. науч. семинаров ПОМИ. Т.337 (2006), 134–164.

[2] Додонов Н. Ю., Жук В. В., *Приближение функций двух переменных в пространствах $L_p(\mathbb{R}^2)$ и $L_p(\mathbb{R}^2_+)$ по направлениям,* Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, Вып. 2 (2008), 23–32.

[3] Ахиезер Н. И., *Лекции по теории аппроксимации,* Наука. Физматлит, М., 1965.

Точные оценки погрешности интерполяционных сплайнов произвольного порядка на множествах суперсходимости

В. Л. Дольников †, Н. А. Стрелков‡

†‡*Ярославский государственный университет, Россия*

‡*strelkov@uniyar.ac.ru*

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $S_n(x) = S_n(x, f, \mathbb{R}_h)$ — интерполяционный сплайн порядка n класса $C^{n-1}(\mathbb{R})$, совпадающий с $f \in L_p^{n+2}(\mathbb{R})$ в узлах равномерной сетки $\mathbb{R}_h = \{kh : k \in \mathbb{Z}\}$, причем областями полиномиальности сплайна S_n являются интервалы $(kh + (n-1)h/2, kh + (n+1)h/2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рассматриваются две задачи: 1) полное описание множеств суперсходимости, на которых m–я производная погрешности имеет правильный порядок $O(h^{n+2-m-1/p})$; 2) нахождение точных констант в равномерных (по множествам суперсходимости) оценках этих производных погрешности.

Пусть

$$Q_N(x, z) = \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^{N} z^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{N+1}{j} (x + k - j)^N, \; N \leqslant n+1,$$

$$R_n(z) = zQ_n(1 - d_n, z),$$

где $d_n = (n+1)/2 - [(n+1)/2]$. Степень полинома R_n равна $2[n/2]+1$, а его нули z_r $(r = -[n/2], \dots, [n/2])$ таковы, что $z_0 = 0$, $z_{-r} = 1/z_r$ для всех $r = 1, \dots, [n/2]$, где $z_1, \dots, z_{[n/2]}$ — различные точки интервала $(-1, 0)$.

Наконец, пусть определенная в полосе $[-d_n, 1-d_n] \times \mathbb{R}$ функция $G_n(\cdot, \cdot)$ имеет следующий вид:
если $k \in \mathbb{Z}, x \in [-d_n, 1 - d_n], t \in (0, 1)$, то

$$G_n(x, k+t) = -\sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{-k} Q_{n+1}(t, z_r) Q_n(1 - d_n - x, z_r)}{(1 - z_r)^{n+2} R_n'(z_r)},$$

если $t+k<x$;

$$G_n(x,k+t) = (-1)^{n+1}\sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{k+2d_n}Q_{n+1}(1-t,z_r)Q_n(d_n+x,z_r)}{(1-z_r)^{n+2}R_n'(z_r)},$$

если $t+k>x$.

Теорема 1. *Пусть $p\in[1,\infty]$, $\|f^{(n+2)}\|_p<\infty$, а n, m и α удовлетворяют одному из следующих условий:*

1) $n=2r, r\geqslant 1, m=0, \alpha=1/2$;

2) $n\geqslant 1, m=n, \alpha=n/2-[n/2]$;

3) $n\geqslant 3, m=n-2k, 1\leqslant k\leqslant[(n-1)/2]$, $\alpha=0$ *или* $\alpha=1/2$;

4) $n\geqslant 2, m=n-2k+1, 1\leqslant k\leqslant[n/2]$, $\alpha=n/2-[n/2]\pm\mu_k$, *где* $\mu_k\in(0,1/2)$ *таковы, что* $1/2\pm\mu_k$ *— корни многочлена Бернулли* B_{2k}.

Тогда

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}}|(S_n-f)^{(m)}((\alpha+i)h)|\leqslant D_{m,\alpha,p,n}h^{n+2-m-1/p}\|f^{(n+2)}\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

где

$$D_{m,\alpha,p,n}=\|D_1^mG_n(\alpha,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})},\ q=\frac{p}{p-1}.$$

Константы $D_{m,\alpha,p,n}$ *уменьшить нельзя.*

Производные $D_1^mG_n$, от которых зависят константы $D_{m,\alpha,p,n}$, допускают следующие представления:
если $k\in\mathbb{Z}$, $x\in[-d_n,1-d_n]$, $t\in(0,1)$, $m=0,\dots,n$, то

$$|D_1^mG_n(x,k+t)| = \left|\sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{-k}Q_{n+1}(t,z_r)Q_{n-m}(1-d_n-x,z_r)}{(1-z_r)^{n+2-m}R_n'(z_r)}\right|,$$

если $t+k<x$;

$$|D_1^m G_n(x,k+t)| = \left| \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{k+2d_n} Q_{n+1}(1-t,z_r) Q_{n-m}(d_n+x,z_r)}{(1-z_r)^{n+2-m} R_n'(z_r)} \right|,$$

если $t+k>x$.

Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах $W_\beta^r H_\omega$

К. Н. Жигалло[†], С. Б. Гембарская[‡]

[†‡]*Волынский национальный университет, Украина*

[†]*mathematical@univer.lutsk.ua* [‡]*gembar@mail.lutsk.ua*

Пусть $f(x)$ — суммируемая 2π-периодическая функция. Через $P(\rho,f,x)$ обозначим решение уравнения Лапласа $\triangle u=0$, которое удовлетворяет краевым условиям

$$u(\rho,x)\big|_{\rho=1}=f(x),\ \ \frac{\partial u(\rho,x)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1}=0,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Решение такой краевой задачи есть интеграл Пуассона функции f, который можно представить так:

$$P(\rho,f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Big\{\frac12+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt\Big\}dt,\quad 0\leqslant\rho<1,$$

или, полагая $\rho=e^{-\frac{1}{\delta}}$,

$$P_\delta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Big\{\frac12+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\Big\}dt,\quad \delta>0. \qquad (1)$$

Пусть $r>0$ и β — фиксированное действительное число. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^r\big(a_k\cos\big(kx+\frac{\pi\beta}{2}\big)+b_k\sin\big(kx+\frac{\pi\beta}{2}\big)\big)$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, то эту функцию называют (r,β)-производной функции f в смысле Вейля—Надя и обозначают через $f^r_\beta(\cdot)$. Множество всех функций f, у которых существуют (r,β)-производные, обозначают через W^r_β (см., например, [1]). Через $W^r_\beta H_\omega$ обозначим класс функций $f \in W^r_\beta$, (r,β)-е производные которых удовлетворяют условию

$$\left|f^r_\beta(t_1) - f^r_\beta(t_2)\right| \leqslant \omega\left(|t_1 - t_2|\right) \ \forall t_1, t_2,$$

$\omega = \omega(t)$ — некоторый фиксированный модуль непрерывности.

Основной целью работы является отыскание асимптотических равенств при $\delta \to \infty$ для величин

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta H_\omega; P_\delta\right)_C = \sup_{f \in W^r_\beta H_\omega} \|f(\cdot) - P_\delta(f;\cdot)\|_C, \tag{2}$$

где $P = P_\delta(f;x)$ — интеграл Пуассона (1), $\|f(\cdot)\|_C = \max\limits_t |f(t)|$. Отметим, что задача нахождения асимптотических равенств для величин типа (2) (задача Колмогорова—Никольского) была решена Л. И. Баусовым [2] для случая $\omega(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$.

Для функции $\tau(u)$, которая задает метод суммирования интеграла Пуассона $\tau(u) = \begin{cases} \left(1 - e^{-u}\right)\delta^r, & 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{\delta}, \\ \left(1 - e^{-u}\right)u^{-r}, & u \geqslant \frac{1}{\delta}, \end{cases}$ через $A(\omega,\tau)$ обозначим величину

$$A(\omega,\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega\Big(\frac{1}{\tau}\Big)\left|\int\limits_0^{\infty} \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| dt. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть для выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ выполняются условия*

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt = O\left(\omega(x)\right),\ x\int\limits_x^1 \frac{\omega(t)}{t}dt = O\left(x\omega(x)\right),$$

$$\lim_{u\to\infty} u^{1-r}\omega(u) > C = const,\ 0 < r < 1,$$

тогда при $\delta \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta H_\omega; P_\delta\right)_C = \frac{1}{\delta^r}A(\omega,\tau) + O\Big(\frac{1}{\delta}\Big),$$

где величина $A(\omega,\tau)$ определена соотношением (3) и для нее справедлива оценка $A(\omega,\tau) = O\big(\omega\big(\frac{1}{\delta}\big)\big)$.

Литература

[1] Степанец А. И., *Методы теории приближения,* Ин-т математики НАН Украины, Киев, 2002, Ч.I.

[2] Баусов Л. И., *Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами,* Изв. вузов. Математика, Изд. гос. ун-та, Казань, 1966.

Приближение функций из классов H^α их бигармоническими интегралами Пуассона в равномерной метрике

Ю. Зайонц †, Т. Степанюк ‡

† *Высшее государственное профессиональное учреждение в городе Хелме, Польша*

‡ *Волынский национальный университет имени Леси Украинки, Украина*

† *jzajac@kul.lublin.pl* ‡ *tanjuwka_cherry@mail.ru*

Пусть C — пространство 2π-периодических функций, в котором норма определена равенством

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Множество функций $f \in C$, которые удовлетворяют неравенству:

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant |h|^\alpha, \quad h \in R, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

будем обозначать, как принято, через H^α (см., например, [1]) и называть классом Гельдера порядка α.

Величину

$$B_\delta(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k) \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad \delta > 0,$$

где

$$\lambda_\delta(k) = \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}},$$

называют бигармоническим интегралом Пуассона функции f.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha; B_\delta\right)_C = \sup_{f \in H^\alpha} \left\| f\left(x\right) - B_\delta\left(f; x\right)\right\|_C,$$

где $B_\delta(f; x)$ — бигармонический интеграл Пуассона, будем называть, следуя А. И. Степанцу [1], задачей Колмогорова—Никольского.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\delta) = \varphi(B_\delta; \delta)$, такая, что при $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова—Никольского для бигармонического интеграла Пуассона $B_\delta(f, x)$ на классе H^α в метрике пространства C.

Основная цель данной работы есть изучение асимптотического поведения величин

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \sup_{f \in H^\alpha} \|f(x) - B_\delta(f, x)\|_C, \quad \delta \to \infty.$$

Теорема 1. *При $\delta \to \infty$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}\left(H^\alpha; B_\delta\right)_C = \frac{3(1-\alpha)}{2}\gamma(\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^\alpha} - \\ - \frac{1-3\alpha}{2}\gamma(\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \quad (1)$$

$$2^{\alpha-1} \leqslant \gamma(\alpha) \leqslant 1.$$

Асимптотическое равенство (1) позволяет выписать первую и вторую константы Колмогорова—Никольского.

Литература

[1] Степанец А. И., *Классификация и приближение периодических функций.*, К.: Наук. Думка, 1987.

[2] Баусов Л. И., *Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II*, Изв. вузов. 46, № 3 (1996), 15–31.

Приближение классов сверток линейными операторами специального вида

В. П. Заставный †, В. В. Савчук ‡

†*Донецкий Национальный Университет, Украина*
‡*Институт Математики НАН Украины, Украина*

†*zastavn@rambler.ru* ‡*savchuk@imath.kiev.ua*

Пусть $L_p = L_p(-\pi,\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, классы 2π-периодических вещественнозначных измеримых функций с конечной L_p-нормой. Пусть $H_p^m = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \leqslant 1\,,\, \widehat{\varphi}(k) = 0\,,\, |k| \leqslant m-1\}$, $m \in \mathbb{N}$. Здесь $\widehat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-ikt}\,dt$, $k \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L_1$.

По функции $K \in L_1$ определим класс функций $\mathbf{W}_{p,m}(K)$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{W}_{p,m}(K) := \left\{ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)K(t)\,dt \ : \ \varphi \in H_p^m \right\}.$$

Если $\{G_\rho\}_{0<\rho<1}$ — семейство линейных операторов, действующих из $\mathbf{W}_{p,m}(K)$ в L_p, то величина приближения класса $\mathbf{W}_{p,m}(K)$ операторами G_ρ определяется по формуле

$$E(\mathbf{W}_{p,m}(K); G_\rho)_p := \sup_{f\in\mathbf{W}_{p,m}(K)} \|f - G_\rho(f)\|_p\,. \tag{1}$$

Мы рассматриваем случай, когда

$$K(x) = \Psi_\beta(x) \sim \sum_{k\neq 0} \psi_{|k|} e^{-i\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sign} k}\, e^{ikx}\,,\ \beta \in \mathbb{R}\,,$$

$$G_\rho(f)(x) \sim \widehat{f}(0) + \sum_{k\neq 0} \widehat{f}(k)\frac{\gamma_{|k|}(\rho)}{\psi_{|k|}} e^{ikx}\ ,\ f \in \mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta),\ \text{где} \quad (2)$$

$$\psi_k = \int_0^1 t^{k-1}\, d\mu(t)\,;\ \gamma_k(\rho) = \int_{[0,\rho)} t^{k-1}\, d\mu(t)\,,\ k \in \mathbb{N}\,,\ 0 < \rho < 1\,.$$

Теорема 1. *Пусть μ — неотрицательная конечная борелевская мера на отрезке $[0,1]$, для которой выполнены два условия: $\mu(\{1\}) = 0$ и $\mu((0,1)) > 0$. Пусть $p = \infty$ или $p = 1$. Тогда:*

1. *Если $\beta \in 2\mathbb{Z}$, то при любых $\rho \in (0,1)$ и $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$E(\mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta); G_\rho)_p = \frac{4}{\pi}\int_\rho^1 \frac{1}{t}\operatorname{arctg} t^m\, d\mu(t)\,. \qquad (3)$$

2. *Если $\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$ и $\int_0^1 |\ln(1-t)|\, d\mu(t) < +\infty$, то при любых $\rho \in (0,1)$ и $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$E(\mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta); G_\rho)_p = \frac{2}{\pi}\int_\rho^1 \frac{1}{t}\ln\frac{1+t^m}{1-t^m}\, d\mu(t)\,. \qquad (4)$$

Если взять $\psi_k = k^{-r} = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^1 t^{k-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{r-1} dt$, $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$, то получаются известные классы $\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,m} := \mathbf{W}_{p,m}(\Psi_{r,\beta})$, где

$$\Psi_{r,\beta}(x) = \sum_{k\neq 0} \frac{e^{-i\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sign} k}}{|k|^r}\, e^{ikx} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r},\ r > 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Соответствующее семейство операторов (2) обозначим $G_{\rho,r}$. Отметим, что в случае $r \in \mathbb{N}$, операторы $G_{\rho,r}$ совпадают с операторами $U_\alpha(p,r)$, изученными Жуком (см. формулу (407) из [1] при $\alpha = -\ln\rho$, $p = 1$).

Следствие 1. *Пусть $p = \infty$ или $p = 1$. Тогда при любых $m \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho \in (0,1)$ справедливы равенства*

$$E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,m}; G_{\rho,r})_p = \frac{4}{\pi\Gamma(r)} \int_\rho^1 \frac{1}{t} \operatorname{arctg} t^m \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{r-1} dt \ , \ \beta \in 2\mathbb{Z} \ ,$$

$$E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,m}; G_{\rho,r})_p = \frac{2}{\pi\Gamma(r)} \int_\rho^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t^m}{1-t^m} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{r-1} dt \ , \ \beta+1 \in 2\mathbb{Z} \ .$$

Литература

[1] Жук В. В., *Аппроксимация периодических функций*, Изд-во ЛГУ, Л., 1982.

Об абсолютной сходимости интегралов Фурье–Хаара

С. В. Зотиков

Крымский институт информационно-полиграфических технологий Украинской академии печати, Украина

gamma-three@ya.ru

Пусть $\Phi = (\varphi_m)_{m=1}^\infty$ и $\Psi = (\psi_m)_{m=1}^\infty$ — две произвольные ортонормированные на $[0;1[$ системы (о.н.с.), все функции которых с периодом 1 продолжены на правую числовую полуось $\mathbb{R}_0$. Скрещенным произведением о.н.с. Φ на о.н.с. Ψ называется функция $K_{\Phi\Psi}$, определяемая на $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$ соотношением $K_{\Phi\Psi}(x,y) = \varphi_{[y]}(x)\psi_{[x]}(y)$, где $[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}_0$ (см. [1]). Эта функция является континуальным аналогом и о.н.с. Φ, и о.н.с. Ψ. Взяв в качестве одной из компонент $K_{\Phi\Psi}$ о.н.с. типа Хаара $X(p_n) = (X_k(t))$ (см. [2]), мы получаем континуальные аналоги систем типа Хаара видов $K_{X\Psi}(x,y)$ и $K_{\Phi X}(x,y)$, где в качестве Φ и Ψ могут выступать любые о.н.с. Далее будут рассматриваться лишь функции вида

$K_{X\Psi}(x, y) = X_{[y]}(x)\psi_{[x]}(y)$, где x — переменная, y — параметр. Скрещенное произведение $K_{X\Psi}$, образованное произвольной системой типа Хаара $X = X(p_n)$ и ограниченной о.н.с. Ψ, для всякой функции $f \in L(0;\infty)$ порождает интегральное преобразование $\hat{f}(y) = \int_0^\infty f(x)K_{X\Psi}(x, y)\,dx$, $y \in \mathbb{R}_0$, которое является аналогом классического преобразования Фурье и которое мы называем преобразованием Фурье функции f по отношению к $K_{X\Psi}$, или преобразованием Фурье—Хаара функции f в пространстве $L(0;\infty)$. Интеграл $\int_0^\infty F(y)K_{X\Psi}(x, y)\,dy$ будем называть интегралом Хаара функции F по отношению к $K_{X\Psi}$, а интеграл $\int_0^\infty \hat{f}(y)K_{X\Psi}(x, y)\,dy$ — интегралом Фурье—Хаара функции $f \in L(0,\infty)$. Ниже рассматриваются условия абсолютной сходимости почти всюду интегралов Хаара и интегралов Фурье—Хаара интегрируемых функций и условия представления таких функций их интегралами Фурье—Хаара.

Теорема 1. *Пусть Ψ — произвольная ограниченная о.н.с. Если числовая последовательность (p_n), определяющая систему типа Хаара $X(p_n)$ и функция F таковы, что 1) $\int_0^1 |F| < \infty$, 2) сходится ряд $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{m_n}} \int_{[m_n;m_{n+1}[} |F|$, то п.в. на $\mathbb{R}_0$ абсолютно сходится интеграл Хаара функции F.*

Теорема 2. *Пусть $X(p_n)$ — система типа Хаара, Ψ — произвольная ограниченная о.н.с., а $K_{X\Psi}$ — их скрещенное произведение. Если числовая последовательность (p_n), определяющая систему типа Хаара $X(p_n)$, и функция $f \in L(0;\infty)$ таковы, что сходится ряд $\sum_{n=0}^\infty \omega_1(m_{n+1}^{-1}, f)p_n \ln p_n$, где $\omega_1(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности функции f в пространстве $L(0;\infty)$, то интеграл Фурье—Хаара функции f абсолютно сходится почти всюду на $\mathbb{R}_0$.*

Теорема 3. *Пусть $X(p_n)$ — система типа Хаара, определяемая ограниченной числовой последовательностью (p_n), Ψ — произвольная ограниченная о.н.с., а $K_{X\Psi}$ — их скрещенное произведение. Если функция $f \in L(0;\infty)$ такова, что сходится ряд $\sum_{n=0}^\infty \omega_1(m_{n+1}^{-1}, f)$, то функция f почти всю-*

ду на $\mathbb{R}_0$ представима своим интегралом Фурье—Хаара, т.е. $f(t) \overset{п.в.}{=} \int_0^\infty \hat{f}(y) K_{X\Psi}(t, y)\, dy$.

Литература

[1] Виленкин Н. Я., Зотиков С. В., *О скрещенных произведениях ортонормированных систем функций,* Матем. заметки, 13, № 3 (1973), 469–480.

[2] Зотиков С. В. *О сходимости почти всюду рядов Фурье по системам типа Хаара,* Сиб. матем. журнал, 14, № 4 (1973), 760–765.

О порядке убывания L_q-модулей гладкости и наилучших в L_q приближений на классах функций $S_p^{(\ell)}[\lambda]$, $1 < p \leqslant q < \infty$

Н. А. Ильясов

Бакинский госуниверситет, Азербайджан

niyazi.ilyasov@gmail.com

Пусть L_p, $1 \leqslant p < \infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических функций с обычной L_p-нормой $\|f\|_p$, $L_\infty \equiv C$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty$; W_p^r, $r \in \mathbb{N}$, — класс функций $f \in L_p$, имеющих абсолютно непрерывную $(r-1)$-ю производную и $f^{(r)} \in L_p$ $(f^{(0)} \equiv f,\ W_p^0 \equiv L_p)$; $E_n(f)_p$ — наилучшее в L_p приближение f полиномами порядка $\leqslant n \in \mathbb{Z}_+$, $\omega_k\left(f; \delta\right)_p$ — модуль гладкости k-го порядка функции $f \in L_p$, $k \in \mathbb{N}$; $T_n(f)$ — полином наилучшего приближения f в метрике L_p; $S_n(f)$ — частная сумма ряда Фурье функции $f \in L_p$ порядка $n \in \mathbb{Z}_+$; $M_0^{(\ell)}$, $\ell \in \mathbb{N}$, — класс всех последовательностей $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ таких, что $0 < \lambda_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ и $n^\ell \lambda_n \uparrow$ $(n \uparrow)$.

Известно следующее утверждение (М. Заманский, 1949 г.; П. Бутцер и С. Павелке, 1967 г., Г.-И. Суноити, 1969 г.): $E_{n-1}(f)_p = O\left(n^{-\alpha}\right) \Leftrightarrow \left\|T_n^{(\ell)}(f)\right\|_p = O\left(n^{\ell-\alpha}\right)$, $0 < \alpha < \ell$, $n \in \mathbb{N}$, откуда в силу оценок (С. Б. Стечкин, 1951 г.) $\omega_\ell\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_p \leqslant \leqslant 2^\ell E_n(f)_p + \pi^\ell n^{-\ell}\left\|T_n^{(\ell)}(f)\right\|_p$ и $\left\|T_n^{(\ell)}(f)\right\|_p \leqslant C_1(\ell) n^\ell \omega_\ell\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_p$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, следует справедливость утверждения: $\omega_\ell\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_p = O\left(n^{-\alpha}\right) \Leftrightarrow \left\|T_n^{(\ell)}(f)\right\|_p = O\left(n^{\ell-\alpha}\right)$, $0 < \alpha < \ell$, $n \in \mathbb{N}$. Для заданных чисел $\beta \in [1, \infty)$, $\sigma \in [0, \infty)$ и последовательности $z = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $(z_n > 0)$ положим $U_{n,\sigma}^{(\beta)}(z) = \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta\sigma-1} z_\nu^\beta\right)^{1/\beta}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $V_{n,\sigma}^{(\beta)}(z) = \left(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\beta\sigma-1} z_\nu^\beta\right)^{1/\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

После публикации заметки [1] (см. также [2, §3.7]), в которой, в частности, получены оценки $\omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_p \leqslant C_2(k,r) V_{n,r}^{(1)}(y)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $y = \left\{n^{-(k+r)}\left\|T_n^{(k+r)}(f)\right\|_p\right\}$, и $\omega_k\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_p \leqslant C_3(k,p) V_{n,0}^{(\theta)}(z)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\theta = min\{2, p\}$, $z = \left\{n^{-k}\left\|S_n^{(k)}(f)\right\|_p\right\}$, появился целый ряд работ, посвященных обобщению и применению приведенных оценок в различных направлениях.

