МЕЖДУНАРОДНАЯ
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,
ПОСВЯЩЕННАЯ 70-ЛЕТИЮ А. В. ЯКОВЛЕВА

Санкт-Петербург, Россия
19–24 июня, 2010

Т Е З И С Ы   Д О К Л А Д О В

INTERNATIONAL
ALGEBRAIC CONFERENCE
DEDICATED TO THE 70th BIRTHDAY
OF A. V. YAKOVLEV

St. Petersburg, Russia
June 19–24, 2010

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени Л. ЭЙЛЕРА

ФОНД ЭЙЛЕРА

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**МЕЖДУНАРОДНАЯ
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,
ПОСВЯЩЕННАЯ 70-ЛЕТИЮ А. В. ЯКОВЛЕВА**

*Санкт-Петербург, Россия
19–24 июня, 2010*

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

**INTERNATIONAL
ALGEBRAIC CONFERENCE
DEDICATED TO THE 70th BIRTHDAY
OF A. V. YAKOVLEV**

*St. Petersburg, Russia
June 19–24, 2010*

Санкт-Петербург
2010

Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию А.В.Яковлева / Под ред. А. И. Генералова. — СПб: Санкт-Петербургский государственный университет, 2010. — 174 с.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант 10–01–06042-г).

Анатолий Владимирович Яковлев

4 мая 2010 г. исполнилось 70 лет Анатолию Владимировичу Яковлеву – авторитетнейшему математику и превосходному педагогу. На протяжении последних двух десятилетий он – общепризнанный глава Санкт-Петербургской алгебраической школы.

Становление Яковлева-математика неразрывно связано с математико-механическим факультетом Ленинградского – Санкт-Петербургского государственного университета, на который он, к тому моменту уже неоднократный победитель всевозможных математических олимпиад, поступил в 1957 году. Среди учителей А.В. были практически все работавшие в то время на факультете выдающиеся математики: профессора Б. А. Венков, В. А. Залгаллер, Н. А. Лебедев, И. П. Натансон. Но главной в его судьбе оказалась встреча с Дмитрием Константиновичем Фаддеевым. Именно благодаря Д.К. молодой математик увлекся решением задачи погружения и вскоре получил свой первый знаменитый результат – полностью решил задачу погружения полей с абелевым ядром. Этот результат, легший в основу кандидатской диссертации, сразу получил высокую оценку многих выдающихся учёных, среди которых были И. Р. Шафаревич и Ж.-П. Серр.

Примерно в эти годы А. В. получил еще один из своих замечательных результатов – описал группу Галуа алгебраического замыкания локального поля заданием образующих и определяющих соотношений, завершив тем самым усилия С. П. Демушкина, Х. Коха, К. Ивасава и других алгебраистов. При решении этой проблемы А.В. обобщил теорию симплектических пространств с операторами, начатую в работах Д. К. Фаддеева. Эта работа легла в основу его докторской диссертации, защищенной в 1972 г. Введенное А.В. понятие универсально согласных задач погружения дало новый подход к обратной задаче теории Галуа, решенной впервые И. Р. Шафаревичем для разрешимых групп. А.В. не ограничивается в своих, исследованиях лишь теорией Галуа. Ему принадлежат очень крупные результаты по описанию строения мультипликативной группы локального поля как группы с операторами.

Еще одна область научных интересов А. В. Яковлева – теория представлений групп. Созданная им теория гомологической определенности позволяет определять структуру целочисленных модулей с помощью гомологических инвариантов. Кроме того, как отмечено в одном обзоре, "на пределе технических средств современной алгебры" им была получена классификация 2-адических представлений циклической группы 8-го порядка.

Весом вклад А.В. и в гомологическую алгебру. Им построена теория гомологии некоммутативных алгебр Хопфа с инволюцией, а также развита техника производных функторов для предабелевых категорий.

В теории абелевых групп без кручения конечного ранга А.В. также добился ряда фундаментальных результатов. Ему удалось найти новые подходы к проблеме классификации, что позволило, в частности, полностью понять природу аномалий прямых разложений и решить ряд важных проблем, связанных с этими аномалиями. Развивая идеи этих работ, А.В. удалось получить важные результаты об артиновых модулях, для которых нарушается единственность разложения в прямую сумму неразложимых модулей. Кроме того, теоретико-категорная техника, первоначально разработанная А.В. для применений в категории абелевых групп без кручения, была затем им применена для изучения прямых разложений других классов абелевых групп, в частности, смешанных абелевых групп. В последние годы А.В. продолжил развитие этой техники и построил некоторый вариант "теории мотивов" для аддитивных категорий.

Наряду с упомянутыми А. В. Яковлеву принадлежат важные результаты в теории алгебр с тождествами, теории колец и других областях алгебры.

В 2003 г. за цикл работ "Прямые разложения абелевых групп и модулей" ему была присуждена Премия имени А. И. Мальцева Российской академии наук.

Анатолий Владимирович, как и большинство выдающихся алгебраистов, превосходный преподаватель. В общих курсах, которые профессор Яковлев читает на матмехе, находят отражение самые современные тенденции развития математики, ярко и убедительно демонстрируется единство математики. Широчайшая эрудиция А.В. позволяет ему читать захватывающе интересные курсы математической логики и дискретной математики, его спецкурсы служат эталоном жанра. Среди учеников А.В. более двух десятков защитили кандидатские диссертации, пятеро стали докторами наук. В настоящее время большинство из них продолжают активную научную и педагогическую деятельность в университетах России и во многих странах мира.

Анатолий Владимирович заведует кафедрой высшей алгебры и теории чисел с 1993 г. Он принял эту эстафету от З. И. Боревича, с которым А.В. связывали многолетние деловые и дружеские отношения. Под его руководством кафедра по-прежнему – коллектив единомышленников, в котором опыт старшего поколения соединяется с энергией многочисленных молодых преподавателей.

На протяжении ряда лет он возглавлял Методический совет отделения математики математико-механического факультета. Многие годы Анатолий Владимирович посвятил работе со школьниками. Он был одним из первых преподавателей Юношеской математической школы, был председателем жюри городской олимпиады школьников Ленинграда.

Научно-педагогические достижения профессора Яковлева в 2001 г. отмечены званием Почетного работника высшего профессионального образования Российской Федерации.

Нынешний юбилей – это хороший повод выразить наше восхищение личностью Анатолия Владимировича, гордость и радость от сотрудничества и неформального общения с замечательным математиком, коллегой, учителем. Мы верим, что это будет продолжаться ещё долгие годы.

Оргкомитет конференции

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП СВОИМИ ГРУППАМИ УМНОЖЕНИЙ

А. А. Агафонов, А. М. Себельдин (Нижний Новгород, Россия)

Всякое кольцо R на группе A задает некоторое умножение: $\mu(a,b)= ab$. Сумма умножений μ и ν определяется по правилу: $(\mu+\nu)(a,b) = \mu(a,b)+\nu(a,b)$. Умножения на группе A относительно введенной операции образуют группу — $MultA$.

Будем говорить, что группа A *определяется своей группой умножений* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $MultA \cong MultB$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$. Обозначим $\mathbf{X}(Mult)$ подкласс групп, которые определяются в классе $\mathbf{X}$, своей группой умножений.

$\mathbf{F_{cd}}$ — класс всех вполне разложимых групп без кручения.

$\mathbf{F_n}$ — класс вполне разложимых групп без кручения фиксированного ранга n.

$\mathbf{F_{cdi}}$ — класс вполне разложимых групп без кручения таких, что все прямые слагаемые ранга 1 имеют идемпотентные типы.

Теорема 1. *Пусть* $A \in \mathbf{F_{cd}}$, $A = D(A)$, *тогда* $A \in \mathbf{F_{cd}}(Mult)$ *тогда и только тогда, когда* $r(A) \neq ab^2$, *где* a *и* b *некоторые натуральные числа и* $b > 1$.

Следствие 1. $\mathbf{F_{cd}}(Mult) \neq \varnothing$.

Теорема 2. *Если* $A \in \mathbf{F_{cdi}}, D(A) \neq 0$ *и* $D(A) \in \mathbf{F_{cd}}(Mult)$, *то* $A \in \mathbf{F_{cd}}(Mult)$

Теорема 3. $\mathbf{F_n}(Mult) \setminus \mathbf{F_{cdi}} \neq \varnothing$.

НЕРАСЩЕПИМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ С РЕТРАКТОМ $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk22}$

М.А. Башкин (Рыбинск, Россия)

Рассматривается частный случай проблемы классификации однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с заданным однородным расщепимым супермногообразием, которое называется их ретрактом. Эта проблема была поставлена А.Л. Онищиком в 90-х годах и решается в данной работе в случае, когда в качестве однородного расщепимого супермногообразия рассматривается супермногообразие $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk22}$. Известно, что однородные расщепимые супермногообразия над $\mathbb{CP}^1$ находятся во взаимно однозначном соответствии с невозрастающими наборами неотрицательных чисел. Поэтому далее будем предполагать, что $k \geq 2$. Через $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk22}$ обозначим расщепимое супермногообразие, определяемое голоморфным векторным расслоением $\mathbf{E} \to \mathbb{CP}^1$ ранга 4, представленное в виде прямой суммы линейных расслоений на прямые $\mathbf{E} = \mathbf{L}_{-k} \oplus \mathbf{L}_{-k} \oplus 2\mathbf{L}_{-2}$.

Покроем $\mathbb{CP}^1$ двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и $y = \frac{1}{x}$ соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk22}$ в $U_0 \cap U_1$ имеют вид $y = x^{-1}$, $\eta_1 = x^{-k}\xi_1$, $\eta_2 = x^{-k}\xi_2$, $\eta_3 = x^{-2}\xi_3$, $\eta_4 = x^{-2}\xi_4$, где ξ_i и η_i — базисные сечения расслоения $\mathbf{E}$ над U_0 и U_1 соответственно.

Один из подходов к задаче классификации комплексных супермногообразий с заданным ретрактом $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ заключается в следующем. Согласно теореме Грина, классы изоморфных супермногообразий такого вида находятся в биективном соответствии с орбитами группы автоморфизмов соответствующего векторного расслоения $\mathbf{E}$ на множестве когомологий $H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ со значениями в пучке $\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$ автоморфизмов пучка $\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$, тождественных по модулю квадрата подпучка нильпотентных элементов. В некоторых случаях вычисление этих неабелевых когомологий удается свести к вычислению обычных (абелевых) когомологий со значениями в пучке $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ векторных полей на $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. В настоящем исследовании рассматривается случай, когда существует биекция между множеством $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ и векторным пространством $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_4)$ (см. [1] и [2]). При этом как абелевы, так и неабелевы когомологии могут быть описаны при помощи комплекса Чеха, связанного со штейновым открытым покрытием многообразия M. При исследовании супермногообразий на однородность и четную однородность существенное значение имеют критерии подъема на супермногообразие с его ретракта векторных полей и действий групп Ли, связанные с инвариантностью класса когомологий, определяющего супермногообразие, относительно этих действий (см. [3]).

Получено описание четно-однородных и однородных нерасщепимых супермногообразий с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk22}$. Основным результатом является доказательство того, что с точностью до изоморфизма существует два однородных нерасщепимых супермногообразия с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{2222}$ (этот результат содержится в работе [2]), три — с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{3322}$ и одно — с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk22}$ при $k \geq 4$. В покрытии $\{U_0, U_1\}$ они могут быть заданы следующими коциклами:

$k = 2:$

$$x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4},$$

$$x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4} + \\ + x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2};$$

$k = 3:$

$$x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x},$$

$$x^{-2}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x} + x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x},$$

$$x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x} + x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x};$$

$k \geq 4:$

$$x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}.$$

Список литературы

[1] *Башкин М.А., Онищик А.Л.* Однородные нерасщепимые супермногообразия над комплексной проективной прямой // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции памяти А.Ю.Левина. — Ярославль: ЯрГУ, 2008. — С. 40–57.

[2] *Башкин М.А., Онищик А.Л.* Однородные нерасщепимые супермногообразия размерности 1|4 над комплексной проективной прямой // Математика в Ярославском университете: Сб. обзорных статей. К 30-летию математического факультета. — Ярославль: ЯрГУ, 2006. — С. 17–32.

[3] *Onishchik A.L.* A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V. 16. P. 309–333.

О НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРАХ ГРУППЫ S_n, ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НА S_n^ε

В. А. Белоногов (Екатеринбург, Россия)

Продолжаются исследования, связанные со следующей гипотезой.

Гипотеза 1. *Знакопеременная группа A_n при любом натуральном n не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.*

С целью доказательства этой гипотезы индукцией по n автором была предложена новая гипотеза А, которая формулируется в терминах пар χ^α и χ^β неприводимых характеров симметрической группы S_n, и после доказательства которой становится доказанной и первая гипотеза.

Напомним, что функции φ и ψ из некоторого множества G в поле $\mathbb{C}$ называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества M из G пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G \setminus M$, и они называются *полупропорциональными на* S, где $S \subseteq G$, если полупропорциональны их ограничения на S.

Гипотеза А. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ *и* χ^α *полупропорционально* χ^β *на* S_n^ε. *Тогда с точностью до перемены мест* α *и* β *верно одно из следующих утверждений:*

(1) $\varepsilon = 1$ *и выполнено одно из условий:*

(1а) $\alpha =' 2^k.() + (3)$ *и* $\beta = 2^k.() + (0^k, 2, 1)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*;*

(2б) $\alpha =' 2^k.(1) + (3)$ *и* $\beta = 2^k.(1) + (0^k, 1, 2)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*;*

(2) $\varepsilon = -1$ *и выполнено одно из условий* (*везде* k, m *целые*)*:*

(2а) $\alpha =' 3^k.\Delta_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2)$, *где* $k \geqslant 0$ *и* $l \geqslant 1$*;*

(2б) $\alpha =' 3^k.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1)$, *где* $k \geqslant 0$ *и* $l \geqslant 0$*;*

(2в) $\alpha =' 3^k.2.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3)$, *где* $k \geqslant 0$ *и* $l \geqslant 0$.

Здесь $P(n)$ есть множество всех разбиений числа n, χ^α — неприводимый характер группы S_n, соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$;

$S_n^\varepsilon := A_n$ при $\varepsilon = 1$ и $S_n^\varepsilon := S_n \setminus A_n$ при $\varepsilon = -1$;

$()$ — разбиение числа 0 (пустая последовательность); при $c \in \{2, 3\}$ для любого разбиения Θ длины $l \geqslant 0$ определяется его *c-накрытие* $c.\Theta := (\,\Theta_1 + c + 1,\, \Theta_1 + 1,\, \Theta_2 + 1,\, \ldots,\, \Theta_l + 1,\, 1^c)$, в частности, $c.() = (c+1, 1^c)$ (Θ_i — i-я компонента разбиения Θ и 1^c — подпоследовательность c единиц), $c^0.\Theta := \Theta$ и $c^k.\Theta := c.(c^{k-1}.\Theta)$ для натуральных k; при $l \in \mathbb{N}$

$\Delta_l := (\,l,\, l-1,\, \ldots,\, 2, 1\,)$ и $\Sigma_l := (\,(2l)^2,\, (2l-2)^2,\, \ldots,\, 2^2\,)$, $\Sigma_0 := ()$;

$(0^k, a, b)$ есть последовательность $(0, \ldots, 0, a, b)$ длины $k + 2$. Мы пишем $\alpha =' \beta$, если $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$, где β' — есть разбиение, ассоциированное с α.

При доказательстве этой гипотезы существенную роль играет строение диаграмм Юнга участвующих в её заключении разбиений α и β.

Понятно, что доказательство гипотезы А индукцией по n достаточно провести в предположении, что выполнено следующее

Условие А. Пусть n — натуральное число такое, что при любом при любом $\widetilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\widetilde{n}, \widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы А на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$ следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.

Согласно теореме А из [1] доказательство гипотезы А можно разделить на две части, в которых выполнены соответственно условия $h_{11}^{\alpha} = h_{11}^{\beta}$ и $h_{12}^{\alpha} = h_{11}^{\beta}$. ($h_{ij}^{\alpha}$ обозначает длину крюка с вершиной в клетке (i, j) диаграммы Юнга разбиения α.)

Итоговым результатом серии статей [2], [3] является следующая

Теорема А4. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^{α} *полупропорционально* χ^{β} *на* S_n^{ε} *и выполнено условие А. Предположим, что* $h_{11}^{\alpha} = h_{11}^{\beta}$. *Тогда* $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^{\alpha}}$ *и пара* $(\alpha^{11}, \beta^{11})$ *удовлетворяет условию* (2в) *заключения гипотезы А на месте* (α, β).

В настоящее время автором доказана противоречивость условия (2в), а следовательно, и противоречивость предположения $h_{11}^{\alpha} = h_{11}^{\beta}$. Отсюда и из теоремы А4 вытекает

Теорема А5. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^{α} *полупропорционально* χ^{β} *на* S_n^{ε} *и выполнено условие А. Тогда* $h_{11}^{\alpha} \neq h_{11}^{\beta}$.

Следовательно, в дальнейшем доказательстве гипотезы А мы будем предполагать, что при условии теоремы А5 с точностью до перемены мест α и β выполнено равенство $h_{12}^{\alpha} = h_{11}^{\beta}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07-01-00148), РФФИ-БРФФИ (проект №08-01-90006), программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Белоруси.

Список литературы

[1] Белоногов В. А. О равнокорневых неприводимых характерах групп S_n и A_n // Алгебра и логика, 46, №1 (2007), 3–25.

[2] Белоногов В. А. О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, №2. С. 135—156.

[3] Белоногов В. А. О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. I—IV . Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 14, № 2 (2008), 143—163; 14, № 3 (2008), 58—68; 14, № 4 (2008), 12—30; 15, № 2 (2009), 12—33.

ПСЕВДОКОНЕЧНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНЫЕ ГРУППЫ ТИПА $(3, 5, 2)$

В. В. Беняш-Кривец, Я. Жуковец (Минск, Беларусь)

Обобщенные треугольные группы, введенные в [1], имеют копредставление вида

$$\Gamma =< a, b \mid a^n = b^m = R(a, b)^l = 1 >,$$

где $n, m, l \in \{2, 3, 4\} \cup \{\infty\}$ и $R(a, b)$ — циклически редуцированное слово, не являющееся собственной степенью. В этом случае говорят, что группа Γ имеет тип (n, m, l). Эти группы интенсивно изучались многими авторами (см. монографию [2] и литературу в ней).

Гомоморфизм $f : \Gamma \to G$ называется существенным, если элементы $f(a), f(b), f(R(a, b))$ имеют порядки n, m, l соответственно. В [1] доказано, что для произвольной обобщенной треугольной группы существует существенный гомоморфизм в $PSL_2(\mathbb{C})$. В [3] введены псевдоконечные обобщенные треугольные группы, т.е. такие группы Γ, что образ любого существенного гомоморфизма $f : \Gamma \to PSL_2(\mathbb{C})$ конечен. В [4] рассматривались псевдоэлементарные группы Γ, которые характеризуются тем, что образ любого существенного гомоморфизма $f : \Gamma \to PSL_2(\mathbb{C})$ является элементарной подгруппой в $PSL_2(\mathbb{C})$ (т.е. подгруппой, не содержащей неабелевой свободной подгруппы).

Титс доказал, что если G — конечно порожденная линейная группа, то либо G содержит неабелеву свободную подгруппу, либо G является почти разрешимой. Если для произвольной группы G выполнено одно из указанных условий, то говорят, что G удовлетворяет альтернативе Титса. В [5] выдвинута гипотеза, что для произвольной обобщенной треугольной группы Γ справедлива альтернатива Титса. В настоящее время в достаточно большом количестве работ различных авторов эта гипотеза доказана для обобщенных треугольных групп всех типов, кроме $(2, n, 2)$ при $n < 6$, $(3, 3, 2)$ и $(3, 5, 2)$. Если группа Γ не является псевдоэлементарной, то для нее справедлива альтернатива Титса.

Мы рассматриваем обобщенные треугольные группы типа $(3, 5, 2)$. Эти группы имеют копредставление $\Gamma =< a, b \mid a^3 = b^5 = R(a, b)^2 = 1 >$, где $R(a, b) = a^{u_1} b^{v_1} \ldots a^{u_s} b^{v_s}$, $0 < u_i < 3$, $0 < v_i < 5$.

Нетрудно показать, что если Γ является псевдоконечной, то она псевдоэлементарна и поэтому удовлетворяет альтернативе Титса. Скажем, что два слова $R(a,b), R'(a,b) \in \langle a, b \mid a^3 = b^5 = 1\rangle$ эквивалентны, если $R(a,b)$ может быть преобразовано в $R'(a,b)$ цепочкой следующих преобразований: циклический сдвиг на четное число символов, автоморфизм группы $\langle a \mid a^3 = 1\rangle$ или $\langle b \mid b^5 = 1\rangle$, переход к $R^{-1}(a,b)$. Очевидно, два эквивалентных слова определяют изоморфные группы. В следующей теореме мы находим, с точностью до эквивалентности, все псевдоконечные группы Γ при $s \leqslant 7$.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma =< a, b \mid a^3 = b^5 = R(a,b)^2 = 1 >$ *, где* $R(a,b) = a^{u_1}b^{v_1}\dots a^{u_s}b^{v_s}$, $0 < u_i < 3$, $0 < v_i < 5$. *Если* $s \leqslant 7$ *и* Γ *псевдоконечна, то с точностью до эквивалентности* $R(a,b)$ *совпадает с одним из следующих слов:*

s	$R(a,b)$
1	ab
2	$abab^4$, aba^2b^3
3	$ababa^2b^4$, $aba^2b^2a^2b^4$
4	$abab^3a^2ba^2b^4$, $abab^2a^2ba^2b^4$, $aba^2bab^2a^2b^4$; $abab^3a^2b^2ab^4$
5	$ababa^2b^4a^2bab^4$, $ababa^2b^3ab^2a^2b^4$, $abab^2a^2bab^4a^2b^3$
6	$aba^2bab^3a^2b^3ab^2a^2b^4$, $aba^2b^2ab^4a^2b^2ab^4a^2b^3$, $abab^2a^2b^4aba^2b^3ab^4$
7	$abab^2a^2b^4ab^3a^2b^2aba^2b^3$

В [Vin] доказано, что если s четно и группа Γ псевдоконечна, то либо $U = \sum_{i=1}^{s} u_i$ делится на 3, либо $V = \sum_{i=1}^{s} v_i$ делится на 5. Используя теорему 1, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Если s четно и либо* $V = \sum_{i=1}^{s} v_i$ *делится на 5, либо* $s \leqslant 6$, *то группа* Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Список литературы

[1] Baumslag G., Morgan J.W., Shalen P.B. Generalized triangle groups. // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1987. V. 102, №1. P. 25–31.

[2] Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York: Marcel Dekker, 1999.

[3] Vinberg E.B., Kaplinsky Y. Pseudo-finite generalized triangle groups. // London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 2004. V.311. P.564–587.

[4] Williams G. Pseudo-elementary generalized triangle groups. // J. Group Theory. 2007. V. 10. P. 101–115.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ТОРОВ P-АЛГЕБРЫ ФРАНК

А.Ю. Великанов, М.И. Кузнецов, О.А. Муляр (Нижний Новгород, Россия)

Над полями характеристики $p = 2, 3, 5$ существуют серии простых алгебр Ли, которые не являются ни классическими алгебрами Ли, ни алгебрами Ли картановского типа. Одной из таких серий при $p = 3$ является серия алгебр Франк $T(m)$ ([1] - [3]). Автоморфизмы алгебр $T(m)$ найдены в [4]. Алгебры Франк имеют стандартную фильтрацию глубины 2, инвариантную относительно автоморфизмов, $L = L_{-2} \supset L_{-1} \supset L_0 \supset \ldots, codim L_{-1} = 1$ ([5]).

В работе рассматривается 18-мерная простая p-алгебра Ли $T(1)$. Тор T в фильтрованной p-алгебре Ли L называется согласованным с убывающей фильтрацией $\{L_i\}$, если $T \cap L_i$ является p-подалгеброй. В [6] найдены все классы сопряженности относительно группы автоморфизмов максимальных торов, согласованных со стандартной фильтрацией в $L = T(1)$, а также доказано, что все максимальные торы в $T(1)$ двумерны и являются подалгебрами Картана. Назовем тор T тором общего положения, если $T \cap L_{-1}$ не содержит тороидальных элементов. Авторами получен следующий результат.

Теорема. *Классы сопряженности максимальных торов общего положения в p-алгебре Франк $T(1)$ образуют параметрическое семейство. Если максимальный тор не является тором общего положения, то он согласован со стандартной фильтрацией в $T(1)$. Существуют четыре класса сопряженности максимальных торов, согласованных со стандартной фильтрацией.*

Работа поддержана Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», шифр проекта НК-13П-13, контракт № П945.

Список литературы

[1] Frank M.S. A new simple Lie algebra of characteristic three// Proc. Amer. Math. Soc.–1973.–V.38.–P.43-46.

[2] Brown G.E. A class of simple Lie algebras of characteristiv three//Proc. Amer. Math. Soc.-1989.-V.107.-P.901-905.

[3] Скрябин С.М. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3// Матем. сб.- 1992.-Т.183(8).-С.3-22.

[4] Кузнецов М.И., Муляр О.А. Автоморфизмы алгебр Франк//Вестник ННГУ. Сер. Математика.-2005.-Вып.1(3)-С.64-75.
[5] Муляр О.А. Максимальные подалгебры алгебр Франк//Вестник ННГУ. Сер. Математика.-2005.-Вып.1(3).-С.109-113.
[6] Кузнецов М.И., Муляр О.А., Решетников Д.В. Торы алгебры Франк//Вестник ННГУ. Сер. Математика.-2006.-Вып. 1(4).-С.49-58.

ДИСТРИБУТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский (Екатеринбург, Россия)[1]

Элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ называется *дистрибутивным*, если

$$\forall y, z \in L\colon \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

стандартным, если

$$\forall y, z \in L\colon \quad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z),$$

и *модулярным*, если

$$\forall y, z \in L\colon \quad y \leqslant z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y.$$

Известно, что всякий стандартный элемент дистрибутивен. Через $Var\Sigma$ обозначается многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ. Положим $\mathcal{SL} = Var\{x = x^2, xy = yx\}$, $\mathcal{M}_1 = Var\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\}$, $\mathcal{M}_1^n = Var\{x^2y = xyx = yx^2 = x_1x_2\cdots x_n = 0\}$, $\mathcal{M}_2 = Var\{x^2 = xyx = 0\}$, $\mathcal{M}_2^n = Var\{x^2 = xyx = x_1x_2\cdots x_n = 0\}$. Через $\mathcal{SEM}$ обозначается многообразие всех полугрупп, а через **SEM** — решетка всех многообразий полугрупп.

Теорема. *Для многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*: а) $\mathcal{V}$ — *дистрибутивный элемент решетки* **SEM**; б) $\mathcal{V}$ — *стандартный элемент решетки* **SEM**; в) $\mathcal{V}$ *совпадает с одним из многообразий $\mathcal{SEM}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1^n$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_2^n$, $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{M}_1^n \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{M}_2 \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{M}_2^n \vee \mathcal{SL}$, где n — произвольное натуральное число.*

Из этой теоремы и предложения 1.1 работы [1] вытекает

Следствие. *Всякий дистрибутивный элемент решетки* **SEM** *является модулярным элементом этой решетки.*

---

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-12142) и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Федерального агентства по образованию Российской Федерации (проект № 2.1.1/3537).

Список литературы

[1] J. Ježek, R. N. McKenzie. *Definability in the lattice of equational theories of semigroups* // Semigroup Forum. 1993. Vol. 46, № 2. P. 199–245.

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 2 СВОИМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ

В. К. Вильданов (Нижний Новгород, Россия)

Будем говорить, что группа A *определяется своей группой автоморфизмов* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $Aut(A) \cong Aut(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$.

$\mathbf{F_{cd}}$ – класс всех вполне разложимых групп без кручения.

$\tau(A)$ – тип группы без кручения ранга 1.

$\Omega(G)$ – множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы $G \in \mathbf{F_{cd}}$.

$\mathbf{F_{cdi}}$ – класс вполне разложимых групп без кручения таких, что все прямые слагаемые ранга 1 имеют идемпотентные типы.

Теорема 1. *Группа* $A \in \mathbf{F_{cd}}, 2A = A, r(A) = 2$ *определяется в этом классе своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда* A *однородная почти делимая группа.*

Теорема 2. *Группа* $A \in \mathbf{F_{cdi}}, 2A = A, r(A) = 2$ *определяется в этом классе своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда она однородная.*

Теорема 3. *Группа* $A \in \mathbf{F_{cdi}}, r(A) = |\Omega(G)| = 2$ *определяется в этом классе своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда* $A = A_1 \oplus Z$.

РАДИКАЛЫ ГРУПП, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ФИТТИНГОВЫМИ ФУНКТОРАМИ

Е. А. Витько, Н. Т. Воробьев (Витебск, Беларусь)

В определениях и обозначениях мы следуем [1]. Будем проводить все исследования в некотором непустом классе конечных групп $\mathfrak{U}$, замкнутом относительно операций S, Q, N_0.

Пусть $G \in \mathfrak{U}$, отображение f, которое каждой группе G ставит в соответствие некоторое множество ее подгрупп $f(G)$, называется [2] фиттинговым функтором, когда выполняются следующие условия: 1) если $\beta : G \to \beta(G)$ – изоморфизм, то $\beta(f(G)) = f(\beta(G))$; 2) если $N \trianglelefteq G$, то $f(G) \bigcap N = f(N)$.

Фиттингов функтор называется сопряженным, если для каждой группы G, множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп.

Заметим, что изучение фиттинговых функторов до настоящего времени ограничивалось лишь случаем, когда $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп. В настоящей работе мы исследуем функторы и их применение к описанию радикалов в общем случае, когда универсум $\mathfrak{U}$ состоит не только из разрешимых групп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, тогда $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}(G) = \{G_{\mathfrak{F}}\}$ является сопряженным фиттинговым функтором. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$, то вместо $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$ будем использовать обозначение Rad_π.

Пусть группа $G \in \mathfrak{U} = \mathfrak{S}^\pi$. Так как в любой π-разрешимой группе холловы π-подгруппы существуют и сопряжены [3], то $\mathrm{Hall}_\pi(G) = \{G_\pi : G_\pi$ – холлова π-подгруппа группы $G\}$ является сопряженным фиттинговым функтором.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и группа $G \in \mathfrak{U} = \mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$. Так как в любой $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой группе $\mathfrak{F}$-инъекторы существуют и сопряжены [4], то $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G) = \{V : V$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы $G\}$ является сопряженным фиттинговым функтором.

Пусть f и g – фиттинговы функторы, тогда положим $(f \circ g)(G) = \{X : X \in f(Y)$ для некоторой подгруппы $Y \in f(G)\}$.

Следуя [2] введем

Определение. Пусть f – фиттингов функтор, π – множество простых чисел, тогда положим $L_\pi(f) = (G \in \mathfrak{U} : |G : X|$ – π'-число для всех $X \in f(G))$.

Следующая теорема описывает метод построения классов Фиттинга в классе $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ всех конечных групп посредством произвольного фиттингова функтора.

Теорема 1. Пусть f – фиттингов функтор, π – множество простых чисел, тогда класс $L_\pi(f)$ является классом Фиттинга и $L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'}$ $= L_\pi(f)$.

Данная теорема позволяет выделять семейства классов Фиттинга при конкретных значениях функтора f.

Примеры. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^\pi$, пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, π – множество простых чисел, G_π – холлова π-подгруппа группы G и f – фиттингов функтор.

1) Если $f = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}} \circ \mathrm{Hall}_\pi$, то класс $L_\pi(f) = K_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех тех групп, в которых холлова π-подгруппа является $\mathfrak{F}$-группой.

2) Если $f = \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$ и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, то класс $L_\pi(f) = L_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех тех групп, в которых $\mathfrak{F}$-инъектор имеет π'-индекс.

3) Если $f = \mathrm{Rad}_\pi \circ \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$ и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, то класс $L_\pi(f) = L'_\pi(\mathfrak{F})$ – класс всех тех групп, в которых холлова π-подгруппа является нормальной подгруппой некоторого $\mathfrak{F}$-инъектора.

Посредством применения понятия фиттингова функтора доказана следующая теорема, которая описывает строение радикалов классов Фиттинга $K_\pi(\mathfrak{F})$, $L_\pi(\mathfrak{F})$ и $L'_\pi(\mathfrak{F})$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^\pi$, пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, π – множество простых чисел, G_π – холлова π-подгруппа группы G.

1) Если $C = (G_\pi)_{\mathfrak{F}}$, то $G_\pi \bigcap G_{K_\pi(\mathfrak{F})} = C$ и

$G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/\langle C^G \rangle = \mathrm{O}_{\pi'}(G/\langle C^G \rangle)$.

2) Если $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и $C = \mathrm{Core}_{G_\pi}(V_\pi)$, то

2.1) $G_\pi \bigcap G_{L_\pi(\mathfrak{F})} = C$ и $G_{L_\pi(\mathfrak{F})}/\langle C^G \rangle = \mathrm{O}_{\pi'}(G/\langle C^G \rangle)$;

2.2) $G_\pi \bigcap G_{L'_\pi(\mathfrak{F})} = C$ и $G_{L'_\pi(\mathfrak{F})}/\langle C^G \rangle = \mathrm{O}_{\pi'}(G/\langle C^G \rangle)$.

Список литературы

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

[2] Beidlman J.C., Brewster B., Hauck P. Fittingfunktoren in endlichen auflösbaren Gruppen I. // Math. Z. – 1983. – Vol. 182. – S. 359 – 384.

[3] Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.

[4] Шеметков Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207-212.

О ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫХ КЛАССАХ ФИТТИНГА

Н. Т. Воробьёв, А. В. Турковская (Витебск, Беларусь)

Все рассматриваемые группы конечны.

В теории классов Фиттинга хорошо известна своими приложениями теорема Блессеноля-Гашюца [1] о существовании наименьшего нетривиального разрешимого нормального класса Фиттинга.

Напомним, что класс Фитинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным [1] в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимым групп, если для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ её $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G. Расширим это понятие следующим образом.

Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовём $\mathfrak{X}$-нормальным, или локально нормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$-радикал является максимальной из подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Заметим, что в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ специальным случаем $\mathfrak{X}$-нормального класса Фиттинга является нормальный класс Фиттинга.

Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведением называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Через $\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$ обозначим класс всех $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимых групп, где $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей групп из $\mathfrak{F}$. Классом Фишера называют [2] класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, если из того, что $K \subseteq H \subseteq G$, K нормальна в G и $H/K \in \mathfrak{N}_p$ всегда следует $H \in \mathfrak{F}$.

Расширением указанного выше результата Блессеноля-Гашюца на случай $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга является следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – множество $\mathfrak{X}$-нормальных Q-замкнутых классов Фиттинга. Тогда если $\mathfrak{F} = \cap_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$, то $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга.

Следствие 1[3]**.** Пусть $\mathfrak{X}$ – Q-замкнутый класс Фишера, и $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – множество $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга. Если $\mathfrak{F} = \cap_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга.

В классе $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ получаем

Следствие 2[1]**.** Пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фиттинга является нормальным классом Фиттинга.

Список литературы

[1] D.Blessenohl, Uber normale Schunk und Fittingklassen. – Math.Z. – 1970. – Bd.148, N1. – S.1–8.

[2] B.Hartley, On Fisher's dualization of formation theory. – Proc. London Math.Soc. – 1969. – Vol.3, N2. – P.193–207.

[3] Shpakov V.V., Vorob'ev N.N and Vorob'ev N.T. On intersection of normal Fitting classes of finite groups / Acta Acad.Paed. Agrensis. Vol.30 . – 2003. – P.167–171.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУПП С ПОМОЩЬЮ МНОЖЕСТВ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ

Г. В. Воскресенская (Самара, Россия)

Пусть G – конечная группа. Каждому элементу группы можно сопоставить модулярную форму, используя характеристические многочлены операторов $T(g)$, где T – точное представление. Возникающие здесь модулярные формы являются произведениями эта-функций Дедекинда от различных аргументов. Это соответствие называется соответствием с помощью фрейм-форм (Frame-shape correspondence). Мы расскажем в докладе о свойствах этого соответствия и рассмотрим ситуацию, когда одно или несколько множеств модулярных форм, построенных с помощью точных представлений, *однозначно* определяют группу. Получается "модулярный шифр" для группы.

Теорема. *Множества модулярных форм, стоящие в правом столбце следующей таблицы, однозначно определяют соответствующие группы из левого столбца.*

группа	модулярный генетический код
$\{e\}$	$\{\eta^{24}(z)\}$
Z_2	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{11}(2z)\eta^{2}(z)\}$
Z_3	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{8}(3z)\}$
$Z_2\times Z_2$	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{11}(2z)\eta^{2}(z),\ \ \eta^{10}(2z)\eta^{4}(z)\}$
Z_4	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{5}(4z)\eta^{2}(2z),\ \ \eta^{10}(2z)\eta^{4}(z)\}$
Z_5	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{4}(5z)\eta^{4}(z)\}$
Z_6	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{4}(6z),\ \eta^{8}(3z)\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{3}(6z)\eta^{6}(z),\ \ \eta^{6}(3z)\eta^{6}(z),\ \eta^{9}(2z)\eta^{6}(z)\}$
S_3	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{8}(3z)\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(3z)\eta^{6}(z),\ \eta^{11}(2z)\eta^{2}(z)\}$
Z_7	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{3}(7z)\eta^{3}(z)\}$
Z_8	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{3}(8z)\ ,\eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}$
$Z_4\times Z_2$	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z),\ \ \eta^{4}(2z)\eta^{16}(z)\}$
$Z_2\times Z_2\times Z_2$	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z),\ \eta^{6}(2z)\eta^{12}(z),\ \ \eta^{4}(2z)\eta^{16}(z)\}$
D_4	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z),\ \ \eta^{10}(2z)\eta^{4}(z)\}$
Q_8	$\{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(4z),\ \eta^{12}(2z)\}\bigwedge$ $\{\eta^{24}(z),\ \ \eta^{4}(4z)\eta^{2}(2z)\eta^{4}(z),\ \eta^{4}(4z)\eta^{8}(z),\ \eta^{4}(4z)\eta^{4}(2z),\ \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z)\}$

Список литературы

[1] Dummit D., Kisilevsky H., McKay J. Multiplicative products of $\eta-$functions// Contemp.Math.1985.V. 45. P.89-98.

[2] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series, 2004, 216 p.

[3] Voskresenskaya G.V. Multiplicative Dedekind $\eta-$functions and representations of finite groups //Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux 2005.V.17 P. 359 - 380.

О ТОЖДЕСТВЕ (28) ИЗ ВТОРОГО ПИСЬМА РАМАНУДЖАНА К ХАРДИ

В. М. Галкин (Н. Новгород, Россия)

Тождество из заголовка можно записать в виде

$$f^2(\sqrt{-1353})/\sqrt{2} = (10+3\sqrt{11})^{\frac{1}{4}}(26+15\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}(\frac{11+\sqrt{123}}{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}}$$
$$(\frac{6817+321\sqrt{451}}{\sqrt{2}})^{\frac{1}{6}}(\sqrt{\frac{17+3\sqrt{33}}{8}}+\sqrt{\frac{25+3\sqrt{33}}{8}}) \qquad (*)$$
$$(\sqrt{\frac{561+99\sqrt{33}}{8}}+\sqrt{\frac{569+99\sqrt{33}}{8}}),$$

где первая функция Вебера определяется равенством $f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}), q = e^{\pi i\omega}, Im\omega > 0$.

Профессор Берндт ([1]) обнаружил в записных книжках Рамануджана еще 43 тождества такого типа. В докладе описывается как получить все такие тождества. Согласно Веберу ([2]) абелево расширение $K = k(j(\sqrt{-D}))$ поля $k = Q(\sqrt{-D})$, где $j(\omega)$ – модулярный инвариант, можно получить присоединением к k некоторого монома x от $f(\omega)$ при D нечетном и от $f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})$ при D четном. В ([3]) автор указал вид сопряженных с x в K/k и дал эффективный алгоритм их вычисления. Группа Галуа K/k есть группа классов обратимых идеалов порядка $Z[\sqrt{-D}]$ и тождества типа $(*)$ возникают лишь когда число классов в главном роде равно 1 или 2. В первом случае, т. е. когда D “удобное число” Эйлера, тождества перечислены Вебером и Рамануджаном. Нахождение тождеств во втором случае производится следующим образом. Для каждой элементарной 2-подгруппы H в $Gal(K/k)$ индекса 2 составляется произведение сопряженных к x множителей $\sigma(x)(\sigma$ принадлежит H). Это произведение оказывается единицей в квадратичном поле $Q(\sqrt{n}), n|D$, и далее называается обыкновенным множителем. Аналогичные произведения для подгрупп индекса 4 с циклической факторгруппой назовем исключительными множителями. Они являются корнями квадратных уравнений с коэффициентами из $Q(\sqrt{n})$. Некоторая степень x является произведением обыкновенных и исключительных множителей. Например,

$$f^2(\sqrt{-1705})/\sqrt{2} = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{\frac{7}{2}}(2\sqrt{31}+5\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}\tfrac{3+\sqrt{11}}{\sqrt{2}}(\tfrac{3\sqrt{31}+5\sqrt{11}}{2})^{\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}$$
$$(\sqrt{54+9\sqrt{31}}+\sqrt{50+9\sqrt{31}})\tfrac{1}{2}(\sqrt{30+5\sqrt{31}}+\sqrt{26+5\sqrt{31}}).$$

Автором получены тождества для многих D, в частности для случаев $D \equiv 0(4)$, которых нет у Рамануджана.

Произведен поиск нужных D<100000, который дал 231 значение. По-видимому таких D, как и удобных чисел, конечное число.

Список литературы

[1] B. C. Berndt. Ramanujans Notebooks. Part V. Spring – Verl., 1988.
[2] H. Weber. Lehrbuch der Algebra. BdIII, 1908. Reprinted New-York, Chelsea, 1968.
[3] V. M. Galkin, O. R. Kozyrev. The Weber’s table: some observations. Int. Conf. Dedic. to the 90-th Ann. of L. S. Pontryagin.–Moscow,1998,p.p. 27-28.

БИАЛГЕБРЫ МАЛЬЦЕВА

М. Е. Гончаров[2] (Новосибирск, Россия)

[2]Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 09-01-00157-А, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ-3669.2010.1, МД-2438.2009.1), интеграционного проекта СО РАН №97, ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429), Лаврентьевского гранта для коллективов молодых учёных СО РАН, постановление Президиума СО РАН №43 от 04.02.2010, а также стипендии Независимого Московского университета.

Биалгебры Ли — это одновременно алгебры Ли и коалгебры Ли, коумножение которых является 1-коциклом. Биалгебры Ли были введены Дринфельдом [1] для изучения решений классического уравнения Янга — Бакстера. В работах [2, 3] дано определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр. В частности, были определены ассоциативные и йордановы Д-биалгебры, а также рассмотрен ассоциативный аналог уравнения Янга — Бакстера и ассоциативные Д-биалгебры, связанные с решениями этого уравнения. Класс йордановых Д-биалгебр, связанный с йордановым аналогом уравнения Янга — Бакстера, был определен в [4], где было доказано, что всякая конечномерная йорданова Д-биалгебра, которая полупроста как алгебра, принадлежит этому классу. В работе [5] изучались альтернативные Д-биалгебры и их связь с альтернативным уравнением Янга-Бакстера. В частности, были описаны все структуры альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона.

Определение. Пара (A, Δ), где A — векторное пространство над F, а $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — линейное отображение, называется *коалгеброй.* При этом отображение Δ называется *коумножением.*

Для элемента $a \in A$ будем использовать обозначение $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

На пространстве A^* определим умножение, полагая $\langle fg, a\rangle = \sum\limits_a \langle f, a_{(1)}\rangle\langle g, a_{(2)}\rangle$, где $f, g \in A^*, a \in A$ и $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Полученная алгебра называется *дуальной алгеброй* коалгебры (A, Δ).

Дуальная алгебра A^* коалгебры (A, Δ) задаёт бимодульное действие на A, которое определяется следующим образом $f \rightharpoonup a = \sum a_{(1)}\langle f, a_{(2)}\rangle$ и $a \leftharpoonup f = \sum\langle f, a_{(1)}\rangle a_{(2)}$, где $f \in A^*$ и $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Пусть теперь A — произвольная алгебра, на которой задано коумножение Δ и A^* — дуальная алгебра коалгебры (A, Δ). Алгебра A задаёт бимодульное действие на пространстве A^*, определенное формулами

$$\langle f \leftharpoondown a, b\rangle = \langle f, ab\rangle \text{ и } \langle b \rightharpoondown f, a\rangle = \langle f, ab\rangle.$$

Рассмотрим пространство $D(A) = A \oplus A^*$ и зададим на нём умножение, полагая

$$(a + f) * (b + g) = (ab + f \rightharpoonup b + a \leftharpoonup g) + (fg + f \leftharpoondown b + a \rightharpoondown g).$$

Тогда $D(A)$ является обычной алгеброй над полем F, а A и A^* — подалгебры в $D(A)$. Алгебру $D(A)$ будем называть дублем Дринфельда.

Определение. Пусть M — произвольное многообразие F–алгебр и A — алгебра из M, на которой дополнительно задано коумножение Δ. Тогда пару (A, Δ) будем называть *M-биалгеброй по Дринфельду*, если алгебра $D(A)$ принадлежит многообразию M.

Данная работа посвящена биалгебрам Мальцева.

Определение. Антикоммутативная алгебра M называется алгеброй Мальцева, если для любых $x, y, z, t \in M$ выполняется

$$J(x, y, zt) = J(x, y, z)t,$$

где $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ — якобиан элементов x, y, z.

Пусть M — алгебра Мальцева. В работе [6] изучались биалгебры Мальцева. В частности, были найдены необходимые и достаточные условия, при которых пара (M, Δ) является биалгеброй Мальцева.

Пусть $r = \sum\limits_i a_i \otimes b_i \in M \otimes M$ такой, что $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$. Определим линейное отображение $\Delta_r(a) = \sum\limits_i a_i a \otimes b_i - a_i \otimes ab_i$. Доказывается следующая

Теорема 1. Пара (M, Δ_r) является биалгеброй Мальцева тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in M$:

$$\begin{gathered}(C_M(r)(1 \otimes b \otimes 1))(1 \otimes a \otimes 1) - C_M(r)(ab \otimes 1 \otimes 1) - \\ -(C_M(r)(1 \otimes 1 \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes b) = C_M(r)(b \otimes 1 \otimes a) - \\ -C_M(r)(a \otimes b \otimes 1),\end{gathered} \qquad (2)$$

где $C_M(r) = \sum\limits_{ij} a_i a_j \otimes b_i \otimes b_j + b_i \otimes b_j \otimes a_i a_j + b_j \otimes a_i a_j \otimes b_i$.

В работе также описываются структуры биалгебры Мальцева на простой нелиевой алгебре Мальцева, у которой дубль Дринфельда не является полупростой алгеброй.

Список литературы

[1] Дринфельд В. Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера.// ДАН СССР, 268, N 2, 1983, 285–287.

[2] Желябин В. Н. Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли.// Алгебра и логика т.1,36(1997), 3–25.

[3] Желябин В. Н. Йордановы биалгебры симметрических элементов и биалгебры Ли// Сибирский математический журнал, 39, 2(1998), 299–308.

[4] Желябин В.Н. Об одном классе йордановых Д-биалгебр.// Алгебра и анализ т.11(1999), вып. 4, 64–94.

[5] Гончаров М.Е. Классическое уравнение Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах. Структура альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона.// Сибирский математический журнал 48 5(2007), 1009-1025.

[6] Vershinin V.V. On Poisson-Malcev structures.// Acta Applicandae Mathematicae 75(2003) 281-292.

ФАКТОРНО ДЕЛИМЫЕ ГРУППЫ РАНГА 1

О.И. Давыдова (Москва, Россия)

Факторно делимые группы без кручения были введены в 1961 г. Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [1]. В 90-е годы интенсивно изучался класс смешанных групп, называемый $\mathcal{G}$. Как обобщение факторно делимых групп без кручения и групп из класса $\mathcal{G}$ в 1998 г. А.А. Фомин и У. Уиклесс в работе [2] определили смешанные факторно делимые группы и доказали, что категории смешанных факторно делимых групп и групп без кручения конечного ранга, с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов, двойственны. В группах без кручения конечного ранга важную роль играют группы ранга 1. Учитывая, что двойственность Уиклесса – Фомина сохраняет ранг без кручения, изучение смешанных факторно делимых групп также должно основываться на смешанных факторно делимых группах ранга 1.

Определение 1. Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — периодическая делимая группа.

Независимую систему порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ группы F из определения 1 будем называть *базисом* факторно делимой группы A, а ранг группы F — рангом факторно делимой группы A.

Определение 2. Для элемента a из группы A и простого числа p определим m_p как наименьшее целое неотрицательное число такое, что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень числа p в группе A. Если такого числа не существует, то будем считать $m_p = \infty$. Последовательность $(m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_n}, \dots)$ называется *кохарактеристикой* элемента a в группы A и обозначается $cochar(a)$.

Определение 3. *Кохарактеристикой* факторно делимой группы A ранга 1 будем называть кохарактеристику любого ее базисного элемента и обозначать $cochar(A)$.

Теорема 1. *Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 с базисным элементом x, B — произвольная факторно делимая группа и $y \in B$. Если $cochar_A(x) \geqslant cochar_B(y)$, то существует единственный такой гомоморфизм $f\colon A \to B$, что $f(x) = y$.*

Теорема 2. *Факторно делимые группы ранга 1 изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые кохарактеристики.*

Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика. Для каждого простого числа p возьмем кольцо K_p, где $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$, если $0 \leqslant m_p < \infty$ или $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$, если $m_p = \infty$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p \in P} K_p$. Если характеристика χ принадлежит нулевому типу, то определим кольцо $R^\chi = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_\chi$. Если характеристика χ не принадлежит нулевому типу, то определим кольцо $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$.

Теорема 3. *Если A — факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики χ, то группа A изоморфна аддитивной группе кольца R^χ, а ее кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ изоморфно кольцу R^χ.*

Теорема 4. *Пусть R^χ и R^κ — факторно делимые группы ранга 1, $\chi = (m_p)$ и $\kappa = (k_p)$.*

1) *Если неравенство $[\chi] \geqslant [\kappa]$ не имеет места, то группа $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa)$ периодическая, все p-примарные компоненты которой являются циклическими группами. Если для некоторого простого числа p выполняется $k_p = 0$ или $k_p = \infty$, то p-примарная компонента группы $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa)$ равна 0. Если для некоторого простого числа p выполняется $0 < k_p < \infty$, то p-примарная компонента группы $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa)$ имеет порядок $p^{min(m_p, k_p)}$.*
2) *Если выполняется $[\chi] \geqslant [\kappa]$,то $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa) \cong R^{\chi\wedge\kappa}$. В частности, если $\chi \geqslant \kappa$, то $\mathrm{Hom}\,(R^\chi, R^\kappa) \cong R^\kappa$.*

Список литературы

[1] Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Illinois J. Math., 5. — 1961. — P. 61–98.

[2] Fomin A.A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — V.126. — P. 45-52.

О ПРИМЕНЕНИИ УСЛОВИЯ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МОДУЛЕЙ НАД ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ

О.Ю.Дашкова (Днепропетровск, Украина)

Л.А.Курдаченко ввел в рассмотрение понятие коцентрализатора подгруппы рассматриваемой группы [1].

Определение. Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ – кольцо, G – группа. Если $H \leq G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.

Одним из самых важных условий конечности в теории групп является условие минимальности для подгрупп. В настоящей работе это условие применено к исследованию модулей над групповыми кольцами.

Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, $\mathbf{R}$ – кольцо, G – группа, и пусть $\mathbf{L_{nnd}}(\mathbf{G})$ - система всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями. Введем на системе $\mathbf{L_{nnd}}(\mathbf{G})$ порядок относительно обычного включения подгрупп. Если $\mathbf{L_{nnd}}(\mathbf{G})$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями, или, просто, что группа G удовлетворяет условию $\mathbf{min} - \mathbf{nnd}$. В работе рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A, централизатор которого в группе G единичен.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть A – $\mathbf{R}G$-модуль, G – локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию $min - nnd$, $\mathbf{R}$ – коммутативное нетерово кольцо, и коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда либо группа G разрешима, либо G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп

$$1 = W_0 \leq W_1 \leq ... \leq W_\omega = \cup_{n\in\mathbf{N}} W_n \leq G,$$

таким, что коцентрализатор подгруппы W_n в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, факторы W_{n+1}/W_n абелевы для $n \geqslant 0$, а фактор-группа G/W_ω – черниковская группа.

Список литературы

[1] Курдаченко Л.А. О группах с минимаксными классами сопряженных элементов. - *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры.* - Академия наук Украины. - Киев, 1993. - С.160-177.

О ПРИМЕНЕНИИ УСЛОВИЯ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МОДУЛЕЙ НАД ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ

О. Ю. Дашкова, Е. Ю. Шелест (Днепропетровск, Украина)

В настоящей работе условие минимальности для подгрупп применено к исследованию модулей над целочисленными групповыми кольцами.