Обозначим $S_p^{(\ell)}[\lambda] = \left\{f \in L_p : n^{-\ell}\left\|S_n^{(\ell)}(f)\right\|_p \leqslant \lambda_n, n \in \mathbb{N}\right\}$, где $\ell \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in M_0^{(\ell)}$. Положим $\beta = \beta(p,q) = min\{2, p\}$ при $p = q$ и $\beta = \beta(p,q) = q$ при $p < q$, где $1 < p \leqslant q < \infty$, $\chi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$, $f \in L_p$, $\ell, k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\rho = \ell - (k+r)$, $\ell > \sigma = r + 1/p - 1/q$, $z = \left\{n^{-\ell}\left\|S_n^{(\ell)}(f)\right\|_p\right\}$ *и* $U_{\infty,\sigma}^{(\beta)}(z) < \infty$; *тогда* $f \in W_q^r$ *(при* $\sigma > 0$*) и при* $n \in \mathbb{N}$ *:*

(i) $E_{n-1}\left(f^{(r)}\right)_q \leqslant C_2(\ell, r, p, q) V_{n,\sigma}^{(\beta)}(z)$;

(ii) $\omega_k\left(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\right)_q \leqslant C_3(\ell,k,r,p,q)\left\{V_{n,\sigma}^{(\beta)}(z)+\frac{\chi(\rho)}{n^k}U_{n,k+\sigma}^{(\beta)}(z)\right\}.$

Оценки (i) и (ii) являются точными в смысле порядка на классе $S_p^{(\ell)}[\lambda]$.

Теорема 2. *Пусть* $\ell,k\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $1<p\leqslant q<\infty$, $\rho=\ell-(k+r)$, $\ell>\sigma=r+1/p+1/q>0$, $\lambda\in M_0^{(\ell)}$ *и* $U_{\infty,\sigma}^{(\beta)}(\lambda)<\infty$; *тогда* ($n\in\mathbb{N}$)

(iii) $\sup\left\{E_{n-1}\left(f^{(r)}\right)_q : f\in S_p^{(\ell)}[\lambda]\right\}\asymp V_{n,\sigma}^{(\beta)}(\lambda);$

(iv) $\sup\left\{\omega_k\left(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\right)_q : f\in S_p^{(\ell)}[\lambda]\right\}\asymp V_{n,\sigma}^{(\beta)}(\lambda)+\frac{\chi(\rho)}{n^k}U_{n,k+\sigma}^{(\beta)}(\lambda).$

Оценки снизу в (iii) и (iv) (в случае $p=q$, $\ell<k+r$ и $p<q$, $\ell\leqslant k+r$) реализуются с помощью индивидуальной $f_0(\cdot;p;\lambda)\in S_p^{(\ell)}[\lambda]$ и последовательности $\{g_n(\cdot;p;\lambda)\}\subset S_p^{(\ell)}[\lambda]$ функций, а в случае $p=q$, $\ell\geqslant k+r$ и $p<q$, $\ell>k+r$ оценка снизу в (iv) реализуется функцией $f_0(\cdot;p;\lambda)\in S_p^{(\ell)}[\lambda]$.

Оценки (i) и (ii) (в случае $p=q$, $\ell<k+r$ и $p<q$, $\ell\leqslant k+r$) допускают усиления: $n^{-(\ell-\sigma)}U_{n,\ell-\sigma}^{(\gamma)}(\varepsilon)\asymp n^{-(\ell-\sigma)}U_{n,\ell-\sigma}^{(\gamma)}(\omega)\leqslant C_4(k,\ell,r,p,q)V_{n,\sigma}^{(\beta)}(z)$, $n\in\mathbb{N}$, где $\gamma=\gamma(p,q)=max\{2,p\}$ при $p=q$ и $\gamma=\gamma(p,q)=p$ при $p<q$, неулучшаемость которых реализуется функцией $f_0(\cdot;p;\lambda)\in S_p^{(\ell)}[\lambda] : V_{n,\sigma}^{(\beta)}(\lambda)\leqslant C_5(k,\ell,r,p,q)n^{-(\ell-\sigma)}U_{n,\ell-\sigma}^{(\alpha)}(\varepsilon_0)\asymp n^{-(\ell-\sigma)}U_{n,\ell-\sigma}^{(\alpha)}(\omega_0)$, $n\in\mathbb{N}$, при условии $U_{\infty,\sigma}^{(\beta)}(\lambda)<\infty$, $\forall\alpha\in[1,\infty)$, $\varepsilon=\left\{E_{n-1}\left(f^{(r)}\right)_q\right\}$, $\omega=\left\{\omega_k\left(f^{(r)};\frac{\pi}{n}\right)_q\right\}$, $\varepsilon_0=\left\{E_{n-1}\left(f_0^{(r)}\right)_q\right\}$, $\omega_0=\left\{\omega_k\left(f_0^{(r)};\frac{\pi}{n}\right)_q\right\}$.

Отметим также, что утверждения Теорем 1 и 2 имеют место и при $1<p<q=\infty$ ($\Rightarrow\beta(p,\infty)=1$).

Литература

[1] Жук В. В., Натансон Г. И., *Свойства функций и рост производных приближающих полиномов*, ДАН СССР, 212, № 1 (1973), 19–22.

[2] Жук В. В., *Аппроксимация периодических функций,* ЛГУ, Л., 1982.

О приближении в диадическом пространстве *BMO*

И. П. Иродова

Ярославский Государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия

IrinaIrodova@gmail.com

Пусть Q_0 — единичный куб в d-мерном пространстве. Через D_n обозначим равномерное разбиение Q_0 на кубы, конгруэнтные кубу Q_0 с длиной ребра 2^{-n}. Тогда $D = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$.

Символом P_k обозначим пространство многочленов степени не выше $k-1$ по каждой переменной. Будем говорить, что функция s принадлежит множеству PP_k^n, если ее можно представить в виде

$$s = \sum_{i=1}^{m} p_{Q_i} \chi_{Q_i}, \tag{1}$$

где $m \leqslant n$, $p_{Q_i} \in P_k$, $Q_i \in D$, Q_i попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i = Q_0$.

Напомним результат М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка о нелинейной кусочно-полиномиальной аппроксимации функций из пространства Соболева—Слободецкого $W_p^{\lambda}(Q_0)$, $p \geqslant 1$:

$$\|f - s_n\|_{L_q} \leqslant c \cdot n^{-\frac{\lambda}{d}} \|f\|_{W_p^{\lambda}(Q_0)}. \tag{2}$$

Здесь $\lambda > \frac{d}{p} - \frac{d}{q}$ и $s_n \in PP_k^n$.

Отметим, что (2) не выполняется, если $\lambda = \frac{d}{p} - \frac{d}{q}, q = \infty$. Однако, сменив аппарат приближения, можно получить результат аналогичный (2) и для «предельного» показателя $\lambda = \frac{d}{p}$. Чтобы сформулировать соответствующий результат, дадим определение аппроксимирующего множества P_k^n. Функция $s \in P_k^n$, если (1) выполняется, но сейчас нет ограничений на выбор кубов $Q_i \in D$. Очевидно, что $PP_k^n \subset P_k^n$.

Дадим теперь определение диадического пространства Никольского—Бесова. Для этого через $E_k(f, Q)_p$ обозначим наилучшее приближение f многочленами из P_k в $L_p(Q)$, $Q \subset Q_0$.

Диадическим пространством Никольского—Бесова $B_p^\lambda(D)$ называется множество функций f из $L_p(Q_0)$, для которых конечна величина

$$|f|_{B_p^\lambda(D)} := \left(\sum_{Q \in D} |Q|^{-\frac{\lambda p}{d}} E_k(f, Q)_p^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

здесь $0 < p \leqslant \infty$, $0 < \lambda < \infty$.

$B_p^\lambda(D)$ можно считать дискретной моделью пространства B_p^λ. Отметим, что $B_p^\lambda \subset B_p^\lambda(D)$.

Наконец, напомним, что

$$|f|_{BMO_1^k(D)} := \sup_{Q \in D} \frac{E_k(f, Q)_1}{|Q|}.$$

Теорема 1. *Пусть $f \in B_p^{\frac{d}{p}}(D)$, $0 < p < \infty$. Тогда для любого натурального n существует кусочно-полиномиальная функция $s_n = s_n(f)$ из множества $P_k^n(D)$ такая, что*

$$|f - s_n|_{BMO_1^k(D)} \leqslant c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |f|_{B_p^{\frac{d}{p}}(D)}.$$

Теорема 2. *Пусть $0 < p < \infty$. Если $s_n \in P_k^n(D)$, то*

$$|s_n|_{B_p^{\frac{d}{p}}(D)} \leqslant c \cdot n^{\frac{1}{p}} |s_n|_{BMO_1^k(D)}.$$

Из неравенства типа неравенства Джексона (теорема 1) и неравенства типа неравенства Бернштейна (теорема 2) с помощью интерполяционной техники можно получить результат об интерполяции диадического пространства Никольского—Бесова и диадического BMO.

Теорема 3. *Пусть* $0 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$, $p_\theta = \frac{p}{\theta}$. *Тогда*

$$\left(BMO_1^1(D), B_p^{\frac{d}{p}}(D)\right)_{\theta, p_\theta} = B_{p_\theta}^{\frac{d}{p_\theta}}(D).$$

Приближение функций классов Вейля—Надя тригармоническими интегралами Пуассона

И. В. Кальчук [†], У. З. Грабова [‡]

[†‡] *Волынский национальный университет имени Леси Украинки, Украина*

[†] *kalchuk_i@ukr.net* [‡] *grabova_u@ukr.net*

Пусть C — пространство 2π-периодических непрерывных функций с нормой $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций, в котором норма задана равенством $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Величину

$$P_3(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\delta) \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \ \delta > 0,$$

где

$$\lambda_k(\delta) = \Big(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})k + \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 k^2\Big)e^{-\frac{k}{\delta}},$$

принято называть тригармоническим интегралом Пуассона 2π-периодической суммируемой функции f.

Пусть $f(x) \in L$ и $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — ряд Фурье функции f.

Если при $r > 0$ и $\beta \in R$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

есть ряд Фурье некоторой суммируемой функции φ, то эту функцию называют (r, β)-производной функции $f(x)$ и обозначают $f_\beta^r(x)$. Множество всех функций $f(x)$, которые удовлетворяют такому условию, обозначают W_β^r. Классы W_β^r были введены Б. Надем, и функцию f_β^r принято называть (r, β)-производной в смысле Вейля—Надя. Если $f(x) \in W_\beta^r$ и, кроме этого, $\|f_\beta^r(\cdot)\|_\infty \leqslant 1$, то говорят, что $f(x)$ принадлежит классу $W_{\beta,\infty}^r$.

Введем обозначения

$$\mathcal{E}\left(W_{\beta,\infty}^r; P_3(\delta)\right)_C = \sup_{f \in W_{\beta,\infty}^r} \|f(x) - P_3(\delta, f, x)\|_C.$$

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\delta) = \varphi(W_{\beta,\infty}^r; \delta)$ такая, что при $\delta \to \infty$ $\mathcal{E}\left(W_{\beta,\infty}^r; P_3(\delta)\right)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, то, следуя А. И. Степанцу [1], будем говорить, что решена задача Колмогорова—Никольского для класса $W_{\beta,\infty}^r$ и тригармонического интеграла Пуассона в равномерной метрике.

Целью работы есть отыскание асимптотических равенств для точных верхних граней отклонений тригармонических интегралов Пуассона от функций класса $W_{\beta,\infty}^r$.

Теорема 1. *При $r > 3$ и $\delta \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(W_{\beta,\infty}^r; P_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{\delta^3} \sup_{f \in W_{\beta,\infty}^r} \left\| \frac{4}{3} f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6} f_0^{(3)}(x) \right\|_C +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\delta^r} + \frac{1}{\delta^4}\right),$$

где $f_0^{(1)}(x)$, $f_0^{(2)}(x)$ *и* $f_0^{(3)}(x)$ *— соответственно* $(1,0)$-, $(2,0)$- *и* $(3,0)$-*производная в смысле Вейля—Надя.*

Работа выполнена при поддержке ГФФИ Украины (проект Ф 25.1/043).

Литература

[1] Степанец А. И., *Методы теории приближения,* Ин-т математики НАН Украны, Киев, 2002. Ч.I.

Уточнение одной теоремы Е. Ю. Редкозубовой

А. А. Кельзон

Государственная морская академия им. адмирала С. О. Макарова, Россия

kelzon@mail.ru

В докладе уточняется одно утверждение из работы Е. Ю. Редкозубовой [1], касающееся поведения сопряженного ряда Фурье функции обобщенной ограниченной вариации.

Пусть $\Phi = \{\phi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность строго возрастающих выпуклых вниз функций, заданных на множестве неотрицательных чисел, и таких, что $\phi_n(0) = 0$, $\phi_{n+1}(x) \leqslant \phi_n(x)$ для всех n и x и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) = \infty$$

для всех $x > 0$.

Φ-вариацией (в смысле М. Шрамма [2]) функции f, заданной на отрезке $[a, b]$, называется величина

$$V_\Phi(f; a, b) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(|f(\beta_n) - f(\alpha_n)|),$$

где верхняя грань берется по всевозможным наборам $\{I_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, непересекающихся интервалов $I_n = (\alpha_n, \beta_n) \subset [a, b]$.

Если $V_\Phi(f; a, b) < \infty$, то говорят, что f является функцией Φ-ограниченной вариации на $[a, b]$.

В случае, когда $\phi_n(x) = x/\lambda_n$, где $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$, вместо $V_\Phi(f; a, b)$ пишут $V_\Lambda(f; a, b)$ и, если $V_\Lambda(f; a, b) < \infty$, то говорят, что f является функцией Λ-ограниченной вариации на $[a, b]$ [3]. Наконец, при $\lambda_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, функцию Λ-ограниченной вариации называют функцией гармонической ограниченной вариации.

Обозначим через ΦBV семейство 2π-периодических функций f таких, что cf при некотором $c > 0$ является функцией Φ-ограниченной вариации на отрезке $[0, 2\pi]$. Через ΛBV (HBV) обозначим семейство 2π-периодических функций, имеющих Λ-ограниченную вариацию (соответственно, гармоническую ограниченную вариацию) на $[0, 2\pi]$.

Пусть $\tilde{S}[f]$ — сопряженный тригонометрический ряд Фурье функции f , а $\tilde{S}_n(f, x)$ — его n-ая частная сумма в точке x. Положим $\tilde{f}(x, \delta) := -\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\operatorname{tg}(t/2)} dt$. Справедливо следующее

Утверждение 1. *Если последовательность функций Φ такова, что $\Phi BV \supset HBV$ $(\Phi BV \neq HBV)$, то существует такая непрерывная функция $f \in \Phi BV$, что $\tilde{S}_n(f, 0) - \tilde{f}(0, \pi/n) \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Заметим, что в [1] доказано аналогичное утверждение, где вместо ΦBV стоит ΛBV.

Литература

[1] Редкозубова Е. Ю., *О сходимости сопряженного тригонометрического ряда Фурье функции ограниченной гармонической вариации,* Вестник Моск. ун-та, сер.1, №4 (2005), 48–52.

[2] Schramm M., *Functions of Φ-bounded variation and Riemann-Stiltjes integration,* Trans. Amer. Math. Soc. 287 (1985), 49–63.

[3] Waterman D., *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation,* Stud. Math. 44 (1972), 107–117.

О методе Лапласа в многомерном случае

А. С. Колпаков

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
kolpakov.andrew@gmail.com

В анализе и в других областях математики нередко возникает необходимость выяснить, как ведёт себя интеграл вида

$$\Phi\,(A) := \int_T f(t)\varphi^A(t)\,d\mu(t)$$

при больших значениях параметра A. Эта задача впервые возникла в работах Лапласа. Он исследовал интеграл $\Phi(A)$ в случае, когда T — промежуток вещественной оси, $d\mu(t) = dt$, а неотрицательная функция φ монотонна. Асимптотические формулы для этой ситуации уже давно стали классическими результатами анализа. Идея Лапласа проста и очень наглядна — нетрудно понять, что основной вклад в интеграл $\Phi(A)$ дают те точки t, в которых значения функции φ близки к максимальному. Если при удалении от точки, в которой достигается этот максимум, приращение функции φ имеет степенну́ю асимптотику, то при небольших дополнительных предположениях о функции f можно найти асимптотику интеграла $\Phi(A)$ при $A \to +\infty$. Для этого надо заменить интеграл по всему промежутку T интегралом по малой окрестности точки максимума и убедиться, что интеграл по оставшейся части промежутка достаточно мал. Интеграл по малой окрестности исследуется на основании предположенных асимптотических свойств функций f и φ.

В последнее время в связи с потребностями математической физики и теории вероятностей возник интерес к изучению интегралов $\Phi(A)$ в многомерном случае. При этом задача значительно усложняется. Одна из причин этого — отсутствие понятия монотонности. Кроме того, в отличие от одномерной ситуации в кратном случае представляют интерес функции φ, достигающие наибольшего значения на каком-то многообразии. Впрочем, даже случай, когда φ имеет единственный и строгий максимум, достаточно сложен. Зачастую для получения асимптотических формул, аналогичных формулам Лапласа, на функции φ и f приходится накладывать довольно ограничительные условия (см., например, книгу [2]).

Основная часть работы [6] посвящена обобщению метода Лапласа на случай, когда максимум функции φ достигается на некоторой кривой, расположенной в пространстве $\mathbb{R}^m$. В простейшем случае, когда это отрезок, найти асимптотику интеграла $\Phi(A)$ нетрудно. В общем случае приходится сначала построить диффеоморфизм цилиндрической окрестности отрезка на некоторую малую окрестность данной кривой.

Литература

[1] Зорич В. А., *Математический анализ, Часть II,* Наука, М., 1984.

[2] Федорюк М. В., *Асимптотика. Интегралы и ряды,* Наука, М., 1987.

[3] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н., *Избранные задачи по вещественному анализу,* Невский Диалект, СПб., 2004.

[4] Островский Е. И., *Точная асимптотика интегралов Лапласа для негладких функций,* Математические заметки. 6 (2003), 886–890.

[5] Маслов В. П., Федорюк М. В., *Логарифмическая асимптотика интегралов Лапласа,* Математические заметки. 5 (1981), 763–768.

[6] Колпаков А. С., *О методе Лапласа в многомерном случае,* Методы вычислений. 23 (2009).

[7] Макаров Б. М., Подкорытов А. Н., *Лекции по вещественному анализу* (в печати).

Оценки линейных поперечников классов $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций одной переменной в пространстве L_q

А. Ф. Конограй

Институт математики НАН Украины, Украина

Konogray@i.ua

Исследуются рассмотренные в [1] классы $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций одной переменной, где $\omega(t)$ — заданная функция типа модуля непрерывности порядка l, которая удовлетворяет условиям Бари—Стечкина [2] (обозначаем (S) и (S_l)). При $\omega(t) = t^r$, $r > 0$, классы $B^{\omega}_{p,\theta}$ совпадают с известными классами Бесова $B^{r}_{p,\theta}$.

Пусть $L_q(\pi_d)$ — пространство 2π-периодических функций со стандартной нормой. Получены точные по порядку оценки линейных поперечников $\lambda_M(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q)$, которые определяются следующим образом

$$\lambda_M(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q) = \inf_{\mathcal{L}_M} \inf_{\Lambda f \in \mathcal{L}_M} \sup_{f \in B^{\omega}_{p,\theta}} ||f - \Lambda f||_q,$$

где inf берутся соответственно по всем подпространствам L_M пространства L_q, размерность которых не превышает M, и всем линейным операторам, которые действуют из L_q в L_M.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leqslant 2$, $p' < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *и* $\omega(t)$ *удовлетворяет условию* (S) *с некоторым* $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, *а также условию* (S_l). *Тогда имеет место оценка*

$$\lambda_M(B^\omega_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}) M^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},$$

где $1/p + 1/p' = 1$.

Теорема 2. *Пусть* $2 \leqslant p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\omega(t)$ *удовлетворяет условию* (S) *с некоторым* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, *а также условию* (S_l). *Тогда имеет место оценка*

$$\lambda_M(B^\omega_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Замечание. Сравним полученные результаты с соответствующими оценками колмогоровских поперечников классов $B^\omega_{p,\theta}$ периодических функций одной переменной в пространстве L_q. Напомним, что M-мерный колмогоровский поперечник классов $B^\omega_{p,\theta}$ в пространстве L_q определяется следующим образом

$$d_M(B^\omega_{p,\theta}, L_q) = \inf_{\mathcal{L}_M} \sup_{f \in B^\omega_{p,\theta}} \inf_{u \in \mathcal{L}_M} \|f - u\|_q,$$

где $\mathcal{L}_M$ — подпространство размерности M пространства L_q.

Таким образом, сопоставив оценки линейных поперечников, которые получены в теоремах 1 и 2, с соответствующими оценками колмогоровских поперечников [1], можем сделать вывод, что в случае, когда $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, порядковые оценки величин $\lambda_M(B^\omega_{p,\theta}, L_q)$ отличаются от соответствующих порядковых оценок величин $d_M(B^\omega_{p,\theta}, L_q)$. А именно, если $1 < p \leqslant 2$, $p' < q < \infty$, а $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (S) с некоторым $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ и (S_l), то имеет место следующие порядковое соотношение

$$\lambda_M(B^\omega_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}} d_M(B^\omega_{p,\theta}, L_q).$$

В случае, когда $2 \leqslant p < q < \infty$, а $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (S) с некоторым $\alpha > \frac{1}{2}$ и (S_l), имеет место оценка

$$\lambda_M(B^\omega_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} d_M(B^\omega_{p,\theta}, L_q).$$

Литература

[1] Sun Youngsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness,* Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 219 (1997), 356–377.

[2] Бари Н. К., Стечкин С. Б., *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций,* Тр. Моск. мат. об-ва. 5 (1956), 483–522.

Экстремальные свойства сферических полудизайнов

Н. О. Котелина †, А. Б. Певный ‡

†‡ *Сыктывкарский государственный университет, Россия*

† *nad7175@yandex.ru* ‡ *pevnyi@syktsu.ru*

Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1y_1+\dots+x_ny_n$ векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Всюду далее t — четное число, $t \geqslant 2$.