Пусть A – $\mathbf{Z}G$-модуль, $\mathbf{Z}$ – кольцо целых чисел, и пусть $\mathbf{L_{nnd}(G)}$ – система всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{Z}$-модулями (в [1] было введено понятие коцентрализатора подгруппы рассматриваемой группы). На системе $\mathbf{L_{nnd}(G)}$ введем порядок относительно обычного включения подгрупп. Если $\mathbf{L_{nnd}(G)}$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{Z}$-модулями, или, просто, что группа G удовлетворяет условию $\mathbf{min - nnd}$. В работе рассматривается $\mathbf{Z}G$-модуль A, централизатор которого в группе G единичен.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть A – $\mathbf{Z}G$-модуль, G – локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию $\mathbf{min - nnd}$, и коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда группа G разрешима.

Теорема 2. Пусть A – $\mathbf{Z}G$-модуль, G – локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию $\mathbf{min - nnd}$, и коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда группа G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H, такую, что фактор-группа G/H – черниковская группа.

Список литературы

[1] Курдаченко Л.А. О группах с минимаксными классами сопряженных элементов. – *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры.* – Академия наук Украины. – Киев, 1993. С.160-177.

О ГРУППЕ АВТОТОПИЙ КВАЗИГРУППЫ

М. Е. Елисеев (Н. Новгород, Россия)

Таблица Кэли квазигруппы $G(\circ)$ является латинским квадратом (ЛК) так как уравнения $a \circ x = b$ и $x \circ a = b$ решаются однозначно. Квазигруппы (ЛК) называются изотопными, если $a * b = \gamma(\alpha(a) \circ \beta(b))$, где α – перестановка строк, β – перестановка столбцов, γ - переобозначение элементов в ЛК. Само преобразование (α, β, γ) называется изотопией, а при совпадении операций $*$ и $\circ$ – автотопией. Если $\alpha = \beta$, то автотопию будем называть автотопией 1-го рода. В частности, автотопиями 1-го рода являются автоморфизмы. Автотопии и автотопии 1-го рода образуют группы (обозначим их AtG и At_IG соответственно), причем $AtG \supset At_IG \supset AutG$. Доказывается, что $\mid AtG \mid \vdots \mid At_IG \mid$, где n – порядок G.

Каждому ЛК порядка n можно взаимно однозначно сопоставить упорядоченный набор из n подстановок, по правилу: подстановка

$$S_k = \begin{pmatrix} {}^*x_i \\ {}^*y_i \end{pmatrix}$$

соответствует уравнениям $x_i \circ y_i = a_k$. Определим действие автотопии (α, β, γ) на элементах квазигруппы следующим образом: $a \to \gamma a$. Доказывается, что на подстановках S_k соответствующих ЛК, это действие описывается так: $S_a \to \alpha^{-1} S_a \beta$. Если автотопия является автоморфизмом, то определенное таким образом действие совпадает с обычным определением действия автотопии.

Исследуются квазигруппы с транзитивной группой автотопий 1-го рода. Примерами таких квазигрупп являются абелевы группы простого порядка и леводистрибутивные (праводистрибутивные) квазигруппы.

Доказывается следующее утверждение, являющееся обобщением результата Нортона и Стейна [3]: квазигрупп с транзитивной группой автотопий 1-го рода порядка $4m + 2$ не существует.

Идея доказательства заключается в сопоставлении квазигруппе компактного ориентированного многообразия следующим способом:

1) сопоставляем ЛК набор подстановок так как описано выше;

2) представляем подстановки в цикловых видах;

3) каждому циклу длины k (>2) сопоставляем ориентированный k-угольник вершины которого обозначены элементами цикла, ребра имеют направленность, соответствующую циклу (коммутативной квазигруппе соответствует пустое множество);

4) многоугольники склеиваются по противоположно ориентированным ребрам, связывающим пару одинаково обозначенных вершин.

Характеристика Эйлера, как известно четна [2], чего не получается для квазигруппы порядка 4m+2, с транзитивной группой автотопий, то есть таких квазигрупп нет. Отдельно рассматриваются коммутативные квазигруппы.

Список литературы

[1] Белоусов В. Д., Белявская Г. Б.. Латинские квадраты, квазигруппы и их приложения. - Кишинев, Штиинца, 1989 г.

[2] Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. - Ленинград, Государственное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1938 г.

[3] Norton D. A., Stein S. K. An integer associated with latin squares. - Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7 - P. 331 - 334.

О δ-СУПЕРДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ ПРОСТЫХ СУПЕРАЛГЕБР ЙОРДАНОВОЙ СКОБКИ [3]

В. Н. Желябин, И. Б. Кайгородов (Новосибирск, Россия)

Одним из обобщений обыкновенного дифференцирования алгебры является понятие δ-дифференцирования алгебры, которое было введено в работе В.Т.Филипова [1]. Под δ-дифференцированием мы понимаем φ — линейное отображение алгебры, удовлетворяющее

[3]Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 09-01-00157-А, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ-3669.2010.1, МД-2438.2009.1), интеграционного проекта СО РАН №97, ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429).

условию $\varphi(xy) = \delta(\varphi(x)y + x\varphi(y))$. Отметим, что наряду с обобщением дифференцирования, δ-дифференцирование обобщает также и понятие антидифференцирования (т.е. при $\delta = -1$), которое рассматривалось в работах [2, 3], где, в частности, были приведены некоторые примеры ненулевых антидифференцирований алгебр Ли. В работах В.Т.Филиппова [1, 4, 5] рассматривались δ-дифференцирования первичных альтернативных, лиевых и мальцевских алгебр. Там было доказано, что первичные альтернативные, мальцевские нелиевы и лиевы алгебры обладающие невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой не имеют нетривиальных δ-дифференцирований; был приведен пример нетривиального $\frac{1}{2}$-дифференцирования (т.е. не являющегося элементом центройда алгебры) для простой бесконечномерной алгебры Витта W_1 и показано, что первичная алгебра Ли не имеет ненулевых δ-дифференцирований при $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. В дальнейшем, исследование δ-дифференцирований было продолжено И.Б.Кайгородовым. В работах [6, 7, 8] было показано, что простые конечномерные йордановы и лиевы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль не имеют нетривиальных δ-дифференцирований и δ-супердифференцирований; а также, было показано, что полупростые конечномерные йордановы алгебры над полем характеристики отличной от 2 не обладают нетривиальными δ-дифференцированиями. В дальнейшем, результаты [7] были обобщены в работе П.Зусмановича [9]. Им было дано описание δ-(супер)дифференцирований первичных супералгебр Ли. А именно, было доказано, что первичная супералгебра Ли над полем характеристики $\neq 2, 3$ не имеет ненулевых δ-(супер)дифференцирований при $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. Также им было описано пространство $\frac{1}{2}$-(супер)дифференцирований для совершенных супералгебр Ли A, т.е. с условием $A = [A, A]$ и нулевым центром. Было показано, что пространство $\frac{1}{2}$-(супер)дифференцирований такой супералгебры Ли A с невырожденной суперсимметрической инвариантной билинейной формой совпадает с (супер)центройдом супералгебры A. Также, П.Зусманович дал положительный ответ на вопрос В.Т.Филиппова о существовании делителей нуля в кольце $\frac{1}{2}$-дифференцирований первичной алгебры Ли, поставленный в [4].

Определим супералгебру, называемую дубль Кантора. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с единицей 1 и $\{,\} : \Gamma \to \Gamma$ — суперкососимметрическое билинейное отображение, которое мы будем называть скобкой. По супералгебре Γ и скобке $\{,\}$ можно построить супералгебру $J(\Gamma, \{,\})$. Рассмотрим $J(\Gamma, \{,\}) = \Gamma \oplus \Gamma x$ — прямую сумму пространств, где Γx — изоморфная копия пространства Γ. Пусть a, b — однородные элементы из Γ. Тогда операция умножения $\cdot$ на $J(\Gamma, \{,\})$ определяется формулами

$$a \cdot b = ab, a \cdot bx = (ab)x, ax \cdot b = (-1)^{p(b)}(ab)x, ax \cdot bx = (-1)^{p(b)}\{a, b\}.$$

Положим $A = \Gamma_0 + \Gamma_1 x, M = \Gamma_1 + \Gamma_0 x$. Тогда $J(\Gamma, \{,\}) = A + M$ — Z_2-градуированная алгебра.

Скобка $\{,\}$ называется йордановой, если супералгебра $J(\Gamma, \{,\})$ является йордановой супералгеброй.

В случае, когда скобка $\{,\}$ супералгебры Γ имеет вид $\{a, b\} = D(a)b - aD(b)$, где D — четное дифференцирование супералгебры Γ, супералгебра $J(\Gamma, \{,\})$ называется супералгеброй векторного типа.

Для фиксированного элемента $\delta \in F$ определим понятие δ-супердифференцирования супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$. Однородное линейное отображение $\varphi : A \to A$ будем называть *δ-супердифференцированием*, если для однородных $x, y \in A$ выполнено

$$\varphi(xy) \quad = \quad \delta(\varphi(x)y + (-1)^{p(x)p(\varphi)}x\varphi(y)).$$

Рассмотрим супералгебру Ли $A = A_0 + A_1$ и зафиксируем элемент $x \in A_i$. Тогда $R_x : y \to xy$ является нечетным супердифференцированием супералгебры A и его четность $p(R_x) = i$.

Под суперцентроидом $\Gamma_s(A)$ супералгебры A мы будем понимать множество всех однородных линейных отображений $\chi : A \to A$, для произвольных однородных элементов a, b удовлетворяющих условию

$$\chi(ab) = \chi(a)b = (-1)^{p(a)p(\chi)}a\chi(b).$$

Определение 1-супердифференцирования совпадает с определением обычного супердифференцирования; 0-супердифференцированием является произвольный эндоморфизм φ супералгебры A такой, что $\varphi(A^2) = 0$. Ненулевое δ-супердифференцированием будем считать нетривиальным, если $\delta \neq 0, 1$ и если $\delta = \frac{1}{2}$, то $\varphi \notin \Gamma_s(A)$.

Результатом исследований δ-(супер)дифференцирований простых унитальных супералгебр йордановых скобок является следующая

Теорема 1. *Пусть* $J = J(\Gamma, \{,\})$ *— простая унитальная супералгебра йордановых скобок над полем характеристики отличной от 2. Тогда либо* J *не имеет нетривиальных* δ*-дифференцирований и* δ*-супердифференцирований, либо* J*— супералгебра векторного типа. Если* J *— супералгебра вектороного типа, то при* $\delta \neq \frac{1}{2}$ *супералгебра* J *не имеет нетривиальных* δ*-дифференцирований и* δ*-супердифференцирований. Каждое* $\frac{1}{2}$*-дифференцирование является четным* $\frac{1}{2}$*-супердифференцированием и множество* $\frac{1}{2}$*-супердифференцирований совпадает с* $R^*(J) = \{R_z | z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1\}$*, причем при* $D(z) \neq 0$ *отображение* R_z *будет являться нетривиальным* $\frac{1}{2}$*-супердифференцированием.*

Определим супералгебру $B(n,m)$. Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$. Положим $B(m) = F[a_1, \ldots, a_m | a_i^p = 0]$ — алгебра усеченных многочленов от m четных переменных. Пусть $G(n)$ — супералгебра Грассмана с порождающими $1, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Тогда $B(m,n) = B(m) \otimes G(n)$ — ассоциативно-суперкоммутативная супералгебра.

Пользуясь классификационной теоремой для унитальных простых конечномерных йордановых супералгебр [10], мы получаем

Теорема 2. *Пусть* J *— простая унитальная конечномерная йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики* $p \neq 2$*. Тогда либо* J *не имеет нетривиальных* δ*-дифференцирований и* δ*-супердифференцирований, либо* J *— супералгебра векторного типа над полем характеристики* $p > 2$*. Если* $J = J(B(m,n), \{,\})$ *— супералгебра векторного типа, то при* $\delta \neq \frac{1}{2}$ *супералгебра* J *не имеет нетривиальных* δ*-дифференцирований и* δ*-супердифференцирований, каждое* $\frac{1}{2}$*-дифференцирование является четным* $\frac{1}{2}$*-супердифференцированием, пространство* $\frac{1}{2}$*-супердифференцирований совпадает с* $R^*(J) = \{R_z | z \in B(m,n)_0 \cup B(m,n)_1\}$*, причем при* $D(z) \neq 0$ *отображение* R_z *будет являться нетривиальным* $\frac{1}{2}$*-супердифференцированием.*

Список литературы

[1] *Филиппов В.Т.* О δ-дифференцированиях алгебр Ли // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39, № 6. С. 1409–1422.

[2] *Hopkins N.C.* Generalizes Derivations of Nonassociative Algebras // Nova J. of Math. 1996. T. 5, №3. P. 215–224.

[3] *Филиппов В. Т.* Об алгебрах Ли, удовлетворяющих тождеству 5-ой степени, Алгебра и логика, 34, 6, 1995, 681–705.
[4] *Филиппов В.Т.* О δ-дифференцированиях первичных алгебр Ли // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40, № 1. С. 201–213.
[5] *Филиппов В.Т.* О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр // Алгебра и Логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 618–625.
[6] *Кайгородов И.Б.* О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр // Алгебра и Логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 585–605.
[7] *Кайгородов И.Б.* О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли // Сиб. матем. ж. 2009. Т. 50, № 3. С. 547–565.
[8] *Кайгородов И.Б.* О δ-супердифференцированиях простых конечномерных Ли и йордановых супералгебр // Алгебра и логика, в печати.
[9] *Zusmanovich P.* On δ-derivations of Lie algebras and superalgebras // arXiv:0907.2034v2.
[10] *Martines C., Zelmanov E.*, Simple finite-dimendhional Jordan superalgebras of prime characteristic, J. of Algebra **236** (2001), 575–629.

О СВОЙСТВАХ НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ τ-ЗАМКНУТЫХ ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

П. А. Жизневский (Гомель, Беларусь)

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемые определения и обозначения можно найти в [1, 2].

Напомним, что если $\mathfrak{L}$ — произвольный непустой класс абелевых простых групп и $\omega = \pi(\mathfrak{L})$, то всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах, называют ω-композиционным спутником. Следуя [2], для всякого ω-композиционного спутника f положим

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \quad \text{для всех } p \in \pi(Com(G)) \cap \omega,$$

где $Com(G)$ — множество всех абелевых композиционных факторов группы G, $R_\omega(G)$ — наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G и $C^p(G)$ — пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G) = G$). Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$

для некоторого ω-композиционного спутника f, то говорят, что она ω-композиционна, а f — ω-композиционный спутник этой формации.

Подгрупповым функтором (в смысле А.Н. Скибы [1]) называется всякое отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что:

1) $G \in \tau(G)$;

2) для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, и для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$, $H^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Заметим, что мы рассматриваем только такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G множество $\tau(G)$ содержится во множестве всех субнормальных подгрупп группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$. Если ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой, то $\mathfrak{F}$ называют τ-замкнутой ω-композиционной формацией.

Пересечение всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций, содержащих данную группу G, снова является τ-замкнутой ω-композиционной формацией. Такую формацию называют однопорожденной c_{ω}^{τ}-формацией или однопорожденной τ-замкнутой ω-композиционной формацией, и обозначают $c_{\omega}^{\tau}\mathrm{form}\, G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутые ω-композиционные формации и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда через $\mathfrak{F}/_{\omega}^{\tau}\mathfrak{H}$ обозначают решетку всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций, заключенных между $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная τ-замкнутая ω-композиционная формация, $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп. Тогда, если решетка $\mathfrak{F}/_{\omega}^{\tau}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ имеет конечную длину m, то говорят, что $\mathfrak{N}_{\omega}^{\tau}$-дефект (или, иначе, нильпотентный c_{ω}^{τ}-дефект) формации $\mathfrak{F}$ конечен и равен m.

Развивая основные результаты работы [3], нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *В каждой ненильпотентной однопорожденной τ-замкнутой ω-композиционной формации содержится лишь конечное множество τ-замкнутых ω-композиционных подформаций с нильпотентным c_{ω}^{τ}-дефектом 1.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ненильпотентная однопорожденная τ-замкнутая ω-композиционная формация и $\mathfrak{F}/_{\omega}^{\tau}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ — решетка с* *дополнениями. Тогда каждый элемент* $\mathfrak{M}$ *решетки* $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$ *представим в виде* $\mathfrak{M} = \vee^{\tau}_{\omega}(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}\vee^{\tau}_{\omega}\mathfrak{H}_i \mid i\in I)$, *где* $\{\mathfrak{H}_i \mid i\in I\}$ *— набор всех минимальных* τ*-замкнутых* ω*-композиционных ненильпотентных формаций, содержащихся в* $\mathfrak{M}$.

Список литературы

[1] Скиба А.Н. Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

[2] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский математический журнал. — 2000. — том 52, № 6. — С. 783-797.

[3] Жизневский П.А. О свойствах ненильпотентной однопорожденной $\mathfrak{L}$-композиционной формации // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. — 2008. — № 2 (47). — С. 84–90.

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУПП В ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА НАД ПОЛЕМ ПОРЯДКА ТРИ

В.И. Зенков (Екатеринбург, Россия)

В работе [1, следствие C] было доказано, что в любой конечной группе G для простого числа p и силовской p-подгруппы P найдутся такие элементы x и y, что $P\cap P^x\cap P^y = O_p(G)$, где $O_p(G)$ означает наибольшую нормальную p-подгруппу группы P. Так как подгруппа $O_p(G)$ лежит в любой силовской p-подгруппе из G, то без ограничения общности, изучая пересечения силовских p-подгрупп, можно считать, что $O_p(G) = 1$. Возникает вопрос: при каких условиях на группу G в соотношении $P\cap P^x\cap P^y = 1$ можно обойтись только одним элементом, т. е. когда в группе G найдется такой элемент z, что $P\cap P^z = 1$? В общем случае для простого числа p, равного 2 или числу Мерсенна, можно построить конечную группу G с условием $O_p(G) = 1$, в которой для силовской p-подгруппы P выполнено соотношение $P\cap P^z \neq 1$ для любого $z\in G$. Исторически первые примеры таких групп появились в работе Ито [2] и были разрешимыми группами.

Случай неразрешимых групп на протяжении тридцати с лишним лет после работы Ито оставался неисследованным, даже не было опубликовано ни одного примера неразрешимой группы G, в которой $O_p(G) = 1$ и любые две силовские p-подгруппы пересекаются нетривиально. Более того, в работе [3] было доказано, что в любой простой неабелевой группе G для любой силовской подгруппы P из G найдется такой элемент $z \in G$, что $P \cap P^z = 1$. Однако в группе $G \simeq Aut(L_2(7))$ любые две силовские 2-подгруппы пересекаются нетривиально, хотя $|Aut(L_2(7)) : Inn(L_2(7)) = 2)|$ и в $Inn(L_2(7)) \simeq L_2(7)$ найдутся две силовские 2-подгруппы, которые пересекаются по единице. Таким образом, рассматривая случай произвольной конечной группы G с условием $O_p(G) = 1$, в которой для силовской p-подгруппы P и любого элемента $x \in G$ выполняется условие $P \cap P^x \neq 1$, в первую очередь нужно изучить почти простые группы с этим условием.

Главным инструментом изучения пересечений силовских подгрупп в конечных группах является параметр $l_p(G)$, который мы сейчас введем. Рассмотрим конечную группу G с силовской p-подгруппой P и условием $O_p(G) = 1$. Пусть $X = \{P^g \mid P^g \cap P = 1, g \in G\}$. Тогда подгруппа P действует сопряжениями на множестве X. Через $l_p(G)$ обозначим число орбит при этом действии. Тогда, к примеру, в случае простой неабелевой группы G имеем $l_p(G) > 0$, поскольку в G найдется элемент x такой, что $P \cap P^x = 1$, но в то же время $l_2(Aut(L_2(7))) = 0$. Значения параметра $l_p(G_1)$ для некоторой группы G_1 выясняется в [1, лемма 3.12], откуда следует, что, зная число $l_p(G_1)$, можно вычислить число $l_p(G_1 \wr Z_p)$. В частности, при $l_p(G_1) \geq 3$ неравенство $l_p(G_1) \leq l_p(G_1 \wr Z_p)$ справедливо для всех простых чисел p, а в случае нечетного простого числа p данное неравенство справедливо даже при $l_p(G_1) \geq 2$. С другой стороны, если $l_p(G_1) = 1$ и $N_{G_1}(P_1) = P_1$ для $P_1 \in Syl(G_1)$, то всегда $l_p(G_1 \wr Z_p) = 0$, а при $p = 2$ даже в случае, когда $l_2(G_1) = 2$ и $N_{G_1}(P_1) = P_1$ для $P_1 \in Syl(G_1)$, имеем $l_2(G_1 \wr Z_2) = 1$ и $l_2((G_1 \wr Z_2) \wr Z_2) = 0$. Каков же механизм применения этого параметра? Дело в том, что если разрешимый радикал $S(G)$ группы G нетривиален и $l_p(S(G)) = 0$, то $l_p(G) = 0$ и строение $S(G)$ описывается в [1, теорема B (1)]. Пусть $l_p(S(G)) > 0$. Тогда по [1, лемма 3.2] из равенства $l_p(G) = 0$ следует, что $l_p(G/S(G)) = 0$. Итак, можно считать, что $S(G) = 1$ и $G = E(G)P$. Группа G действует сопряжениями на множестве $\{K_1, K_2, \dots K_n\}$ компонент из $E(G)$ и по [1, лемма 3.14] изоморфно вкладывается при этом в прямое произведение $\prod_{i=1}^{k} Aut_G(K_i) \wr S_{n_i}$, где k — число G-орбит, n_i — длина, а K_i — представитель i-й орбиты при этом действии, $Aut_G(K_i)$ — группа индуцированных автоморфизмов компоненты K_i. Случай нечетного простого числа p полностью рассмотрен в [1, теорема B (2a)]. Поэтому можно считать, что $p = 2$ и так как силовская 2-подгруппа из S_n может быть представлена как прямое произведение некоторых сплетений, то и здесь применим описанный выше механизм применения параметра $l_2(G)$. А именно, мы видим, что в группе G с $S(G) = 1$ условие $l_2(G) = 0$ может выполняться только в случае, когда $l_2(Aut_G(K_i)) \leq 2$ для некоторой компоненты K_i. Следовательно, задача изучения произвольной конечной группы G с условиями $S(G) = 1$ и $l_2(G) = 0$ сводится к изучению почти простых групп K таких, что $l_2(K) \leq 2$.

Группы K с цоколем лиева типа над полем порядка 3 с условием $l_2(K) \leq 2$ рассмотрены в [4] для классического цоколя лиева ранга не выше 4 и в [5] для исключительного цоколя.

В настоящей работе доказана

Теорема. *Пусть K – конечная простая группа лиева типа над полем порядка* 3 *и* $Inn(K) \leqslant G \leqslant Aut(K)$. *Если* $l_2(G) \leq 2$, *то* K *изоморфна* $U_3(3)$ *или* $PSp_4(3)$, *причем* $l_2(PSp_4(3)) = 1$, $l_2(U_3(3)) = 2$ *и* $l_2(Aut(PSp_4(3))) = l_2(Aut(U_3(3))) = 1$. *Кроме того,* $l_2(Aut(PSp_4(3)) \wr Z_2) = 1$, *а* $l_2(Aut(U_3(3)) \wr Z_2) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Список литературы

[1] Зенков В.И. Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундаментальная и прикладная математика, 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1-92.

[2] Ito N. Über den kleisten p-Durchschittauflösbarer Gruppen // Arch. Math., 1958. Vol. 9, № 1-2. P.27-32.

[3] Зенков В.И., Мазуров В.Д. О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика, 1996. Т. 35, № 4. С. 424-432.

[4] Зенков В.И., Макосий А.И. О пересечениях силовских 2-подгрупп в конечных группах, I // Владикавказский мат. журн., 2009. Т. 11, вып. 4. С. 16-21.

[5] Зенков В.И. О пересечениях силовских 2-подгрупп в конечных группах, II // Сиб. электронные мат. известия, 2009. Т. 7. С. 42-51.

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР КВАТЕРНИОННОГО ТИПА: СЕРИЯ $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕ 2

А. А. Иванов (С.-Петербург, Россия)

Алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [3]). Когомологии Хохшильда являются инвариантом производной эквивалентности алгебр. Поэтому их вычисление помогает решать различные классификационные задачи теории представлений.

Пусть R — конечномерная алгебра над полем K, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R\otimes_K R^{\mathrm{op}}$ — её обертывающая алгебра,

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus\nolimits_{n\geqslant 0}\mathrm{HH}^n(R) = \bigoplus\nolimits_{n\geqslant 0}\mathrm{Ext}^n_\Lambda(R,R)$$

— её алгебра когомологий Хохшильда. Полученный результат является продолжением работ [1], [2], в которых алгебра когомологий Хохшильда была вычислена для алгебр кватернионного типа серии $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. В настоящей работе описана аддитивная структура алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр этого семейства (при $k\geqslant 2$) над всеми алгебраически замкнутыми полями характеристики не 2. В вычислении используется 4-периодическая минимальная Λ-проективная резольвента модуля R из работы [1]. Ввиду [4] полученные результаты могут быть применены к описанию групп когомологий Хохшильда для алгебр серии $Q(2\mathcal{A})^k(c)$, возникающей также в классификации К. Эрдманн (см. [3]).

Список литературы

[1] Генералов А. И., Иванов А.А., Иванов С.О. *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике 2*, Зап. науч. семин. ПОМИ, т. 349 (2007), 53–134.

[2] Генералов А. И. *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III. *Алгебры с малым параметром*, Зап. науч. семин. ПОМИ, т. 356 (2008), 53–134.

[3] Erdmann K., *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., v. 1428. Berlin; Heidelberg. 1990.

[4] Holm Th., *Derived equivalent tame blocks*, J. Algebra, v. 194 (1997), 178–200.

ИНВОЛЮЦИИ НА КОГОМОЛОГИЯХ

С. О. Иванов (С.-Петербург, Россия)

Обычно n-е группы когомологий различных алгебраических объектов задаются как Ext'ы в подходящей триангулированной категории. Если G — группа, то её когомологии выражаются следующим образом : $\mathrm{H}^n(G) = \mathrm{H}^n(G;\mathfrak{k}) = \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{k}G}(\mathfrak{k},\mathfrak{k})$, или, более общо, если A алгебра Хопфа, то $\mathrm{H}^n(A) = \mathrm{H}^n(A;\mathfrak{k}) = \mathrm{Ext}^n_A(\mathfrak{k},\mathfrak{k})$, а если A — произвольная алгебра, то её когомологии Хохшильда выражаются следующим образом $\mathrm{HH}^n(A) = \mathrm{HH}^n(A;A) = \mathrm{Ext}^n_{A\otimes A^{op}}(A,A)$, а алгебра Йонеды следующим образом $E(A) = \mathrm{Ext}^*_A(\oplus S_i, \oplus S_i)$, где $\{S_i\}$ — это все простые модули над A (с точностью до изоморфизма).

Таким образом, когомологии зависят только от триангулированной категории с выделенным объектом. Причем из соответствующей триангулированной категории наследуются не только сами группы когомологий, но и многие дополнительные структуры, имеющиеся на них.