Определение 1. Систему векторов $\Phi=\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}\subset S^{n-1}$ назовем сферическим полудизайном порядка t (или кратко сферическим t-полудизайном), если существует константа $A_t > 0$ такая, что выполнено тождество Варинга

$$\sum_{i=1}^{m}[\langle\varphi_i, x\rangle]^t = A_t\|x\|^t, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Сферический полудизайн порядка t является сферическим полудизайном для всех порядков $k = 2, 4, \ldots, t$.

С известным определением сферического дизайна (см., например, [1]) наше определение полудизайна связано так. Если Φ — сферический полудизайн порядка t, то $\Phi_{2m} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, -\varphi_1, \ldots, -\varphi_m\}$ будет сферическим дизайном порядка $t + 1$. Обратно, пусть $\Phi_{2m} \subset S^{n-1}$ является симметричным, т. е. $-\Phi_{2m} = \Phi_{2m}$. Тогда Φ_{2m} можно представить в виде $\Phi_{2m} = \Phi \cup -\Phi$, $\Phi \cap -\Phi = \varnothing$. Если Φ — сферический $(t+1)$-дизайн, то Φ будет сферическим полудизайном порядка t.

Рассмотрим произвольную систему векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1}. t-потенциалом этой системы будем называть величину

$$P_t(\Phi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]^t.$$

Б. Б. Венков [1] установил неравенство

$$P_t(\Phi) \geqslant cm^2, \tag{2}$$

где $c = (t-1)!!/(n(n+2)\ldots(n+t-2))$.

Нами установлено, что неравенство Венкова (2) превращается в равенство на сферических полудизайнах порядка t, и только на них.

Теорема 1. *Множество систем $\Phi \subset S^{n-1}$, для которых $P_t(\Phi) = cm^2$, совпадает с множеством сферических полудизайнов порядка t.*

Рассмотрим теперь систему $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$, состоящую из векторов разной длины. Такую систему назовём t-полудизайном, если выполнено тождество (1).

Теорема 2. *Для любой системы Φ ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$P_t(\Phi) \geqslant c \left(\sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|^t \right)^2, \tag{3}$$

где c определено выше. Равенство в (3) *достигается на t-полудизайнах, и только на них.*

Доказательство теорем 1 и 2 и ещё одно экстремальное свойство полудизайнов можно найти на сайте семинара «DHA & CAGD» `http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0597`.

Литература

[1] Venkov B., *Réseaux et designs sphériques*, Réseaux Euclidiens, Designs sphériques et Formes Modulaires, Enseign. Math., Géneve, (2001), 10–86.

Приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами в L_p

А. А. Кошелев

Уральский государственный университет, Россия

aakoshelev@gmail.com

Пусть Q_p^{2n} ($n \geqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$) есть выпуклый центрально симметричный класс функций $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $f \in C(\mathbb{R}^m)$ в случае $p = \infty$, у которых n-я степень оператора Лапласа $\Delta^n f$, понимаемая в смысле обобщенных функций, принадлежит $L_p(\mathbb{R}^m)$ и $\|\Delta^n f\|_p \leqslant 1$. Обозначим через $\mathcal{L}_p(N)$ множество линейных ограниченных операторов из $L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leqslant p < \infty$, и из $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$ при $p = \infty$, нормы которых ограничены числом $N > 0$. Рассмотрим величину

$$U(T)_p = \sup\{||\Delta^k f - Tf||_p : \ f \in Q_p^{2n}\} \qquad (1)$$

уклонения оператора $T \in \mathcal{L}_p(N)$ от k-й степени оператора Лапласа Δ^k на классе функций Q_p^{2n}. При $N > 0$ положим

$$E(N, k, n) = E(N) = E(N)_p = \inf\{U(T)_p : \ ||T||_{\mathcal{L}_p} \leqslant N\}. \qquad (2)$$

Величину (2) (а точнее, функцию $E(N)$ переменного $N > 0$) называют наилучшим приближением k-ой степени оператора Лапласа Δ^k линейными ограниченными операторами на классе элементов Q_p^{2n}. Эта задача является частным случаем задачи Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов [1]. Подробная информация об истории и состояния исследований задачи Стечкина приведена в обзорной статье В. В. Арестова [2].

Родственными (2) являются задача отыскания наилучшей (наименьшей) константы $\mathcal{K}_p$ в неравенстве Колмогорова

$$||\Delta^k f||_p \leqslant \mathcal{K}_p \cdot ||f||_p^{\frac{n-k}{n}} \cdot ||\Delta^n f||_p^{\frac{k}{n}} \tag{3}$$

и задача восстановления значений k-й степени оператора Лапласа Δ^k на элементах класса Q_p^{2n} заданных с известной погрешностью δ, т. е. задача об исследовании величины

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p)_p = \inf\{U_\delta(T)_p : T \in \mathcal{R}_p\}, \tag{4}$$

$U_\delta(T)_p = \sup\{\|\Delta^k f - T\eta\|_p : \ f \in Q_p^{2n}, \ \eta \in L_p(\mathbb{R}^m), \ \|f-\eta\|_p \leqslant \delta\}$.

В работе [3] О. Кунчев изучал неравенство (3) в случае $k = 1, n = 2, p = \infty, m \geqslant 2$ и получил для точной константы оценку сверху $\mathcal{K} \leqslant 2\sqrt{\dfrac{m}{m+2}}$.

Теорема 1. *При любых $m \geqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для $k = 1, n = 2$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{4N} \leqslant E(N)_p \leqslant \frac{m}{(m+2)N}, \quad N > 0, \tag{5}$$

$$\delta^{1/2} \leqslant \omega(\delta)_p \leqslant \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p)_p \leqslant 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0, \tag{6}$$

$$1 \leqslant \mathcal{K}_p \leqslant 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}. \tag{7}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00213) и программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3208.2010.1).

Литература

[1] Стечкин С. Б., *Наилучшее приближение линейных операторов,* Матем. заметки. Т. 1, № 2 (1967), 137–148.

[2] Арестов В. В., *Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи,* Успехи мат. наук. Т. 51, вып. 6 (312), (1996), 89–124.

[3] Kounchev O., *Extremizers for the multivariate Landau—Kolmogorov inequality,* Multivariate Approximation, W. Haussmann et al. (eds.), Akademie Verlag, (1997), 123–132.

Интегрируемость и сходимость в метрике L кратных тригонометрических рядов

О. И. Кузнецова

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Украина

kuznets@iamm.ac.donetsk.ua

Пусть V — замкнутый ограниченный полиэдр в R^m, звездный относительно начала координат O, $\quad O \in int\ V$, и такой, что продолжение любой его грани не проходит через O; W — множество полиэдров с указанными свойствами.

W_b — подмножество W, определенное следующим образом. Набор действительных чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ «плохо» приближаем (рациональными числами), если неравенство

$$\|\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_m k_m\| < a^{-m-1}, \quad a = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |k_i|,$$

имеет не более конечного числа решений в целых числах $k_1, \ldots, k_m$ ($\|x\|$ — расстояние от x до ближайшего целого).

Полиэдр V принадлежит множеству W_b, если коэффициенты в уравнениях гиперплоскостей $\sum \alpha_i x_i - 1 = 0$, его определяющих, образуют наборы «плохо» приближаемых чисел.

Пусть ν_n — возрастающая последовательность натуральных чисел, λ_n — сходящаяся к нулю последовательность действительных чисел, $V \in W_b$. На m-мерном торе $T^m = [-\pi,\ \pi)^m$ рассмотрим тригонометрический ряд

$$\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k \in \nu_n V \setminus \nu_{n-1} V} e^{ikx}, \tag{1}$$

где $k \in Z^m,\ kx = k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m,\ nV = \{x \in R^m : x/n \in V\}$.

Если ν_n растет достаточно быстро, ряд (1) есть ряд с редко меняющимися коэффициентами. При $m = 1, \quad V = [-1,\ 1]$ необходимые и достаточные условия интегрируемости и сходимости в метрике L ряда

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{\nu_{n-1} \leqslant k \leqslant \nu_n} \cos kx$$

найдены в [1], [2] для последовательностей ν_n, лакунарных по Адамару:

$$\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqslant q > 1, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Для последовательностей ν_n, растущих медленнее, при $m = 1,\ 2,\ \ldots$ справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $V \in W_b$, $p > 1$, выпуклая последовательность ν_n $(\nu_{n+1} - \nu_n \uparrow)$ такова, что*

$$\log \nu_n \leqslant c n^{\min\left\{\frac{p-1}{pm}, \frac{1}{2m}\right\}}.$$

Если коэффициенты ряда (1) стремятся к нулю и удовлетворяют условию

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(2^{l(p-1)} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta \lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

где $\Delta\lambda_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$, то данный ряд есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L(T^m)$, который сходится к ней в метрике L тогда и только тогда, когда $\lambda_n \log^m \nu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Литература

[1] Балашов Л.А., Теляковский С.А., *Некоторые свойства лакунарных рядов и интегрируемость тригонометрических рядов,* Труды МИАН. 143 (1977), 32–41.

[2] Теляковский С.А., *О сходимости в метрике L тригонометрических рядов с редко меняющимися коэффициентами,* Труды МИАН. 200 (1991), 322–326.

О теореме Р. Йенча

Е. А. Лебедева

Курский государственный университет, Россия

ealebedeva2004@gmail.com

Рассмотрим ряд Лорана $Q(z) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k z^k$, где $d_{-k} = d_k$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|d_k|} = r$, причем $0 < r < 1$. Определим коэффициенты c_k равенством: $c_k := d_k r^{-|k|}$ и функцию $p(\omega) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega}$. Предполагаем, что p имеет непрерывные производные до порядка $h-1$ включительно, причем $h \geqslant 2$, а функция $p^{(h)}$ непрерывна, исключая точки ξ_μ, в который $p^{(h)}$ претерпевает скачки δ_μ, $\mu = 0, \ldots, m$. Тогда, как известно,

$$c_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{h-1}{2}} A_k k^{-h} + O(k^{-h-1}), & h \text{ — нечетное,} \\ (-1)^{\frac{h}{2}} B_k k^{-h} + O(k^{-h-1}), & h \text{ — четное,} \end{cases}$$

где $A_k := -1/\pi \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu \sin k\xi_\mu$, $B_k := -1/\pi \sum_{\mu=0}^{m} \delta_\mu \cos k\xi_\mu$. Предположим, что существуют абсолютные константы a и b, такие что: $0 < a < |A_k/A_{k-1}| < b$, $0 < a < |B_k/B_{k-1}| < b$.

Рассмотрим также сходящийся для всех непрерывных функций линейный метод суммирования, определенный коэффициентами своей треугольной матрицы: $\lambda_{n,k}$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = 0, \ldots, n$. Тогда, как известно (см. [1, с.474–475]), последовательность $\lambda_{n,k}$ равномерно ограничена, и $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = 1$. Потребуем также, чтобы последнее равенство выполнялось равномерно по $k \in \mathbb{N}$. Доопределим коэффициенты для отрицательных значений $k : \lambda_{n,-k} := \lambda_{n,k}$. Определим последовательность полиномов

$$Q_{n,r}(z) := \sum_{k=-n}^{n} \lambda_{n,k} d_k z^k = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_{n,k} c_k r^{|k|} z^k.$$

Теорема 1. *Для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и r, $0 < r < 1$, в любой окрестности точки вида $re^{i\omega}$, $1/re^{i\omega}$, $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$, находится бесконечное множество корней функций $Q_{n,r}$.*

Данная теорема обобщает классический результат теории алгебраических полиномов, теорему Р. Йенча (см.[2]): любая граничная точка круга сходимости степенного ряда является предельной для множества всех корней его частичных сумм. Теорема (1) подтверждает для случая полиномов, полученных линейным методом суммирования из частичных сумм Фурье, гипотезу, высказанную в работе [3] для полиномов Бернштейна: предельной кривой для корней полиномов Бернштейна, приближающих кусочно-аналитическую функцию, является граница сходимости этих полиномов на комплексной плоскости.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00162.

Литература

[1] Бари Н. К., *Тригонометрические ряды,* Физматгиз, М., 1961.

[2] Jentzsch R., *Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen*, Inaug.-Diss, Berlin, 1914.

[3] Новиков И. Я., *Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши,* Матем. заметки, 71 (2002), 239–253.

Гиперрациональные числа как основа измерений и вычислений

Ю. Н. Ловягин

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
lovyagin@math.spbu.ru

Теория гиперрациональных чисел основывается на гиперарифметике, которая является консервативным расширением элементарной теории чисел. Основные идеи для моделирования вещественного анализа в рамках теории гиперрациональных чисел заложены в [2]. Систематически данная теория изложена в [3, 4]. Построение модели теории гиперрациональных чисел имеется в [5]. Элементарная математическая логика и теория чисел изложены в [1].

Теорема 1. *1. Теория гиперрациональных чисел является консервативным расширением теории рациональных чисел. Иными словами, любое утверждение, доказуемое для рациональных чисел, доказуемо и для гиперрациональных. 2. Гиперрациональные числа образуют упорядоченное поле. 3. В поле гиперрациональных чисел имеется подкольцо конечных чисел. 4. В кольце конечных чисел имеется идеал бесконечно малых чисел. 5. Отношение «$p \approx q$ тогда и только тогда, когда число $p - q$ бесконечно мало», является отношением эквивалентности на всем поле гиперрациональных чисел.*

Дальнейшее изложение базируется на следующей теореме, доказанной в [5].

Теорема 2. *Пусть* $\{q_n\}_{n\ —\ \text{гипернатуральное число}}$ *— семейство гиперрациональных чисел со свойствами:*

1. $q_{n+1} \geqslant q_n$ *для всех гипернатуральных* n*;*

2. *Для некоторого натурального* M *и всех гипернатуральных* n $q_n \leqslant M$*.*

Тогда при всех бесконечно больших k *и* l $q_k \approx q_l$*.*

Приведенные утверждения позволяют применить гиперрациональные числа в качестве основания для измерения отрезков согласно классическому алгорифму «сравнения» его с эталоном длины. Точнее, имеет место

Теорема 3. *Для всякого отрезка существует определенное с точностью до бесконечно малых гиперрациональное число, называемое длиной отрезка. При этом функция* λ*, сопоставляющая каждому отрезку его длину, обладает свойствами:*

1. $\lambda(O) \geqslant 0$*;*

2. $\lambda(O_1 + O_2) \approx \lambda(O_1) + \lambda(O_2)$

для всех отрезков O, O_1, O_2 *при условии, что* O_1 *и* O_2 *не имеют общих точек.*

Теперь, применяя классический метод вписывания в окружность правильных многоугольников, можно показать, что любая окружность имеет длину, причем отношение длины окружности к диаметру не зависит от окружности и может быть вычислено с точностью до бесконечно малых как отношение периметра вписанного 2^n-угольника к диаметру окружности. При этом для числа π получается следующее правило вычисления:

Теорема 4. *Пусть* q_n *— сторона правильного* 2^n*-угольника, вписанного в окружность радиуса единица. Тогда имеет место следующее соотношение*

$$q_{n+1} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{q_n^2}{4}}}.$$

При этом $\pi \approx 2^{n-1}q_n$ при любом бесконечно большом натуральном n.

Литература

[1] Косовский Н. К., Тишков А. В., *Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств*, СПб ун-т, СПб, 2000.

[2] Драгалин А. Г., *Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ*, Едиториал УРСС, М., 2003.

[3] Ловягин Ю. Н., *Гиперрациональные числа как основа математического анализа,* Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1, Вып. 7 (2007), 17–34.

[4] Праздникова Е. В., *Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел,* Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1, Вып. 7 (2007), 41–66.

[5] Ловягин Ю. Н., *Исчисление бесконечно малых Г. В. Лейбница или Введение в нестандартный анализ А. Робинсона*, Сыкт. лесной ин-т, Сыктывкар, 2001.

О системе Хаара на произведении компактных групп p-адических чисел

С. Ф. Лукомский

Саратовский государственный университет, Россия
lukomskiiSF@info.sgu.ru

Пусть $(\mathbb{Z}_p, \dot{+})$ — группа целых p-адических чисел, и пусть

$$\mathbb{Z}_p = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \quad (\cap G_n = \{0\},\ \cup G_n = \mathbb{Z}_p)$$

— цепочка подгрупп, задающая топологию в $\mathbb{Z}_p$, μ — мера Хаара на $\mathbb{Z}_p$, нормированная условием $\mu\mathbb{Z}_p = 1$. Пусть $(g_n : n \in \mathbb{N}_0)$ — базисная последовательность, т.е. $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Любой элемент $x \in \mathbb{Z}_p$ единственным образом представим в виде $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n$ $(0 \leqslant a_n \leqslant p-1)$. Пусть далее $G_n^{\perp}$ — аннуляторы подгрупп G_n, $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$ — функции Радемахера на $\mathbb{Z}_p$. Через A обозначим оператор растяжения в $\mathbb{Z}_p$, т.е. $Ax = \sum a_n g_{n-1}$ для $x = \sum a_n g_n \in G_1$. При $d > 1$ определим оператор растяжения A_d в $\mathbb{Z}_p^d$ следующим образом. Если $\mathbf{x} = (x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(d-1)}) \in \mathbb{Z}_p^d$, то положим $A_d\mathbf{x} = (x^{(1)}, ..., x^{(d-1)}, Ax^{(0)})$.

Теорема 1. *Пусть (g_n) — базисная последовательность в $\mathbb{Z}_p$, A_d — оператор растяжения в $\mathbb{Z}_p^d$, функция $r_0(\mathbf{x})$ определена в $\mathbb{Z}_p^d$ равенством $r_0(\mathbf{x}) = r_0(x^{(0)})$, где $r_0(x^{(0)})$ — функция Радемахера в $\mathbb{Z}_p$. Тогда функции $H_0(\mathbf{x}) \equiv 1$ и*

$$H_{jp^{md+l}+k}(\mathbf{x}) = p^{\frac{md+l}{2}} r_0^j(A_d^{md+l}(\mathbf{x}\dot{-}\mathbf{q}))\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p^d}(A_d^{md+l}(\mathbf{x}\dot{-}\mathbf{q})), \qquad (1)$$

где числа

$$k = k^{(0)} + k^{(1)} + \cdots + k^{(d-1)}$$

и векторы

$$\mathbf{q} = (q^{(0)}, q^{(1)}, \ldots, q^{(d-1)}) \in \mathbb{Z}_p^d$$

связаны соотношениями

$$k^{(i)} = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_{\nu d+i} p^{\nu d+i} & \text{при } i = \overline{0, l-1}, \\ \sum\limits_{\nu=0}^{m-1} a_{\nu d+i} p^{\nu d+i} & \text{при } i = \overline{l, d-1}, \end{cases}$$

$$q^{(i)} = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_{\nu d+i} g_{\nu d+i} & \text{при } i = \overline{0, l-1}, \\ \sum\limits_{\nu=0}^{m-1} a_{\nu d+i} g_{\nu d+i} & \text{при } i = \overline{l, d-1}, \end{cases}$$

$(1 \leqslant j \leqslant p-1$, $m \in \mathbb{N}_0$, $l = \overline{0, d-1}$, $0 \leqslant k \leqslant p^{md+l}-1)$, образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{Z}_p^d)$.

Функции $H_{jp^{md+l}+k}(\mathbf{x})$ есть не что иное как d-мерные функции Хаара.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента по поддержке ведущих научных школ, проект НШ-4383.2010.1 и РФФИ, грант 10-01-00097-а

Литература

[1] Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И., *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах*, Баку, Элм, 1981.

[2] Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Skopina M., *p-adic refinable functions and MRA-based wavelets*, J.Approx.Th. 161:1(2009), 226–238.

[3] Лукомский С. Ф., *О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе*, Известия Саратовского Университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 9:1 (2009), 14–19.

Аппроксимационные свойства пространств линейных комбинаций сдвигов атомарных функций

В. А. Макаричев

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина
victor.makarichev@gmail.com

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение $y'(x) = 2\sum\limits_{k=1}^{s}\left(y(2sx+2s-2k+1)-y(2sx-2k+1)\right)$. Согласно [1], финитным решением данного уравнения является атомарная функция $mup_s(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\cdot\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{st}{(2s)^k}\right)}{s^2\cdot\frac{t}{(2s)^k}\cdot\sin\left(\frac{t}{(2s)^k}\right)}dt$, причем $supp\ mup_s(x) = [-1,1]$. Функция $mup_s(x)$ была использована для построения обобщенных рядов Тейлора для функций класса $H_{\rho,s} = \left\{f \in C^{\infty}_{[-1,1]}:\ |f(x)| \leqslant c(f)\cdot\rho^n\cdot 2^n\cdot(2s)^{\frac{(n-1)n}{2}}\right\}$. При этом базисные функции этого ряда были построены с помощью линейных комбинаций сдвигов $mup_s(x)$ [2]. В связи с этим была поставлена задача исследования аппроксимационных свойств пространств линейных комбинаций сдвигов атомарной функции $mup_s(x)$.

Пусть $MUP_s^{[n]}$ — пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_k c_k\cdot mup_s\left(x-\frac{k}{(2s)^k}\right),\ x\in[-1,1].$$

Доказано, что пространство $MUP_s^{[n]}$ содержит многочлены степени не выше n. Базис пространства $MUP_s^{[n]}$ состоит из сдвигов финитной функции

$$Fmup_s^{[n]}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\cdot\left(\frac{\sin\frac{t}{2\cdot(2s)^n}}{\frac{t}{2\cdot(2s)^n}}\right)^n\cdot\prod_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{st}{(2s)^k}\right)}{s^2\cdot\frac{t}{(2s)^k}\cdot\sin\left(\frac{t}{(2s)^k}\right)}dt,$$

носителем которой является промежуток $\left[-\frac{n+2}{2\cdot(2s)^n}, \frac{n+2}{2\cdot(2s)^n}\right]$.

Введем в рассмотрение пространство $\widetilde{MUP}_s^{[n]} \subset C_{[-\pi,\pi]}$, которое состоит из функций вида $\varphi(x) = \sum\limits_k c_k \cdot mup_s\left(\frac{x}{\pi} - \frac{k}{(2s)^n}\right)$, таких что $\varphi^{(l)}(-\pi) = \varphi^{(l)}(\pi)$ для $l = 0, 1, 2, \ldots$ Установлено, что размерность $\widetilde{MUP}_s^{[n]}$ равна $2 \cdot (2s)^n$. С использованием функции $Fmup_s^{[n]}\left(\frac{x}{\pi}\right)$ был построен локальный базис этого пространства.

Пусть $\widetilde{W}_2^r$ — класс функций $f \in C_{[-\pi,\pi]}^{r-1}$ таких, что для любого $k = 0, 1, \ldots, r-1$ выполняется $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$, $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leqslant 1$.

Теорема 1. *При $n \geqslant n(r)$ справедливо*

$$E_{L_2}\left(\widetilde{W}_2^r, \widetilde{MUP}_s^{[n]}\right) \leqslant d_{2\cdot(2s)^n}\left(\widetilde{W}_2^r, L_2\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{C}{2^n}},$$

где $E_X(A, L) = \sup\limits_{\varphi \in A} \inf\limits_{\psi \in L} \|\varphi - \psi\|_X$ и

$$d_N(K, X) = \inf_{dim\ L=N} \sup_{\varphi \in K} \inf_{\psi \in L} \|\varphi - \psi\|_X$$

— колмогоровский поперечник.

Из этой теоремы следует, что пространства $\widetilde{MUP}_s^{[n]}$ являются асимптотически экстремальными для приближения классов $\widetilde{W}_2^r$ по норме L_2.

Литература

[1] Рвачев В. А., Старец Г. А., *Некоторые атомарные функции и их применение*, Докл. АН УССР. 11 (1983), 22-24.

[2] Старец Г. А., *Построение базисных функций обобщенных рядов Тейлора*, Математические методы анализа динамических систем. 8 (1984), 16-19.

Сплайн-вэйвлеты на отрезке

А. А. Макаров

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
Antony.Makarov@gmail.com

Сплайны, вэйвлеты и сплайн-вэйвлетные разложения постоянно находятся в центре внимания исследователей (см. [1]–[2] и имеющуюся там литературу). Предлагаемая работа продолжает исследования по сплайнам и сплайн-вэйвлетным разложениям для неравномерных сеток, выводимым из аппроксимационных соотношений (см. [3]–[5]). В этих работах рассматривались минимальные сплайны лагранжева типа на открытом интервале (α, β), определяемые бесконечной сеткой X, бесконечной цепочкой векторов $\mathbf{A}$ и вектор-функцией $\varphi(t)$, заданной на (α, β). Вектор-функциям $\varphi(t)$ с полиномиальными компонентами соответствовали пространства полиномиальных B-сплайнов (см. [6]), а при определенном выборе цепочки $\mathbf{A}$ (в зависимости от априори заданных X и $\varphi(t)$) получались пространства дважды непрерывно дифференцируемых сплайнов (см. [6]). Все упомянутые пространства бесконечномерны, что не всегда удобно для численной реализации.

В данной работе строятся координатные сплайны на отрезке $[a, b]$, даются некоторые реализации соответствующей им биортогональной системы функционалов и строятся конечномерные пространства (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов класса C^2. Конечномерность упомянутых пространств позволяет получить сплайн-вэйвлетное разложение для неравномерной сетки на отрезке $[a, b]$ с помощью сужения рассматриваемых функций с интервала (α, β) на отрезок $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$.

Литература

[1] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л., *Методы сплайн-функций*, М., 1980.

[2] Малла С., *Вэйвлеты в обработке сигналов*, М., 2005.

[3] Демьянович Ю. К., *Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения,* Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 4 (2005), 1–4.

[4] Демьянович Ю. К., Макаров А. А., *Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов,* Проблемы матем. анализа. Вып. 34 (2006), 39–54.

[5] Макаров А. А., *Моделирование калибровочных соотношений для неполиномиальных сплайнов,* Вычисл. технологии. Т. 13, Спец. вып. 4 (2008), 94–100.

[6] Макаров А. А., *Один вариант сплайн-вэйвлетного разложения пространств B-сплайнов*, Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10, Вып. 2 (2009), 59–71.

[7] Макаров А. А., *Нормализованные тригонометрические сплайны лагранжева типа,* Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, Вып. 3 (2008), 81–87.

Предельные теоремы теории дискретных периодических сплайнов

В. Н. Малозёмов [†], Н. В. Чашников [‡]

[†] *Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

[‡] *ООО «ИнтеллиДжей Лабс», Россия*

[†] *malv@math.spbu.ru* [‡] *nik239@list.ru*

Зафиксируем $m \geqslant 2$ комплексных чисел

$$z(0), z(1), \ldots, z(m-1).$$

Возьмём натуральные числа r и n, $n \geqslant 2$. Положим $N = mn$.

Обозначим через $S_{r,n}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, дискретный N-периодический сплайн порядка r, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$S_{r,n}(ln) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1,$$

Такой сплайн существует и единствен [1].

Нас интересуют два повторных предела:

предел $S_{r,n}(j)$ сначала по $r \to \infty$, а затем по $n \to \infty$;

предел $S_{r,n}(j)$ сначала по $n \to \infty$, а затем по $r \to \infty$.

(Предел $S_{r,n}(j)$ при $n \to \infty$ понимается как предел $S_{r,n}\big(\lfloor nx \rfloor\big)$ при фиксированном x из $\mathbb{R}$)

Установлено, что оба повторных предела существуют и равны между собой. Их общим значением является m-периодический тригонометрический полином $u(x)$ порядка $\lfloor m/2 \rfloor$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$u(l) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

При доказательстве этого факта использовались некоторые идеи из [2] и [3].

Литература

[1] Малозёмов В. Н., Певный А. Б., *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения,* Журнал вычисл. мат. и матем. физ. 38, № 8 (1998), 1235–1246.

[2] Бер М. Г., Малозёмов В. Н., *Об интерполяции дискретных периодических данных,* Проблемы передачи инф. 28, № 4 (1992), 60–68.

[3] Golitschek M., *On the convergence of interpolating periodic spline functions of high degree,* Numer. Math. 19, № 2 (1972), 146–154.

Теоремы аппроксимации в комплексной плоскости в терминах новой характеристики

Дж. И. Мамедханов

Бакинский Государственный Университет, Азербайджан
jamalmamedkhanov@rambler.ru

Вводится в рассмотрение новая характеристика

$$\delta\left(z, \frac{1}{n}\right) = \int\limits_{\Gamma_{1+\frac{1}{n}}} \frac{|dz|}{|z-t|^{\gamma}},$$

где $z \in \Gamma$, а Γ — произвольная кривая в комплексной плоскости, $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$ — линия уровня этой кривой. Эта характеристика позволяет рассматривать в задачах аппроксимации в комплексной плоскости более общие классы кривых, а на известных общих классах кривых, в частности, на кривых В. В. Салаева S_θ, эта характеристика совпадает с ранее известной характеристикой $\delta(z, \frac{1}{n})$, которая определяет расстояние от точки $z \in \Gamma$ до линии уровня $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$.

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— произвольная спрямляемая кривая в комплексной плоскости, функция* $f(z)$ *принадлежит* $E_p(G)$ $(\Gamma = \partial G)$ *и* $H_p^\alpha(\Gamma)$ *(класс Гельдера порядка* α *в пространстве* $L_p(\Gamma)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$*). Тогда существует такой многочлен* $P_n(z)$*, для которого*

$$\left\| \frac{f(z) - P_n(z)}{S_n^\alpha(z, \frac{1}{n})} \right\| \leqslant const.$$

Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации в пространстве Бергмана

Т. С. Мардвилко [†], А. А. Пекарский [‡]

[†] *БГПУ им. М. Танка, Беларусь,* [‡] *БГТУ, Беларусь*

[†] *mardvilko@mail.ru* [‡] *pekarskii@gmail.com*

Пусть p и μ принадлежат полуоси $(0, +\infty)$. Тогда функция f, аналитическая в полуплоскости $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$, принадлежит пространству Бергмана $A_{p,\mu}$, если конечна квазинорма

$$\|f\|_{A_{p,\mu}} = \left[\int\limits_{\Pi} (\mathrm{Im} z)^{p\mu - 1} |f(z)|^p dm_2(z) \right]^{1/p},$$

где m_2 плоская мера Лебега в $\mathbb{C}$.

Для $\tau \in (0, +\infty)$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ через B_τ^α обозначим пространство Бесова функций f, аналитических в Π. Именно, $f \in B_\tau^\alpha$, если $f^{(s)} \in A_{\tau, s-\alpha}$ при некотором $s \in \mathbb{N} \cap (\alpha, +\infty)$. В случае $\frac{1}{\tau} > \alpha$ это определение не будет зависеть от s, если дополнительно предполагать, что $f(z) \to 0$ при $\mathrm{Im} z \to +\infty$. Именно это выполнено ниже.

Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество рациональных функций степени не выше n. Введём

$$R_n(f)_{p,\mu} = \inf_{r_n \in \mathcal{R}_n} \|f - r_n\|_{A_{p,\mu}}$$

— наилучшее приближение $f \in A_{p,\mu}$ посредством множества $\mathcal{R}_n$. Следующая теорема включает в себя прямую и обратную теорему рациональной аппроксимации в пространстве Бергмана.

Теорема 1. *Пусть положительные числа p, μ, τ и действительное α таковы, что $\alpha + \mu = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{p} > 0$, причём $\frac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$. Тогда функция $f \in A_{p,\mu}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha+\mu} R_n(f)_{p,\mu} \right)^\tau < \infty$$

в том и только в том случае, когда $f \in B_\tau^\alpha$.

Если $\frac{1}{p} + \mu \in \mathbb{N}$, то достаточность в теореме сохраняется, а необходимость — нет.

Теорема 1 имеет также свой аналог для наилучших приближений в пространстве Бергмана в круге. В случае $\mu + \frac{1}{p} < 1$ аналог теоремы 1 для круга получен ранее Е. Дынькиным [1]. В частном случае $\mu = 1/p$ и $p > 2$ также для круга необходимость из теоремы 1 установлена одновременно и независимо В. Р. Мисюком [2].

Доказательство достаточности из теоремы 1 основано на атомическом разложении [3] функций из пространства Бергмана. Доказательство необходимости основано на следующем неравенстве типа Бернштейна для производных рациональных функций. Пусть p, μ, τ и α те же, что и в теореме 1. Если $r_n \in \mathcal{R}_n \cap A_{p,\mu}$, то

$$\|r_n\|_{B_\tau^\alpha} \leqslant cn^{\alpha+\mu}\|r_n\|_{A_{p,\mu}},$$

где $c = c(p, \mu, \tau, \alpha) > 0$. Некоторые частные случаи этого неравенства для круга получены ранее в [1], [2].

Литература

[1] Dyn'kin E., *Rational functions in Bergman spaces*, Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland. 113 (2000), 76–94.

[2] Мисюк В. Р., *Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций относительно плоской меры,* Труды Ин-та матем. НАН Беларуси. 9 (2001), 105–108.

[3] Rochberg R., *Decomposition theorems for Bergmans spaces and their applications,* Operators and Function Theory. S.C. Power editor. D. Reidel Publishing Company. (1985), 225–277.

О приближенном вычислении особых интегралов, зависящих от параметра

А. В. Мерлин †, Н. И. Мерлина ‡

†‡ *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Россия*

†‡ *merlina@cbx.ru*

В теории сингулярных интегральных уравнений активно проводятся исследования по прямым методам решения сингулярных интегральных уравнений, краевых задач Римана и приближенному вычислению интегралов типа Коши. В настоящей статье получена квадратурная формула для вычисления интеграла типа Коши, заданного на отрезке действительной оси,

$$I(x) = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)dt}{t-x}, \quad \varphi(x) \in H^\lambda[0,1]$$

посредством аппроксимации его плотности с помощью полиномов С. Н. Бернштейна

$$B_n(\varphi, x) = \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cdot p_{k,n}(x), \quad p_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Для построения квадратурной формулы запишем интеграл в виде

$$I(x) = I_n(\varphi, x) + r_n(\varphi),$$

где

$$I_n(\varphi, x) = \int\limits_0^1 \frac{B_n(\varphi, t)}{t-x}\, dt, \quad r_n(\varphi) = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t) - B_n(\varphi, t)}{t-x}\, dt.$$

Интеграл $I_n(\varphi, x)$ понимается в смысле главного значения по Коши и потому записывается в виде

$$I_n(\varphi, x) = B_n(\varphi, t) \ln \frac{1-x}{x} + \int\limits_0^1 \frac{B_n(\varphi, t) - B_n(\varphi, x)}{t-x}\, dt.$$

Последний интеграл вычисляется с помощью разложения многочленов $p_{n,k}(x)$ по степеням разности $\tau - x$ по формуле Тейлора. Окончательно имеем

$$I_n(\varphi, x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cdot I_{n,k}(x),$$

где

$$I_{n,k}(x) = p_{n,k}(x) \ln \frac{1-x}{x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{n,k}^{(j)}(x)}{j!j} \left((1-x)^j - (-x)^j\right).$$

Оценка погрешности приближения проводится по норме пространства $L_1[0,1]$ с помощью простых, но длинных выкладок:

$$\left\| \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t) - B_n(\varphi, x)}{t-x}\, dt \right\|_L \leqslant \frac{M(\lambda)}{\sqrt{n}} H(\varphi, \lambda),$$

где $M(\lambda)$ — положительная константа, зависящая от показателя гельдеровости λ функции $\varphi(x)$ и выписываемая в явном виде,

$$H(\varphi, \lambda) = \sup \frac{\omega(\varphi, t)}{t}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

$\omega(\varphi, t)$ — модуль непрерывности функции $\varphi(x)$.

Замечание 1. Указанный подход можно применить к интегралам типа Коши с разрывной плотностью, причём интеграл типа Коши может быть задан на гладкой замкнутой или разомкнутой кривой.

Замечание 2. Подобная формула может быть получена и для сингулярных интегралов с логарифмическим и степенным ядром.

Константы в рациональных приближениях функций Маркова рядами Фурье

Е. Г Микулич †, Е. А. Ровба ‡

†‡*Гродненский государственный университет, Беларусь*

†*y.mikulich@gmail.com* ‡*rovba_s@grsu.by*

Пусть μ — положительная мера Бореля с компактным носителем, принадлежащим одной из полуосей прямой $\mathbb{R}$. Тогда функцию

$$\hat{\mu} = \int \frac{d\mu(t)}{t-z},\ z \in \mathbb{C}$$

называют *функцией Маркова*. Изучению рациональной аппроксимации со свободными полюсами функции $\hat{\mu}$ посвящен ряд работ (см.,например, [1]-[3]).

Будем полагать, что мера μ удовлетворяет следующим условиям: $supp\,\mu = [1, a], a > 1$, мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существует такое $\alpha > 0$, что

$$\mu'(t) \asymp (t-1)^{\alpha},\ t \to 1,\ t \in [1, a] \tag{1}$$

В данной работе изучается порядок наилучших равномерных приближений функции $\hat{\mu}$, определенной мерой μ, удовлетворяющей условию (1) на отрезке $I = [-1, 1]$. Через $C(I)$ обозначим банахово пространство функций $f : I \to \mathbb{C}$ с нормой $||f|| = ||f||_{C(I)} = \max_{x\in I} |f(x)|$. Пространство $C(I)$ мы также будем рассматривать как предгильбертово, наделенное скалярным произведением $(f, g) = \int_I f(x)\overline{g(x)}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. М. М. Джрбашян и А. А. Китбалян в работе [4] ввели систему рациональных функций $\{M_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, которая является ортогональной на отрезке $I=[-1,1]$ по весу $1/\sqrt{1-x^2}$.

Рассмотрим ряд Фурье—Чебышева по системе функций $\{M_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ для $C(I)$. Положим

$$c_k=\int_{-1}^{1}\hat{\mu}(u)\overline{M_k(u)}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},\quad s_n(x,\mu)=\sum_{k=1}^{n}c_kM_k(x)$$

— коэффициенты и частная сумма ряда Фурье соответственно. Обозначим через $\mathcal{A}_n$ множество всех наборов $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $a_k\in\mathbb{C}\backslash((-\infty,-1)\cup(1,\infty))$ таких, что $a_1,a_2,\ldots,a_n$ действительны и $|a_k|<1$ для всех $k=\overline{1,n}$, либо попарно сопряжены.

Пусть q — неотрицательное целое число, $0\leqslant q\leqslant n$. Через $\mathcal{A}_{n,q}$ обозначим множество наборов $a\in\mathcal{A}_n$ таких, что среди чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ не более q различных, входящих с одинаковой четной кратностью m для целого m (то есть $n=mq$). Обозначим

$$\varepsilon_n(x,a)=\hat{\mu}-s_n(x,a),\quad \varepsilon_n(a)=||\varepsilon_n(x,a)||_{C[-1,1]}$$

и

$$\varepsilon_{n,q}=\inf_{a\in\mathcal{A}_{n,q}}\varepsilon_n(a).$$

Теорема 1. *Для любого натурального q справедливо соотношение*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1}n}\right)^{2\alpha}\varepsilon_{n,q}=$$
$$=\Gamma(2\alpha)A^{2\alpha}q^{4q\alpha}\left(\frac{q\alpha}{2^{2q-3}}\left(\prod_{j=1}^{q-1}(2q\alpha-j)\right)^2\right)^{2\alpha}.$$

Литература

[1] Гончар А. А., *О скорости раицональной аппроксимации некоторых аналитических функций,* Матем. сб.. АН АрмССР 147, Т.105 (1978), 147–163.

[2] Пекарский А. А., Ровба Е. А., *Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекций на множество рациональных функций,* Матем. Заметки 3, Т.65 (1999), 362–368.

[3] Пекарский А. А., *Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова,* Докл. АН АрмССР 2, Т.7 (1995), 121–132.

[4] Джрбашян М. М., Китаблян А. А., *Об одном обобщении полиномов Чебышева,* Докл. АН АрмССР 5, Т.37 (1964), 263–270.

О точных константах в теоремах о следах для конуса

А. И. Назаров

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
al.il.nazarov@gmail.com

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — открытый конус, причем $G = \Omega \cap \mathbb{S}^{n-1}$ — область на единичной сфере со строго липшицевой границей. Обозначим $\dot{\mathcal{C}}^1(\Omega)$ множество непрерывно дифференцируемых функций с носителем, ограниченным в Ω и отделенным от начала координат. При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ обозначим $\dot{W}^1_p(\Omega)$ пополнение $\dot{\mathcal{C}}^1(\Omega)$ по норме $\|\nabla v\|_{p,\Omega}$.

Рассмотрим шкалу пространств следов с весом $L_{q,\sigma}(\partial\Omega)$, норма в которых определена формулой

$$\|v\|_{q,\sigma,\partial\Omega} = \|r^{\sigma-1}v\|_{L_q(\partial\Omega)}$$

(здесь $r = |x|$).

При $1 < p < \infty$, $p \neq n$ и $\frac{1}{p} \leqslant \sigma \leqslant \min\{1, \frac{n}{p}\}$ обозначим $p_\sigma^{**} = \frac{(n-1)p}{n-\sigma p}$ предельный показатель в теореме вложения на границу $\dot{W}_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_{q,\sigma}(\partial\Omega)$:

$$\lambda(p, \sigma, \Omega) = \inf_{v \in \dot{W}_p^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla v\|_{p,\Omega}}{\|v\|_{p_\sigma^{**},\sigma,\partial\Omega}} > 0. \qquad (I_\sigma)$$

Мы называем (I_σ) *неравенством Харди—Соболева для следов.*

В работе вычислены точные константы в (I_σ) при $\sigma = \frac{1}{p}$ и при $p < n$, $\sigma = 1$. Обсуждается также вопрос о существовании минимизирующей функции в промежуточных случаях.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00748.

Литература

[1] Назаров А. И., *Неравенства Харди—Соболева для следов в конусе,* Алгебра и Анализ. 22 (2010), №5 (в печати).

Геометрические неравенства для нормы интерполяционного проектора

М. В. Невский

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия

mnevsk@uniyar.ac.ru

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0,1]^n$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$. Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Через $d_i(S)$ обозначим максимальную длину отрезка, принадлежащего S и параллельного оси x_i. Эта величина называется i-м осевым диаметром симплекса S. Положим

$$\xi(S) := \min\left\{\sigma \geqslant 1 : \, Q_n \subset \sigma S\right\}.$$

Здесь σS есть результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Через $C(Q_n)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : Q_n \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|,$$

а через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени $\leqslant 1$.

Автором доказана следующая теорема, устанавливающая связь осевых диаметров $d_i(S)$ и величины $\xi(S)$ [1].

Теорема 1. *Для любого невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leqslant \xi(S). \tag{1}$$

Включение $Q_n \subset S$ эквивалентно равенству $\xi(S) = 1$. Поэтому из (1) следует, что если $Q_n \subset S$, то для некоторого i симплекс S содержит отрезок длины n, параллельный i-й координатной оси. Число n здесь не может быть увеличено (достаточно рассмотреть симплекс, ограниченный гиперплоскостями $x_k = 0$ и гиперплоскостью $\sum x_k = n$).

Приведём примеры других утверждений, доказанных с помощью теоремы 1. При выводе неравенства (2) применялись оценки для норм интерполяционных проекторов, установленные автором в [2]. Результат теоремы 3 известен — другим путем он был получен М. Лассаком [3].

Теорема 2. *Пусть $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами симплекса $S \subset Q_n$. Справедливо неравенство*

$$\|P\| \geqslant \frac{2}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} - 1 \right) + 1. \tag{2}$$

Здесь $\|P\|$ — норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$.

Теорема 3. *Пусть симплекс $S^* \subset Q_n$ имеет максимальный возможный объём из всех симплексов, принадлежащих Q_n. Тогда имеют место равенства $d_1(S^*) = \ldots = d_n(S^*) = 1$.*

Литература

[1] Невский М. В., *Об одном свойстве n-мерного симплекса,* (в печати).

[2] Невский М. В., *Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора,* Модел. и анализ информ. систем. Т. 16, № 1 (2009), 24–43.

[3] Lassak M., *Parallelotopes of maximum volume in a simplex,* Discrete Comput. Geom. 21(1999), 449–462.

О наилучшем приближении классов $C_\beta^\psi H_\omega$ тригонометрическими полиномами

Е. Ю. Овсий

Институт математики НАН Украины, Киев

ovsiy.imath@gmail.com

Пусть C — пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$. Пусть $C_\beta^\psi H_\omega$ множество функций $f \in C$, представимых в каждой точке $x \in R$ в виде свертки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_\beta(t)\,dt, \quad a_0 \in R, \quad \varphi \in H_\omega^0,$$

где $H_\omega^0 = \{\varphi \in C : \ |\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \omega(|t'-t''|) \ \forall\, t', t'' \in R, \ \varphi \perp 1\}$, $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, $\Psi_\beta(t)$ — суммируемая функция, ряд Фурье которой имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt-$

$\beta\pi/2)$, $\beta \in R$ и $\psi(k)$ — заданная числовая последовательность. Пусть $\mathfrak{M}_0'$ множество всех непрерывных выпуклых вниз при $t \geqslant 1$ функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям:

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0, \quad 0 < \frac{t}{\psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right) - t} \leqslant K, \quad t \geqslant 1, \quad \int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Естественными представителями $\mathfrak{M}_0'$ являются функции вида t^{-r}, $r > 0$, $\ln^{-\alpha}(t+1)$, $\alpha > 1$.

Обозначим через $E_n(C_\beta^\psi H_\omega)$ наилучшее приближение классов $C_\beta^\psi H_\omega$ тригонометрическими полиномами $t_{n-1}(\cdot)$, порядок которых не превышает $n-1$, то есть

$$E_n(C_\beta^\psi H_\omega) = \sup_{f \in C_\beta^\psi H_\omega} \inf_{t_{n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_C.$$

Теорема 1. *Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_0'$, $\beta \in R$ и $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности. Тогда при $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$E_n(C_\beta^\psi H_\omega) = \frac{\theta_n(\omega)}{\pi} \Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big| \int_0^{1/n} \psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{\omega(t)}{t}\, dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n), \tag{1}$$

где $\theta_n(\omega) \in [2/3, 1]$ и $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n и β. Если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то $\theta_n(\omega) = 1$.