Следуя этой идеологии, было показано при помощи каких функторов задаются вложение $\mathrm{H}^*(A) \hookrightarrow \mathrm{HH}^*(A)$, для алгебры Хопфа A, и отображение $\mathrm{HH}^*(A) \to E(A)$ для произвольной алгебры A. Так же на алгебре когомологий $\mathrm{H}^*(A)$ для алгебры Хопфа A, и алгебре когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(A)$ симметрической алгебры A, были введены инволюции относительно $\smile$-произведения. Для унимодулярной конечномерной алгебры Хопфа A (в частности, для групповой алгебры конечной группы) на когомологиях Хохшильда можно ввести инволюцию так, что она будет согласована с вложением $\mathrm{H}^*(A) \hookrightarrow \mathrm{HH}^*(A)$.

Была исследована связь введенных структур со скобкой Герстенхабера. Доказано, что заданная инволюция на алгебре когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(A)$ симметрической алгебры A является инволюцией и относительно скобки Герстенхабера, а для алгебры Хопфа A образы алгебры когомологий при вложении $\mathrm{H}^*(A) \hookrightarrow \mathrm{HH}^*(A)$ коммутируют относительно скобки Герстенхабера.

КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ E^+-ГРУПП

Е. И. Компанцева (Москва, Россия)

Л. Фуксом [1, проблема 45] сформулирована проблема изучения E^+-групп и колец на них. Абелева группа A называется E^+-группой, если она изоморфна своей группе эндоморфизмов. Кольцом на абелевой группе A называется кольцо, аддитивная группа которого изоморфна A. Ясно, что на E^+-группе A всегда существует кольцо, изоморфное ее кольцу эндоморфизмов $E(A)$. Поэтому, изучая свойства колец на E^+-группах, мы как следствие получаем информацию об их кольцах эндоморфизмов.

Известно, что классы периодических E^+-групп и нередуцированных E^+-групп достаточно узки – это циклические группы конечного порядка и прямые суммы циклической группы и аддитивной группы рациональных чисел. Однако систематических исследований E^+-групп без кручения не проводилось.

Настоящая работа посвящена изучению свойств колец на редуцированных E^+-группах без кручения.

Отметим, что в некоторых разделах теории абелевых групп без кручения часто встречается понятие E-кольца, введенное Р. Пирсом [2]. Кольцо с единицей R называется E-кольцом, если $\mathrm{Hom}_R(R,R) = \mathrm{Hom}(R,R)$. Известно, что аддитивная группа E-кольца является E^+-группой, а ее кольцо эндоморфизмов коммутативно [3]. При этом до сих пор оставался открытым вопрос о том, верно ли обратное утверждение, т.е. для любой ли E^+-группы A существует E-кольцо на ней и, следовательно, кольцо эндоморфизмов $E(A)$ коммутативно.

Теорема. Пусть A – редуцированная E^+-группа без кручения. Пусть A – либо группа конечного ранга, либо сильно неразложимая группа. Тогда

(1) любое кольцо на A ассоциативно и коммутативно;
(2) кольцо эндоморфизмов $E(A)$ коммутативно;
(3) A является аддитивной группой некоторого E-кольца;
(4) кольцо эндоморфизмов $E(A)$ является E-кольцом.

Список литературы

[1] Fuchs L. Abelian groups. - Budapest, -1958.

[2] Pierce R.S., E-modules, in: Abelian group theory (Perth, 1987), 221-240, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1989).
[3] Крылов А.А, Михалев А.В., Туганбаев А.А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов, Томск, 2002.

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ПО СПЕКТРУ ГРУПП $E_8(2^{2n})$

А.С. Кондратьев (Екатеринбург, Россия)

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\mathrm{GK}(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\mathrm{GK}(G)$ через $s(G)$.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел дается теоремой Грюнберга — Кегеля (см. [2, теорема A]). Конечные простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в [2, 2].

Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в исследованиях распознаваемости конечных групп по спектру (см., например, обзор В. Д. Мазурова [3]). Конечная группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если для любой конечной группы H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ имеем $H \cong G$.

Первый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой*, если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P

В работах [4, 5] была доказана квазираспознаваемость конечных простых групп, граф Грюнберга —Кегеля которых имеет по крайней мере три компоненты связности, за исключением группы A_6. В своем обзоре [3] В. Д. Мазуров поставил следующий нерешенный вопрос: верно ли, что любая конечная простая группа G с $s(G) \geq 3$ либо распознаваема, либо изоморфна A_6?

В настоящей работе доказана

Теорема. *Группы* $E_8(2^{2n})$ *распознаваемы.*

Заметим, что граф Грюнберга —Кегеля группы $E_8(q)$ имеет при $q \equiv 2,3$ $(mod\ 5)$ четыре, а при $q \equiv 0,1,4$ $(mod\ 5)$ пять компонент связности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Список литературы

[1] **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra, 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.

[2] **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб., 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.

[3] **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та, 2005. № 36 (Математика и механика; вып. 7). С. 119–138.

[4] **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн., 2002. Т. 54, № 7. С. 1003–1008.

[5] **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн., 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.

СИМВОЛЫ И ТРАНСФЕРЫ

В. И. Копейко (Элиста, Россия)

Пусть A – ассоциативное кольцо с 1, $s(\in A)$ - центральный элемент, $f: A \to A/s$ - проекция. В [1] был построен трансфер $f_*: K_1(A/s) \to K_1(A)$, совпадающий с классическим трансфером Басса [2, гл.9], когда s не делитель 0. Напомним конструкцию трансфера из [1]. Возьмем произвольную $\overline{\alpha} \in GL_n(A/s)$ и пусть $\alpha, \beta (\in M_n(A))$ некоторые подъемы соответственно $\overline{\alpha}, (\overline{\alpha})^{-1}$. Тогда $\alpha \cdot \beta = 1_n + s \cdot \gamma$ при некоторой $\gamma \in M_n(A)$. Нетрудно проверить, что матрица $\Gamma(\overline{\alpha})$ $= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ s \cdot 1_n & \beta \end{pmatrix}$ обратима над A, а отображение $f_*: K_1(A/s) \to K_1(A): [\overline{\alpha}] \to [\Gamma(\overline{\alpha})]$ является корректно определенным гомоморфизмом (трансфером). Отметим, что если кольцо A - коммутативно, то $det\Gamma(\overline{\alpha}) = 1$, а в качестве представителя класса $[\Gamma(\overline{\alpha})]$ в $K_1(A)$ можно взять матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & -y \cdot 1_n \\ s \cdot 1_n & x \cdot \tilde{\alpha} \end{pmatrix}$, где элементы $x, y \in A$ такие, что $x \cdot det\alpha + y \cdot s = 1$, а $\tilde{\alpha}$ - присоединенная к α матрица.

Построенный трансфер тесно связан с некоторым матричным (блочным) символом, свойства которого в значительной степени следуют из свойств трансфера и аналогичны свойствам классического символа Меннике [2, гл.6]. Дадим точное определение и сформулируем основной результат. Для натурального n и центрального s положим $M_n^s(A) = \{\alpha \in M_n(A) : \overline{\alpha} \in GL_n(A/s)\}$. Множество $M_n^s(A)$ является моноидом относительно произведения матриц, содержащим группу $GL_n(A)$.

Теорема. Пусть $\alpha \in M_n^s(A)$. Тогда найдутся $\beta, \gamma \in M_n(A)$ такие, что $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ s \cdot 1_n & \beta \end{pmatrix} \in GL_{2n}(A)$, причем класс данной матрицы в $K_1(A)$ не зависит от выбора β, γ и будет обозначаться $[\alpha, s]$. Отображение (символ) $M_n^s(A) \to K_1(A) : \alpha \to [\alpha, s]$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) если $\alpha \in GL_n(A)$, то $[\alpha, s] = 1$;

2) $[\alpha + s \cdot \delta, s] = [\alpha, s]$ для любой $\delta \in M_n(A)$;

3) пусть $\sigma \in M_n(A)$ такая, что $\sigma \cdot \alpha = t \cdot 1_n$ при некотором центральном $t \in A$. Тогда $[\alpha, s] = [\alpha, s + t]$;

4) произведение $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in M_n^s(A)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1, \alpha_2 \in M_n^s(A)$, причем $[\alpha_1 \cdot \alpha_2, s] = [\alpha_1, s] \cdot [\alpha_2, s]$. В частности, символ является гомоморфизмом моноидов, тривиальным на $GL_n(A)$.

5) Пусть $s, t (\in A)$ - центральные элементы. Матрица $\alpha \in M_n^{s \cdot t}(A)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in M_n^s(A)$ и $\alpha \in M_n^t(A)$, причем
$[\alpha, s \cdot t] = [\alpha, s] \cdot [\alpha, t]$.

Список литературы

[1] Копейко В.И. Гомоморфизм переноса для K_1-функтора.-Труды Межд. семин. универс. алг. и прилож., Волгоград(2000), 134-143.

[2] Басс Х. Алгебраическая К-теория,Мир,М.,1973.

О ЧАСТИЧНО $\mathcal{K}$-УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБРАХ

Ю.В. Кочетова, Е.Е. Ширшова (Москва, Россия)

Пусть F — частично упорядоченное поле и $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ — линейная алгебра над полем F. Будем говорить, что на алгебре A определен *$\mathcal{K}$-порядок* $\leqslant$, если выполнены следующие условия:

(1) $\langle A; +; \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа [1];

(2) из $a \leqslant b$ следует, что $\lambda a \leqslant \lambda b$ для всех $a, b \in A$ и $\lambda > 0$, $\lambda \in F$;

(3) из $0 \leq a$ следует, что $ab \leq a$ и $ba \leq a$ для всех $a, b \in A$.

Если при этом группа $\langle A; +; \leqslant \rangle$ является линейно (решеточно) упорядоченной, то алгебра A называется *линейно (решеточно) $\mathcal{K}$-упорядоченной алгеброй.*

Данное определение упорядочения было введено для алгебр Ли В.М. Копытовым (см. [2]).

Назовем *l-первичным радикалом* решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F пересечение всех l-идеалов J алгебры A, для каждого из которых произведение $UV = \{z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} x_i y_i \mid x_i \in U, y_i \in V\}$ любых двух ненулевых l-идеалов U, V факторалгебры A/J отлично от множества $\{J\}$.

Теорема 1. *Любая конечномерная линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем совпадает со своим l-первичным радикалом.*

Теорема 2. *Для l-первичного радикала $l\text{-}\mathrm{rad}_{\mathcal{K}}(A)$ и первичного радикала $\mathrm{rad}(A)$ любой решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной ассоциативной алгебры (алгебры Ли) A над частично упорядоченным полем выполняется включение $l\text{-}\mathrm{rad}_{\mathcal{K}}(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.*

Следствие 1. *В любой конечномерной линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной ассоциативной алгебре первичный радикал, радикал Джекобсона и l-первичный радикал совпадают и равны всей алгебре.*

Следствие 2. *Во всякой конечномерной линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре Ли l-первичный радикал и первичный радикал совпадают со всей алгеброй.*

Список литературы

[1] Фукс Л. *Частично упорядоченные алгебраические системы.* – М.: Мир, 1965.
[2] Копытов В.М. *Решеточно упорядоченные группы.* – М.: Наука, 1984.

ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ АБЕЛЕВЫ $\mathcal{L}$-КОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Н.И. Крючков (Рязань, Россия)

В начале 30-х годов 20 в. Л.С. Понтрягин построил замечательную теорию двойственности для локально компактных абелевых групп. Благодаря ей каждое утверждение справедливое в категории локально компактных абелевых групп имеет некий «двойник». Особенно ярко это проявляется в том, что каждый результат, полученный в теории дискретных групп, приводит, как правило, к некоторому топологическому утверждению в теории компактных групп. Многочисленные примеры можно найти, например, в книге [1].

Из теории двойственности Л.С. Понтрягина следует, что классификация какого-либо класса дискретных групп немедленно приводит к описанию некоторого класса компактных групп (и обратно). Естественный интерес представляет задача построения наименьшего в определенном смысле класса локально компактных абелевых групп, содержащего некоторый класс дискретных абелевых групп $\mathcal{A}$ и класс компактных групп $\mathcal{A}^*$, состоящий из всех групп, дуальных к группам из класса $\mathcal{A}$. Хорошо известно, [2], теорема 24.30, что любая локально компактная группа представляется в виде $\mathbf{R}^n \oplus M$, где M содержит открытую компактную подгруппу. Поэтому одним из способов построения такого класса является включение в него всех таких групп, которые содержат открытую компактную подгруппу из класса $\mathcal{A}^*$, фактор-группа по которой принадлежит $\mathcal{A}$.

Достаточно хорошо изученным классом дискретных групп и важным в теории абелевых групп является класс копериодических групп. Напомним, что группа A называется *копериодической* если $\mathrm{Ext}(Q, A) = 0$. Во многих важных случаях группы этого класса могут быть охарактеризованы полной системой кардинальных инвариантов. Группы характеров копериодических групп мы называем $\mathcal{K}$-*копериодическими*. Локально компактная группа L называется $\mathcal{L}$-*копериодической* если она является расширением компактной $\mathcal{K}$-копериодической группы с помощью дискретной копериодической, другими словами L содержит открытую компактную подгруппу K, фактор-группа по которой L/K является (дискретной) копериодической.

Класс $\mathcal{L}$- копериодических групп замкнут относительно двойственности Понтрягина, замкнут относительно расширений. Дискретная группа является $\mathcal{L}$- копериодической тогда и только тогда, когда она является копериодической, компактная группа — $\mathcal{L}$-копериодическая тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$-копериодическая (то есть двойственна дискретной копериодической). Все это свидетельствует о естественности определения введенного класса.

В докладе речь пойдет о свойствах класса $\mathcal{L}$-копериодических групп и некоторых классификационных теоремах.

Список литературы

[1] Loth, P. , *Classification of Abelian groups and Pontryagin Duality*, Gordon and Breach Science Publishers, (1998).

[2] Хьюитт, Э., Росс, К., *Абстрактный гармонический анализ*, М.: Наука, (1975).

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ С РАЗРЕШИМОЙ НУЛЬ-КОМПОНЕНТОЙ

М.И. Кузнецов (Нижний Новгород, Россия)

Модулярные алгебры Ли с разрешимой максимальной подалгеброй представляют большой интерес для классификации простых алгебр Ли. Согласно [1], простая алгебра Ли $\mathcal{L}$ абсолютного торического ранга 2 над алгебраически замкнутым полем четной характеристики содержит максимальную разрешимую подалгебру $\mathcal{L}_0$, действующую неприводимо на $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0$.

Простые алгебры Ли $\mathcal{L}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики p с разрешимой максимальной подалгеброй $\mathcal{L}_0$ исследовались в работах [2]–[4] при различных предположениях. Если $p > 2$ и $\mathcal{L}_0$ действует неприводимо на $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0$, то, согласно [2] (см. также [5]), $\mathcal{L}$ изоморфна одной из следующих алгебр Ли – $sl(2)$, алгебре Цассенхауза $W(1 : m)$, алгебре Франк $T(m)$ (при $p = 3$). В [3] показано, что этот результат справедлив при $p > 5$ без предположения о неприводимости фактора. В [4] результат распространен на случай, когда $p > 3$ и $\mathcal{L}_0$ имеет нетривиальный нильрадикал присоединенного представления на $\mathcal{L}$. Часть этих результатов изложена в [6]. Все доказательства основаны на исследовании градуированных алгебр Ли L с разрешимой компонентой L_0, которые тесно связаны с простыми градуированными алгебрами Ли. Автором получен ряд результатов о простых градуированных алгебрах Ли характеристики 2 с неполупростой компонентой L_0. В частности, доказано, что следующая альтернатива имеет место для любой характеристики $p > 0$: если компонента L_0 простой градуированной алгебры Ли содержит нецентральный радикал, то либо L_0 содержит абелев нецентральный идеал, либо L_0 содержит идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга. Для второго случая альтернативы построены простые 1-градуированные алгебры Ли характеристики 2.

Работа поддержана Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», шифр проекта НК-13П-13, контракт № П945.

Список литературы

[1] Skryabin S. Toral rank one simple Lie algebras of low characteristics//J. Algebra.-1998.-V.200.- P.650-700.

[2] Кузнецов М.И. Модулярные простые алгебры Ли с разрешимой максимальной подалгеброй//Матем. сб.-1976.-Т.101(1).-С.77-86.

[3] Weisfeiler B.Ju. On subalgebras of simple Lie algebras of characteristic $p > 0$//Trans. Amer. Math. Soc.-1984.-V.286.-P.471-503.

[4] Skryabin S. On the structure of the graded Lie algebra associated with a noncontractible filtration//J. Algebra.-1997.-V.197.-P.178-230.

[5] Кузнецов М.И. Классификация простых градуированных алгебр Ли с неполупростой нулевой компонентой//Матем. сб.-1989.-Т.180(2).-С.147-158.

[6] Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I. Structural theory/De Gruyter expositions in Math.:38. Walter de Gruyter. Berlin, New York. 2004.-540 pp.

О ФИЛЬТРОВАННЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ АЛГЕБР ЛИ СЕРИИ X

А. А. Ладилова (Нижний Новгород, Россия)

Исключительные простые алгебры Ли серии X над алгебраически замкнутым полем характеристики три построены в работе [1]. Это $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры $X(\overline{m},\omega) = X_{\overline{0}} \oplus X_{\overline{1}}$, где $X_{\overline{0}} = S(3\colon \overline{m},\omega)$ — специальная алгебра Ли картановского типа, $X_{\overline{1}}$ — неприводимый $X_{\overline{0}}$-подмодуль в подкрученном модуле дифференциальных форм

$\Omega^1(\omega)$. Алгебры Ли $X(\overline{m}, \omega)$ являются фильтрованными деформациями градуированной алгебры Ли $X(\overline{m})$, где $X(\overline{m}) = X_{\overline{0}} \oplus X_{\overline{1}}$, $X_{\overline{0}}$ — градуированная алгебра Ли картановского типа, соответствующая стандартной форме объема $\omega_0 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, и $d\mathcal{O}' \subseteq X_{\overline{1}} \subseteq Z^1(\overline{m})$. Здесь $d\mathcal{O}'$ обозначает минимальный $X_{\overline{0}}$-подмодуль в $Z^1(\overline{m})$.

Описание всех фильтрованных деформаций алгебры Ли $X(\overline{m})$ неизвестно. Однако мы устанавливаем, что простая градуированная алгебра Ли $X(\overline{m})$ является жесткой относительно фильтрованных деформаций, то есть любая фильтрованная деформация $\mathcal{L}$ алгебры $X(\overline{m})$ изоморфна $X(\overline{m})$. Для этого сначала показывается, что $\mathcal{L}$ содержит подалгебру $\mathcal{L}_{\overline{0}}$, которая изоморфна простой алгебре Ли $S(3\colon \overline{m}, \omega)$, где $\omega = \omega_0$ или $\omega = (1 + x^\delta)\omega_0$. Затем доказывается, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{L}_{\overline{1}}$ как $\mathcal{L}_{\overline{0}}$-модуль, причем модуль $\mathcal{L}_{\overline{1}}$ изоморфен $d\mathcal{O}'$, когда $\omega = \omega_0$, или $d\mathcal{O}$, когда $\omega = (1 + x^\delta)\omega_0$. Сравнивая размерности, мы заключаем, что случай $\omega = (1 + x^\delta)\omega_0$ невозможен. Поэтому $\mathcal{L}_{\overline{0}} = S(3\colon \overline{m}, \omega)$, и $\mathcal{L}$ как $\mathcal{L}_{\overline{0}}$-модуль изоморфен $S(3\colon \overline{m}, \omega_0) \oplus d\mathcal{O}'$. На последнем этапе доказывается, что изоморфизм модулей $\mathcal{L}$ и $S(3\colon \overline{m}, \omega_0) \oplus d\mathcal{O}'$ в действительности является изоморфизмом алгебр Ли. Доказательство основано на вычислении когомологий алгебры $S(3\colon \overline{m}, \omega_0)$ с коэффициентами в модулях дифференциальных форм.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», проект НК-13П-13, контракт П945.

Список литературы

[1] Скрябин С.М. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3// Матем. сб., 1992, т. 183(8), с. 3–22.

О КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ ФАКТОРОВ ЕЕ НОРМАЛЬНОГО РЯДА

В. С. Монахов, А. А. Трофимук (Гомель, Беларусь)

Пусть n и m — натуральные числа. Говорят, что n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, а при $m = 3$ — от кубов.

Если порядок группы G свободен от квадратов, то G в существует циклическая холлова подгруппа N такая, что G/N циклическая [1, теорема IV.2.11]. В частности, группа G сверхразрешима и ее производная длина не превосходит 2.

Группы порядков, свободных от кубов, могут быть неразрешимыми. В [2] доказано, что *если G — неразрешимая группа порядка, свободного от кубов, то $G = A \times B$, где A — разрешимая подгруппа, $B \cong PSL(2,r)$, r — простое число, $r \equiv \pm 3 \pmod 8$ и числа $r-1$ и $r+1$ свободны от кубов.* Разрешимая группа G порядка, свободного от кубов, обладает следующими свойствами: *производная длина G не превышает 3; G — дисперсивная группа; $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре; $2'$-холлова подгруппа метабелева; если G не дисперсивна по Оре, то существует нормальная подгруппа N такая, что G/N изоморфна знакопеременной группе A_4*, [2].

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Факторгруппы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Вполне естественно возникает следующая задача: *исследовать строение разрешимой группы с ограниченными порядками факторов ее нормального ряда.*

Несложно проверить, что если у группы G имеется нормальный ряд, факторы которого имеют порядки, свободные от квадратов, то G сверхразрешима. В случае, когда факторы имеют порядки, свободные от кубов, доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть разрешимая конечная группа G обладает нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина G не превышает 4, а производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*

2. *Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу N такую, что G/N сверхразрешима.*

3. *$l_2(G) \leqslant 2$, $l_3(G) \leqslant 2$ и $l_p(G) \leqslant 1$ для всех простых $p > 3$.*

4. *Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3\}'$-холлову подгруппу.*

5. *Если G A_4-свободна, то:*

5.1) *$l_p(G) \leq 1$ для любого простого p;*

5.2) *производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3;*

5.3) *G дисперсивна по Оре.*

6. *Если G имеет нечетный порядок, то коммутант G нильпотентен. В частности, $G/\Phi(G)$ метабелева.*

Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, а $l_p(G)$ — ее p-длина. Группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4. Через E_{p^m} и Z_n обозначаются элементарная абелева группа порядка p^m и циклическая группа порядка n соответственно. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Следующие примеры показывают, что оценки, полученные в теореме, являются точными.

Пример 1. Пусть S — экстраспециальная группа порядка 27. Ее группой автоморфизмов является группа $[E_{3^2}]GL(2,3)$. Полупрямое произведение $G=[S]GL(2,3)$ является группой порядка $1296=2^4 3^3$ с подгруппой Фраттини $\Phi(G)\simeq Z_3$. Производная длина группы G равна 6, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1\subset Z_3\subset S\subset [S]Z_2\subset [S]Q_8\subset [S]SL(2,3)\subset G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$Z_3,\ S/Z_3\simeq E_{3^2},\ ([S]Z_2)/S\simeq Z_2,\ ([S]Q_8)/([S]Z_2)\simeq E_{2^2},$$

$$([S]SL(2,3))/([S]Q_8)\simeq Z_3,\ G/([S]SL(2,3))\simeq Z_2.$$

Кроме того, 2-длина и 3-длина данной группы равна 2.

Пример 2. Пусть E_{5^2} — элементарная абелева группа порядка 5^2. В ее группе автоморфизмов имеется подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3. Полупрямое произведение $G=[E_{5^2}]S_3$ является A_4-свободной группой с единичной подгруппой Фраттини. Производная длина группы G равна 3. Данная группа обладает главным рядом

$$1\subset E_{5^2}\subset [E_{5^2}]Z_3\subset [E_{5^2}]S_3=G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$E_{5^2},\ ([E_{5^2}]Z_3)/(E_{5^2})\simeq Z_3,\ ([E_{5^2}]S_3)/([E_{5^2}]Z_3)\simeq Z_2.$$

Кроме того, группа G является дисперсивной по Оре, а p-длина данной группы равна 1 для произвольного $p\in\{2,3,5\}$.

Список литературы

[1] Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. 1967.

[2] Монахов В. С., Трофимук А. А. Конечные группы, силовские подгруппы которых либо циклические, либо порядка p^2 // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. — 2008. — Т. 47, № 2. — С. 139-145.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НАД МНИМЫМ КВАДРАТИЧНЫМ ПОЛЕМ

Б. З. Мороз (Бонн, Германия)

Как известно, любая эллиптическая кривая, определенная над полем рациональных чисел, модулярна. Развитая для доказательства этой теоремы техника позволяет изучать кривые, определенные над вполне вещественными, но не над другими полями. Недавно был предложен метод, позволяющий проверять модулярность некоторых кривых (без комплексного умножения), определенных над мнимым квадратичным полем; авторы этого метода доказали модулярность трех таких кривых. Моя дипломантка М.Минк и я доказали модулярность еще одной такой кривой; я расскажу о нашей работе.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ ГРАФОВ

Е. А. Неганова, В. И. Трофимов (Екатеринбург, Россия)

Пусть Γ и Δ — графы (под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и без кратных ребер). Следуя [1], назовем связный граф $\widetilde{\Gamma}$ *симметрическим расширением графа* Γ *посредством графа* Δ, если существуют такая вершинно-транзитивная группа $\widetilde{G}$ автоморфизмов графа $\widetilde{\Gamma}$ и такая система импримитивности σ группы $\widetilde{G}$ на множестве $V(\widetilde{\Gamma})$ вершин графа $\widetilde{\Gamma}$, что фактор-граф $\widetilde{\Gamma}/\sigma$ изоморфен графу Γ и блоки системы σ порождают в $\widetilde{\Gamma}$ подграфы, изоморфные Δ. (Заметим, что если симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ существует, то Γ и Δ допускают транзитивные на вершинах группы автоморфизмов.) В случае, если для вершинно-транзитивной группы автоморфизмов G графа Γ группа $\widetilde{G}$, система импримитивности σ и изоморфизм $\widetilde{\Gamma}/\sigma$ на Γ могут быть выбраны так, что при этом изоморфизме индуцируемая $\widetilde{G}$ группа

$\widetilde{G}^{\sigma}$ автоморфизмов графа $\widetilde{\Gamma}/\sigma$ переходит в G, то (следуя [1]) скажем, что $\widetilde{\Gamma}$ есть *G-симметрическое расширение графа* Γ *посредством графа* Δ. Наконец, если Γ — граф, G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ и q — целое положительное число, то *G-симметрическим q-расширением графа* Γ называется произвольное G-симметрическое расширение графа Γ посредством графа с q вершинами (см. [1]).

Понятие симметрического расширения одного графа посредством другого графа аналогично понятию расширения одной группы посредством другой группы и находит применение в теории групп. Далее нас интересуют симметрические расширения связных графов конечной валентности и, прежде всего, решеток (определение см. ниже) посредством конечных графов. Симметрические расширения решеток посредством конечных графов представляют интерес в связи с кристаллографией частиц ("молекул") с внутренней структурой.