О некоторых задачах теории приближения функций на однородных многообразиях

С. С. Платонов [†]

[†]*Петрозаводский государственный университет, Россия*

[†]*platonov@psu.kareli.ru*

Компактные симметрические пространства ранга 1 (КРОСПы) образуют важный класс однородных римановых многообразий, на которых имеется хорошо разработанный аппарат гармонического анализа. Естественным образом на КРОСПах можно изучать аналоги различных теорем теории приближения функций (см. [1] и цитированную там литературу).

Пусть M — КРОСП, $n = \dim M$, $d(x, y)$ — риманово расстояние между точками $x, y \in M$, dx — элемент объема на M, $\mathcal{B}$ — дифференциальный оператор Лапласа – Бельтрами на римановом многообразии M. Пусть X — одно из банаховых пространств $L_p(M, dx)$, $1 \leqslant p < \infty$ или $C(M)$.

Известно что на любом КРОСПе M все геодезические линии замкнуты и имеют одинаковую длину $2L$, где $L = \max\{d(x, y) : x, y \in M\}$ — диаметр многообразия M. Пусть $\sigma(x; t) = \{y \in M : d(x, y) = t\}$ — сфера на M с центром в точке x и радиусом t $(0 < t < L)$. Обозначим через $d\sigma_x(y)$ — $(n-1)$-мерный элемент площади сферы $\sigma(x; t)$, $|\sigma(t)|$ — площадь всей сферы $\sigma(x; t)$. Для любой функции $f \in C(M)$ оператор сферического усреднения определим формулой

$$(S_t f)(x) := \frac{1}{|\sigma(t)|} \int\limits_{\sigma(x;t)} f(y)\, d\sigma_x(y), \qquad 0 < t < L.$$

Можно показать, что оператор S_t продолжается по непрерывности с пространства $C(M)$ до линейного ограниченного оператора на пространстве $L_p(M)$. Это продолжение будем также обозначать через S_t.

Для любой функции $f \in X$ разности ${}^*\Delta_h^k f(x)$ порядка k ($k \in \mathbb{N}$) с шагом h ($0 < h < L$) и модуль гладкости ${}^*\omega_k(f, \delta)_X$ порядка k определяются формулами

$$
{}^*\Delta_h^k f(x) := \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} S_{lh} f(x),
$$

$$
\omega_k(f, \delta)_X := \sup_{0<h\leqslant\delta} \|{}^*\Delta_h^k f\|_X, \quad \delta > 0.
$$

Для любого КРОСПа M спектр оператора Лапласа – Бельтрами $\mathcal{B}$ является дискретным, действительным и неположительным. Будем обозначать через $(-\lambda_k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, собственные значения оператора $\mathcal{B}$, причем упорядочим их по возрастанию λ_k, через $\mathcal{H}_k$ обозначим соответствующие им собственные подпространства. Пусть $\mathcal{P}_\nu(M) := \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \dots + \mathcal{H}_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Функции из $\mathcal{P}_\nu(M)$ будем называть обобщенными сферическими полиномами на M степени ν (при $M = \mathbb{S}^n$ они совпадают с обычными сферическими полиномами). Наилучшим приближением функции $f \in X$ обобщенными сферическими полиномами степени ν называется число $E_\nu(f)_X := \inf\{\|f - \Phi\|_X : \Phi \in \mathcal{P}_\nu(M)\}$. Следующая теорема является аналогом прямой теоремы Джексона в классической теории приближения функций.

Теорема 1. *Пусть k — произвольное натуральное число. Для любых $f \in X$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство*

$$
E_\nu(f)_X \leqslant C\, \omega_k\left(f, 1/\nu\right)_X,
$$

где $C = C(k, M)$ — некоторая положительная постоянная.

Отметим, что для другого модуля гладкости аналогичная теорема доказана в [1].

Литература

[1] Платонов С. С., *О некоторых задачах теории приближения функций на компактных однородных многообразиях,* Матем. сборник. 200, № 6 (2009), 67–108.

Сравнение отклонений обобщенных средних Стеклова в пространствах $L_2(Q_2)$ и $C_A(Q_2)$

Г. Ю. Пуеров

ОАО «Концерн «Океанприбор», СПбГУ ИТМО, Россия

puerov@gp11429.spb.edu

В дальнейшем $L_p(Q_m)$ (при $1 \leqslant p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$) — пространство 2π-периодических по каждой переменной измеримых функций $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, суммируемых с p-й степенью на $Q_m = [-\pi, \pi]^m$ с нормой $\|f\|_p = \left(\int_{Q_m} |f|^p\right)^{1/p}$; $C(Q_m)$ — пространство непрерывных 2π-периодических по каждой переменной функций $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ с нормой $\|f\|_\infty = \max_{x \in Q_m} |f(x)|$. Через $C_A(Q_m)$ обозначается множество вещественнозначных, четных по каждой переменной функций $f \in C(Q_m)$ с неотрицательными косинус-коэффициентами Фурье. Если $a,\ b \in \mathbb{R}^m$, то $ab = (a_1 b_1, \ldots, a_m b_m)$. Символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0.

Если $f \in L_1(Q_1),\ h > 0,\ r - 1 \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$, то полагаем

$$S_{h,1}(f, x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x + t)\, dt, \quad S_{h,r}(f, x) = S_{h,1}(S_{h,r-1}(f), x).$$

Функция $S_{h,r}(f)$ называется функцией Стеклова порядка r с шагом h функции f. Если $f \in L_1(Q_2),\ h = (h_1, h_2),\ h_1 > 0,\ h_2 > 0,\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, то

$$S_{h,1}(f, x) = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)\, dt_1 dt_2.$$

Пусть $l \in \mathbb{N},\ E$ — тождественный оператор. Полагаем

$$S_{h,r,l}(f) = (E - (E - S_{h,r})^l)(f).$$

В работе [1] доказано следующее утверждение: пусть $q \geqslant 1$, $l, r, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant r$, тогда

$$\sup_{h>0} \sup_{f \in L_2(Q_1)} \frac{\|f - S_{qh,s,l}(f)\|_2}{\|f - S_{h,r,l}(f)\|_2} = \left(\frac{s}{r}\right)^l q^{2l},$$

и установлен его аналог для приближения в пространстве $C_A(Q_1)$. Здесь рассматривается случай функций двух переменных.

Теорема 1. *Пусть* $q = (q_1, q_2)$, $q_1 \geqslant 1$, $q_2 \geqslant 1$, $l \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{h=(h_1,h_2)\\ h_1>0,h_2>0}} \sup_{f\in L_2(Q_2)} \frac{\|f - S_{qh,1,l}(f)\|_2}{\|f - S_{h,1,l}(f)\|_2} = \max\{q_1^{2l}, q_2^{2l}\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $q = (q_1, q_2)$, $q_1 \geqslant 1$, $q_2 \geqslant 1$, $l \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{h=(h_1,h_2)\\ h_1>0,h_2>0}} \sup_{f\in C_A(Q_2)} \frac{\|f - S_{qh,1,l}(f)\|_\infty}{\|f - S_{h,1,l}(f)\|_\infty} = \max\{q_1^{2l}, q_2^{2l}\}.$$

Литература

[1] Жук В. В., Пуеров Г. Ю. *Сравнение отклонений обобщенных средних В. А. Стеклова в пространстве* L_2, Вестн. С.-Петерб. ун-та, Сер. 10, вып. 1 (2009), 56–62.

Теорема о среднем для голоморфной в комплексной области функции

Е. И. Радзиевская

Украинский национальный университет пищевых технологий, Украина

radzl58@mail.ru

Как известно, классическая формула

$$f(z_1) - f(z_0) = (z_1 - z_0) f'(\xi), \tag{1}$$

справедливая для вещественнозначных и заданных на отрезке вещественной оси функций, не всегда выполняется для голоморфных в комплексной области функций. В этом легко убедиться на примере функции $f(z) = e^{iz}$ и $z_1 = z_0 + 2\pi$. Тогда левая часть в (3) равна нулю, а правая отлична от нуля, каково бы ни было ξ из $\mathbb{C}$. Тем не менее, известны утверждения, гарантирующие существование такого ξ, для которого выполняется равенство (1), если z_1 достаточно близко расположено к z_0 и $z_1 \neq z_0$. Наиболее известные результаты в этом направлении были получены Дж. Робертсон [1] и А. Самуэльсоном [2]. Приведем теорему, относящуюся к этой тематике.

Теорема 1. *Пусть f — голоморфная в области D функция, не являющаяся линейной, точки z_0 и z_1 не совпадают, а замыкание круга $U(\frac{z_1+z_0}{2}; \frac{|z_1-z_0|}{2})$ принадлежит области D. Пусть s — наименьшее из натуральных чисел, для которых*

$$f^{(s+1)}((z_1 + z_0)/2) \neq 0$$

и

$$|z_1 - z_0| \left(\sup_{\zeta \in U((z_1+z_0)/2; |z_1-z_0|/2)} |f^{(s+2)}(\zeta)| \right) <$$

$$< \frac{s+2}{s+3}(2s + 1 - (-1)^s) \left| f^{(s+1)} \left(\frac{z_1 + z_0}{2} \right) \right|.$$

Тогда в круге $U(\frac{z_1+z_0}{2}; \frac{|z_1-z_0|}{2})$ найдется, по крайней мере, одно, но не более s различных ξ, для которых справедлива формула (1).

Отметим, что из этой теоремы можно получить такой результат: если $|z_1 - z_0| < 1,451$ и $z_1 \neq z_0$, то существует единственное ξ из круга $U(\frac{z_1+z_0}{2}; \frac{|z_1-z_0|}{2})$, для которого справедлива формула $e^{z_1} - e^{z_0} = (z_1 - z_0)e^{\xi}$. Этот же результат, но при значительно более жестком требовании $|z_1 - z_0| < 0,3$, установлен в [1].

Литература

[1] Robertson J. M., *A local mean value theorem for the complex plane,* Proc. Edinburg Math. Soc. V. 16, № 4 (1969), 329–331.

[2] Samuelsson A., *A local mean value theorem for analytic functions,* Amer. Math. Monthly. V. 80, № 1 (1973), 45–46.

Теория решетчатых кубатурных формул

М. Д. Рамазанов

Учреждение Российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Россия

ramazanovmd@yandex.ru

Решетчатые кубатурные формулы служат для приближенных вычислений интегралов $\int\limits_{\Omega} f(x)dx$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ линейными комбинациями значений подинтегральной функции в узлах заданных решеток $\sum\limits_{H_N k \in \mathbb{R}^n} c_k(N) f(H_N k)$, H_N — матрица $n \times n$, $N = |\Omega|/|\det H_N|$. Качество приближения при сгущении решетки, $\|H_N\| \to 0$ $(N \to \infty)$ характеризуется скоростью убывания нормы функционала погрешности

$$(l_N^{\Omega}, f) \equiv \int\limits_{\Omega} f(x)dx - \sum_{H_N k \in \Omega} c_k(N)(H_N k)$$

на выбранном пространстве подинтегральных функций [1].

Для пространств $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|f\| = \left(\int d\xi |f(\xi)\mu(2\pi i\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

и гипоэллиптическим символом гладкости $\mu(2\pi i\xi)$, $\mu(D)$ — псевдодифференциальный гипоэллиптический оператор, получен новый алгоритм построения решетчатых асимптотически оптимальных кубатурных формул, обладающих ограниченным пограничным слоем [2].

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00349-а).

Литература

[1] Соболев С. Л., Васкевич В. Л., *Кубатурные формулы,* Изд-во ИМ СО РАН, Новосибирск. 1996.

[2] Рамазанов М. Д., *Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем,* Изд. ДизайнПолиграфСервис, ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа. 2009.

Об асимптотике интегралов, связанных с канторовой лестницей

Н. В. Растегаев

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

dtroy@list.ru

Классическая канторова лестница естественным образом включается в различные семейства самоподобных функций на единичном отрезке. Для функции $C(t)$ из такого класса мы рассмотрим интеграл следующего вида:

$$E(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda C(t)} dt.$$

Исследуются различные асимптотики этого интеграла, в частности, при $\lambda \to +\infty$. Мы обобщаем некоторые результаты работы [1], в которой был проведен подробный анализ однопараметрического семейства симметричных канторовых лестниц.

Литература

[1] Горин Е. А., Кукушкин Б. Н., *Интегралы, связанные с канторовой лестницей,* Алгебра и анализ. Т. 15, № 3 (2003), 188–220.

Параллельные алгоритмы решетчатых кубатурных формул

Д. Я. Рахматуллин

Учреждение Российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Россия

rahmdy@gmail.com

Теория кубатурных формул и их одномерных аналогов — квадратурных формул — является хорошо развитой областью математического анализа и вычислительной математики. Данным научным направлением занималось множество математиков — известны работы И. Ньютона, Л. Эйлера, К. Гаусса, Ш. Эрмита, русских и советских математиков П. Л. Чебышева, С. Н. Бернштейна, С. Л. Соболева, С. М. Никольского и других ([1]–[3]). Теория квадратурных и кубатурных формул продолжает интенсивно развиваться и на сегодняшний день — по данной тематике публикуется множество работ и регулярно проводятся научные конференции.

Несмотря на множество работ по данной теме, на сегодняшний день существуют актуальные задачи, связанные как непосредственно с теорией формул С. Л. Соболева, так и с ее приложениями в компьютерных вычислениях.

В частности, актуальной является проблема приближенного вычисления интегралов большой кратности, для решения которой в данный момент используются, в основном, методы интегрирования типа Монте-Карло, имеющие, однако, слабые стороны, а именно — невысокую скорость сходимости и негарантированные, вероятностные оценки погрешности результата.

Мы решаем проблему вычисления интегралов путем приближения интеграла решетчатыми асимптотически оптимальными кубатурными формулами с ограниченным пограничным слоем ([4]). Придуманы алгоритмы ([5]–[7]) и разработаны программы для многопроцессорных вычислительных систем ([8]).

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00349-а).

Литература

[1] Соболев С. Л., Васкевич В. Л., *Кубатурные формулы,* Изд-во ИМ СО РАН, Новосибирск, 1996.

[2] Рамазанов М. Д., *Лекции по теории кубатурных формул,* Изд-во БашГУ, Уфа, 1973.

[3] Ramazanov M. D., *To the L_p-Theory of Sobolev Formulas,* Siberian advances in mathematics. Vol. 9, № 1 (1999), 99–125.

[4] Рамазанов М. Д., *Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем,* Изд. ДизайнПолиграфСервис, ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2009.

[5] Рамазанов М. Д., Рахматуллин Д. Я., Валеева Л. С., Банникова Е. Л., *Решение интегральных уравнений на многопроцессорных вычислительных системах,* Журнал Сибирского федерального университета. Сер. матем. Красноярск. СФУ. Т. 2, № 1 (2009), 69–87.

[6] Рахматуллин Д. Я., *Интегрирование функций по выпуклым областям на многопроцессорных вычислительных системах,* Автореферат диссертации канд. физ.-мат. наук. ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2006.

[7] Рахматуллин Д. Я., *Вычисление интегралов по многомерным областям на многопроцессорных вычислительных системах,* Вычислительные технологии. Т. 11, № 3 (2006), 118–125.

[8] Рахматуллин Д. Я., *Программа интегрирования по многомерным областям «CubaInt»,* Свидетельство № 2007614331 от 10.10.2007.

О приближении бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора

Т. В. Рвачева

Национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

rvachova@gmail.com

Пусть $N_n = \{-2^{n-1}, -2^{n-1}+1, \ldots, 2^{n-1}-1, 2^{n-1}\}$, $n \neq 0$; $N_0 = \{-1, 0, 1\}$; $x_{n,k} = \left\{\frac{k}{2^{n-1}}\right\}$, $n \neq 0$, $k \in N_n$; $x_{0,k} = \{k\}$, $k \in N_0$.

В [1] доказано, что если

$$\exists \rho \in [1,\, 2): \ \|f^{(k)}\|_{C[-1,\,1]} \leqslant C(f)\rho^k 2^{\frac{k(k+1)}{2}},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

то f раскладывается в так называемый обобщенный ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x), \tag{2}$$

где базисные функции $\tilde{\varphi}_{n,k}(x)$ являются конечными линейными комбинациями сдвигов функций $up(x)$:

$$\tilde{\varphi}_{n,k}(x) = \sum_{l} c_l^{(n,k)} up(x - l2^{-n})$$

и играют роль функций x^n в обычных рядах Тейлора, а функция

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt$$

является решением с компактным носителем ФДУ

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

Ряд (2) сходится на промежутке $[-1,\, 1]$ равномерно.

В работе [2] автором была исследована связь между коэффициентами и суммой обобщенного ряда Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет (1). Будем приближать ее частичной суммой ряда (2). Автором получены следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $f(x)$ *удовлетворяет* (1) *и*

$$\exists C: \ |f^{(n)}(x_{n,k})| \leqslant C r^n n^{\alpha n} \quad \forall n \in N, \ \forall k \in N_n$$

для некоторого $r > 0$, $\alpha \geqslant 1$. *Тогда справедлива следующая оценка для скорости приближения* $f(x)$ *частичной суммой ряда* (2):

$$R_m \leqslant \frac{\tilde{C}(r,\alpha)}{2^{\frac{m^2}{2} - \alpha m \log_2(m+1) - m \log_2 r}},$$

где

$$R_m = \left\| f(x) - \sum_{n=0}^{m} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x) \right\|_{C[-1,\,1]}. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *удовлетворяет* (1) *и*

$$\exists C: |f^{(n)}(x_{n,k})| \leqslant C A(n) \quad \forall n \in N, \ \forall k \in N_n,$$

где $\frac{A(n+1)}{A(n)} \leqslant 2^{n+\frac{1}{2}}$. *Тогда*

$$R_m \leqslant \frac{\tilde{C}}{8^{\frac{m}{2}}},$$

где R_m *определено в* (3).

Литература

[1] Рвачев В. А., *Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение,* Успехи матем. наук. Т. 45, вып. 1 (271), (1990), 77–103.

[2] Rvachova T. V., *On a relation between the coefficients and the sum of the generalized Taylor series,* Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. Vol. 10, No. 2 (2003), 262–268.

Об ускорении сходимости степенных рядов целых функций

В. М. Рябов †, М. М. Кабардов‡

†‡ *Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

†*riabov@VR1871.spb.edu* ‡*kabardov@bk.ru*

Пусть $A(\rho,\tau)$ — класс целых функций порядка ρ и типа τ. Мы строим алгоритм вычисления функции $F\in A(\rho,\tau)$ на некотором компакте, сходящийся быстрее простого суммирования ряда Тейлора $F(z)$. Полученные ниже результаты обобщают утверждения работы [1], относящиеся к случаю $\rho=1$.

В качестве представителя класса $A(1/a,1)$ возьмем функцию Миттаг-Леффлера $E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/\Gamma(ak+1)$. Пусть $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k/\Gamma(ak+1)$. Её обобщенное преобразование Бореля равно $\varphi(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k/w^{k+1}$. Пусть задан степенной ряд $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Определим линейный функционал Ω_g, отображающий пространство полиномов в комплексную плоскость C:

$$\Omega_g\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j c_j, \quad n=0,1,\ldots$$

Тогда можно записать формальное равенство $F(z)=\Omega_f(E_a(xz))$, где $f(z) = \varphi(1/z)/z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, а функционал Ω_f действует на $E_a(xz)$ как на функцию от переменной x.

Предлагаемый алгоритм состоит в следующем:

1) строим аппроксимирующие функцию $E_a(y)$ многочлены $P_n(y) = p_{n0} + p_{n1}y + \ldots + p_{nn}y^n, n=0,1,\ldots$;

2) применяем функционал Ω_f, т. е. вычисляем

$$Q_n(z) = \Omega_f(P_n(xz)) = p_{n0}c_0 + p_{n1}c_1 z + \ldots + p_{nn}c_n z^n\,.$$

Пусть $P_n(y) = \sum_{k=0}^{n} y^k/\Gamma(ak+1)$ — частичная сумма ряда $E_a(y)$, тогда $\Omega_f(P_n(xz)) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \Gamma(ak+1)$. В общем случае, при наличии хороших полиномиальных аппроксимаций функции Миттаг-Леффлера (например, интерполяционными многочленами) можно надеяться на получение достаточно быстро сходящихся приближений к $F(z)$.

Величины $\sigma_{\{P_n\}}(y) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|E_a(y) - P_n(y)|\Gamma(an+1)}$, $\sigma_{\{P_n\}}(T) = \sup_{y\in T} \sigma_{\{P_n\}}(y)$ назовем асимптотической скоростью сходимости последовательности $\{P_n(y)\}$ в точке $y \in C$ и на компакте T, соответственно. Аналогично вводятся величины $\sigma_{\{Q_n\}}(F; z)$ и $\sigma_{\{Q_n\}}(F; T')$. Говорят, что последовательность $\{P_n\}$ имеет асимптотически оптимальную скорость сходимости к $E_a(y)$ на компакте $T \subset C$, если $\sigma_{\{P_n\}}(T) = d_\infty(T)$ ($d_\infty(T)$ — трансфинитный диаметр (ёмкость) множества T). Аналогичные величины вводятся и для последовательности $\Omega_f(P_n(xz))$ в точке и на компакте $T' \subset C$.

Пусть $\mathcal{R}$ — матрица узлов интерполирования, $\omega_{n+1}(y) = \prod_{j=0}^{n}(y - y_j^{(n)})$ — многочлен, соответствующий n-й строке матрицы $\mathcal{R}$ и $M_{n+1} = \max_{y\in T} |\omega_{n+1}(y)|$ — максимум его модуля на компакте T. Узлы $y_j^{(n)} \in T$ матрицы $\mathcal{R}$ называются равномерно распределенными на компакте T, если $\limsup_{n\to\infty} M_n^{1/n} = d_\infty(T)$, где $d_\infty(T)$ — трансфинитный диаметр множества T [2].

Теорема 1. *Пусть задана матрица узлов интерполирования $\mathcal{R}$ и $y_j^{(n)} \in T$ $\forall j, n$. Тогда для последовательности многочленов $\{P_n\}$, интерполирующих $E_a(y)$, выполнены условия:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(y) = E_a(y)$ *равномерно на всяком компакте из* C*;*

б) $\sigma_{\{P_n\}}(y) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} |\omega_{n+1}(y)|^{1/n}$*;*

в) если узлы $y_j^{(n)}$ равномерно распределены на компакте $T \subset C$, то $\sigma_{\{P_n\}}(T) = d_\infty(T)$, т. е. последовательность $\{P_n\}$ сходится на T к $E_a(y)$ асимптотически оптимально.