Следующая теорема дает ответ на принципиальный вопрос: может ли фиксированный граф конечной валентности иметь бесконечно много (попарно неизоморфных) симметрических расширений посредством фиксированного конечного графа?

Теорема. *Существуют такие связный граф конечной валентности* Γ *и конечный граф* Δ*, что имеется бесконечное число симметрических расширений* Γ *посредством* Δ*.*

Можно показать, что в теореме в качестве графов Γ и Δ могут быть взяты графы Кэли подходящих групп.

Для целого положительного числа d под *d-мерной решеткой* Λ^d нами, как обычно, понимается граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы $(a_1, ...a_d)$ из d целых чисел, и две вершины $(a'_1, ..., a'_d)$ и $(a''_1, ..., a''_d)$ смежны тогда и только тогда, когда $|a'_1 - a''_1| + ... + |a'_d - a''_d| = 1$. *Сдвигом* решетки Λ^d называется ее автоморфизм, который переводит произвольную вершину $(a_1, ..., a_d)$ в вершину $(a_1+k_1, ..., a_d+k_d)$ для некоторых фиксированных целых чисел $k_1, ..., k_d$. Обозначим через $Aut_0(\Lambda^d)$ изоморфную $\mathbb{Z}^d$ подгруппу группы автоморфизмов решетки Λ^d, состоящую из всех ее сдвигов.

В связи с кристаллографией частиц с внутренней структурой ("молекул") большой интерес представляют $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические q-расширения решеток Λ^d для $d \geq 1$ и $q > 1$.

Нами *построены все* $Aut_0(\Lambda^d)$*-симметрические* 2*-расширения решетки* Λ^d *для любого целого положительного числа* d. Оказалось, в частности, что их число равно $2(n_1+n_2+\ldots+n_d)+1$, где n_k, $1 \leq k \leq d$, есть число графов с k вершинами (формулу для нахождения n_k см., например, в [2, теорема 15.5]).

Список литературы

[1] Trofimov V.I. Some topics in graph theory related with group theory. *Discrete Math.* to appear.

[2] Харари Ф. *Теория графов.* Мир, Москва, 1973.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ГРУПП БРАУЭРА КРИВЫХ РОДА ОДИН С j-ИНВАРИАНТОМ НЕ РАВНЫМ 1

А. В. Прокопчук (Минск, Беларусь)

Как известно, для кривой рода один C/K, задаваемой аффинным уравнением

$$y^2 = ax^4 + bx^2 + cx + d, \;\; a, b, c, d \in K^*, \tag{1.1}$$

относительная группа Брауэра кривой описывается следующей

Теорема 2. [1] (Дж. Шик). *Пусть C/K — кривая вида (1.1) и J_C — эллиптическая кривая, определенная аффинным уравнением (и являющаяся якобианом кривой C* [2]*):*

$$J_C : y^2 = x^3 - 2bx^2 + (b^2 - 4ad)x + ac^2.$$

Если $J_C(K)$ — группа K-рациональных точек кривой J_C и

$$\Omega_C = \{[(a, x/K)] | (x, y) \in J_C(K), x \neq 0\},$$

то

$$\mathrm{Br}(K(C)/K) = \begin{cases} \{1, [(a, b^2 - 4ad/K)]\} \bigcup \Omega_C, & \text{если } c = 0, \\ \{1\} \bigcup \Omega_C, & \text{если } c \neq 0. \end{cases}$$

Используя тот факт, что множество $C(K) \cup \{\infty\}$ снабжено структурой абелевой группы с нейтральным элементом ∞ ([2],[3], [4]), при описании группы $\mathrm{Br}(K(C)/K)$ используется существование гомоморфизм групп ([2],[3])

$$\alpha : C(K) \longrightarrow K^*/K^{*2},$$

задаваемого следующим образом:

$$\alpha(P) = \begin{cases} 1 \,(\mathrm{mod} K^{*2}), \text{если } P = \infty, \\ B \,(\mathrm{mod} K^{*2}), \text{если } P = (0,0), \\ x \,(\mathrm{mod} K^{*2}), \text{если } P = (x,y), x \neq 0, \end{cases}$$

где кривая C/K имеет вид

$$y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx. \tag{1.2}$$

Стало быть, в случае, когда кривая $J_K(C)$ имеет вид (1.2), имеет место равенство

$$\mathrm{Br}(K(C)/K) = \{[(a, \alpha(P)/K)] | P \in J_K(C)\}.$$

Большинство кривых $C/\mathbb{Q}$, для которых явно вычислена группа $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}(C)/\mathbb{Q})$, имеют вид $y^4 = ax^4 + b$ ([5], [6]), т.е. j-инвариант таких кривых равен 1. В нижеприведенных теоремах все кривые имеют j-инвариант, отличный единицы.

Основой для описания групп $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}(C)/\mathbb{Q})$ будет служить следующая

Теорема 1. *Пусть K — произвольное поле и E/K — эллиптическая кривая, аффинная часть которой задается уравнением*

$$y^2 = x^3 - 2bx^2 + (b^2 - 4ad)x, \;\; a, b, c \in K^*.$$

Тогда для любого $\overline{x} \in \mathrm{Im}\alpha$ алгебра $(x, ad/K)$ тривиальна.

Основной результат доклада содержится в следующих теоремах.

Теорема 3. *Пусть K — произвольное поле и C/K — кривая рода один, аффинная часть которой задается уравнением*

$$y^2 = \varepsilon_1 x^4 + \varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_3, \;\; a \in K^*, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\}.$$

Тогда группа $\mathrm{Br}(K(C)/K)$ нетривиальна лишь при $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -1$. В последнем случае $\mathrm{Br}(K(C)/K) = \{1, [(-1, -1/K)], [(-1, 3/K)], [(-1, -3/K)]\}$. В частности, над полем рациональных чисел группа $\mathrm{Br}(K(C)/K)$ имеет порядок 4.

Теорема 4. *Пусть* $K = \mathbb{Q}$ *— поле рациональных чисел и* $C/\mathbb{Q}$ *— кривая рода один, аффинная часть которой задается уравнением*

$$y^2 = px^4 - px^2 + p,$$

где p *— простое нечетное число, большее чем 3. Тогда* $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}(C)/\mathbb{Q}) = \{1, [(p,-1/\mathbb{Q})], [(p,3/\mathbb{Q})], [(p,-3/\mathbb{Q})]\}$. *В частности, если* $p \equiv 1(\mathrm{mod}\,12)$, *то группа* $\mathrm{Br}(K(\mathbb{Q})/\mathbb{Q})$ *— тривиальна; если* $p \equiv 5(\mathrm{mod}\,12)$ *или* $p \equiv 7(\mathrm{mod}\,12)$, *то группа* $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}(C)/\mathbb{Q})$ *имеет порядок два и равна соответственно* $\{1, [(p,3/\mathbb{Q})]\}$ *или* $\{1, [(p,5/\mathbb{Q})]\}$*; если* $p \equiv 11(\mathrm{mod}\,12)$, *то группа* $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}(C)/\mathbb{Q})$ *имеет порядок 4.*

Список литературы

[1] Shick, J. On Witt-kernels of function field of curves // Contemp. Math. – 1994. – V. 155. – P. 389-398.

[2] Silverman, J. The arithmetic of elliptic curves – New York: Springer. – 1986.

[3] Husemöller, D. Elliptic curves – New York: Springer. – 2004.

[4] Cassels, J.W.S. Lectures on elliptic curves – Cambridge: Cambridge University Press. – 1991.

[5] Han, I. Relative Brauer groups of function fields of curves of genus one – 2003. – V. 31. – P. 4301–4328.

[6] Прокопчук А.В., Янчевский В.И. Относительные группы Брауэра полей рациональных функций квартик над полем рациональных чисел // Весці НАН Беларусі. — Сер. фіз.-мат. навук. — 2006. — №5.

КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБРЫ МЁБИУСА

М. А. Пустовых (С.-Петербург, Россия)

Классификация самоинъективных базисных алгебр над алгебраически замкнутым полем, имеющих конечный тип представления (Riedtmann, 1980, [1]), ассоциирует любую такую алгебру с одной из диаграмм Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7, или E_8. Наши результаты относятся к алгебрам типа A_n.

Riedtmann (см. [2]) доказала, что если для алгебры R это ассоциированное дерево имеет тип A_n, то R стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо так называемой “алгебре Мёбиуса”, описываемой как алгебра путей некоторого колчана с соотношениями. Для полуцепных самоинъективных алгебр структура кольца когомологий Хохшильда описана в [3]. Наши результаты относятся ко второму случаю, т.е. к алгебрам Мёбиуса $R_{n,t}$ (где n, t – два натуральных параметра из определения алгебры Мёбиуса; см. [4]).

Поскольку $\mathrm{HH}^s(R) = \mathrm{Ext}^s_\Lambda(R, R)$ (где $\Lambda = R \otimes_k R^{\mathrm{op}}$ – обёртывающая алгебра), мы можем вычислить структуру кольца когомологий следующим образом: $\mathrm{HH}^s(R) = \mathrm{H}^s\big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)\big)$, где

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\varepsilon} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} Q_2 \xleftarrow{d_2} Q_3 \longleftarrow \dots$$

– минимальная проективная резольвента Λ-модуля R. Эта резольвента для $R = R_{n,t}$ была построена нами в 2005 году (см. [4]). Далее, в 2006, используя резольвенту, мы получили описание аддитивной структуры кольца когомологий в [3]. Здесь мы описываем мультипликативную структуру алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для случая $n > 1$ и произвольной характеристики основного поля k.

Theorem 1. Пусть $n > 1$, $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса, $\mathrm{HH}^s(R)$ – s-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления s на $2t-1$, m – целая часть от деления r на 2, p – целая часть от деления $m + \ell t$ на n. Группа $\mathrm{HH}^s(R)$ имеет размерность 1, если s удовлетворяет требованиям одного из следующих пунктов:

(1) $r = 0 = m$, $\ell t \equiv 1(n)$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$;

(2) $r = 0 = m$, $\ell t \equiv 1(n)$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$;

(3) $r = 2m$ $(m > 0)$, $m + \ell t \equiv 1(n)$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$;

(4) $r = 2m$ $(m < t-1)$, $m + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell \,\vdots\, 2$, $\ell + p \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$;

(5) $r = 2t-2$, $t - 1 + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$;

(6) $r = 2t-2$, $t - 1 + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$;

(7) $r = 2m+1$, $m + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$;

(8) $r = 2m+1$, $m + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$.

В остальных случаях $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 0$.

Theorem 2. Пусть $n > 1$, $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса, и пусть

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{8} \left\{X_j^{(i)}\right\}_{j=1}^{\alpha_i} \cup \{T\}.$$

Тогда $\mathrm{HH}^*(R) \cong K[\mathcal{X}]/I$, где T лежит в степени $2n(2t-1)$ за исключением случая $\operatorname{char} k = 2$ и $n+t$ чётно, в котором T лежит в степени $n(2t-1)$; $X_j^{(i)}$ – элемент, степень которого равна $s_j^{(i)}$, где $s_1^{(i)}, \dots, s_{\alpha_i}^{(i)}$ – все степени, лежащие в $[0, \deg T)$ и удовлетворяющие условиям i-го пункта теоремы 1 (далее мы $X_j^{(i)}$обозначаем через $X^{(i)}$, так как значения нижних индексов ясны из контекста; кроме того, мы вводим вспомогательное обозначение $\widetilde{X}^{(i)} = X^{(i)}$, когда $\deg \widetilde{X}^{(i)} < \deg T$, и $\widetilde{X}^{(i)} = TX^{(i)}$ в противном случае); I – идеал, порождён образующими, которые соответствуют следующим соотношениям:

$X^{(1)}X^{(1)} = 0$; $X^{(1)}X^{(6)} = 0$; $X^{(1)}X^{(7)} = 0$; $X^{(1)}X^{(8)} = 0$; $X^{(7)}X^{(7)} = 0$; $X^{(8)}X^{(8)} = 0$;

$X^{(6)}X^{(6)} = -\widetilde{X}^{(7)}$; $X^{(5)}X^{(5)} = -t\widetilde{X}^{(7)}$; $X^{(1)}X^{(5)} = \widetilde{X}^{(3)}$;

$$X^{(4)}X^{(6)} = \begin{cases} -\widetilde{X}^{(7)}, & m_4 > 0; \\ \widetilde{X}^{(6)}, & m_4 = 0; \end{cases} \qquad X^{(8)}X^{(6)} = \begin{cases} -\widetilde{X}^{(3)}, & m_8 > 0; \\ \widetilde{X}^{(2)}, & m_8 = 0; \end{cases}$$

$$X^{(4)}X^{(5)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(5)}, & m_4 = 0; \\ \widetilde{X}^{(8)}, & m_4 > 0,\ \operatorname{char} k = 2; \\ 0, & m_4 > 0,\ \operatorname{char} k \neq 2; \end{cases}$$

$$X^{(7)}X^{(4)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(7)}, & m_7 + m_4 < t-1; \\ \widetilde{X}^{(1)}, & m_7 + m_4 = t-1, \quad \operatorname{char} k = 2; \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$X^{(8)}X^{(5)} = \begin{cases} -t\widetilde{X}^{(1)}, & m_8 = 0; \\ 0, & m_8 > 0; \end{cases}$$

$$X^{(7)}X^{(8)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(3)}, & m_7 + m_8 + 1 \leqslant t-1; \\ 0, & m_7 + m_8 + 1 > t-1; \end{cases}$$

$$X^{(8)}X^{(4)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(8)}, & m_8 + m_4 < t-1; \\ \widetilde{X}^{(2)}, & m_8 + m_4 = t-1; \\ -\widetilde{X}^{(3)}, & m_7 + m_4 > t-1; \end{cases}$$

$$X^{(4)}X^{(4)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(4)}, & m_4' + m_4 < t-1; \\ \widetilde{X}^{(6)}, & m_4' + m_4 = t-1; \\ -\widetilde{X}^{(7)}, & m_4' + m_4 > t-1; \end{cases}$$

$$X^{(4)}X^{(1)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(1)}, & m_4 = 0; \\ 0, & m_4 > 0; \end{cases}$$

$$X^{(5)}X^{(6)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(8)}, & \operatorname{char} k = 2; \\ 0, & \operatorname{char} k \neq 2; \end{cases}$$
$$X^{(7)}X^{(6)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(1)}, & m_7 = 0,\ \operatorname{char} k = 2; \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$
$$X^{(5)}X^{(7)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(2)}, & m_7 = 0,\ \operatorname{char} k = 2; \\ \widetilde{X}^{(3)}, & m_7 > 0,\ \operatorname{char} k = 2; \\ 0, & \operatorname{char} k \neq 2. \end{cases}$$

Здесь m_i (или m'_i) обозначает параметр m из теоремы 1, относящийся к i-й группе условий из этой теоремы ($i = 1, \ldots, 8$).

Отметим, что образующие типа $X^{(2)}$ или $X^{(3)}$ на самом деле могут быть исключены из описания алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, и мы их сохранили ради удобства формулировок.

Список литературы

[1] C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv., 1980, v. 55, 199–224.

[2] C. Riedtmann, *Representation-finite self-injective algebras of class A_n.* — Lect. Notes Math., 1980, v. 832, 449–520.

[3] K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math., 1999, v. 11, 177–201.

[4] А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **321** (2005), 36–66.

[5] М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **330** (2006), 173–200.

О ЛОКАЛЬНО N-ЗАМКНУТЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. А. Родионов, Л. А. Шеметков (Гомель, Беларусь)

В работе рассматриваются только конечные группы. Формацию $\mathfrak{F}$ называют N-замкнутой в некотором классе $\mathfrak{X}$, если справедливо следующее утверждение: если в $\mathfrak{X}$-группе G нормализаторы неединичных силовских подгрупп принадлежат $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$. В работе [1] перечислены все разрешимые наследственные насыщенные формации, являющиеся N-замкнутыми в классе $\mathfrak{S}$ разрешимых групп.

В настоящей работе мы хотим условие вхождения нормализатора в формацию ослабить до вхождения силовских p-подгрупп в обобщенный гиперцентр нормализатора. Такой локальный подход мотивирован теоремой Фробениуса, согласно которой группа G p-нильпотентна, если каждая p-подгруппа из G содержится в гиперцентре её нормализатора.

Локальным спутником называют функцию f, сопоставляющую каждому простому числу q некоторую формацию $f(q)$. Главный фактор H/K группы G называют f-центральным в G, если $G/C_G(H/K) \in f(q)$ для любого простого делителя q порядка H/K. Нормальная подгруппа L группы G называется f-гиперцентральной в G, если каждый ее G-главный фактор f-централен в G. Произведение всех f-гиперцентральных нормальных подгрупп из G называют f-гиперцентром и обозначают через $Z_f(G)$. Через $LF(f)$ обозначают класс групп G таких, что $Z_f(G) = G$. Известно, что $LF(f)$ — насыщенная формация. Согласно теореме Гашюца—Любезедер—Шмида, непустая формация $\mathfrak{F}$ насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторого локального спутника f (в этом случае f называется локальным спутником формации $\mathfrak{F}$).

Если $\mathfrak{F} = LF(f)$ и спутник f интегрирован (т. е. $f(q)$ входит в $\mathfrak{F}$ для любого простого q), то вместо $Z_f(G)$ пишут $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ и f-гиперцентральную подгруппу называют $\mathfrak{F}$-гиперцентральной.

Определение. Насыщенную формацию $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ назовём *локально* N-*замкнутой* в некотором классе $\mathfrak{X}$, если справедливо следующее утверждение: если $G \in \mathfrak{X}$ и $P \leqslant Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P))$ для любой неединичной силовской подгруппы P из G, то $G \in \mathfrak{F}$.

Из результатов работы [2] следует, что формация всех нильпотентных групп локально N-замкнута в классе всех групп.

Теорема 1. *Для разрешимой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ *локально* N-*замкнута в* $\mathfrak{S}$;

2) $\mathfrak{F}$ N-*замкнута в* $\mathfrak{S}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — формация всех разрешимых групп с q-длиной $\leqslant 1$ для любого простого числа q. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *любая непустая наследственная насыщенная подформация из* $\mathfrak{H}$ N-*замкнута в* $\mathfrak{H}$;

2) *если* $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ *и* $\mathfrak{X}$ — *насыщенная наследственная формация, то* $\mathfrak{H}$ *не является* N-*замкнутой в* $\mathfrak{X}$.

Известно, что формация $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп имеет q-длину $\leqslant 1$ для любого простого q. Таким образом, мы получаем из теоремы 2 такой результат.

Следствие. *Формация* $\mathfrak{U}$ *является* N-*замкнутой в классе всех разрешимых групп с* q-*длиной* $\leqslant 1$ *для любого простого числа* q.

Примеры показывают, что формация всех φ-дисперсивных групп и формация $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп не являются N-замкнутыми в классе всех разрешимых групп с q-длиной $\leqslant 2$ для любого простого числа q.

Список литературы

[1] D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G., Pérez-Ramos M. D. Saturated formations closed under Sylow normalizers // Comm. Algebra 2005. V. 33. P. 2801–2808.

[2] Шеметков Л. А., Баллестер-Болинше А. О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 1. С. 3–5.

ДЕФОРМАЦИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ТИПА B_2 НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2[4]

О. М. Романова, Н. Г. Чебочко (Нижний Новгород, Россия)

Алгебра Ли L типа B_2 над полем характеристики 2 не является простой. Однако можно ожидать появление простых алгебр Ли среди ее глобальных деформаций.

Пространство локальных деформаций $H^2(L, L)$ имеет размерность 28. Веса $H^2(L, L)$ имеют две орбиты относительно действия группы Вейля. Веса сопряжены или с β или с $4\alpha + 3\beta$, здесь $\{\alpha, \beta\}$ система простых корней, α – короткий корень.

Необходимым условием продолжаемости коцикла ψ до глобальной деформации является тривиальность коцикла $\psi \cup \psi$ из $Z^3(L, L)$, где $\psi \cup \psi(x, y, z) = \psi(\psi(x, y), z) + \psi(\psi(y, z), x) + \psi(\psi(z, x), y)$. Коцикл $\psi \cup \psi$ – первое препятствие к интегрируемости ψ.

[4]Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно- педагогические кадры инновационной России", шифр проекта НК-13П-13, контракт №П945".

Пространство $H^2_{4\alpha+3\beta}(L,L)$ одномерно и имеет базисный коцикл $\psi = e^*_{-2\alpha-\beta}\wedge e^*_{-\beta}\otimes e^*_{2\alpha+\beta} + e^*_{-2\alpha-\beta}\wedge e^*_{-\alpha-\beta}\otimes e^*_{\alpha+\beta}$. Первое препятствие к интегрируемости ψ нулевое и, следовательно, отображение $[\ ,\ ]+t\psi$ определяет семейство глобальных деформаций алгебры Ли типа B_2. Полученные алгебры Ли не являются простыми.

Пространство $H^2_\beta(L,L)$ имеет размерность 5. Для базисных коциклов $H^2_\beta(L,L)$ были найдены первые препятствия к интегрируемости. Среди базисных коциклов только $\widetilde{\psi} = e^*_{-\alpha-\beta}\wedge e^*_\alpha\otimes h_\beta + e^*_\alpha\wedge e^*_{-\alpha}\otimes e_\beta + e^*_{\alpha+\beta}\wedge e^*_{-\alpha-\beta}\otimes e_\beta$ является интегрируемым, причем $\widetilde{\psi}\cup\widetilde{\psi} = 0$. Поэтому $[\ ,\ ]+t\widetilde{\psi}$ определяет семейство глобальных деформаций алгебры Ли типа B_2. Полученные алгебры Ли также не являются простыми.

Таким образом, алгебра Ли типа B_2 над полем характеристики 2 допускает глобальные деформации, т.е. не является жесткой.

Список литературы

[1] М.И. Кузнецов, Н.Г. Чебочко, "Деформации классических алгебр Ли *Математический сборник*, 191:8(2000), 69 – 88.

[2] Чебочко Н. Г. Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике 2. I// Мат. сборник. 2005. Т.196. N9, С.125 – 156.

МНОГОЧЛЕНЫ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППОЙ ГАЛУА

А. Э. Сергеев (Краснодар, Россия)

Как известно, в общем случае, вычисление групп Галуа многочленов является трудоемкой задачей. Целью работы является построение параметрических триномов четвертой и пятой степеней с группами Галуа A_4 и A_5 над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. В приведенных ниже теоремах будем предполагать, что указанные многочлены являются неприводимыми над полем $\mathbb{Q}$ при $t \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Пусть многочлен* $f(x) = x^4 + \frac{4}{3t^2+1}x + \frac{3}{3t^2+1}$ *является неприводимым над полем* $\mathbb{Q}$ *и* $t \in \mathbb{Z}$. *Тогда, группа Галуа этого многочлена над полем* $\mathbb{Q}$ *изоморфна* A_4.

Доказательство. Дискриминант данного многочлена есть $\left(\frac{4^2 3^2 t}{(3t^2+1)^2}\right)^2$, т.е. является квадратом некоторого элемента поля $\mathbb{Q}$. Резольвента для этого многочлена имеет вид:

$$r(x) = x^3 - \frac{12}{3t^2+1}x - \frac{16}{(3t^2+1)^2}.$$

Делителями свободного члена многочлена $r(x)$ являются числа вида $\pm\frac{2^k}{(3t^2+1)^n}$, где $0 \leq k \leq 4$, $0 \leq n \leq 2$. Однако, ни одно из чисел этого вида не является корнем многочлена $r(x)$, следовательно, многочлен $r(x)$ – неприводим над полем $\mathbb{Q}$. Таким образом, группа Галуа данного многочлена над полем $\mathbb{Q}$, изоморфна A_4 [1]. $\square$

Теорема 2. *Пусть многочлен $f(x) = x^5 + 5(5k^2-1)x + 4(5k^2-1)$ является неприводимым над полем $\mathbb{Q}$ и $t \in \mathbb{Z}$. Тогда группа Галуа этого многочлена над полем $\mathbb{Q}$ изоморфна A_5.*

Доказательство. Дискриминант данного многочлена есть $5^6 4^4 k^2 (5k^2-1)^4$, т.е. является квадратом некоторого элемента поля $\mathbb{Q}$. Резольвента для этого вида многочлена имеет вид:

$$\begin{aligned} g(z) =& (z^3 - 25(5k^2-1)z^2 + 15\cdot 5^2(5k^2-1)^2 z + \\ &+ 5^4(5k^2-1)^3)^2 - 5^6 4^4 k^2 (5k^2-1)^4 z. \end{aligned}$$

Делителями свободного члена многочлена $g(z)$ являются числа $\pm 5^p(5k^2-1)^s$, где $0 \leq p \leq 8$, $0 \leq s \leq 6$. Однако, ни одно из чисел этого вида не является корнем многочлена $g(z)$, следовательно, многочлен $g(z)$ – неприводим над полем $\mathbb{Q}$. Таким образом, группа Галуа данного многочлена над полем $\mathbb{Q}$ изоморфна A_5 [2]. $\square$

Приведем еще одну теорему о параметрических триномах n-ой степени с группами Галуа, являющимися подгруппами накопеременной группы A_n.

Теорема 3. *1) Пусть n – нечетное число. Тогда многочлен вида:*

$$f(x) = x^n + n\cdot\left(\frac{nk^2 - (-1)^{n(n-1)/2}}{(-1)^{(n-1)(n-2)/2}}\right)\cdot x + (n-1)\cdot\left(\frac{nk^2 - (-1)^{n(n-1)/2}}{(-1)^{(-1)^{(n-1)(n-2)/2}}}\right)$$

имеет группу Галуа, являющуюся подгруппой группы A_n над полем $\mathbb{Q}$;

2) Пусть n- четное число. Тогда многочлен вида:

$$f(x) = x^n + n \cdot \left(\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(n-1)k^2 - (-1)^{(n-1)(n-2)/2}} \right) \cdot x + \\ + (n-1) \cdot \left(\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(n-1)k^2 - (-1)^{(n-1)(n-2)/2}} \right)$$

имеет группу Галуа, являющуюся подгруппой группы A_n над полем $\mathbb{Q}$.

Замечание. Дискриминанты данных многочленов, как нетрудно проверить, являются квадратами некоторых элементов поля $\mathbb{Q}$, но, к сожалению, на данный момент не существует утверждений для нахождения резольвенты для неприводимого многочлена n-ой степени, поэтому надо применять другие методы, позволяющие точно установить, что группы Галуа данных многочленов являются не просто подгруппами группы A_n, а как показывают вычисления на Maple, изоморфными группе A_n.

Список литературы

[1] Kappe L., Warren B. An elementary test for the Galois group of a quartic polynomials // Amer. Math. Monthly. - 1989. - vol. 4. -p. 133-137.

[2] Постников М.М. Теория Галуа. М. Факториал, 2003.

АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ АРТИНА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Э.А. Сергеев (Краснодар, Россия)

В 1927 году Э. Артин сформулировал следующую гипотезу: для каждого целого числа a, отличного от -1 и квадратов целых чисел, существует бесконечно много простых чисел p, для которых a является первообразным корнем по модулю p. Известно, что если гипотеза Римана о нулях дзета-функции справедлива, то верна и гипотеза Артина.

Пусть $f(x)$ – нормированный многочлен с целыми коэффициентами и p – простое число, не делящее свободный коэффициент многочлена $f(x)$. Порядком многочлена $f(x)$ по модулю p называется наименьшее натуральное число t, такое, что $f(x)$ делит $x^t - 1$ по модулю p.

Если порядок многочлена $f(x)$ степени n по модулю p равен p^n-1, то $f(x)$ называют примитивным многочленом по модулю p.

Сформулируем аналог гипотезы Артина для многочленов. Пусть $f(x)$ – нормированный, неприводимый над полем рациональных чисел многочлен с целыми коэффициентами, не являющийся ни биномом, ни круговым многочленом степени $n > 1$, свободный коэффициент которого a_n и $\pm a_n$ не является квадратом целого числа. Пусть группа Галуа этого многочлена над полем рациональных чисел, как подгруппа симметрической группы S_n, содержит подстановку цикленного типа $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$. Тогда существует бесконечно много простых чисел p, для которых $f(x) \equiv f_1(x)f_2(x)\ldots f_r(x) \pmod p$ и $f_i(x)$ – различные неприводимые по модулю p многочлены степени n_i для $i = 1, 2, \ldots r$, и, по крайней мере, один из этих многочленов $f_i(x)$ является примитивным по модулю p.

Если в условиях сформулированной гипотезы группа Галуа многочлена $f(x)$ степени $n > 1$ над полем рациональных чисел содержит цикл длины n, то гипотеза утверждает, что существует бесконечно много простых чисел p, по модулю которых многочлен $f(x)$ примитивен. Это утверждение было высказано в 1937 году Бильгарцем [1] и ему удалось свести доказательство к гипотезе Римана в полях алгебраических функций, а эта последняя гипотеза была доказана А. Вейлем в 1948 году [2].

Заметим, что если в условиях гипотезы $n = 1$ и $f(x) = x - a$, где a – целое число, отлично от -1 и квадратов целых чисел, то аналог гипотезы Артина для многочленов равносилен гипотезе Артина о первообразных корнях для целых чисел.

Список литературы

[1] Bilharz H. Primdivisor mit vorgegebeger primitivwurrel. Math. Ann. 114. 476-492. 1937.

[2] Weil A. Sur les corbes algebriques et les varietes qui sen deduisent. Actual Scientif. Industr. № 1041. Paris. 1948.

КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФАКТОРЫ ГРУПП, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОСТЫМ СИМПЛЕКТИЧЕСКИМ И ОРТОГОНАЛЬНЫМ ГРУППАМ

А. М. Старолетов (Новосибирск, Россия)

Спектром группы G называется множество $\omega(G)$, состоящее из порядков элементов группы. В последнее время выходит много работ, посвященных изучению вопроса *распознавания по спектру* для различных конечных простых групп (наиболее полный обзор см. в [1]). Решить подобный вопрос, означает найти число попарно неизоморфных групп, обладающих тем же спектром, что и данная простая (или почти-простая) группа L. Важным этапом при изучении распознаваемости группы L является установление композиционного строения группы, с множеством порядков, как у L. Этот вопрос далек от полного решения в случаях, когда L простая симплектическая или ортогональная группа. В настоящей работе получен следующий результат в этом направлении.

Теорема 1. *Пусть q — степень простого числа p, $M = \{B_3(q), C_3(q), D_4(q)\}$, $L \in M$, G — конечная группа со свойством $\omega(G) = \omega(L)$. Предположим, что среди неабелевых композиционных факторов группы G есть фактор S, изоморфный группе лиева типа над полем характеристики p. Тогда $S \in M$.*

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (НШ-344.2008.1), АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 2.1.1.419). и Лаврентьевским грантом для коллективов молодых ученых СО РАН, постановление Президиума СО РАН N43 от 04.02.2010

Список литературы

[1] *В.Д. Мазуров* Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та, 2005, № 36 (Матем. механ., вып. 7), 119–138

[2] *А.В. Васильев, М.А. Гречкосеева, В.Д. Мазуров* О конечных группах, изоспектральных простым симплектическим и ортогональным группам // Сиб. матем. журн., 50:6 (2009), 1225–1247

АЛГОРИТМ ПОРОГОВОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ЦИФРОВОЙ ПРОКСИ ПОДПИСИ БЕЗ РАСКРЫТИЯ СЕКРЕТНОГО КЛЮЧА

Е.А. Толюпа (Ярославль, Россия)

Основная проблема, возникающая при использовании пороговых алгоритмов, заключается в том, что группа, восстановившая секрет, узнает его. Алгоритм Педерсена позволяет группе выработать пару ключей (x_p, y_p), но каждый участник группы восстановивший ключ, неизбежно его узнает. В дальнейшем любой из них сможет подписывать сообщения от имени группы. Генерировать перед каждой процедурой подписи новую пару ключей неудобно и достаточно сложно контролировать одноразовое использование секретного ключа.

Я предлагаю протокол в котором группа подпишет сообщение от имени другого лица и не узнает совместный секретный ключ. Имеются следующие участники ЭДО:

Участник **A** - является оригинальным подписчиком;

Группа из n участников $\mathcal{P} = \{p_i | (i = 1...n)\}$;

Арбитр - независимое лицо, считается неподкупным;

Участник **A** уезжает в места лишенные компьютерных сетей и хочет, чтобы любые k участников группы $\mathcal{P}$ поставили прокси подпись от его имени и при этом не узнали значение прокси. Для выработки проки я буду применять алгоритм предложенный M. Mambo, K. Usuda и E. Okamoto [1], а для распределения секрета алгоритм Педерсена [2].

Пусть **A** имеет пару ключей (x_A, y_A).

Действия **A**:

1. Генерирует случайное число $r \in \mathbb{Z}_q^*$ и вычисляет $R = g^r \mathrm{mod} p$;

2. Вычисляет $s_A = x_A + r \cdot R \mathrm{mod} q$. s_A - прокси, это информация, которую вырабатывает оригинальный подписчик для последующей генерации прокси ключа доверительным подписчиком;

3. Генерирует многочлен $f_A(x)$ степени n такой, что $f_A(0) = s_A$:

$$f_A(x) = s_A + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + a_n \cdot x^n;$$

4. Вычисляет $f_A(i)$ $(i = 1 \ldots n)$ и отправляет полученное значение i-тому участнику группы $\mathcal{P}$. Таким образом каждый член группы $\mathcal{P}$

имеет значение многочлена в точке равной его порядковому номеру. Участников всего n значит у них не хватит информации чтобы восстановить $f_A(x)$;

5. Направляет Арбитру коэффициент при старшем члене a_n по секретному каналу;

Действия группы $\mathcal{P}$:

1. Каждый участник p_i имеет пару ключей (x_i, y_i), со следующими свойствами:

$$y_i = g^{x_i} \mathrm{mod} p; Y = \prod_{i=1}^{n} g^{x_i} \mathrm{mod} p$$

2. Каждый участник $\mathcal{P}$ генерирует многочлен $g_i(x)$ степени не большей $k-1$ такой, что $g_i(0) = Y \cdot x_i$:

$$g_i(x) = x_i \cdot Y + b_{i1} \cdot x + b_{i2} \cdot x^2 + \cdots + b_{ik-1} \cdot x^{k-1}$$

Обозначим $G(x) = f_A(x) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$

3. Каждый p_i вычисляет значение многочлена $g_i(x)$ в точке j: $g_i(j)$ $(j = 1 \dots n, i \neq j)$. Передает значение $g_i(j)$ p_j члену группы по секретному каналу связи. Таким образом мы получаем, что каждый i-ый участник обмена имеет $G(i) = f_A(i) + \sum_{l=1}^{n} g_l(i)$. То есть каждый знает одну точку суммарного многочлена $G(x)$. Секретный прокси ключ равен $G(0) = s_A + Y \sum_{l=1}^{n} x_l$.

Если **A** и каждый участник группы $\mathcal{P}$ сделали эти приготовления значит они могут участвовать в алгоритме формирования подписи.

В качестве алгоритма ЭЦП будем использовать алгоритм Шнорра. Без ограничения общности будем считать, что первые k участников $p_1 \dots p_k$ решили подписать сообщение M. Обозначим группу как $\mathcal{PS}$. Дальше группа вычисляет значение цифровой подписи для сообщения M.

Для вычисления подписи каждый участник группы $\mathcal{PS}$ делает следующие шаги:

1. Вычисляет значение хеш-функции H от $M||Y$.

2. Использует $G(i)$ как секретный ключ для подписания сообщения. Вырабатывает случайное число k_i и вычислить $S_i = k_i \cdot \prod_{j=1_{(j \neq i)}}^{k} \frac{i-j}{0-j} + G(i) \cdot H(M||Y)$. Такой операцией каждый участник $\mathcal{PS}$ умножил свободный член $G(x)$ на $H(M||Y)$ и добавил k_i. К коэффициенту при x^n прибавил число $k_i \prod_{j=1_{(j \neq i)}}^{k} \frac{1}{-j}$. Участник оставляет полученное значение точки у себя до момента восстановления секрета.

3. Каждый участник группы $\mathcal{PS}$ генерирует многочлен $z_i(0) = k_i \prod_{j=1_{(j\neq i)}}^{k} \frac{1}{j}$. Используя алгоритм Педерсена, группа вырабатывает общее число $K = \sum_{j=1}^{k} z(0)$. Таким образом они вычисляют величину K на которую изменится старший коэффициент многочлена $G(x)$ после того, как каждый член группы $\mathcal{PS}$ подпишет сообщение M.

Когда придет время восстанавливать секрет каждый из k членов группы $\mathcal{PS}$ отправит свое значение $(S_i,\, i)$ Арбитру.

Арбитр выполняет следующие шаги:

1. Для каждой пары $(S_i,\, i)$ вычисляет $S_i - (a_n + K) \cdot i^n$. Таким образом Арбитр получает значения многочлена $G'(x)$. $G'(x)$ это многочлен степени k такой, что

$$G'(i) = k_i \cdot \prod_{j=1_{(j\neq i)}}^{k} \frac{i-j}{0-j} + G(i) \cdot H(M||Y) - (a_n + K) \cdot i^n$$

2. Зная k точек многочлена $G'(x)$, вычисляет значение $G'(0)$ по интерполяционной формуле Лагранжа. Полученное значение возвращает участникам группы, как значение подписи.

Проверить значение цифровой подписи можно используя открытый ключ:

$$Y_v = y_A \cdot R^R \cdot Y^Y$$

Список литературы

[1] M. Mambo, K. Usuda, and E. Okamoto. H. *Proxy signatures: Delegation of the power to sign messages.* // IEICE Trans. Fundamentals, Sep. 1996, Vol. E79-A, No. 9, pp. 1338-1353;

[2] T. Pederson. *A Threshold Cryptosystem without a Trusted Party.* //In Proceedings of Eurocrypt 1991, volume 547 of LNCS, pages 522-526, 1991;

АВТОМОРФИЗМЫ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ R-ГРУПП И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

А. В. Трейер (Омск, Россия)

Пусть Γ — конечный простой (без кратных ребер и петель) граф с множеством вершин $\{x_1, \dots, x_n\}$ и множеством ребер E. Пусть R — либо поле нулевой характеристики, либо кольцо целых чисел. В многообразии двуступенно нильпотентных R-групп $N_{2,R}$ по графу Γ строится частично коммутативная группа: $G_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_n | [x_i, x_j] = 1, (x_i, x_j) \in E \rangle_{N_{2,R}}$.

В докладе будет описана структура группы автоморфизмов группы G_Γ. Кроме того, для графа Γ построена R-арифметическая линейная группа $H(\Gamma)$. Группа $H(\Gamma)$ реализована как группа факторных автоморфизмов частично коммутативной двуступенно нильпотентной R-группы G_Γ.

О СООТВЕТСТВИИ ГАЛУА ДЛЯ КАТЕГОРИЙ P-ЛОКАЛЬНЫХ K-РАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В. Х. Фарукшин (Москва, Россия)

Пусть поле K содержится в поле p-адических чисел и является расширением Галуа конечной степени поля рациональных чисел. Обозначим через S_p аддитивную группу целого замыкания кольца целых чисел в поле K.

Редуцированную абелеву группу G без кручения конечного ранга назовем *K-разложимой группой*, если $G \otimes S_p$ является прямой суммой делимой и свободной S_p-группы.

Обозначим через $\mathcal{L}_p(K)$ категорию p-локальных K-разложимых групп без кручения конечного ранга.

Теорема. *Существует соответствие Галуа между всеми подгруппами группы Галуа поля K и всеми вполне полными подкатегориями категории $\mathcal{L}_p(K)$ относительно свойства объектов быть L-разложимыми группами для любого подполя L поля K.*

О КРИТЕРИИ ДОМИНАНТНОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

П. Хаук (Тюбинген, Германия), В.Н. Загурский (Витебск, Беларусь)

Рассматриваются только конечные разрешимые группы. В определениях и обозначениях мы следуем [1]. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначают $\mathfrak{F}$-радикал группы G — наибольшую $\mathfrak{F}$-нормальную подгруппу группы G. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют доминантным, если для любых групп G и H таких, что $G_{\mathfrak{F}} \leq H \leq G$ и $H \in \mathfrak{F}$, следует $H \leq V$, где V — некоторый $\mathfrak{F}$-инъектор группы G.

Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга был предложен Хартли [2]. Всякое отображение $f : \mathbb{P} \to \{$ классы Фиттинга $\}$ называется H-функцией [3]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [3], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$, где f — некоторая H-функция и $\pi = Char(\mathfrak{F})$. Любой локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется полной приведенной H-функцией F такой, что $F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $F(p)$ — класс Локетта для всех простых p.

В классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп известен результат Локетта [4] о том, что если $\mathfrak{F}$ — доминантный класс Фиттинга, то либо $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, либо $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ для некоторого $\pi \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Так как класс $\mathfrak{S}_\pi$ разрешимых π-групп является локальным, то актуальной является проблема нахождения доминантных классов среди локальных классов Фиттинга полной характеристики ($Char(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$ или $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$). В [1] установлено, что примерами локальных классов Фиттинга полной характеристики, которые не являются доминантными служат классы $\mathfrak{N}\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_{2'} \cap \mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_{5'}$.

В настоящем сообщении мы описываем критерий доминантности локальных классов Фиттинга полной характеристики.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга полной характеристики с полной приведенной H-функцией F и $F(p)$ — класс Локетта для всех простых p. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является доминантным тогда и только тогда, когда для любых различных простых чисел p,q справедливо $(F(p) \cap F(q))\mathfrak{S}_{\{p,q\}} = F(p) \cap F(q)$ или $F(p) \cap F(q) = \cap_{r\in\mathbb{P}} F(r)$.*

Список литературы

[1] Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

[2] Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math.Soc., 3, –1969, 193–207.

[3] Vorob'ev, N.T. On a conjecture of Hawkes for radical classes / N.T. Vorob'ev // Sib. Math. J., 37, –1996, 1296–1302.

[4] Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett // Ph. D. thesis, University of Warwick. – 1971.

СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛУСКАЛЯРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Б. З. Шаваровский (Львов, Украина)

Будем рассматривать матрицы над кольцом $C[x]$, C -– поле комплексных чисел. Последнее считаем упорядоченным лексикографически. Пусть $G(x)$ -– произвольная матрица над $C[x]$ и $\varphi(x) = (x-\alpha_1)\ \ldots\ (x-\alpha_m) \in C[x]$, $\alpha_i \neq \alpha_j$. По аналогии с [1, опред. 1 §2 р. II] обозначим: $M^T_{G(x)}(\varphi) = \|\ G(\alpha_1)\quad \ldots\quad G(\alpha_m)\ \|$. Воспользуемся также обозначением $M^T_{G(x)}[\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m]$. Рассмотрим матрицу $N(x) \in M_n(C[x])$ и преобразования $N(x) \to QN(x)P(x)$, $Q \in GL(n,\ C)$, $P(x) \in GL(n,\ C[x])$, которые в [1] называются полускалярно эквивалентными. Будем предполагать, что матрица $N(x)$ имеет простую структуру (т.е. все ее элементарные делители линейны) и все инвариантные множители $\varphi_i(x)$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, различны. Обозначим $\varphi_{ij}(x) = \varphi_i(x)/\varphi_j(x)$, $j < i$. Нашей целью является поиск более простой формы для матрицы $N(x)$ и нахождение ее инвариантов относительно полускалярной эквивалентности. На первом этапе рекуррентно фиксируем набор $(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n_1})$, $\alpha_1 <\ \ldots < \ \alpha_{n_1}$, корней многочлена $\varphi_{21}(x)$ так, что α_j , $j = 1,\ \ldots,\ n_1$, является минимальным корнем, удовлетворяющим j-ое неравенство следующей цепочки:

$$0 < rank M^T_{N(x)}[\alpha_1] < rank M^T_{N(x)}[\alpha_1,\ \alpha_2] < \ldots$$

$$< rankM^T_{N(x)}[\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n_1}] = rankM^T_{N(x)}(\varphi_{21}) = r_1\ .$$

Очевидно, $r_1 = n_1$. Если $r_1 \geqslant n-1$, то процесс завершен на первом этапе. В противном случае находим наименьший номер $l_2 \geqslant 2$ такой, что $rankM^T_{N(x)}(\varphi_{l_2+1,1}) \neq r_1$. Далее, фиксируем рекуррентно набор $(\alpha_{n_1+1},\ \ldots,\ \alpha_{n_2})$, $\alpha_{n_1+1} <\ \ldots <\ \alpha_{n_2}$, корней многочлена $\varphi_{l_2+1,l_2}(x)$ так, что α_{n_1+j} , $j = 1,\ \ldots,\ n_2 - n_1$, является наименьшим корнем, для которого выполняется j-ое неравенство следующей цепочки:

$$r_1 < rankM^T_{N(x)}[\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n_1},\ \alpha_{n_1+1}] < rankM^T_{N(x)}[\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n_1},$$

$$\alpha_{n_1+1},\ \alpha_{n_1+2}] < \ldots < rankM^T_{N(x)}[\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n_1},\ \alpha_{n_1+1},\ \ldots,\ \alpha_{n_2}] =$$
$$rankM^T_{N(x)}(\varphi_{l_2+1,1}) = r_1 + r_2\ .$$

Если $r_1 + r_2 \geqslant n-1$, то процесс завершен на втором этапе. В другом случае делаем следующий шаг и т.д. Через $t \geqslant 1$ шагов найдем набор

$$(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n_1},\ \alpha_{n_1+1},\ \ldots,\ \alpha_{n_2},\ \ldots,\ \alpha_{n_{t-1}+1}\ ,\ \ldots,\ \alpha_{n_t})\ (1)$$

характеристических корней матрица $N(x)$, где $\alpha_{n_{k-1}+1},\ \ldots,\ \alpha_{n_k}$ являются корнями многочлена $\varphi_{l_k+1,l_k}(x)$, $1 = l_1 <\ \ldots\ < l_t < n,\ \ n_0 = 0$. Набор корней (1) матрицей $N(x)$ определяется однозначно. Более того, имеет место следующая

Теорема 1. *Набор корней* (1), *а также ранги матриц* $M^T_{N(x)}(\varphi_{l_k+1,1}) = r_1 +\ \ldots\ + r_k$, $k = 1,\ \ldots,\ t$, *классом* $\{QN(x)P(x)\}$ *полускалярно эквивалентных матриц определяется однозначно.*

Известно [1], что в классе $\{QN(x)P(x)\}$, $\det N(x) \neq 0$, существует матрица $A(x)$ нижнего треугольного вида с инвариантными множителями $\varphi_i(x)$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, на главной диагонали. Обозначим через $A^{(m)}_l(x)$ подматрицу матрицы $A(x)$, содержащуюся в первых l столбцах и последних m строках. Матрицу $A(x)$ назовем *приведенной и ориентированной по набору* (1) *характеристических корней*, если матрица $M^T_{A^{(m_k)}_{l_k}(x)}[\alpha_{n_{k-1}+1},\ \ldots,\ \alpha_{n_k}]$, $m_k = n - r_1 -\ \ldots\ - r_{k-1}$, $m_1 = n$, имеет вид

$$M^T_{A^{(m_k)}_{l_k}(x)}[\alpha_{n_{k-1}+1},\ \dots,\ \alpha_{n_k}] = \left\| \begin{array}{ccc} D_{k1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{k,n_k-n_{k-1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|,$$

$$k = 1,\ \dots,\ t\ , \quad (2)$$

где D_{kj_k} ($j_k = 1,\ \dots,\ n_k - n_{k-1}$) – блок полного ранга r_{kj_k} размера $r_{kj_k} \times l_k$. Ясно, что $r_{k1} + \ \dots + \ r_{k,n_k-n_{k-1}} = r_k$.

Теорема 2. *В классе* $\{QN(x)P(x)\}$ *полускалярно эквивалентных матриц существует приведенная и ориентированной по набору* (1) *характеристических корней матрица* $A(x)$.

Судя по виду матриц (2), каждому корню $\alpha_{n_{k-1}+j_k}$, $k = 1,\ \dots,\ t$, $j_k = 1,\ \dots,\ n_k - n_{k-1}$, набора (1) соответствует число r_{kj_k} -– полный ранг блока $D_{kj_k} : \alpha_{n_{k-1}+j_k} \to r_{kj_k}$. Если для чисел r_{kj_k} ввести сквозную нумерацию, то после переобозначения это соответствие можно записать так: $\alpha_p \to h_p$, $p = 1,\ \dots,\ n_t$.

Приведенная матрица $A(x)$ в общем случае определяется неоднозначно. Однако она позволяет указать систему инвариантов, о чем свидетельствует следующая

Теорема 3. *Пусть матрица* $A(x)$ *приведенная и ориентированная по набору* (1)*характеристических корней. Пусть также* $A^{(m)}_l(x)$ -– *ее подматрица, содержащаяся в первых* l *столбцах и последних* m *строках,* $l = 1,\ \dots,\ n-1$, $m = n - h_1 - \ldots - h_{n_t},\ n - h_1 - \ldots - h_{n_t-1},\ \dots,\ n - h_1,\ n$. *Тогда ранг матрицы* $M^T_{A^{(m)}_l(x)}(\psi_{l+1,l})$, *где* $\psi_{l+1,l}(x)$ -– *произвольный делители многочлена* $\varphi_{l+1,l}(x)$ *,являются инвариантами класса* $\{QN(x)P(x)\}$ *полускалярно эквивалентных матриц,содержащего матрицу* $A(x)$.

Список литературы

[1] Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. Наукова думка, Київ, 1981, 224 с.

О АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ УЗЛОВ

В.К. Шалашов (Ярославль, Россия)

Каждый ориентированный узел или зацепление могут быть представлены как замыкание $\hat{\beta}$ косы $\beta \in B_n$, где B_n — группа кос на n нитях, для некоторого n. Косы $\beta \in B_n$, $\gamma \in B_m$ называются замкнуто-эквивалентными, если $\hat{\beta}$ и $\hat{\gamma}$ эквивалентны как ориентированные узлы. Согласно хорошо известному результату А.А. Маркова (см., например, [1]) две косы β и γ замкнуто-эквивалентны тогда и только тогда, когда существует последовательность преобразований, при которых коса $\beta \in B_n$ переходит в сопряженную к ней в B_n, или в косу $\beta\sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$, либо в косу $\beta' \in B_{n-1}$, где $\beta = \beta'\sigma_{n-1}^{\pm 1}$.

Если $\beta \in B_n$ сопряжена косе $\beta'\sigma_{n-1}$ для некоторой $\beta' \in B_{n-1}$, то говорят, что коса β является плюс-приводимой и является минус-приводимой, если они сопряжена косе $\beta''\sigma_{n-1}^{-1}$ для некоторой косы $\beta'' \in B_{n-1}$.

Теорема 1. Пусть $\beta \in B_n$ и $\beta = \Delta_n^{-2s}P$, где

$$\Delta_n = \sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}\sigma_1 \ldots \sigma_{n-2} \ldots \sigma_1\sigma_2\sigma_1,$$

$s \in Z_+$, а $P \in \pi_n$, где π_n — полугруппа всех положительных слов из B_n, причем P содержит Δ_n. Предположим, что $\{P_1, \ldots, P_m\}$ — множество всех кос, полученных из P с помощью соотношений в полугруппе π_n и всех циклических сдвигов. Тогда коса β является плюс-приводимой, если и только если найдется число i, $1 \leqslant i \leqslant m$, для которого в π_n выполняется равенство

$$P_i = (\sigma_{n-1} \ldots \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1})^s\varphi_n(P_i),$$

где $\varphi_n(P_i)$ — коса, полученная из P_i удалением нити с номером n.

Теорема 2. Пусть $\beta \in B_n$ и $\beta = \Delta_n^{-2s}P$, где $s \in N$, а P — положительная коса, содержащая Δ_n. Предположим, что $\{P_1, \ldots, P_m\}$ — множество всех кос, полученных из $\Delta_n^2 P$ с помощью соотношений в полугруппе π_n и всех циклических сдвигов. Тогда коса β является минус-приводимой, если и только если в полугруппе π_n выполняется равенство

$$P_i\sigma_{n-1} = (\sigma_{n-1} \ldots \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1})^{s+1}\varphi_n(P_i)$$

для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Список литературы

[1] Birman, J.S. Braids, links and mapping class group. // Ann. of Math. Studies, 82 (1974).