Литература

[1] Wild P., *Accelerating the convergence of power series of certain entire functions,* Numer. Math. 51 (1987), 583–595.

[2] Гайер Д., *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области,* Мир, М., 1986.

О неравенствах типа Лебега для сумм Валле Пуссена на множествах интегралов Пуассона суммируемых функций

А. С. Сердюк [†], А. П. Мусиенко[‡]

[†‡] *Институт математики НАН Украины, Украина*

[†] *serdyuk@imath.kiev.ua* [‡] *andreymap@rambler.ru*

Пусть $L^q_\beta\mathfrak{N}$ — множество всех функций f, представимых в виде свертки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)P_{q,\beta}(t)dt,\ a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\varphi \in \mathfrak{N} \subset L$, а $P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$ — ядро Пуассона с параметрами $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Функции f, представимые в виде (1), называют интегралами Пуассона функции φ и обозначают через $f^q_\beta(\cdot)$. В качестве $\mathfrak{N}$ будут выступать множества L_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ либо C.

Тригонометрические полиномы $V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$, где $S_k(f;x)$ — частные суммы Фурье порядка k функции f, называют суммами Валле Пуссена функции f с параметрами n и p.

Пусть, далее, $E_n(\varphi)_s$ — величина наилучшего приближения функции $\varphi \in L_s$ тригонометрическими полиномами t_{n-1} порядка не превышающего $n-1$ в пространстве L_s,

$$E_n(\varphi)_s = \inf_{t_{n-1}} \|\varphi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_s.$$

Для функций f из множества $L^q_\beta L_s$ $(L^q_\beta C)$ установлены неравенства типа Лебега, оценивающие нормы отклонений $\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x)$ в метрике пространства L_s (C) через наилучшие приближения функций f^q_β тригонометрическими полиномами порядка, не превышающего $n-p$ в той же метрике. В некоторых случаях полученные неравенства являются асимптотически точными.

Теорема 1. *Пусть $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n,p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$ и $1 \leqslant s \leqslant \infty$. Тогда для любой функции $f \in L^q_\beta L_s$ справедливо неравенство*

$$\|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_s \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p} + O(1)\frac{q}{(1-q)^\delta(n-p+1)}\right)E_{n-p+1}(f^q_\beta)_s,$$

в котором

$$K_{q,p} \overset{df}{=} \int_0^\pi \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2}dt, \qquad \delta = \begin{cases} 1, & p=1; \\ 3, & p=2,3,..., \end{cases} \tag{2}$$

а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по параметрам n,p,q,β,s и f.

Теорема 2. *Пусть $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n,p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$. Тогда для любой функции $f \in L^q_\beta C$*

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C = \|\rho_{n,p}(f;x)\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p} + O(1)\frac{q}{(1-q)^\delta(n-p+1)}\right)E_{n-p+1}(f^q_\beta)_C,$$

где $K_{q,p}$ и δ определяются формулой (2), а $O(1)$ — величина, равномерно ограничена по параметрам n,p,q,β и f.

При этом для каждой функции $f \in L^q_\beta C$ и произвольных $n,p \in N$, $p \leqslant n$ в пространстве $L^q_\beta C$ существует функция $F(x) = F(f;n;p;x)$ такая, что $E_{n-p+1}(F^q_\beta)_C = E_{n-p+1}(f^q_\beta)_C$ и *для этой функции при $n - p \to \infty$ выполняется равенство:*

$$\|\rho_{n,p}(F;x)\|_C = \frac{q^{n-p+1}}{p}\Bigg(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p} + \\ + O(1)\frac{q}{(1-q)^{\delta}(n-p+1)}\Bigg)E_{n-p+1}(F^q_\beta)_C. \quad (3)$$

При $p = 1$ теоремы 1 и 2 доказаны в [1].

Литература

[1] Степанец А. И., Сердюк А. С., *Неравенства Лебега для интегралов Пуассона,* Укр. мат. журн. 54, №12 (2002), 1653–1668.

Билинейное приближение классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных

К. В. Солич

Институт математики НАН Украины, Украина

Sokava@mail.ru

В докладе будет идти речь о билинейных приближениях классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных с заданной функцией $\Omega(t)$ типа модуля непрерывности порядка $l \in \mathbb{N}$, которая удовлетворяет условиям Бари—Стечкина [1]. Ниже в формулировке полученного утверждения эти условия обозначаются (S) и (S_l).

Пусть $L_q(\mathbb{T}^{2d})$, $q = (q_1, q_2)$, — множество функций $f(x,y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, с конечной смешанной нормой

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \|\,\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\|_{q_2},$$

где норма вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$ по переменной $x \in \mathbb{T}^d$, а затем от результата — по переменной $y \in \mathbb{T}^d$

в пространстве $L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$. Для $f \in L_q(\mathbb{T}^{2d})$ определим наилучшее билинейное приближение порядка m:

$$\tau_m(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(x),v_i(y)} \|f(x,y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x)v_i(y)\|_{q_1,q_2},$$

где $u_i \in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $v_i \in L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$.

Если $F \subset L_q(\mathbb{T}^{2d})$ — класс функций, то полагаем

$$\tau_m(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f \in F} \tau_m(f)_{q_1,q_2}.$$

Основная цель — получить точные по порядку оценки величины

$$\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2} = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \tau_m(f)_{q_1,q_2},$$

в предположении, что $f(x) \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, а билинейные приближения $\tau_m(f)_{q_1,q_2}$ рассматриваются для функций вида $f(x-y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$.

Положим

$$\alpha(p,q_1) = \begin{cases} d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1})_+, & \begin{array}{l} 1 \leqslant p \leqslant q_1 \leqslant 2 \quad \text{или} \\ 2 \leqslant q_1 \leqslant p \leqslant \infty, \end{array} \\ \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}, & \begin{array}{l} 2 \leqslant p \leqslant q_1 \leqslant 2 \quad \text{или} \\ 1 \leqslant p < 2 < q_1 \leqslant \infty. \end{array} \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p, q_1, q_2, \theta \leqslant \infty$ и $\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S) с $\alpha > \alpha(p, q_1)$, а также условию (S_l). Тогда для $m \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$\tau_m(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2} \asymp \begin{cases} \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}, & 1 \leqslant p \leqslant q_1 \leqslant 2, \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}}), & \begin{array}{l} 2 \leqslant p \leqslant q_1 \leqslant \infty \quad \textit{или} \\ 2 \leqslant q_1 \leqslant p \leqslant \infty, \end{array} \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 \leqslant p < 2 < q_1 \leqslant \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Замечание. При $\Omega(t) = t^r$, $r > 0$, и определенных ограничениях на r из (1) следуют соответствующие оценки для величины $\tau_m(B^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ [2].

Литература

[1] Бари Н. К., Стечкин С. Б., *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. мат. об-ва. 5 (1956), 483–522.

[2] Романюк А. С., *Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова*, Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. 6, №1 (2009), 222–236.

Шкала неравенств с точными константами для интерполяционных сплайнов произвольного порядка

Н. А. Стрелков

Ярославский государственный университет, Россия
strelkov@uniyar.ac.ru

Пусть $\mathbb{R}_h$ — равномерная сетка на действительной прямой $\mathbb{R}$, состоящая из узлов $x_k = kh,\ k \in \mathbb{Z}$. Если $f \in C(\mathbb{R})$, то тем же символом f будет обозначаться последовательность, состоящая из значений функции f в узлах сетки $\mathbb{R}_h$, то есть $f = \{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $f_k = f(x_k)$. Для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ пусть $S_n(x) = S_n(x, f, \mathbb{R}_h)$ — интерполяционный сплайн порядка n (для f), определяемый следующими условиями:

1) сплайн S_n — алгебраический полином степени n на каждом из интервалов $(kh+(n-1)h/2, kh+(n+1)h/2)$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $S_n(kh) = f_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$;

3) $S_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$.

Если $n \geqslant 2$, то для любой последовательности f существует бесконечно много интерполяционных сплайнов n–го порядка. Однако если разности порядка n от f ограничены, то существует единственный интерполяционный сплайн $S_n(x, f, \mathbb{R}_h)$, имеющий ограниченную n–ю производную.

В дальнейшем будут использоваться полиномы

$$Q_n(x, z) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} z^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (x + k - j)^n$$

и

$$R_n(z) = zQ_n(1 - d_n, z),$$

где

$$d_n = (n+1)/2 - [(n+1)/2],$$

т.е. d_n равно $1/2$ или 0 в зависимости от четности или нечетности n.

Полином R_n имеет степень $2[n/2]+1$, а его нули z_r ($|r| \leqslant [n/2]$) таковы, что $z_0 = 0$, $z_1, \ldots, z_{[n/2]}$ — различные точки интервала $(-1, 0)$, а $z_{-r} = 1/z_r$ для всех $r = 1, \ldots, [n/2]$.

Пусть $A_n(x, t)$ — кусочно–полиномиальная функция, определяемая в полосе $(0, 1/2) \times \mathbb{R}$ следующим образом: для $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (0, 1/2)$, $t \in (0, 1)$

$$A_n(x, k+t) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{-k} Q_n(t, z_r) Q_n(1 - d_n - x, z_r)}{(1 - z_r)^{n+1} R_n'(z_r)},$$

если $t + k < x$;

$$A_n(x, k+t) = (-1)^{n+1} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{k+2d_n} Q_n(1 - t, z_r) Q_n(d_n + x, z_r)}{(1 - z_r)^{n+1} R_n'(z_r)},$$

если $t + k > x$.

Теорема 1. *Пусть* $p \in [1, \infty]$ *и* $\|f^{(j)}\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty$.
Если $0 \leqslant m < j \leqslant n+1$, *то*

$$\|S_n^{(m)} - f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant C(m, j, p, n) h^{j-m-1/p} \|f^{(j)}\|_{L_p(\mathbb{R})};$$

если $0 \leqslant j \leqslant m \leqslant n$, *то*

$$\|S_n^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant C(m,j,p,n) h^{j-m-1/p} \|f^{(j)}\|_{L_p(\mathbb{R})}. \tag{1}$$

Постоянные $C(m,j,p,n)$ *имеют вид*

$$C(m,j,p,n) = \|F_{m,j,p,n}\|_{L_\infty(0,1/2)},$$

где

$$F_{m,j,p,n}(x) = \|D_1^m D_2^{n+1-j} A_n(x,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})},\ q = \frac{p}{p-1}.$$

Константы $C(m,j,p,n)$ *уменьшить нельзя.*

Если $j = 0$, то оценка (1) содержательна лишь в случае $p = \infty$, поскольку если $p \in [1,\infty)$, то $C(m,0,p,n) = \infty$ для всех $m \leqslant n$.

Об устойчивости недостаточных и избыточных методов численного интегрировния обыкновенных дифференциальных уравнений

Л. А. Сулягина

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

parallel@math.spbu.ru

В работе рассматривается устойчивость недостаточных и избыточных методов численного интегрировния обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f(t,x),\ x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

При целых m и μ, таких, что $0 \leqslant \mu \leqslant m$, определен явный одношаговый метод типа $D(1,m|\mu)$ по формулам:

$$x_{k+\xi} = x_k + \sum_{j=0}^{m} \frac{(\xi h)^{j+1}}{(j+1)!} f_k^{(j)},$$

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{j=0}^{m} A_j h^{j+1} f_k^{(j)} \ + B h^{\mu+1} f_{k+\xi}^{(\mu)},$$

где $A_j,\ B$ — некоторые положительные коэффициенты.

Теорема 1. *Недостаточный метод численного интегрирования $D(1, m|\mu)$ обладает непустой областью абсолютной устойчивости в комплексной плоскости.*

Перейдем к избыточным методам. $E(1, m|\mu)^*$ — это одношаговый неявный метод с одной дополнительной точкой на шаге интегрирования. В нем используются m производных в точке (t_k, x_k) и производную порядка μ $(0 \leqslant \mu \leqslant m)$ в дополнительной точке $(t_k + \xi h, x_{k+\xi})$ и в точке (t_{k+1}, x_{k+1}).

Теорема 2. *Методы численного интегрирования $E(1, m|\mu)^*$ обладают непустой областью абсолютной устойчивости в комплексной плоскости.*

Для построения границы области устойчивости воспользуемся методом геометрического места точек границы [1]. Перейдя к полярным координатам, положив $m + 2 = n$ и обозначив через a_i числовые коэффициенты при степенях ρ, получим уравнение (см. уравнение (5) из [2])

$$|\rho^n a_0 e^{in\varphi} + \rho^{n-1} a_1 e^{i(n-1)\varphi} + \cdots + \rho a_{n-1} e^{i\varphi} + 1| = 1. \tag{2}$$

Положим в (2) $\varphi = \pi$. Тогда данное уравнение имеет вид

$$|a_0 (-1)^n \rho^n + a_1 (-1) n - 1 \rho^{n-1} + \cdots + (-1) a_{n-1} \rho + 1| = 1. \tag{3}$$

Обратимся к отрезку на отрицательной полуоси x, который отсекается границей области устойчивости.

Определение. Наименьший положительный корень уравнения (3) назовем элементарным радиусом и обозначим его ρ_*.

Теорема 3. *В классе недостаточных методов численного интегрирования $D(1, m|0)$ для элементарного радиуса справедлива следующая оценка:*

$$\frac{1}{2} < \rho_* < m + 2.$$

Литература

[1] Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта, *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений,* М., 1979.

[2] Сулягина Л. А., *Устойчивость одношаговых методов численного интегрирования, использующих производные,* Методы вычислений. Изд-во С.-Петербург. ун-та. Вып. 18 (1999), 205–211.

К задаче полиномиального интерполирования с кратными узлами

Г. Ш. Тамасян †, А. Ю. Утешев ‡

†‡ *Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

† *grigoriytamasjan@mail.ru* ‡ *Alexei.Uteshev@pobox.spbu.ru*

Рассматривается задача Эрмита построения полинома $H(x)$, имеющего заданные значения и значения своих производных в узлах интерполяции $\{x_1, \ldots, x_s\} \subset \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{c} F(x_1), \ldots, F^{(n_1-1)}(x_1), \\ F(x_2), \ldots, F^{(n_2-1)}(x_2), \\ \ldots \\ F(x_s), \ldots, F^{(n_s-1)}(x_s). \end{array} \tag{1}$$

При наличии ограничения на степень

$$\deg H \leqslant n_1 + \dots + n_s - 1,$$

полином $H(x)$, решающий задачу, существует и единствен [1, 2, 3]. Однако известные в литературе конструктивные способы построения такого полинома довольно громоздки [4, 5, 6].

В докладе представлен новый метод решения задачи, основанный на построении полинома $G(x)$, удовлетворяющего ограничению на степень:

$$\deg G \leqslant n_1 + \dots + n_s + \max_{k=\overline{1,s}} n_k - 2.$$

Несмотря на то, что, как правило, $\deg G \geqslant \deg H$, для вычисления полинома $G(x)$ предлагается сравнительно простой алгоритм. Собственно полином $H(x)$ может быть получен посредством деления полинома $G(x)$ на $(x - x_1)^{n_1} \times \dots \times (x - x_s)^{n_s}$; в докладе приведен также метод быстрого нахождения коэффициентов $H(x)$ на основе вспомогательных симметрических функций от узлов интерполяции.

Производится сравнительный анализ метода по эффективности с другими, известными в литературе [4, 5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований грант № 09-01-00360.

Литература

[1] Hermite Ch., *Sur la formule d'interpolation de Lagrange,* J.f.reine u. angew. Mathematik. Bd. 84 (1878), 70–79. (опубликовано также в книге Hermite Ch. «Oeuvres» Gauthier-Villars. Paris. V.3, 1912, 432–443)

[2] Крылов В. И., *Приближенное вычисление интегралов,* Наука, М., 1967.

[3] Mejiering E., *A chronology of interpolation: from ancient astronomy to modern signal and image processing,* Proceedings of the IEEE. 90, № 3 (2002), 319–342.

[4] Калиткин Н. Н., *Численные методы,* Наука, М., 1978.

[5] Березин И. С., Жидков Н. П., *Методы вычислений,* Том 1, Гл. ред. физ-мат. лит., М., 1959.

[6] Самарский А. А., Гулин А. В., *Численные методы: Учеб. пособие для вузов,* Наука, М., 1989.

О скорости приближения функций в липшицевой норме

С. А. Теляковский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Россия
sergeyAltel@yandex.ru

Рассматривается приближение непрерывных 2π-периодических функций f тригонометрическими полиномами по норме

$$\| f \|_\varphi = \| f \|_C + \sup_{\delta>0} \frac{1}{\varphi(\delta)} \omega(f,\delta),$$

где φ — положительная возрастающая на $(0,\infty)$ функция. Для $\varphi(\delta) = \delta^\beta$ при $\beta < \alpha$ оценки приближения по норме $\| \cdot \|_\varphi$ суммами Фурье и Фейера установил З. Прёссдорф (1975). Затем в работах ряда авторов рассматривались классы функций, более общие, чем классы Липшица, а также приближения другими средними.

Опираясь на установленные С. Б. Стечкиным оценки модуля непрерывности приближающих полиномов через модуль непрерывности приближаемой функции, мы показываем, что в таких задачах приближение по норме $\| \cdot \|_\varphi$ в сущности сводится к приближению по норме C.

Теорема 1. *Пусть ω — модуль непрерывности и отношение $\omega(\delta)/\varphi(\delta)$ возрастает на $(0,\pi)$. Если при некотором n для функции $f \in H(\omega)$ справедлива оценка*

$$\| f - t_n \|_C \leqslant A\omega(f, 1/n),$$

где A — некоторая числовая величина (которая может зависеть от n), то

$$\| f - t_n \|_\varphi \leqslant A\omega(f, 1/n) + 7(1+A)\omega(f, 1/n)/\varphi(1/n).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08 – 01 – 00598).

Об уклонении полигармонических в верхней полуплоскости функций от их граничных значений

М. Ф. Тиман

Днепропетровский аграрный университет, Украина

mtiman@yandex.ru

Пусть $S_p(-\infty,\infty), 1 \leqslant p < \infty$, означает пространство заданных и абсолютно интегрируемых по Лебегу на всей действительной оси функций $f(x)$, у которых существуют интегралы Фурье $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dt$, удовлетворяющие условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx < \infty$. Норма в пространстве $S_p(-\infty,\infty)$ определяется величиной: $\|f(x)\|_p = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^p dt \right\}^{1/p}$.

Рассмотрим далее линейный оператор, определенный при некотором натуральном k следующим образом:

$$W_k(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{itx}e^{-ty} \sum_{m=0}^{k-1} (1-e^{-2y})^m Q(m;t)dt, \qquad (1)$$

где $Q(0,t)=1$, $Q(m,t)=\frac{t(t+2)(t+4)\ldots(t+2m-2)}{m!2^m}$, $m=1,2,3,\ldots,k-1$.

Непосредственной проверкой можно показать, что функция $U=W_k(x,y)$, заданная формулой (1), является решением следующего полигармонического уравнения:

$$\Delta^k U = 0\ (\Delta^k U = \Delta(\Delta^{k-1}U)),\ \Delta U = \Delta W_k(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

удовлетворяющая граничным условиям: $W_k(x,y)\Big|_{y=0} = f(x)$, $\left\{\frac{\partial^l}{\partial y^l} W_k(x,y)\right\}\Big|_{y=0} = 0,\ l=1,2,\ldots,k-1$.

Для линейных операторов, определенных формулой (1), справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x) \in S_p(-\infty,\infty)$, а функция $W_k(x,y)$ определена формулой (1), в которой функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dt$. Тогда при $y \to 0$ имеет место порядковое равенство*

$$\|f(x) - W_k(x,y)\|_p \cong y^k \left\{ \int\limits_0^{1/y} (\sigma+1)^{k(p-1)} A^p_\sigma(f)_p \right\}^{1/p}, \qquad (2)$$

где $1 \leqslant p < \infty$, $k=1,2,3,\ldots,$ $A_\sigma(f)_p$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ целыми функциями степени $\leqslant \sigma$ в метрике пространства $S_p(-\infty,\infty)$.

Отметим, что для функций одной переменной при $k=1$, $p=2$ порядковое равенство (2) в эквивалентной форме установлено ранее автором (см. [1]). Отметим также, что аналогичные вопросы для периодических функций исследованы в монографии автора [2].

Литература

[1] Тиман М. Ф., *Исследование свойств функций с заданными наилучшими приближениями*, Автореферат диссертации, Ленинград, 1973.

[2] Тиман М. Ф., *Аппроксимация и свойства периодических функций,* Изд-во «Наукова думка», НАН Украины, 2009.

Периодические всплески, связанные с ядрами типа Дирихле—Уолша

Ю. А. Фарков

Российский государственный геологоразведочный университет, Россия

farkov@list.ru

В работе [1] с помощью модифицированных ядер Дирихле

$$\mathcal{D}_m^*(x) := \frac{1}{2}(1+\cos mx) + \sum_{k=1}^{m-1} \cos kx, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R},$$

определены всплесковые базисы в пространствах тригонометрических полиномов. В двоичном анализе [2] функцию f, заданную на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ с двоичным сложением $\oplus$, называют 1-периодической, если $f(x) = f(x \oplus 1)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Например, 1-периодическими являются классические функции Уолша $\{w_k(x)\}$. Для данного $N = 2^n$, где n — целое неотрицательное число, определим модифицированное ядро Дирихле—Уолша по формуле

$$D_N^*(x) = \frac{1}{2}(1 + w_{N-1}(x)) + \sum_{k=1}^{N-2} w_k(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

и для $0 \leqslant k \leqslant N-1$ введем функции

$$\varphi_{n,k}(x) = \Phi_n(x \oplus (k/N)), \quad \psi_{n,k}(x) = \Psi_n(x \oplus (k/N)),$$

где $\Phi_n(x) = N^{-1}D_N^*(x)$, $\Psi_n(x) = \varphi_{n+1,0}(x) - \varphi_{n+1,1}(x)$. Доказано, что системы $\{\varphi_{n,k}\}_{k=0}^{N-1}$ и $\{\psi_{n,k}\}_{k=0}^{N-1}$ являются базисами соответственно в пространствах $V_n = \operatorname{span}\{1, w_1(x), \ldots, w_{N-1}(x)\}$ и

$W_n = \mathrm{span}\{w_N(x), \dots, w_{2N-1}(x)\}$. Построены быстрые алгоритмы для разложения $f_{n+1} \in V_{n+1}$ в ортогональную сумму:

$$f_{n+1} = f_n + g_n, \quad f_n \in V_n, \quad g_n \in W_n,$$

и для восстановления f_{n+1} по f_n и g_n (см. [3]). Эти алгоритмы оказались существенно проще (как по структуре, так и по числу арифметических операций) по сравнению с соответствующими алгоритмами в [1].

Литература

[1] Chui C. K., Mhaskar H. N., *On trigonometric wavelets,* Constr. Approx. 9 (1993), 167–190.

[2] Голубов Б. И., *Элементы двоичного анализа, Издание 2-е,* Издательство ЛКИ, М., 2007.