О ПРОБЛЕМЕ СОПРЯЖЕННОСТИ ГРУПП РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК ВНЕШНИХ ФОРМ АНИЗОТРОПНЫХ ГРУПП ТИПА A_n И НЕТРИВИАЛЬНОСТИ ИХ ПРИВЕДЕННЫХ ГРУПП УАЙТХЕДА

В. И. Янчевский (Минск, Беларусь)

Пусть k — поле характеристики отличной от 2 и $K = k(\sqrt{\alpha})$ — его квадратичное расширение с нетривиальным k-автоморфизмом σ, D — центральная K-алгебра с делением и K/k-инволюцией τ, продолжающей σ, $U(1, D, \tau) = \{d \in D | dd^\tau = 1\}$. Последняя группа является группой k-рациональных точек анизотропной алгебраической k-группы типа ${}^2A_{n-1}$, где $n^2 = dim_K D$, содержащую $[U(1, D, \tau), U(1, D, \tau)]$ — коммутант группы $U(1, D, \tau)$. Аналогично изотропному случаю определим, группу $SUK_1^{an}(D, \tau) = SU(1, D, \tau)/[U(1, D, \tau), U(1, D, \tau)]$ (напомним, что в изотропном случае определены группы $SK_1(D) = SL(1, D)/[GL(1, D), GL(1, D)]$ и $SUK_1(D, \tau) = \Sigma'_\tau(D)/\Sigma_\tau(D)$, где $\Sigma'_\tau(D) = \{d \in D | Nrd_D(d) \in k\}, \Sigma_\tau(D)$ — подгруппа $GL(1, D)$, порожденная τ-симметрическими элементами). Группы $SK_1(D)$ и $SUK_1(d, \tau)$ имеют ряд сходных свойств и определенное время считалось, что группы $SUK_1^{an}(D, \tau)$ являются подобными им хотя бы в некотором смысле (по крайней мере в случае специальных полей k). Так, например, в [1] для глобальных полей k обсуждалась проблема тривиальности групп $SUK_1^{an}(D, \tau)$ как один из основных начальных шагов в направлении получения результатов о нормальном строении групп $SU(1, D, \tau)$. Отметим, что соответствующие группы $SK_1(D)$ и $SUK_1(D, \tau)$ в этом случае тривиальны. Однако оказалось, что положение более сложное. Вначале Б. Сури и Б. Сетураман в [2] построили серию примеров, показывающих, что группы $SUK_1^{an}(D, \tau)$, вообще говоря, нетривиальны и могут быть даже бесконечными. А затем Б. Сури в [3] вычислил группу $SUK_1^{an}(D,\tau)$ для кватернионных алгебр с делением над глобальными полями K, установив нетривиальность этих групп (по поводу альтернативного метода их вычислений см. [4]).

Таким образом, никаких общих результатов о нетривиальности групп $SUK_1^{an}(D,\tau)$, не зависящих от структуры D, к настоящему времени не получено. Ниже мы приводим утверждение, указывающее на связь проблем нетривиальности групп $SUK_1(D,\tau)$ и $SUK_1^{an}(D,\mu)$ для K/k-инволюцией инволюций τ и μ (такие инволюции обычно называются центроинвариантными). Связь эта состоит в следующем. Как установлено ещё в [5] для любых двух центроинвариантных инволюций τ и μ группы $SUK_1(D,\tau)$, $SUK_1(D,\mu)$ совпадают. Группы же $SUK_1^{an}(D,\tau)$ зависят от τ. Однако справедливо следующее утверждение, указывающее на зависимость нетривиальности $SUK_1^{an}(D,\tau)$ от нетривиальности $SUK_1(D,\tau)$.

Теорема 1. *Пусть $SUK_1(D,\tau)$ — группа экспоненты большей 2. Тогда существует центроинвариантная τ инволюция μ такая, что группа $SUK_1^{an}(D,\mu)$ нетривиальна.*

Так как группы $U(1,D,\tau)$ и $SU(1,D,\tau)$ зависят от инволюций τ, то естественно возникает проблема сопряженности таких подгрупп в $GL(1,D)$. В докладе будет предъявлено решение этой проблемы для кватернионных алгебр D над глобальными полями K, основанное на следующих утверждениях.

Пусть Q — кватернионная K-алгебра с делением и K/k-инволюцией τ, $S_\tau(Q)=\{s\in Q|s^\tau=s\}, Inv_{K/k}Q$ — множество центроинвариантных инволюций алгебры Q. Тогда имеет место

Теорема 2. *Пусть $\tau,\mu\in Inv_{K/k}Q, \mu=\tau i_s$, где i_s — внутренний автоморфизм Q, заданный сопряжением с помощью s. Тогда*

(i) группы $U(1,Q,\tau),U(1,Q,\mu)$ сопряжены в $GL(1,Q)$ в том и только в том случае, когда $Nrd_Q(s)\in N_{K/k}(GL(1,K))$, где $N_{K/k}$ — гомоморфизм расширения полей K/k.

(ii) группы $SU(1,Q,\tau),SU(1,Q,\mu)$ сопряжены в $GL(1,Q)$ в том и только в том случае, когда $Nrd_Q(s)\in N_{K/k}(GL(1,K))$.

Имеем также

Следствие. В обозначениях теоремы 2 сопряженность групп $SU(1,Q,\tau),SU(1,Q,\mu)$ в $GL(1,Q)$ влечет изоморфизм групп $SUK_1^{an}(Q,\tau),SUK_1^{an}(Q,\mu)$.

Ввиду следствия естественно рассматривать разбиение множества $\{SU(1,Q,\tau)\}_{\tau\in Inv_{K/k}Q}$ на классы с изоморфными группами

$SUK_1^{an}(Q,\tau)$. Тогда задача описания классов сопряженности подгрупп $SU(1,Q,\tau)$ сводится к описанию таких классов в классах предыдущего разбиения. Классы этого разбиения ввиду их определения параметризуются абелевыми группами $SUK_1^{an}(Q,\tau)$.

В случае глобальных полей K имеет место

Теорема 3 (конечности). *Пусть M — подмножество множества*
$\{SU(1,Q,\tau)\}_{\tau\in Inv_{K/k}Q}$ всех элементов, имеющих изоморфные группы $SUK_1^{an}(Q,\tau)$, изоморфные группе G. Тогда M состоит из конечного числа классов сопряжённых в $GL(1,Q)$ элементов.

Таким образом, результаты Б. Сури позволяют вычислить допустимые группы G (в терминах локальных инвариантов Q), а теорема 4 в комбинации с теоремой 1 позволяет завершить классификацию классов сопряжённости в $GL(1,Q)$ групп $SU(1,Q,\tau)$.

Замечание. Аналогичные результаты справедливы и для унитарных групп.

Список литературы

[1] Платонов В.П., Рапинчук А.С., Алгебраические группы и теория чисел. М., Наука. 1991.

[2] Sethuraman B.A., Sury B. On the special unitary group of a division algebra. // Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2005), P. 351-354.

[3] Sury B., On $SU(1,D)/[U(1,D),U(1,D)]$ for a quaternion division algebra D. // Arch Math 90 (2008), 493-500.

[4] Прокопчук А.В., Янчевский В.И. О другом доказательстве теоремы Б. Сури. - Записки научных семинаров ПОМИ. 2009. Т. 365. С. 196–207

[5] Янчевский В.И., Простые алгебры с инволюциями и унитарные группы. // Матем. сб., 1974 г., т. 93, № 3, С.368-380

LOGICAL SEPARABILITY OF ALGEBRAS

E. Aladova[5] (Ramat Gan, Israel), B. Plotkin (Jerusalem, Israel)

Let Θ be an arbitrary variety of algebras and let H be an algebra from Θ. The aim of the theory introduced by B.I. Plotkin is to consider the interaction between algebraic structure of the algebra H and its geometrical and logical properties. In this concern new logical invariants and logical relations of algebras were introduced. The concept of *a type* from Model Theory plays an exceptional role.

In particular, the concepts of *isotyped algebras*, *separability*, *logically noetherianity*, *logically perfectness* and others are considered. In our work we consider various problems related to these concepts. In particular, it is *the problem of logical separability of algebras in some variety of algebras.*

Definition. *An algebra $H \in \Theta$ is called separable in Θ if every $H' \in \Theta$ which is isotyped to H is, in fact, isomorphic to H.*

In other words, it means that such algebra can be distinguished from the other algebras using the logic of types. One of the main problems here is a follows:

Problem. *For which varieties Θ every free in Θ algebra $W = W(X)$ with finite X is separable?*

G. Zhitomirski proved that every free finitely generated semigroup is separable in the variety of all semigroups. The same is true for the variety of all inverse semigroups.

We have also the following results:

Theorem 1. *Let V_1 be a n-dimension vector space and let V_2 be a vector space, such that V_1 and V_2 are isotyped. Then V_1 and V_2 are isomorphic.*

Let R be a principal ideal domain. Let M_n be a free R-module of finite rank n.

Theorem 2. *Let N be a finitely generated R-module. If the modules N and M_n are isotyped then they are isomorphic.*

Note, that Theorem 2 gives only partial solution of the problem, at present we can not formulate this theorem without assumption that the module N is finitely generated.

Our next aim is to consider the foregoing problem for the variety Grp of groups, for the variety $Com - P$ of associative and commutative

[5]The author is supported by the Israel Science Foundation grant number 1178/06.

algebras over a field P, and for the variety $Ass - P$ of associative and non-commutative algebras over P.

TRIFACTORIZED GROUPS

Bernhard Amberg (Mainz, Germany)

In the investigation of factorized groups one often has to consider groups G of the form $G = AB = AC = BC$ where A, B and C are subgroups of G. It is therefore of some interest to study such trifactorized groups independently and for their own sake. Around 1960 O.H. Kegel considered finite groups $G = AB$, where the subgroups A and B are nilpotent. Among others he proved that G is nilpotent (supersoluble), if the third subgroup C is nilpotent (supersoluble). More generally, it was shown later by Gross and Peterson that G is contained in some saturated formation $\mathfrak{F}$ containing all nilpotent subgroups, if the subgroup C is an $\mathfrak{F}$-group. In the talk some recent extensions of these results are presented, in particular for soluble groups with minimum condition.

Also other results about trifactorized groups will be discussed, and a method to construct such groups of the form $G = AB = AK = BK$ where the subgroup K is normal in G. There is a connection with radical rings and nearrings.

PERIODIC GROUPS SATURATED WITH DIHEDRAL GROUPS

B.Amberg (Mainz, Germany), L. Kazarin (Yaroslavl, Russia)

A group G is said to be *saturated with subgroups from a class of groups* $\mathfrak{N}$, if every finite subgroup K of G is contained in a subgroup isomorphic with some group in $\mathfrak{N}$ (see [1]). A group G is of *dihedral type* if G contains a subgroup A of index 2 such that for an element $x \in G \setminus A$ we have $x^2 = 1$ and $xax = a^{-1}$ for every $a \in A$. If G is of dihedral type and A is locally cyclic, then G is a *locally finite dihedral group*.

It was shown in [1] that an infinite periodic group G saturated with dihedral groups has a factorization of the form $G = ABC = ACB = BCA = CBA$, where A is a locally finite dihedral group, and the subgroups B and C are locally cyclic. Here we prove the following.

Theorem. *Let G be an infinite periodic group saturated with dihedral groups, then G is a locally finite dihedral group.*

References

[1] Shlyopkin A.K., Rubashkin A.G., A class of periodic groups, Algebra and Logic, Vol.44, No 1 (2008), 65 – 70

SEMISIMPLE FINITE DIMENSIONAL HOPF ALGEBRAS

V.A. Artamonov[6] (Moscow, Russia)

Let H be a finite dimensional semisimple Hopf algebra over an algebraically closed field k whose characteristic is coprime with the dimension of H. We shall assume that in each dimension $d > 1$ there exist at most one irreducible H-module of dimension d. Under these assumptions there is found an explicit form of the counit and the antipode in H.

If H has only one irreducible representation of a dimension $d > 1$ then under some minor assumptions there is found an explicit form of a comultiplication in H.

l-ADIC GALOIS REPRESENTATIONS ASSOCIATED WITH ABELIAN VARIETIES OVER NUMBER FIELDS

Grzegorz Banaszak, Wojciech Gaida, Piotr Krason (Poznan, Poland)

We investigate the image of the l-adic representation attached to the Tate module of an abelian variety defined over a number field. We consider simple abelian varieties of type III in the Albert classification. We compute the image of the l-adic and mod l Galois representations and we prove the Mumford-Tate and Lang conjectures for a wide class of simple abelian varieties of type III.

[6]Research is partially supported by grants RFFI 09-01-00058.

ON SOME LOCAL-GLOBAL PRINCIPLES FOR MORDELL-WEIL TYPE GROUPS

Stefan Barańczuk (Poznan, Poland)

For certain groups like Mordell-Weil groups of abelian varieties over number fields, odd algebraic K-theory groups, étale K-theory groups of curves, etc., we investigate relations among nontorsion points via modulo prime ideals reduction maps.

LINEAR GROUPS OF DEGREE FOUR CONTAINING THE SUBGROUP $SL_2(k) \otimes SL_2(k)$

Evgenii L. Bashkirov (Belgorod, Russia)

If L is a field, then $GL_n(L)$ and $SL_n(L)$ mean as usual the general and the special linear group of degree $n \geq 2$ over L respectively. Assume that L admits a non-trivial automorphism σ of order 2 and let Φ be a non-degenerate σ-skew-Hermitian form in $n \geq 2$ variables over L. By $U_n(L, \Phi, \sigma)$ we denote the unitary group of Φ and by $SU_n(L, \Phi, \sigma)$ the group of all matrices of $U_n(L, \Phi, \sigma)$ whose determinant equals 1.

Let K be a field algebraic extension of a subfield k. Suppose that char $k \neq 2$ and k contains more than 9 elements.

Theorem 1. If $SL_2(k) \otimes SL_2(k) \leq X \leq GL_4(K)$, then X contains a normal subgroup G satisfying one of the following conditions:

(1) G is conjugate in $GL_4(K)$ to the group $SL_4(L)$, where L is a subfield of K such that $L \supseteq k$.

(2) G is conjugate in $GL_4(K)$ to the group $SU_4(L, \Phi, \sigma)$, where L is a subfield of K such that $L \supseteq k$, σ is an automorphism of L of order 2, Φ is a non-degenerate σ-skew-Hermitian form in four variables over L, the Witt index of Φ being non-zero.

(3) $G = SL_2(L_1) \otimes SL_2(L_2)$, where L_1, L_2 are subfields of K that contain k.

If Q is a non-degenerate quadratic form in $n \geq 2$ variables over L, then $\Omega_n(L, Q)$ denotes the commutator subgroup of the orthogonal group defined by Q. The group $SL_2(k) \otimes SL_2(k)$ can be identified with $\Omega_4(L, Q)$ provided that the Witt index of Q equals 2. From this point of view, Theorem 1 can be restated as follows.

Theorem 2. Let Q be a non-degenerate quadratic form in four variables over k whose Witt index equals 2. If $\Omega_4(k, Q) \leq X \leq GL_4(K)$, then X contains a normal subgroup G such as in Parts $(1) - (3)$ of Theorem 1.

COMMUTING PARTITIONS ASSOCIATED TO NILPOTENT MATRICES

Roberta Basili (Perugia, Italy)

To any pair of commuting $n \times n$ nilpotent matrices one can associate a pair of partitions of n.

We discuss the problem of finding which pairs of partitions one can obtain in this way. The discussion will include recent results of several authors (D.I. Panyushev, T. Košir, P. Oblak, R. Basili, A. Iarrobino).

We also discuss the problem of finding the Jordan form of a general nilpotent matrix commuting with a given nilpotent matrix in Jordan form.

References

[1] D.I. Panyushev, Two results on centralizers of nilpotent elements, J. Pure Appl. Algebra 212 (4) (2008), 774-779

[2] T. Košir, P. Oblak, On pairs of commuting nilpotent matrices, Trasform. Groups 14 (2009) n. 1, 175-182

[3] R. Basili, A. Iarrobino, Pairs of commuting nilpotent matrices, and Hilbert function, J. Algebra 320 (2008), 1235-1254

SMOOTH INTEGRAL MODELS OF ALGEBRAIC TORI

Lubov A. Belova (Samara, Russia)

Let $\mathcal{O}$ be a discrete valuation ring with the maximal ideal $\wp$. Let r_k be the residue field of $\mathcal{O}$, assumed to be perfect of characteristic $p \geq 0$. Let k be the field of fractions of $\mathcal{O}$, assumed to be complete in the valuation topology. The strict henselization of $\mathcal{O}$ is denoted by $\mathcal{O}^{sh}$. Let T be an algebraic k-torus, L the minimal splitting field of T, $\Pi = Gal(L/k)$ the Galois group of the minimal splitting field of T. Among all extensions of any k-torus T to a scheme over $\mathcal{O}$ there exists a canonical one, the so-called Neron model $\mathcal{T}$ [1]. By the definition, $\mathcal{T}$ is a smooth and separated $\mathcal{O}$-model of T which satisfies the Neron mapping property. The scheme $\mathcal{T}$ is not of finite type in general but locally of finite type. Consider the group of rational characters $\hat{T} = Hom(T \otimes L, \mathbb{G}_m)$, it is a torsion-free $\mathbb{Z}[\Pi]$-module of finite rank. It is known that T is uniquely determined by the field k and the Π-module $\hat{T}$. In fact, the classical Neron model of T depends on these inner parameters $(k, \hat{T})$ of T only. We have three notions for Neron models T. We study the following notion $T^{NR} = T^{ft\ NR}$, which is the smooth model with the connected generic fiber such that $T^{ft\ NR}(\mathcal{O}^{sh})$ is the maximal bounded subgroup of $T(k^{NR})$. This model is of finite type over $\mathcal{O}$. Let T^0 be any group $\mathcal{O}$-scheme of finite type such that $T^0(\mathcal{O}^{sh}) = T^{NR}(\mathcal{O}^{sh})$. Then T^{NR} can be obtained by applying the smoothening process to T^0 [1].

There exists another integral model of T which also depends only on $(k, \hat{T})$. This model X was introduced by V.Voskresenskii [3]. It is called the *standard integral model* of T. One can put $T^0 = X$ [4]. If L/k is at most tamely ramified then [4] the reduction $\overline{X} = X \otimes_{\mathcal{O}} r_k$ is reduced. So we have $T^{ft\ NR} = X(T)$. If L/k is wild ramified then the standard integral model is not smooth in general, i.e. the scheme $\overline{X} = X \otimes_{\mathcal{O}} r_k$ is not reduced. So we have to apply the smoothening process. We describe the singularities of the reduction in terms of the ideal $\overline{I} = I \otimes_{\mathcal{O}} r_k$. The ideal I is obtained by the following process.

Any k-torus T admits the following exact sequence

$$0 \to \hat{N} \xrightarrow{\beta} \hat{S} \xrightarrow{\alpha} \hat{T} \to 0,$$

here $\hat{S}$ is a permutation Π-module. Dual we have the following exact sequence of algebraic tori

$$1 \to T \xrightarrow{\alpha_L^*} S \xrightarrow{\beta_L^*} N \to 1,$$

here S is a quasi-split torus. So we have the following exact sequence of integral models

$$1 \to X(T) \to X(S) \xrightarrow{\beta_{\mathcal{O}}^*} X(N) \to 1,$$

then $I = \ker \beta_{\mathcal{O}}^*$. We calculate that $\ker \beta_{\mathcal{O}}^*$ generated by $\xi_i - 1$ modulo $\wp$-torsion, here $\{\xi_i\}$ is a basis of $\ker \alpha$. We construct the smooth integral model T^{NR} of algebraic tori with biquadratic splitting fields of dimensions at most 8.

References

[1] Bosh, S.; Lutkebohmert, W.; Raynaud, M. Neron Models, Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgebiete; 3. Folge, Bd. 21, Springer-Verlag, 1990.
[2] Chai, C.-L.; Yu, J.-K. Congruenses of Neron models for tori and the Artin conductor; Annals of Mathematics, 154, 2001, P.347-382.
[3] Voskresenskii V.E. Hopf algebras of algebraic tori// Abstracts of Talks, Kurosh Algebraic Conference,MSU,Moscow, 1998, P. 129-130.
[4] Popov S.Y. Standard Integral Models of Algebraic Tori//Preprintreihe des SFB 478-Geometrische Structuren in der Mathematic des Mathematischen Instituts der Westhelms-Universitat Munster, Heft 252,2003.

ON SIMPLE FILIPPOV SUPERALGEBRAS OF TYPE $A(m,n)$

P.D. Beites [7] (Covilhã, Portugal), A.P. Pozhidaev[8] (Novosibirsk, Russia)

The concept of n-Lie superalgebra was presented by Daletskii and Kushnirevich, [2], as a natural generalization of the n-Lie algebra notion introduced by Filippov, [3]. Following [4], we use the terms Filippov superalgebra and Filippov algebra instead of n-Lie superalgebra and n-Lie algebra, respectively.

Let k be a field and Φ an algebraically closed field of characteristic zero.

An *n-ary superalgebra* over k is a $\mathbb{Z}_2$-graded n-ary algebra $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ over k, that is, if $x_i \in L_{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathbb{Z}_2$, then $(x_1, \ldots, x_n) \in L_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}$.

An *n-ary Filippov superalgebra* over k is an n-ary superalgebra $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{F}_{\bar{1}}$ over k with one n-ary operation $[\cdot, \cdots, \cdot]$ satisfying

$$\begin{aligned}&[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n] = \\ &= -(-1)^{p(x_{i-1})p(x_i)}[x_1, \ldots, x_i, x_{i-1}, \ldots, x_n],\end{aligned} \tag{1}$$

[7] Supported by FCT (Foundation for Science and Technology of the Portuguese Ministry of Science, Technology and Higher Education), grant reference SFRH/BD/37907/2007.

[8] Supported by State Aid of Leading Scientific Schools (project NSh-344.2008.1) and by ADTP “Development of the Scientific Potential of Higher School” of the Russian Federal Agency for Education (grant 2.1.1.419).

$$
\begin{aligned}
&[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{p\bar{q}_i} [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n],
\end{aligned} \tag{2}
$$

where $p(x) = l$ means that $x \in \mathcal{F}_{\bar{l}}$, $p = \sum_{i=2}^{n} p(y_i)$, $\bar{q}_i = \sum_{j=i+1}^{n} p(x_j)$, $\bar{q}_n = 0$. The identities (1) and (2) are called the anticommutativity and the generalized Jacobi identity, respectively.

Given an n-ary superalgebra A with a multiplication $(\cdot, \cdots, \cdot)$, we have $End(A) = End_{\bar{0}}A \oplus End_{\bar{1}}A$. The element $D \in End_{\bar{s}}A$ is called a *derivation* of degree s of A if, for any $a_1, \dots, a_n \in A, p(a_i) = p_i$, the following equality holds

$$D(a_1, \dots, a_n) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{sq_i} (a_1, \dots, Da_i, \dots, a_n),$$

where $q_i = \sum_{j=1}^{i-1} p_j$. We denote by $Der_{\bar{s}}A \subset End_{\bar{s}}A$ the subspace of all derivations of degree s and set $Der(A) = Der_{\bar{0}}A \oplus Der_{\bar{1}}A$. The subspace $Der(A) \subset End(A)$ is easily seen to be closed under the bracket

$$[a, b] = ab - (-1)^{deg(a)deg(b)} ba$$

(known as the *supercommutator*) and it is called *the superalgebra of derivations* of A.

Fix $n-1$ elements $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$, $i \in \{1, \dots, n\}$, and define a transformation $ad_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \in End(A)$ by the rule

$$ad_i(x_1, \dots, x_{n-1})\, x = (-1)^{pq_i} (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_i, \dots, x_{n-1}),$$

where $p = p(x), p_i = p(x_i), q_i = \sum_{j=i}^{n-1} p_j$.

If, for all $i = 1, \dots, n$ and $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$, the transformations $ad_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \in End(A)$ are derivations of the algebra A, then we call them *strictly inner derivations* and A *an inner-derivation superalgebra* (*$\mathcal{ID}$-superalgebra*). Notice that the n-ary Filippov superalgebras are examples of $\mathcal{ID}$-superalgebras.

Now let us denote by $Inder(A)$ the linear space generated by the strictly inner derivations of A. If A is an n-ary $\mathcal{ID}$-superalgebra then it is easy to see that $Inder(A)$ is an ideal of $Der(A)$.

Let G be a Lie superalgebra. We say that a Filippov superalgebra $\mathcal{F}$ has *type* G if $Inder(\mathcal{F}) \cong G$.

We prove that there are no simple finite-dimensional Filippov superalgebras of type $A(m, n)$ over Φ.

References

[1] Beites, P.D. and Pozhidaev, A.P. (2008) On simple Filippov superalgebras of type $A(n,n)$, *Asian-European Journal of Mathematics*, **1** (4), 469–487.

[2] Daletskii, Y. and Kushnirevich, V. (1996) Inclusion of Nambu-Takhtajan algebra in formal differential geometry structure, *Dopovidi NAN Ukraine*, **4**, 12–18.

[3] Filippov, V.T. (1985) $n-$Lie Algebras, *Siberian Mathematical Journal*, **26** (6), 879–891.

[4] Grabowski, J. and Marmo, G. (2000) On Filippov algebroids and multiplicative Nambu-Poisson structures, *Differential Geometry and its Applications*, **12** (1), 35–50.

COPRIME CONJUGACY CLASSES AND SOLVABILITY OF FINITE GROUPS

Antonio Beltrán (Castellón, Spain)

There exist many results showing the strong relation between the structure and properties of a finite group G and the arithmetical properties underlying the set of its conjugacy class sizes, $\mathrm{cs}(G)$. This has been a classic study in Finite Group Theory during the last few decades, but it still remains to be an active topic nowadays. The fact that a group has two conjugacy classes whose cardinals are coprime numbers may seem a restrictive hypothesis but it yields to important consequences on the structure of a group. For instance, the celebrated theorem of Arad and Fisman shows by means of the Classification of the Finite Simple Groups that these groups cannot be simple.

In this talk, we present some classic and recent results related to coprime conjugacy classes. The most outstanding one asserts that those finite groups possessing exactly four conjugacy class sizes when two of them, say m and n, are coprime numbers (larger than 1) are necessarily solvable ([2] and [4]), in spite of the fact that groups with four class sizes may even be simple. Also, by imposing further conditions on this set one can get the nilpotency of a group ([2]). The arithmetical structure of the set $\mathrm{cs}(G)$ for a group G with such conditions on its class sizes can be completely determined, i.e., $\mathrm{cs}(G)= \{1, m, n, mk\}$ where k is a divisor of n. This is proved without making use of neither the Classification nor other deep results. Instead of this, we appeal to several theorems which relate, for some prime p, the properties and the p-structure of a group to the conjugacy class sizes of its p'-elements (for example, [1]). As a consequence of some previous papers, the structure of such groups is then determined.

References

[1] E. Alemany, A. Beltrán, M.J. Felipe, Finite groups with two p-regular conjugacy class lengths II. Bull. Austral. Math. Soc. **79** (2009) 419-425.

[2] A. Beltrán, M.J. Felipe, Finite groups with four conjugacy class sizes. Accepted. Communications in Algebra.

[3] A. Beltrán, M.J. Felipe, Some class size conditions implying solvability of finite groups. J. Group Theory. **9** (2006) 787-797.

[4] A.R. Camina, R.D. Camina. Coprime conjugacy class sizes. Asian-Eur. J. Math. **2** (2009) 183-190.

NEAR-ISOMORPHISM FOR TORSION-FREE ABELIAN GROUPS

Ekaterina Blagoveshchenskaya (St.Petersburg, Russia)

The theory of almost completely decomposable groups (acd-groups) has been intensively developed during the last decades and the monograph "Almost Completely Decomposable Groups" [4] by A. Mader collects a wide variety of its results. An *acd-group* X is a torsion-free abelian group of finite rank which contains completely decomposable group A (a direct sum of rank-one groups) as its fully invariant subgroup of finite index, that is the *regulator* of X. If in addition X/A is a cyclic group then X is called a *crq-group* (i.e. an acd-group with a cyclic regulator quotient). In fact, acd-group properties are tightly connected with the properties of its endomorphism ring, see [2], [5].