[3] Farkov Yu. A., *Wavelets and frames based on Walsh-Dirichlet type kernels,* Communications in Mathematics and Applications 1 (2010), 27–46.

Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций

Ю. И. Харкевич†, Т. В. Жигалло‡

†‡*Волынский национальный университет, Украина*

†*yu-kharkevych@ukr.net* ‡*tetvas@ukr.net*

Основной результат данной работы касается классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ А. И. Степанца (см., напр., [1]), поэтому сформулируем сначала некоторые определения. Пусть $f(\cdot)$ — 2π-периодическая суммируемая функция ($f \in L_1$) и $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ —

ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная фиксированная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi\left(k\right)}\left(a_k\cos\left(kx+\frac{\pi\beta}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi\in L_1$, то φ называют (ψ,β)-производной функции f и обозначают через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. Подмножество функций $f\in L_1$, у которых существуют (ψ,β)-производные, обозначают через L^{ψ}_{β}. Подмножество непрерывных функций из L^{ψ}_{β} обозначают через C^{ψ}_{β}. Если $f\in C^{\psi}_{\beta}$ и при этом ее (ψ,β)-производная удовлетворяет условию $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t}\left|f^{\psi}_{\beta}(t)\right|\leqslant 1$, то говорят, что $f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

В работе изучается асимптотическое поведение величины

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};P_{\delta}\right)_C=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|f(\cdot)-P_{\delta}(f;\cdot)\right\|_C,\ \delta\to\infty,$$

где $P_{\delta}=P_{\delta}(f;\cdot)$ — интеграл Пуассона функции $f\in L_1$ [2].

Отметим, что при $\psi(k)=k^{-r},\ r>0$, классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ совпадают с классами $W^{r}_{\beta,\infty}$ и $f^{\psi}_{\beta}(x)=f^{(r)}_{\beta}(x)$ — (r,β)-производная в смысле Вейля—Надя. Если, кроме этого, $\beta=r,\ r\in N$, то f^{ψ}_{β} является производной порядка r функции f, и классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ суть известные классы Соболева W^{r}_{∞}.

Не умаляя общности, будем считать, что последовательности $\psi(k)$ являются сужениями на множество натуральных чисел некоторых положительных непрерывных выпуклых вниз функций $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t\geqslant 1$, которые стремятся к нулю на бесконечности. Множество таких функций обозначим через $\mathfrak{M}$. Из множества $\mathfrak{M}$ выделим подмножество $\mathfrak{M}_C$:

$$\mathfrak{M}_C=\left\{\psi\in\mathfrak{M}:0<K_1\leqslant\tfrac{t}{\eta(t)-t}\leqslant K_2\ \forall t\geqslant 1\right\},$$

где $\eta(t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, ψ^{-1} — функция, обратная к функции ψ, а константы K_1 и K_2, вообще говоря, зависимы от ψ.

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_C$, *функция* $g(u) = u\psi(u)$ *выпукла вниз на* $\big[b, \infty\big)$, $b \geqslant 1$ *и* $\int\limits_1^\infty \psi(u)du < \infty$. *Тогда при* $\delta \to \infty$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_\delta\big)_C = \frac{1}{\delta} \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \Big\| f_0^{(1)}(x) \Big\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^2} \int\limits_1^\delta g(t)dt + \frac{1}{\delta} \int\limits_\delta^\infty \frac{g(t)}{t} dt\right),$$

где $f_0^{(1)}$ *—* (ψ, β)*-производная функции* f *при* $\psi(t) = \frac{1}{t}$, $\beta = 0$.

Отметим, что теореме 1 удовлетворяют такие функции $\psi \in \mathfrak{M}$, которые при $t \geqslant 1$ имеют вид: $\psi(t) = \frac{1}{t} \ln^\alpha(t+K)$, $K > 0$, $\alpha < -1$; $\psi(t) = \frac{1}{t^r} \ln^\alpha(t+K)$, $\psi(t) = \frac{1}{t^r} \operatorname{arctg} t$, $\psi(t) = \frac{1}{t^r}(K + e^{-t})$, $r > 1$, $K > 0$, $\alpha \in R$.

Литература

[1] Степанец А. И., *Классификация и приближение периодических функций,* Наук. думка, Киев, 1987.

[2] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды,* Мир, М., 1965.

Тригонометрический нуль-ряд счетного множества переменных

Н. Н. Холщевникова

ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», Россия

kholshchevnikova@gmail.com

Рассмотрим тригонометрические ряды, определенные на бесконечномерном торе $\mathbb{T}^\infty$, являющемся декартовым произведением счетного множества одномерных торов $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{T}^\infty = \{x = (x_1, ..., x_n, ...) : 0 \leqslant x_n < 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Система функций

$$\theta_{n_1,\dots,n_p}(x) = \prod_{r=1}^{p} e^{2\pi i n_r x_r}, p \in \mathbb{N}, n_r \in \mathbb{Z}, x = (x_1, ..., x_p, ...) \in \mathbb{T}^\infty$$

называется системой Йессена или счетно-кратной тригонометрической системой.

Систематическое исследование этой системы проведено Б. Йессеном в 1934г. Система Йессена является полной ортонормированной системой на $\mathbb{T}^\infty$.

Обозначим через $\mathbb{Z}^{<\infty}$ множество бесконечномерных векторов $n = (n_1, ..., n_p, ...)$ с целочисленными координатами $n_p \in \mathbb{Z}$ $(p \in \mathbb{N})$, лишь конечное число которых отлично от нуля.

Рассмотрим ряды по системе Йессена:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^{<\infty}} a_n e^{2\pi i n x}, \qquad \text{где}\, x \in \mathbb{T}^\infty,\ nx = \sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k,\ a_n \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Если для $n \in \mathbb{Z}^{<\infty}$ координаты n_k равны нулю для $k > p$, то для коэффициентов a_n будем пользоваться также обозначением $a_n = a_{n_1,\dots,n_p}$.

Ряд (1) будем также обозначать

$$\sum_{p,n_1,\dots,n_p} a_{n_1,\dots,n_p} e^{2\pi i (n_1 x_1 + \dots + n_p x_p)}.$$

Прямоугольные частичные суммы ряда (1) имеют вид

$$S_{p,N_1,\dots,N_p}(x) = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \dots \sum_{n_p=-N_p}^{N_p} a_{n_1,\dots,n_p} e^{2\pi i (n_1 x_1 + \dots + n_p x_p)},$$

где $p, N_1, ..., N_p \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{T}^\infty$.

Ряд (1) называется сходящимся по прямоугольникам в точке $x \in \mathbb{T}^\infty$ к числу s , если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер P такой, что для всякого $p \geqslant P$ найдется такое натуральное N, что для всех $N_1, ..., N_p \geqslant N$ выполняется неравенство $|S_{p,N_1,\dots,N_p}(x) - s| < \varepsilon$.

Если для ряда (1) сходятся по прямоугольникам для каждого натурального p ряды $\sum\limits_{n_1,\dots n_p} a_{n_1,\dots,n_p} e^{2\pi i(n_1x_1+\dots+n_px_p)}$ в точке $x=(x_1,\dots,x_p,\dots)$ и существует предел

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{n_1,\dots,n_p} a_{n_1,\dots,n_p} e^{2\pi i(n_1x_1+\dots+n_px_p)} = s,$$

то назовем ряд (1) сходящимся по прямоугольникам в усиленном смысле в точке x к числу s.

Из определений нетрудно видеть, что если ряд сходится в усиленном смысле, то он сходится. Приведем пример нуль-ряда, существенно зависящего от счетного множества переменных.

Пример 3. Счетно-кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{p,n_1,\dots,n_p} \varepsilon_{n_1,\dots,n_p} \cos 2\pi n_1x_1 \dots \cos 2\pi n_px_p,$$

где

$$\varepsilon_{n_1,\dots,n_p} = \begin{cases} 1, & \text{если } n_i = 0 \text{ или } 1 \text{ для каждого } i=1,2,\dots,p; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

сходится по прямоугольникам в усиленном смысле к нулю почти всюду на $\mathbb{T}^\infty$.

Прямоугольные частичные суммы этого ряда $S_{p,N_1,\dots,N_p}(x)$ равны $(1+\cos 2\pi x_1)\cdot\dots\cdot(1+\cos 2\pi x_p)$ при $N_1 \geqslant 1,\dots,N_p \geqslant 1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-01-00669).

Об одной интерполяционной задаче для операторов в функциональных пространствах

Л. А. Янович †, М. В. Игнатенко ‡

†*Институт математики НАН Беларуси, Беларусь,*
‡*Белорусский государственный университет, Беларусь*

†*yanovich@im.bas-net.by* ‡*ignatenkomv@bsu.by*

Рассмотрим на множестве $T \subseteq \mathbb{R}$ произвольную чебышевскую систему функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{q}$ и обобщенные многочлены

$$\mathcal{P}_q(t) = \sum_{k=0}^{q} c_k \varphi_k(t) \ \ (c_k \in \mathbb{R};\ q = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Далее $\mathcal{I} = \{\varepsilon_{ij}\}$ — матрица размерности $(m+1) \times (n+1)$, элементы ε_{ij} которой 0 или 1; множество $N_{m,n} = \{(i,j) : \varepsilon_{ij} = 1\}$; $M_{m,n} = N_{m,n} \backslash N_{m,0}$; $H_{ij}^{(m)}(t)$ — интерполяционные фундаментальные многочлены, соответствующие задаче Эрмита—Биркгофа относительно рассматриваемой чебышевской системы функций, удовлетворяющие условиям $D_\nu H_{ij}^{(m)}(t_k) = \delta_{ik}\delta_{\nu j}$, где $D_0 f(t) = = f(t)$, $D_\nu f(t) = \sum\limits_{j=0}^{\nu} a_{j\nu} f^{(j)}(t)$, $a_{j\nu} \in \mathbb{R}$, а δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть многочлен $B_{m,n}(f;t)$, для которого $D_j B_{m,n}(t_i) = D_j f(t_i)$, $(i,j) \in N_{m,n}$, существует и записан в виде

$$B_{m,n}(f;t) = \sum_{(i,j) \in \ N_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(t) D_j f(t_i). \tag{2}$$

Рассмотрим оператор $F : X \times V \to Y$, где $X = X(T)$, $V = V(T)$ и Y — заданные пространства гладких на T функций, для которого частный дифференциал Гато ν-го порядка по первой переменной $\delta_x^\nu F[(x,v); h_1, \ldots, h_\nu]$ содержит произведение функций $h_1(t), \ldots, h_\nu(t) \in X$; $\delta_x^\nu F[(x,v); h]$ — частный дифференциал Гато порядка ν по x, когда $h_i(t) \equiv 1$ $(i = 1, \ldots, \nu - 1)$, а $h_\nu(t) \equiv h(t)$; $\tilde{D}_{xj} F(x,v) = \sum\limits_{\nu=1}^{j} a_{\nu j} \delta_x^\nu F[(x,v); h_1 h_2 ... h_j]$, $j = 1, ..., n$.

Через $P_{q,\nu} : X \times V \to Y$ обозначим операторный многочлен

$$P_{q,\nu}(x, v) = \sum_{k=0}^{q} \int\limits_T a_k(\nu; s, t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \{\varphi_k(x(t))v(t)\} \, dt, \qquad (3)$$

где $a_k(\nu; s, t)$ — заданные функции ($\nu = 0, 1, \ldots; s \in \mathbb{R}; t \in T$).

Теорема 1. *Для оператора* $B_{m,n}(x, v) =$

$$= F(x_p, v \sum_{(i,0)\in\ N_{m,0}} H_{i0}^{(m)}(x)) + \sum_{(i,j)\in M_{m,n}} \tilde{D}_{xj} F[(x_i, v); H_{ij}^{(m)}(x)]+$$

$$+ \sum_{(i,0)\in N_{m,0}} \int\limits_0^1 \delta_x F[(x_p + \tau(x_i - x_p), v); H_{i0}^{(m)}(x)(x_i - x_p)] d\tau, \qquad (4)$$

где x_p *— фиксированный узел, соответствующий элементу* ε_{p0} *множества* $N_{m,0}$, *выполняются интерполяционные условия*

$$B_{m,n}(x_i, v) = F(x_i, v), \ \ (i, 0) \in N_{m,0};$$

$$\tilde{D}_{xj} B_{m,n}(x_i, v) = \tilde{D}_{xj} F(x_i, v), \ \ (i, j) \in M_{m,n}.$$

Если формула (2) *точна для обобщенных многочленов* (1) *при некотором фиксированном значении* q *и любых различных узлах* $t_i \in T$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, *то интерполяционная формула* (4) *будет инвариантна относительно операторных многочленов* (3) *с таким же значением* q.

Построены и другие интерполяционные формулы для операторов, заданных на декартовом произведении функциональных пространств, и указаны классы инвариантных операторных многочленов.

Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографии [1].

Литература

[1] Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А., *Интерполирование операторов,* Наукова думка, Киев, 2000.

Приближение функций многих переменных из классов $\mathbf{S^r_{p,\theta}B}(\mathbb{R}^\mathbf{d})$ целыми функциями

С. Я. Янченко

Институт математики НАН Украины, Киев

Sergiy.Yan@Rambler.ru

Исследуются классы $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ функций многих переменных, которые определены на $\mathbb{R}^d$ и были рассмотрены Т. И. Амановым [1]. Эти классы функций при $\theta = \infty$ совпадают с классами $S^r_p H(\mathbb{R}^d)$, введенными С. М. Никольским [2].

Пусть $L_q(\mathbb{R}^d)$ — пространство измеримых функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$, заданных на $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, со стандартной нормой.

Определим аппроксимативную характеристику, о которой будет идти речь в докладе.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$, которое состоит из конечного набора векторов $s = (s_1, \ldots, s_d)$ с целочисленными координатами, и множество

$$Q_{2^s} := \{\lambda \in \mathbb{R}^d : \ \eta(s_j)2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1, d}\},$$

где $\eta(0) = 0$ и $\eta(t) = 1, \ t > 0$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d), \ 1 < q < \infty$, положим

$$S^{\mathfrak{M}}(f, x) = \sum_{s \in \mathfrak{M}} \delta^*_s(f, x), \tag{1}$$

где

$$\delta^*_s(f, x) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}f \cdot \chi_{Q_{2^s}}),$$

$\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^{-1}$ — соответственно прямое и обратное преобразование Фурье, а $\chi_{Q_{2^s}}$ — характеристическая функция множества Q_{2^s}.

Таким образом, равенство (1) определяет целую функцию $S^{\mathfrak{M}}(f,x)$, которая принадлежит пространству $L_q(\mathbb{R}^d)$ [3], носитель преобразования Фурье которой сосредоточен на множестве $\bigcup\limits_{s\in\mathfrak{M}} Q_{2^s}$.

Для $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим следующую величину:

$$e_M^{\mathfrak{F}}(f)_q=\inf_{\mathfrak{M}:mes\bigcup\limits_{s\in\mathfrak{M}}Q_{2^s}\leqslant M}\|f(\cdot)-S^{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_q,$$

где $mesA$ обозначает лебегову меру множества A.

Если $F\subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — некоторый класс функций, то полагаем

$$e_M^{\mathfrak{F}}(F)_q=\sup_{f\in F}e_M^{\mathfrak{F}}(f)_q.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $r_1>1/p-1/q$. *Тогда для* $1\leqslant\theta\leqslant\infty$ *справедливо соотношение*

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta}B)_q\asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}(\log^{\nu-1}M)^{(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})_+},$$

где $a_+=\max\{a;\ 0\}$.

Теорема 2. *Пусть* $1<p<2$, $r_1>0$. *Тогда для* $1\leqslant\theta\leqslant\infty$ *справедливо соотношение*

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta}B)_p\asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Литература

[1] Аманов Т. И., *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств* $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ *и* $S^{(r)_*}_{p,\theta}B$ $(0\leqslant x_j\leqslant 2\pi,\ j=1,...,n)$, Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 77 (1965), 5–34.

[2] Никольский С. М., *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера,* Сиб. матем. журнал. 4(6) (1963), 1342–1363.

[3] Лизоркин П. И., *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций,* Тр. Мат. ин-та АН СССР. 105 (1969), 89–167.

Uniform approximation of Dirichlet series by partial products of Euler type

I. Sh. Jabbarov

Ganja State University, Azerbaijan

jabbarovish@rambler.ru

In 1748 Euler entered the zeta-function $\zeta(s) = \sum n^{-s}$, considering it as a function of real variable s and proved an important identity:

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}, s > 1;$$

here the product is taken over all prime numbers and is called Euler product. In the works [2, 3, 4, 5, 6], S. M. Voronin, developing the method of G. Bohr, used special type of partial products in the questions of distribution of zeroes and non-zero values of L-functions in the critical strip. In compliance with the Universality Theory of S. M. Voronin, every analytical function, non vanishing in, and on the circle $|s| \leqslant r < 1/4$, can be approximated by finite products of the form $\prod_p \left(1 - e^{-2\pi i \vartheta_p} p^{-s}\right)^{-1}$ where p takes values from some finite set of prime numbers.

Let we are given with following infinite product over all prime numbers p:

$$F(s) = \prod_p f_p(p^{-s}), \tag{1}$$

where $f_p(z)$ is a rational function of a variable z having not poles in the circle $|z| < 1$,

$$f_p(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_p^m z^m,$$

and for any positive small ε the inequality $\left|a_p^m\right| \leqslant c(\varepsilon)p^{m\varepsilon}; c(\varepsilon) \geqslant 1$ is satisfied uniformly by p.

Theorem 1. *Let the function $F(s)$ to have not singularities in the half plane $\sigma > 1/2$, with exception of finite number of poles on the line $\sigma = 1$, and every factor of the product (1) to have not zeroes in the half plane $\sigma > 1/2$. Suppose that for any small positive number λ there exist a constant $c_0(\lambda) > 0$ and a number $h_0 > 0$, satisfying, for any $h > h_0$, the following inequality:*

$$\sum_{h<p\leqslant h(1+\log^{-10} h)} \left|a_p^1\right| p^{-(1-\lambda)} \geqslant c_0(\lambda)h^{\lambda/4}.$$

If in the circle $|s - \sigma_0| \leqslant r < r_0 = \min(1 - \sigma_0, \sigma_0 - 1/2)$, $F(s+it_0)$ has not zeros for some real t_0, then there exist a sequence (ϑ_n) in $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times\cdots$ and a sequence (m_n) of integers that

$$\lim_{n\to\infty} F_n(s+it, \vartheta_n) = F(s+it+it_0),$$

for every real, t uniformly by s in this circle; here $\vartheta_n = (\vartheta_p^n)$, and

$$F_n(s+it, \theta_n) = \prod_{p\leqslant m_n} f_p(e^{-2\pi i(\vartheta_p^n+\gamma_p)}p^{-s-it});\ \gamma_p = \frac{t_0 \log p}{2\pi}.$$

Corollary 1. *The analog of the Riemann Hypothesis is true: F(s) $\neq$0 when $1/2 < \sigma < 1$.*

References

[1] Titchmarsh E. C., *Theory of Riemann Zeta-function,* IL, M., 1953 (rus).

[2] Voronin S. M., Karatsuba A., *The Riemann Zeta-function,* Fizmatlit., M., 1994 (rus).

[3] Voronin S. M., *On The distribution of non-zero values of the Riemann Zeta-function,* Labors, MIAS 128 (1972), 153–175.

[4] Voronin S. M., *The theorem on «universality» of the Riemann zeta-function,* Bulletin AS USSR mat.ser. 39 № 3 (1975), 475–486.

[5] Voronin S. M., *On the zeroes of zeta-functions of quadratic forms,* Labors, MIAS 142 (1976), 135–147.

[6] Voronin S. M., *On the distribution of zeroes of some Dirichlet series,* Labor, MIAS 163 (1984), 74–77.

On non-standard trigonometric approximations

Andi Kivinukk

University of Tallinn, Estonia

andik@tlu.ee

A standard approximation tool for a 2π-periodic function is its Fourier series using the system

1) $\{1,\ \cos kx,\ \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$,

which is orthogonal on $[-\pi,\pi]$ and closed in $C_{2\pi}$. The elements of that system are 2π-periodic, i. e.

A) $\mathrm{f}\,(\pi+\mathrm{x})=\mathrm{f}\,(\mathrm{x}-\pi)\,,\quad \mathrm{x}\in\mathbf{R}.$

Three others, quite natural orthogonal on $[-\pi,\pi]$ systems could be interest of a study. These are

2) $\{\cos(k-1/2)x,\ \sin(k-1/2)x\}_{k=1}^{\infty}$,

3) $\{1,\ \cos kx,\ \sin(k-1/2)x\}_{k=1}^{\infty}$,

4) $\{\cos(k-1/2)x,\ \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$,

which are not mentioned in literature in a systematic way, cf. [1], [2]. These systems satisfy conditions, respectively,

B) $\mathrm{f}(\pi+\mathrm{x}) = -\mathrm{f}(\mathrm{x}-\pi), \quad \mathrm{x}\in\mathbf{R}$

— f is said to be 2π-antiperiodic;

C) $\mathrm{f}(\pi+\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\pi-\mathrm{x}), \quad \mathrm{x}\in\mathbf{R}$

— f is said to be π-symmetric;

D) $\mathrm{f}(\pi+\mathrm{x}) = -\mathrm{f}(\pi-\mathrm{x}), \quad \mathrm{x}\in\mathbf{R}$

— f is said to be π-antisymmetric.

The conditions A) and B) yield 4π-periodicity, but this is not true for C) and D), see examples $f(x) = (\pi - x)^k$ with $k = 1; 2$.

We will study the system 3). We denote by $\overline{C}_{4\pi}$ the set of all π-symmetric and 4π-periodic functions. Since the system 3) is orthogonal on $[-\pi,\pi]$ and closed in $f \in \overline{C}_{4\pi}$ we may associate its π-symmetric partial Fourier sums

$$S_n^C(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + d_k \sin(k-1/2)\,x$$

with the real Fourier coefficients

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt, \quad d_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(k-1/2)tdt.$$

It turns out that for some functions π-symmetric Fourier series converges faster than the classical trigonometric Fourier series. The corresponding polynomial approximation operator is

$$U_n(f,x) := \frac{a_0}{2}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi\left(\frac{k}{n+1}\right)\ a_k\cos kx + \varphi\left(\frac{k-1/2}{n+1}\right) d_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right),$$

where $\varphi \in C_{[0,1]}$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$.

The typical result for the order of approximation is as follows.

Theorem 1. *Let $f \in \overline{C}_{4\pi}$ and let U_n be ultrapositive operator, then*

$$\| U_n f - f \|_{\overline{C}_{4\pi}}$$

$$\leqslant 4\omega_2 \left(f, \left(1 - \varphi \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^{1/2} \right) + \| f \|_{\overline{C}_{4\pi}} (1 - l_n),$$

where ω_2 is the modulus of smoothness and

$$l_n = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \varphi \left(\frac{k - 1/2}{n+1} \right)$$

Remarks.

1) If $\varphi \in Lip\ 1$, then $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 1$.

2) The research was supported in part by the ESF grant 7033.

References

[1] Delvos F.-J., Knoche L., *Lacunary interpolation by antiperiodic trigonometric polynomials*, BIT 39, № 3 (1999), 439–450.

[2] Milovanović G. V., Cvetković A. S., Stanić M. P., *Christoffel-Darboux formula for orthogonal trigonometric polynomials of semi-integer degree,* Facta Univ. (Niš). Ser. Math. Inform. 23 (2008), 29–37.

On variation detracting property of certain sampling operators

Andi Kivinukk[†], Gert Tamberg [‡]

[†] *Tallinn University, Estonia*
[‡] *Tallinn University of Technology, Estonia*

[†] *andik@tlu.ee* [‡] *gert.tamberg@mail.ee*

For the uniformly continuous and bounded functions $f \in C(\mathbb{R})$ the generalized sampling series are given by ($t \in \mathbb{R}$; $W > 0$)

$$(S_W f)(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{W}\right) s(Wt-k), \tag{1}$$

where the condition for the operator $S_W : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ to be well-defined is

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |s(u-k)| < \infty \quad (u \in \mathbb{R}), \tag{2}$$

the absolute convergence being uniform on compact intervals of $\mathbb{R}$ (see [2] and references cited there).

The variation detracting property of certain sampling operators will be considered for $TV(\mathbb{R})$, the space of all functions of bounded variation on $\mathbb{R}$ endowed with the seminorm

$$\|f\|_{TV(\mathbb{R})} := V_{\mathbb{R}}[f] = \sup_{I \subset \mathbb{R}} V_I[f], \tag{3}$$

the supremum being taken over all intervals $I \subset \mathbb{R}$. By $AC(\mathbb{R})$ we denote the subspace of $TV(\mathbb{R})$ consisting of those functions, which are locally absolutely continuous on $\mathbb{R}$. We say that the sampling operator $S_W : TV(\mathbb{R}) \to TV(\mathbb{R})$ has the variation detracting property (see [1] and references cited therein), if (3) is valid for every

$f \in TV(\mathbb{R})$. This property is important in practice, since very often signals are discontinuous but still with bounded variation. As an introductory approach we use averaged kernels

$$\overline{s}_m(t) := \frac{1}{m} \int\limits_{-m/2}^{m/2} s(t+v)\,dv \quad (m > 0), \tag{4}$$

to get for these operators.

For some averaged sampling operators we can compute the exact value of the norm.

Theorem 1. *If there exists a constant $a \in [0,1]$, such that for all $k \in \mathbb{Z}$ the kernel function $s \in B^1_\pi$ does not have zeroes on $(a - k - \frac{1}{2}, a - k + \frac{1}{2})$, then for the sampling operator $\overline{S}_{W,1}$ with the kernel $\overline{s}_1$ defined by* (4) ($m = 1$) *we get an exact value of the operator norm*

$$\|\overline{S}_{W,1}\| = \|s\|_1.$$

Now we are able to consider the variation detracting property.

Theorem 2. *Let the sampling operator S_W be defined by the kernel $s \in B^1_\pi$ and the averaged sampling operator $\overline{S}_{W,m}$ be defined by the kernel $\overline{s}_m \in B^1_\pi$ from* (4). *Then $f \in TV(\mathbb{R})$ implies $\overline{S}_{W,m} f \in AC(\mathbb{R})$ and*

$$V_{\mathbb{R}}[\overline{S}_{W,m} f] \leqslant \|s\|_1\, V_{\mathbb{R}}[f] \leqslant \|S_W\|\, V_{\mathbb{R}}[f],$$

moreover under the assumptions of Theorem 1, we have

$$V_{\mathbb{R}}[\overline{S}_{W,1} f] \leqslant \|\overline{S}_{W,1}\|\, V_{\mathbb{R}}[f].$$

References

[1] Bardaro C., Butzer P. L., Stens R. L., Vinti G., *Convergence in Variation and Rates of Approximation for Bernstein-Type Polynomials and Singular Convolution Integrals,* Analysis (Munich). 23 (4) (2003), 299–346.

[2] Butzer P. L., Splettstößer W., Stens R. L., *The sampling theorems and linear prediction in signal analysis,* Jahresber. Deutsch. Math-Verein. 90 (1988), 1–70.

Some extremal problems in the classes of the functions having given comparison function

V. A. Kofanov

Dnepropetrovsk National University, Ukraine

vladimir.kofanov@gmail.com

For $r \in \mathbf{N}$ we denote by L^r_∞ the space of all functions $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ for which $x^{(r-1)}$ are locally absolutely continuous, $x \in L_\infty(\mathbf{R})$ and $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbf{R})$. Let $W^r_\infty :=\{ x \in L^r_\infty : \|x^{(r)}\|_\infty \leqslant 1\}$.

For $k = 0, 1, 2, ...$ let $\varphi \in L^{k+1}_\infty$ be the $2T$-periodic function on $\mathbf{R}$ having the properties: $\varphi(0) = 0$, odd about 0, even about $T/2$, positive and concave on $(0, T)$ and strictly increasing on $[0, T/2]$.

We denote by Ω^k_φ the class of functions $x \in L^{k+1}_\infty$ such that $\varphi^{(i)}$ is comparison function for $x^{(i)}, i = 0, ..., k$, i. e. $\|x^{(i)}\|_\infty \leqslant \|\varphi^{(i)}\|_\infty$ and if $x^{(i)}(\xi) = \varphi^{(i)}(\eta)$ for some $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ then $|x^{(i+1)}(\xi)| \leqslant |\varphi^{(i+1)}(\eta)|$.

For any $p > 0$, fixed interval $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, $A_0 > 0$ we solve the following extremal problem

$$\|x^{(i)}\|_{L_q[\alpha,\beta]} \to \sup, \qquad i = 0, ..., k,$$

over all functions $x \in \Omega^k_\varphi$ such that $L(x)_p \leqslant A_0$ in the cases: 1) $k = 0$, $q \geqslant p$, 2) $1 \leqslant k \leqslant r - 1$, $q \geqslant 1$, where

$$L(x)_p := \sup\{(\|x\|_{L_p[a,b]} :\ a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a, b)\}.$$

Note that the problem for $p = \infty$, $k \geqslant 1$ has been determined by B. Bojanov and N. Naidenov earlier [1].

As particular important examples we study the problem in W^r_∞, in the class of all trigonometric polynomials of degree $\leqslant n$ and in the class of polynomial splines of order r with equidistance knots.

References

[1] Bojanov B., Naidenov N., *An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos,* J.Anal.Math. 78 (1999), 263–280.

Approximation by frame-like wavelet systems

A. Krivoshein †, M. Skopina ‡

†‡*St. Petersburg State University, Russia,*

†*san_san@inbox.ru* ‡*skopina@MS1167.spb.edu*

An important property of a frame $\{f_n\}_n$ in a Hilbert space H is the following: every $f \in H$ can be decomposed as $f = \sum_n \langle f, \widetilde{f_n}\rangle f_n$, where $\{\widetilde{f_n}\}_n$ is a dual frame in H. Good approximation properties of the frame decomposition is usually desirable. Finding wavelet functions generating a pair of dual wavelet frames $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ with required approximation order is a complicated problem, especially in the multidimensional case. Though a general scheme for the construction of wavelet frames is known, its realization leads to a pair of dual wavelet systems but not necessary to dual frames. In particular, it is not easy to provide vanishing moments for all wavelet functions $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$, which is a necessary condition for the systems $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ to be frames in $L_2(\mathbb{R}^d)$. However, engineers often do not take care of this and successfully apply such «frames» (which are really not frames) for signal processing. Our goal is to explain this phenomena.

To construct dual compactly supported wavelet frames one starts with a pair of refinable functions $\phi, \widetilde{\phi}$ (or with its masks $m_0, \widetilde{m}_0$ which should be trigonometric polynomials). Next, using so-called Unitary Extension Principle developed by A. Ron and Z. Shen [1], one finds wavelet masks $m_\nu, \widetilde{m}_\nu, \nu = 1, \ldots, r$, and the corresponding wavelet functions $\psi^{(\nu)}, \widetilde{\psi}^{(\nu)}$. The wavelet systems $\{\psi_{jk}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\}$ defined by

$$\psi_{jk}^{(\nu)}(x) = |\det M|^{j/2}\psi(M^j x + k), \widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}(x) = |\det M|^{j/2}\widetilde{\psi}(M^j x + k),$$

form dual wavelet frames in $L_2(\mathbb{R}^d)$ if and only if $\phi, \widetilde{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d)$ and $\widehat{\psi}^{(\nu)}(0) = \widehat{\widetilde{\psi}^{(\nu)}}(0) = 0$, $\nu = 1, \dots, r$. We are interested what happens if these conditions are not satisfied. In particular, we consider the case in which all wavelet functions or only the functions $\widetilde{\psi}^{(\nu)}$ are tempered distributions. The latter is useful for applications. Usually one needs only the functions ϕ, $\psi^{(\nu)}$, to be «good». Starting with a compactly supported refinable function $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ with $\phi(\mathbf{0}) = 1$, and an arbitrary trigonometric polynomial $\widetilde{m}_0$ with the unique requirement $\widetilde{m}_0(\mathbf{0}) = 1$, it is very easy to realize Unitary Extension Principle and construct $\psi^{(\nu)} \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi}^{(\nu)} \in S'$, $\nu = 1, \dots, r$. We proved that in this case for every $f \in S$

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \widetilde{\phi}_{0k}\rangle \phi_{0k} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \widetilde{\psi}_{jk}^{(\nu)}\rangle \psi_{jk}^{(\nu)}, \qquad (1)$$

where the series converge in L_2-norm, the series over k converge unconditionally. Moreover, if ϕ is in C^n or has Sobolev smoothness of order n and $\widetilde{m}_0$ is chosen so that

$$D^\beta \left(1 - m_0(\xi)\overline{\widetilde{m}_0(\xi)}\right)\Big|_{\xi=0} = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^d, \|\beta\|_1 \leqslant n,$$

then

$$\left\| f - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \widetilde{\phi}_{0k}\rangle \phi_{0k} - \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \widetilde{\psi}_{ik}^{(\nu)}\rangle \psi_{ik}^{(\nu)} \right\|_2 \leqslant \frac{C\|f\|_{W_2^{n^*}}}{(|\lambda| - \varepsilon)^{j(n+1)}},$$

where λ is a minimal (in module) eigenvalue of M, $\varepsilon > 0$, $|\lambda| - \varepsilon > 1$, $n^* > n$, C and n^* do not depend on f and j, i.e., expansion (1) has approximation order $n + 1$.

Wavelet-type expansion and their approximation order are also studied in the case $\psi^{(\nu)} \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)} \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $\nu = 1, \dots, r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

This research was supported by Grant 09-01-00162 of RFBR. The second author is also supported by DFG Project 436 RUS 113/951.

References

[1] Ron, A., Shen, Z., *Affine systems in $L_2(\mathbb{R}^d)$ II: dual systems.* J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), 617-637.

Amalgam spaces and integrability of the Fourier transforms

E. Liflyand †, S. Tikhonov ‡

†*Bar-Ilan University, Israel*
‡*ICREA/CRM, CIE, Spain*

†*liflyand@math.biu.ac.il* ‡*tikhonov@mccme.ru*

We introduce, by analogy with sequences in [1], a space of functions g defined on $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. We say that a locally integrable function g belongs to $A_{1,p}$, $1 < p \leqslant \infty$, if

$$\|g\|_{A_{1,p}} = \int_0^\infty x^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^\infty \left[\int_{jx}^{(j+1)x} |g(t)|\, dt \right]^p \right\}^{1/p} dx < \infty,$$

with obvious modification when $p = \infty$. The space $A_{1,p}$ is an amalgam type space, since each of the values we integrate after x^{-1} coincides with the norm in the amalgam space $W(L^1, \ell^p)$ for functions $xg(xt)$ (see, e.g., [2]).

Lemma 1. *For any p, $1 < p \leqslant \infty$, there holds $A_{1,p} \subset L^1(\mathbb{R}_+)$.*

In the problems of integrability of the Fourier transform the T-transform of a function $g(u)$ defined on $(0,\infty)$ is important [3]:

$$Tg(t)=\int_0^{t/2}\frac{g(t+s)-g(t-s)}{s}\,ds.$$

In particular, the space BT (Boas—Telyakovskii) consists of the functions integrable along with its T-transform. The results in [3] and other works are given on assumption that the derivative of a function belongs to BT or its subspaces. These subspaces convenient in applications are A_p, $1<p<\infty$ (obviously modified when A_∞):

$$\|g\|_{A_p}=\int_0^\infty\left(t^{-1}\int_t^{2t}|g(s)|^p ds\right)^{1/p}dt<\infty.$$

Lemma 2. *There holds $A_p\subset A_{1,p}$ for $1<p\leqslant\infty$.*

On the other hand, note that BT and $A_{1,p}$ are not comparable.

Our main result is

Theorem 1. *Let f be locally absolutely continuous on $\mathbb{R}_+$ and vanishing at infinity, that is, $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=0$, and $f'\in A_{1,p}$. Then for $x>0$*

$$\widehat{f}_\gamma(x)=\int_0^\infty f(t)\cos\left(xt-\frac{\pi\gamma}{2}\right)dt=\frac{1}{x}f\left(\frac{\pi}{2x}\right)\sin\frac{\pi\gamma}{2}+\theta\Gamma(x),$$

where $\gamma=0$ or 1, $|\theta|\leqslant C_p$, and $\|\Gamma\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}\leqslant\|f'\|_{A_{1,p}}$.

As an application, we obtain integrability results for trigonometric series, more general than in [1].

We also compare $A_{1,p}$ with the earlier introduced and studied by the authors [4] spaces of general monotone functions.

The research was supported, in part, by grants MTM2008-05561-C02-02/MTM, 2009 SGR 1303, RFFI 08-01-00302, NSH 32-52.2010.1, and ESF Network Programme HCAA.

References

[1] Aubertin B., Fournier J. J. F., *Integrability theorems for amalgam spaces*, Studia Math. 107 (1993), 33–59.

[2] Feichtinger H., *Wiener amalgams over Euclidean spaces and some of their applications*, Function spaces (Edwardsville, IL, 1990), Lect. Notes Pure Appl. Math., Dekker, New York. 136 (1992), 123–137.

[3] Liflyand E., *Fourier transforms of functions from certain classes*, Anal. Math. 19 (1993), 151–168.

[4] Liflyand E., Tikhonov S., *The Fourier transforms of general monotone functions*, Analysis and Mathematical Physics. Trends in Mathematics, Birkhäuser. (2009), 373–391.

Extending monotonicity in convergence tests of number series

E. Liflyand †, S. Tikhonov ‡, M. Zeltser #

†*Bar-Ilan University, Israel*
‡*ICREA/CRM, CIE, Spain*
#*Tallinn University, Estonia*

†*liflyand@math.biu.ac.il* ‡*tikhonov@mccme.ru* #*mariaz@tlu.ee*

In various well-known tests for convergence of number series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

with positive a_k, *monotonicity* of the sequence of $\{a_k\}$ is the basic assumption. As examples, we mention tests by Abel, Cauchy, Dirichlet, Leibniz, Maclaurin, Schlömilch.

It turns out that many of these tests are applicable not only to monotone sequences but also to those from a wider class. Let us define the corresponding function class.

Definition 1. We say that a non-negative function f defined on $(0,\infty)$, locally of bounded variation, and vanishing at infinity is *weak monotone*, written WM, if

$$f(t) \leqslant Cf(x) \quad \text{for any} \quad t \in [x, 2x].$$

In some problems one should consider a smaller class than WM (see [1, 2]).

Definition 2. We say that a non-negative function f is general monotone, GM, if for all $x \in (0,\infty)$

$$\int_x^{2x} |df(t)| \leqslant Cf(x).$$

Our main results can be formulated in the following

Theorem 1. *Let $f(\cdot) \in WM$. Then the following series and integrals converge or diverge simultaneously:*

$$\int_1^\infty f(t)\,dt, \quad \sum_k f(k);$$

$$\sum_k (u_{k+1} - u_k) f(u_k), \ \textit{provided } u_k \uparrow, \ u_{k+1} = O(u_k);$$

$$\sum_k u_k f(u_k), \quad \sum_k u_k |f(u_{k+1}) - f(u_k)|,$$

$$\textit{provided } u_k \textit{ is lacunary and } u_{k+1} = O(u_k);$$

$$\sum_k k|f(k+1) - f(k)|, \quad \int_1^\infty t\,|df(t)|, \quad \textit{provided } f(\cdot) \ \textit{ is GM.}$$

The first line concerns the Maclaurin—Cauchy integral test; the second and third lines cover Cauchy's condensation test and its generalization the Schlömilch' test. The last line partially extends the previous for the important case of $u_k = k$.

Note that lacunarity as well as the condition $u_{k+1} = O(u_k)$ are essential in this Theorem.

The research was supported, in part, by grants 2009 SGR 1303, MTM2008-05561-C02-02/MTM, RFFI 09-01-00175, NSH 3252.2010.1 and ETF7033, as well as by Estonian Ministry of Education and Research (project SF0132723s06).

References

[1] Tikhonov S., *Trigonometric series with general monotone coefficients*, Jour. Math. Anal. Appl. Vol. 326, 1 (2007), 721–735.

[2] Liflyand E., Tikhonov S., *Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms*, Comptes Rendus Mathematique, Acad. Sci. Paris, Vol. 346, Is. 21-22 (2008), 1137–1142.

On representing systems for $L_1[0,1]$

O. I. Reinov

Saint Petersburg State University, Russia,
Abdus Salam School of Mathematical Sciences, Pakistan
orein51@mail.ru

A system $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ of elements of a Banach space X is said to be *a representing system* for X if every $x \in X$ can be represented (not necessarily uniquely) as a series $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converging in X. If all such series for all $x \in X$ are convergent unconditionally with the unconditional constant C not depending on x, then we say about *unconditional representing system.*

Theorem 1. *There is no unconditional representing system for the space $L_1[0,1]$.*

p-Adic wavelets and p-adic evolutionary pseudo-differential equations

V. M. Shelkovich

St.-Petersburg State Architecture and Civil Engineering University, Russia

shelkv@yahoo.com

Using some results in p-adic wavelet theory [1], [2], [3], [4], we develop the «variable separation method»(an analog of the classical Fourier method) for solving p-adic evolutionary pseudo-differential equations. This method is based on three important facts: (i) for appropriate conditions p-adic wavelets constructed in [3], [4] are eigenfunctions of pseudo-differential operators

$$Af = F^{-1}[\mathcal{A}\,F[f]], \qquad f \in \Phi'(\mathbf{Q}_p^n),$$

constructed in [1], where F is the Fourier transform, $\mathcal{A}$ is a symbol of pseudo-differential operators, $\Phi'(\mathbf{Q}_p^n)$ is the Lizorkin space of distributions (introduced in [1]); (ii) the Lizorkin space of distributions $\Phi'(\mathbf{Q}_p^n)$ is a natural domain of definition for pseudo-differential operators; (iii) any Lizorkin distribution $f \in \Phi'(\mathbf{Q}_p^n)$ can be realized as an infinite linear combination of wavelets.

By this method we solve the Cauchy problems for the following linear and semi-linear pseudo-differential equations (here $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{Q}_p^n$):

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{k} A_{rx} \frac{\partial^r u(x,t)}{\partial t^r} + u(x,t) = f(x,t), \\ u(x,0),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-1} u(x,0)}{\partial t^{k-1}} \in \Phi'(\mathbf{Q}_p^n); \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + A_x u(x,t) + u(x,t)|u(x,t)|^{2k} = 0, \quad u(x,0) \in \Phi'(\mathbf{Q}_p^n)$$

and

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - A_x u(x,t) + u(x,t)|u(x,t)|^{2k} = 0, \quad u(x,0) \in \Phi'(\mathbf{Q}_p^n),$$

where $k \in \mathbf{N}$. Here A_x and A_{rx}, $r = 0, 1, \ldots, k$ are above-mentioned pseudo-differential operators (with respect to x).

References

[1] Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., *Harmonic analysis in the p-adic Lizorkin spaces: fractional operators, pseudo-differential equations, p-adic wavelets, Tauberian theorems*, Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 12, Issue 4 (2006), 393–425.

[2] Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., *Non-Haar p-adic wavelets and their application to pseudo-differential operators and equations,* Applied and Computational Harmonic Analysis, 28 (2010), 1–23.

[3] Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., Skopina M., *p-Adic orthogonal wavelet bases,* p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 1, № 2 (2009), 145–156.

[4] Shelkovich V. M., Skopina M., *p-Adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators,* Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 15, Issue 3 (2009), 366–393.

Approximation of functions by polynomials with various constraints

R. M. Trigub

Donetsk National University, Ukraine

roald@ukrpost.ua

We study pointwise approximations of functions with a given modulus of continuity of the r-th derivative on an interval (segment) of real axis, as a rule with various additional constraints.

A. The first of these constraints is the simultaneous approximation of functions and their derivatives by polynomials with Hermitian interpolation of any multiplicity at given points. These theorems can be applied, for example, to obtaining precise sufficient conditions for the possibility of expansion of a function in Fourier-Jacobi series.

B. The second constraint is that the functions are approximated by polynomials in one-sided way only (from above or from below). The subject was initiated by J. Karamata. Direct theorems for one-sided integral approximation of smooth functions were obtained long ago (A. G. Postnikov, G. Freud). Such theorems were used in the proofs of Tauberian theorems with remainder term.

C. Comonotone approximations: when the function and the approximating polynomial are supposed to be monotone, convex, etc. Pioneer works are due to G. G. Lorentz.

D. Constraints on the coefficients of the approximating polynomials. If the coefficients of a polynomial are assumed to be integer, certain arithmetical constraints are assumed for the function. First sharp results on the order of approximation on $[0, 1]$ (analogues of theorems of Jackson and Bernstein) were obtained by A. O. Gel'fond. Pointwise approximations on any line interval of length at most four were studied by the author.

Uniform approximations of functions by polynomials with positive coefficients have been studied in connection with the problem of the spectra of positive operators (J. F. Toland — 1996).

An attempt is taken here to combine the mentioned constraints, when it is possible of course.

References

[1] Trigub R. M., *Approximation of Functions by Polynomials with Varios Constraints,* Izvestiya NAN Armenii. Matematika. № 4 (2009), 32–44.

[2] Trigub R. M., Belinsky E. S., *Fourier Analysis and Approximation of Functions,* Kluwer-Springer, 2004.

[3] Тригуб Р. М., *Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами с эрмитовской интерполяцией и учётом положения точки,* Известия РАН, с.м. 73:4 (2009), 49–76.

Авторский указатель

Научное издание

Теория приближений

Международная конференция

Санкт-Петербург. 6—8 мая 2010 г.

Подписано к печати 23.04.2010.
Формат бумаги 60 × 84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,0. Тираж 100 экз. Заказ 4746.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии Химического факультета СПбГУ.
198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр. 26.