A fundamental tool in algebra is a direct decomposition into simpler objects, preferably indecomposables. These are not always unique up to isomorphism and a classification of non-isomorphic decompositions is one of the important research directions. For abelian groups it was discovered about 60 years ago that non-unique decompositions do exist and the problem of understanding such "pathological"decompositions of finite rank abelian groups (problems 67 and 68 in L. Fuchs' monograph "Infinite Abelian Groups" [3]) was solved by a combinatorial method, see [4], [5], [7]. A complete classification up to near-isomorphism of the so-called block-rigid crq-groups was obtained in [6].

In the same monograph [3] some non-isomorphic decompositions of countable rank groups were given as a consideration of Corner's groups, see [3], [3, Vol. 2, p. 141, Theorem 91.1]. As a natural generalization, the traditional near-isomorphism ($\cong_{nr}$) was extended to torsion-free abelian groups of countable rank and the new equivalence (also called near-isomorphism) was introduced in [10] and [11]:

Definition 1. Let X and Y be torsion-free abelian groups. Then X and Y are called **nearly isomorphic**, $X \cong_{nr} Y$, if for every prime p there exist monomorphisms $\Phi_p : X \to Y$ and $\Psi_p : Y \to X$ such that

(1) $Y/X\Phi_p$ and $X/Y\Psi_p$ are torsion groups with p-components $(Y/X\Phi_p)_p = 0 = (X/Y\Psi_p)_p$;
(2) for every finite rank pure subgroups $X' \subseteq X$ and $Y' \subseteq Y$ the quotients $(X'\Phi_p)^Y_*/X'\Phi_p$ and $(Y'\Psi_p)^X_*/Y'\Psi_p$ are finite.

The following class contains the mentioned Corner's groups:

Definition 2. A torsion-free abelian group X belongs to the class $\mathcal{C}'$ if it contains a completely decomposable subgroup $R(X) = \bigoplus\limits_{\tau\in T_{cr}(R(X))} A_\tau$ such that the following conditions are satisfied:

(1) $T_{cr}(R(X))$ is a countable set of pairwise incomparable types;
(2) A_τ is a pure subgroup of X of finite rank for each $\tau \in T_{cr}(R(X))$;
(3) $X/R(X) = \bigoplus\limits_{p\in P_X} T^X_p$ for some set of primes P_X and bounded p-groups T^X_p;
(4) for every $p \in P_X$ the set $\{q \in P_X : [T^X_p] \cap [T^X_q] \neq \varnothing\}$ is finite; here $[T^X_p]$ is the minimal subset $T_p \subset T_{cr}(R(X))$ satisfying $T^X_p \subseteq ((\bigoplus_{\tau\in T_p} A_\tau)^X_* + R(X))/R(X)$.

We show that this equivalence, which is the usual near isomorphism in case of finite rank groups, preserves decomposability properties of countable rank groups from $\mathcal{C}'$:

Theorem. Let $X, Y \in \mathcal{C}'$ be nearly isomorphic groups. If $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$ then there exists a decomposition $Y = \bigoplus_{i\in I} Y_i$ such that $X_i \cong_{nr} Y_i$ for any $i \in I$.

References

[1] *A. L. S. Corner.* A note on rank and decomposition of torsion-free abelian groups, Proceedings Cambridge Philos. Soc. **57** (1961), 230 – 233, and **66** (1969) 239 – 240.

[2] *P. Krylov, A. Mikhalev and A. Tuganbaev.* Endomorphism Rings of Abelian Groups, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht-Boston-London, 2003, 442 pp.

[3] *L. Fuchs.* Infinite Abelian Groups, vol. 1, 2, Academic Press 1970, 1973.

[4] *A. Mader* Almost completely decomposable abelian groups, Gordon and Breach, *Algebra, Logic and Applications* Vol. **13**, Amsterdam, 1999.

[5] *E. Blagoveshchenskaya.* Almost Completely Decomposable Abelian Groups and their Endomorphism Rings, *Mathematics in Polytechnical University,* St. Petersburg, 2009, 216 pp.

[6] *E. Blagoveshchenskaya.* Direct decompositions of torsion-free abelian groups of finite rank, Zap. Nauch. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. V. A. Steklova, vol. 132, pp. 17-25, 1983.

[7] *E. Blagoveshchenskaya.* Decompositions of torsion-free abelian groups of finite rank into direct sums of indecomposable groups, St. Petersburg Math. J., vol. 4, pp. 251-257, 1993.

[8] *E. Blagoveshchenskaya, A. Yakovlev.* Direct decompositions of torsion-free abelian groups of finite rank, Leningrad Math. J., vol. 1, pp. 117-136, 1990.

[9] *E. Blagoveshchenskaya, A. Mader.* Decompositions of almost completely decomposable abelian groups, Contemporary Mathematics, vol. 171, pp. 21-36, 1994.

[10] *E. Blagoveshchenskaya, R. Göbel.* Classification and direct decompositions of some Butler groups of countable rank. Comm. in Algebra 30, # 7, p. 3403 - 3427, 2002.

[11] *E. Blagoveshchenskaya, L. Strüngmann.* Near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free abelian groups, Comm. in Algebra, # 35, p. 1-18, 2007.

ENVELOPES AND COVERS FOR GROUPS

Jose Luis Rodriguez Blancas (Almeria, Spain)

In this talk we consider envelopes and covers of groups, and their associated localizations and cellular covers, sometimes called (co)-reflections. Our aim is to fuse recent work by Enochs and many others in module approximation theory with work undertaken by several group theorists and algebraic topologists in the context of homotopical localization and cellularization of spaces.

GROUP RINGS WHOSE GROUP OF UNITS IS HYPERBOLIC

V. Bovdi (Debrecen, Hungary)

In my talk I give the description of those group rings whose group of units is a hyperbolic group in the sense of Gromov [1].

References

[1] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

THE SPECTRA OF FINITE SIMPLE EXCEPTIONAL GROUPS

A.A. Buturlakin[9] (Novosibirsk, Russia)

The spectrum of a finite group G is the set of its element orders. Our main goal is an explicit arithmetical description of spectra of all finite simple groups. Such descriptions already exist for alternating groups, sporadic groups (see, for example, [1]) and classical groups of Lie type (see [2,3]). Thus the simple groups for which the problem is not solved are exceptional groups of Lie type. In the present work we describe spectra of finite simple groups of types E_6 and $^2E_6$.

References

[1] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., and Wilson R. A., Atlas of finite groups, Clarendon Press, Oxford (1985).
[2] Buturlakin A. A., Spectra of finite linear and unitary groups, Algebra and Logic, Springer US, vol. 47, no. 2, pp. 91–99.
[3] Buturlakin A. A., Spectra of finite classical groups and isospectral finite groups, Sobolev Institute of Mathematics, Preprint 232, 2009, p. 43 (in Russian).

---

[9]Supported by the RFBR (Grant 08–01–00322), the Program “Development of the Scientific Potential of Higher School” of the Russian Federal Agency for Education (Grant 2.1.1.419), and by the Federal Target Program “Scientific and Educational Personnel of Innovation Russia” in 2009-2013 (gov. contract no. 02.740.11.0429).

EULER CHARACTERISTICS AND POINCARE SERIES

Abtonio Campillo (Valladolid, Spain)

Last ten years, Poincare series were associated to singularities and other geometrical objects by means of natural multi-index filtrations on functions rings in such a way that they are often proved directly related to the topology or the geometry of the objet. The main construction, introduced together with Felix Delgado, Sabir Gusein-Zade, is to define the Poincare series as the power series whose coefficients are the Euler characteristics of the projectivization of the spaces of functions having the values given by the exponents (also called fibers), or, in other terms as an integral with respect to the Euler characteristic. Fibers can only exist when the filtration is given by order functions, in particular by valuations. However, algebraic geometrical derived constructions usually provide new natural filtrations not given by order functions. Now coefficients can be obtaned as Euler characteristic or certain complexes of Koszul type. New applications of it are recently obtained.

HILBERT FUNCTIONS AND CONFIGURATION OF LINEAR SPACES

Enrico Carlini (Turin, Italy)

Configuration of linear space, or subspace arrangements, are receving a great deal of attention for their many connections with Higher Secant Varieties, Statistic and Iamge Processing. In this talk we will investigate the problem of finding the Hilbert function of a generic configuration of linear spaces.

DIMENSION OF HIGHER SECANT VARIETIES OF SEGRE AND SEGRE-VERONESE VARIETIES

Maria Virginia Catalisano (Genova, Italy)

The problem of determining the dimensions of the higher secant varieties of an embedded projective variety $\mathbb{X}$ has been the object of study by many of the most outstanding geometers of the 19th and 20th centuries. Original investigations mostly concentrated on the secant line variety and were concerned, largely, with questions of projection. Since there is, by counting parameters, a natural guess as to what one should expect this dimension to be, the question becomes: when is the expected dimension the actual dimension, and if it is not, why not?

Varieties which had secant varieties of less than the expected dimension (the so called *defective* secant varieties) were especially interesting and were the object of intense study.

In more recent times, given the questions raised by computer scientists in complexity theory and by biologists and statisticians the focus has shifted to the study of the the higher secant varieties of the Segre embeddings of $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_t}$.

A generalization of this problem is the study of the higher secant varieties of

$$\mathbb{X} = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_t}$$

embedded in the projective space $\mathbb{P}^N$ $(N = \Pi\binom{d_i+n_i}{n_i} - 1)$ by the morphism given by $\mathcal{O}(\underline{d})$, where $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_t)$ (d_i positive integers). We call the embedded variety a *Segre-Veronese variety.*

Despite all the progress made on the most fundamental question about these secant varieties (namely, how big are they?) many questions remain open.

We will give a summary of known results and a sketch of our approach to this problem.

DIFFERENTIAL STRUCTURES AND MONOID ALGEBRAS OVER NON-COMMUTATIVE RINGS

E. P. Cojuhari (Cishineu, Moldova)

We define on an arbitrary ring A a family of mappings $(\sigma_{x,y})$ subscripted with elements of a multiplicative monoid G. The assigned properties allow to call these mappings as derivations of the ring A. The notion of a monoid algebra in our context extends those of a group ring, a skew polynomial ring, Weyl algebra and other related ones.

Let A be a ring with $1 \neq 0$ and G a multiplicative monoid with the unit element e. Let $\sigma = (\sigma_{x,y})_{x,y \in G}$ be a family of mappings $\sigma_{x,y} : A \longrightarrow A$ which satisfy the following properties (cf. the assumption (A) in [1]):

(i) $\sigma_{x,y}(a + b) = \sigma_{x,y}(a) + \sigma_{x,y}(b) \quad (a, b \in A; x, y \in G)$;

(ii) $\sigma_{x,y}(ab) = \sum_{z \in G} \sigma_{x,z}(a)\sigma_{z,y}(b) \quad (a, b \in A; x, y \in G)$;

(iii) $\sigma_{xy,z} = \sum_{uv=z} \sigma_{x,u} \circ \sigma_{y,v} \quad (x, y, z \in G)$;
(iv_1) $\sigma_{x,y}(1) = 0$ $(x \neq y;\ x, y \in G)$; (iv_2) $\sigma_{x,x}(1) = 1$ $(x \in G)$;
(iv_3) $\sigma_{e,x}(a) = 0$ $(x \neq e;\ x \in G)$; (iv_4) $\sigma_{e,e}(a) = a$ $(a \in A)$.

In plus we assume that for $x \in G$ and $a \in A$ the value $\sigma_{x,y}(a)$ is equal to zero for almost all $y \in G$, that is, $\sigma_{x,y}(a) \neq 0$ only for a finite set of $y \in G$. Thus, the sums in (ii) and (iii) are taken only on a finite number of non-zero terms. In the case of the property (iii) this refers to the every element $a \in A$, i.e.

$$\sigma_{xy,z}(a) = \sum_{uv=z} \sigma_{x,u}(\sigma_{y,v}(a)), \quad a \in A.$$

We call the family $\sigma = (\sigma_{x,y})_{x,y \in G}$ satisfying (i)-(iv) a *differential structure* on the ring A.

The operations of differentiation defined traditionally on a ring, for instance in [2], [3], are particular examples in our case. We connect the structure of differentiation defined by means of the family σ with a monoid algebra $A\langle G\rangle$. The elements of $A\langle G\rangle$ are mappings α from G into A such that $\alpha(x) = 0$ for almost all $x \in G$. We make $A\langle G\rangle$ into an A-module by defining the (left) module operations in the natural way. But the law of multiplication is defined specifically, by involving the mappings of the family σ. Namely, we write the elements α of $A\langle G\rangle$ as sums $\alpha = \sum_{x \in G} a_x \cdot x$, where $a_x \cdot x$ denotes the function from G into A whose value is a_x at x and 0 at y different of x. For two elements $\alpha = \sum_{x \in G} a_x \cdot x$ and $\beta = \sum_{x \in G} b_x \cdot x$ we define the law of multiplication by the following formulas $\alpha\beta = \sum_{x,y \in G}(a_x \cdot x)(b_y \cdot y)$, and

$$(a \cdot x)(b \cdot y) = \sum_{z \in G} a\sigma_{x,z}(b) \cdot zy \ (a, b \in A; x, y \in G).$$

In respect with this law of composition $A\langle G\rangle$ becomes to be a ring. This ring $A\langle G\rangle$ is also called a G-algebra over A (or simply a monoid algebra over A). It turns out that $A\langle G\rangle$ represents a free G-algebra over A. In order to prove this fact we construct a suitable category $\mathcal{C}$ in which the ring $A\langle G\rangle$ together with the canonical maps $\varphi_0 : G \longrightarrow A\langle G\rangle$, $\varphi_0(x) = 1 \cdot x$ $(x \in G)$ and $f_0 : A \longrightarrow A\langle G\rangle$, $f_0(a) = a \cdot e$ $(a \in A)$ is a universal object. We note that free algebras over commutative rings (see, for instance, [3, Ch. V, p. 106]), group algebras (when G is a group) [4], Weyl algebras (for the concept see [7], for instance) are concrete realizations of monoid algebras $A\langle G\rangle$. Certain special cases of crossed products (as, for example, twisted semigroup rings or skew group rings) [8] (see also [9]) can be considered as concrete situations of our approach as well.

We study in detail the particular case of a monoid G generated by two elements. This case is important especially for the theory of skew-polynomials, in one variable. The obtained results concerning this special case extend and generalize some related results of T. H. M. Smits [5], [6] (see also in [2]).

References

[1] Cojuhari E., *Monoid algebras over non-commutative rings,* Intern. Electronic Journal of Algebra, Volume 2 (2007), 28-53.

[2] Cohn P.M. *Free rings and their relations.* Academic Press, London, New-York, 1971.

[3] Lang S., (1970). Algebra. *Addison Wesley, Reading, Massachusetts.*

[4] Bovdi A. A., (1988). Group rings. *Kiev UMK VO.* (Russian).

[5] Smits T.H.M. *Nilpotent S-derivations.* Indag. Math., 1968, **30**, p. 72–86.

[6] Smits T.H.M. *Skew polynomial rings.* Indag. Math., 1968, **30**, p. 209–224.

[7] McConnell J. C., Robson J. C., (2000). Noncommutative Noetherian Rings. *vol.30, Amer. Math. Soc. Providance, Rhode Island.*

[8] Passman D. S., (1989). Infinite crossed products. *Academic Press, Boston.*

[9] Karpilovsky G., (1987). The algebraic structure of crossed products. *Amsterdam: North-Holland.*

CONSTRUCTIONS OF HYPERGROUPOIDS ASSOCIATED WITH N-ARY RELATIONS

Irina Cristea (Udine, Italy)

This talk contains a survey on the connections between hypergroups and n-ary relations. Algebraic hyperstructures are a natural generalization of classical algebraic structures; an algebraic hyperstructure is a non empty set H endowed with one or more hyperoperations, i.e. functions that associate with a couple of elements of H a subset of H. In particular, a *hypergroup* is a pair $(H, \circ)$, with $H \neq \varnothing$, $\circ$ a function from $H \times H$ to the family $\mathcal{P}^*(H)$ of non empty subsets of H which satisfies the following conditions:

(1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, for all $x, y, z \in H$ (associative axiom)

(2) $x \circ H = H = H \circ x$, for all $x \in H$ (reproduction axiom).

Hypergroups are much flexible and varied than groups. For example, if G is group and H a subgroup of G, then $G/H = \{xh \mid x \in G\}$ is a hypergroup, where the hyperproduct is defined in the usual manner: $\bar{x} \otimes \bar{y} = \{\bar{z} \mid z \in \bar{x} \circ \bar{y}\}$, where $\bar{x} = xH$, for any $x \in G$. Moreover, if H is of prime cardinality p, there are a large number of non-isomorphic hypergroups of H, while, up to isomorphism, there is only one group $\mathbb{Z}_p$.

Recently I. Cristea and M. Ştefănescu (Irina Cristea, Mirela Ştefănescu: Hypergroups and n-ary relations, European J. Combin., 31 (2010), 780-789; Irina Cristea: Several aspects on the hypergroups associated with n-ary relations) have presented a connection between hypergroupoids and n-ary relations. They investigated when the associated hypergroupoid is an H_v-group, a hypergroup or a join space. Another purpose of the study of this connection is the construction of new algebraic hyperstructures using operations on n-ary relations. These operations (such as union, intersection, Cartesian product, projection or join) extend the similar operations on databases.

Moreover, we describe the fundamental relations defined on a hypergroupoid. It may happen that the hyperoperation does not discriminate between a pair of elements of H, when these elements play interchangeable roles with respect to the hyperoperation. To explain this, J. Jantosciak (James Jantosciak: Reduced Hypergroups, Algebraic Hyperstructures and Applications (T. Vougiouklis, ed.), Proc. 4th Int. Cong. Xanthi, Greece, 1990, World Scientific, Singapore, (1991), 119–122) introduced three fundamental equivalences, called the operational equivalence, the inseparability and the essential indistinguishability, respectively, which permit to define the notion of reduced hypergroups. We particularly insist here on the conditions satisfied by a hypergroup associated with an n-ary relation in order to be reduced hypergroup.

CHARACTERIZATIONS OF INJECTORS IN FINITE SOLUBLE GROUPS

R. Dark (Galway, Ireland), A. D. Feldman (Lancaster, U.S.A.)
and M. D. Pérez-Ramos (Valencia, Spain)

All groups treated here are assumed to be finite and soluble. A *Fitting set* of a group G is a non-empty set $\mathcal{F}$ of subgroups of G that is closed under conjugation by elements of G; taking normal (and, therefore, subnormal) subgroups; and products of mutually normalizing pairs of subgroups. An $\mathcal{F}$-injector H of G is an $\mathcal{F}$-subgroup (a subgroup in $\mathcal{F}$) such that $H \cap L$ is a maximal $\mathcal{F}$-subgroup of L for each subnormal subgroup L of G. We paraphrase next Doerk and Hawkes, in their book *Finite Soluble Groups* [5, pp. 536-537]: The theory of Fitting sets, introduced by Anderson [1], may be viewed as a local theory of Fitting classes inside the subgroup lattice of a single group. The injectors for a Fitting set of a group retain all the important properties which were established by Fischer, Gaschüz and Hartley [6] for the injectors of a Fitting class $\mathfrak{F}$, and these can be read off by specializing to the Fitting set consisting of all $\mathfrak{F}$-subgroups of G. Particularly, if $\mathcal{F}$ is a Fitting set of a group G, then G possesses exactly one conjugacy class of $\mathcal{F}$-injectors. The theory of Fitting sets has the following distinct advantages: Theorems about injectors apply to a larger portion of the subgroup lattice, with no increase of difficulty with either concepts or arguments by the greater generality. In fact, one gets information about injectors in quotient groups, which is not available in the case of Fitting classes. Then, a subgroup H of a group G is called an *injector* of G if H is an $\mathcal{F}$-injector of G for some Fitting set $\mathcal{F}$ of G. The set of injectors of a finite soluble group includes for instance all normal subgroups, all Hall subgroups and all maximal subgroups. The general nature of injectors makes complicated the following problem proposed by Doerk and Hawkes [5, p. 553]:

Open question. In a given group we have the proper inclusions:

$$\{\text{Pronormal subgroups}\} \supset \{\text{Injectors}\} \supset \{\text{Normally embedded subgroups}\}.$$

Can the set of injectors be described without recourse to the concept of Fitting set?

We report about recent research, initiated by the first two authors in [2], and taken further in [3, 4], leading to a complete satisfactory answer to this question. A good number of characterizations of injectors of a group, in terms of certain chief factors of the group as well as via different persistent properties of subgroups, are obtained. A study of injectors with a normal complement becomes of particular interest.

References

[1] W. Anderson, *Fitting sets in finite soluble groups* (Ph. D. thesis, Michigan State University, 1973).

[2] R. Dark and A. D. Feldman, Characterization of injectors in finite soluble groups, *J. Group Theory* **9** (2006), 775-785.
[3] R. Dark, A. D. Feldman and M. D. Pérez-Ramos, Persistent characterizations of injectors in finite solvable groups, *J. Group Theory* **12** (2009), 511-538.
[4] R. Dark, A. D. Feldman and M. D. Pérez-Ramos, Injectors with a normal complement in a finite solvable group. Preprint.
[5] K. Doerk and T. Hawkes, *Finite soluble groups* (Walter de Gruyter, 1992).
[6] B. Fischer, W. Gaschüz and B. Hartley, Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen, *Math. Z.* **102** (1967), 337-339.

COHEN-MACAULAY MODULES OVER SURFACE SINGULARITIES

Yuriy Drozd (Kyiv, Ukraine)

We consider the problem of classification of Cohen–Macaulay modules over surface singularities. The talk will be devoted to the following topics:

(1) A criterion for an *isolated Gorenstein* surface singularity to be of *finite*, *tame* or *wild* Cohen–Macaulay type.
(2) An analogous criterion for *hypersurface singularities* (of any dimension).
(3) A new series of *non-isolated* surface singularities, which are of discrete or of tame Cohen–Macaulay type.

These results were obtained in collaboration with G.-M. Greuel, I. Kashuba, V. Bondarenko (Jr.) and I. Burban.

ON ASSOSYMMETRIC ALGEBRAS

A. Dzhumadil'daev (Almaty, Kazakhstan)

Let $(a, b, c) = a(bc) - (ab)c$ be an associator. An algebra with identities

$$(a, b, c) = (a, c, b) = (b, a, c), \quad \forall a, b, c \in A,$$

is called assosymmetric. Assosymmetric algebras were studied in several papers, see for example [Bo], [Kl]. In [He] a base of free assosymmetric algebras is constructed. In particular, it is proved that assosymmetric algebras under Lie commutator $[a, b] = ab - ba$ become Lie. We find identities for assosymmetric algebras under Jordan commutator $\{a, b\} = ab + ba$, find codimensions growth of assosymmetric variety and prove that assosymmetric operad is not Koszul. Suppose that a main field K is algebraically closed and has characteristic different from 2, 3.

Theorem 1. *Let $F(q)$ be free assosymmetric algebra generated by q elements $a_1, \ldots, a_q$, and $F_{m_1,\ldots,m_q}$ be its homogeneous subspace generated by m_i elements a_i, $i = 1, \ldots, q$ and let $F_n(q)$ be a subspace of free assosymmetric algebras of degree n generated by q elements. Then*

$$dim\, F_{m_1,\ldots,m_q} = \binom{m_1 + \cdots + m_q}{m_1 \ \cdots \ m_q} + (m_1+1)\cdots(m_q+1) - \binom{q+1}{2} - 1$$

and

$$dim\, F_n(q) =$$

$$q^n + \binom{n+2q+1}{n} - \binom{q+1}{2}\binom{n+q-3}{n-2} - q\binom{n+q-2}{n-1} - \binom{n+q-1}{n}.$$

In particluar, multilinear part of $F(n)$ of degree n has dimension $n! + 2^n - \binom{n+1}{2} - 1$.

Theorem 2. *Koszul dual to assosymetric operad is left-Alia and associative,*

$$[a,b]c + [b,c]a + [c,a]b = 0, \quad a(bc) = (ab)c.$$

Assosymmetric operad is not Koszul.

Theorem 3. *Assosymmetric algebras under Jordan commutator satisfy the following identity of degree 4*

$$x(y(ab)) - (x(ya))b - a(x(yb)) = y(x(ab)) - (y(xa))b - a(y(xb)) \qquad (\star)$$

The identity $(\star)$ is minimal in a class of assosymmetric algebras under Jordan commutator if $p = 0$ or $p > 3$. The identity $(\star)$ is a consequence of Jordan identity. If $p = 3$ the identity $(\star)$ is not minimal and any assosymmetric algebra under Jordan commutator is Jordan algebra.

Jordan algebras over a field of characteristic 3 are less studied. Main examples of Jordan algebras give us alternative algebras under Jordan product. Theorem 3 shows that in addition to a class of alternative algebras in characteristic 3 appears one more natural class of algebras that allows to construct Jordan algebras. Let us give one more construction of Jordan algebras in characteristic 3

Let $U = (U, \cdot)$ be a commutative algebra with identities

$$(t_1t_2)(t_3t_4) - (t_1t_4)(t_3t_2) = 0, \quad ((t_1t_2)t_3)t_4 - (((t_1t_4)t_3)t_2 = 0.$$

Let $J(U) = U + \bar{U}$ be direct sum of two copies of U under product $\circ$ defined by

$$a \circ b = \overline{a \cdot b}, \quad \bar{a} \circ \bar{b} = a \cdot b,$$
$$\bar{a} \circ b = 0, \quad a \circ \bar{b} = 0.$$

Then $(J(U), \circ)$ is Jordan algebra if $char\, K = 3$. In particular, if U is associative commutative algebra, then $(J(U), \circ)$ is Jordan algebra over a field of characteristic 3.

For an algebra A denote by l_x, r_x left-multiplication and right-multiplication endomorphisms, $l_x(a) = xa, r_x(a) = xa$, and denote by $Der\, A$ derivations algebra of A. Note that the identity $(\star)$ can be reformulated in terms of multiplication operators in the following way

$$[l_x, l_y] \in Der\, A, \quad \forall x, y \in A.$$

If one omits commutativity condition it is easy to write other modifictions of this identity

$$[r_x, r_y] \in Der\, A, \quad [l_x, r_y] \in Der\, A, \qquad \forall x, y \in A.$$

Recall that an algebra A is called left-(right-)Leibniz if l_x (r_x) is a derivation for any $x \in A$. Since derivations are closed under commutator, any Leibniz algebra and any Lie algebra satisfy the identity $(\star)$. For the case of Jordan algebras multiplication operators are not derivations, but their commutators are. So, class of algebras with identity $(\star)$ contains class of Lie, Jordan and Leibniz algebras.

References

[1] [Bo] A.H. Boers, *On assosymmetric rings*, Indag. Math. (N.S.), **5**(1994), 9-27.

[2] [He] I.R. Hentzel, D.P. Jacobs, L.A. Peresi, *A basis for free assosymmetric algebras,* J. Algebra, **183**(1996), 306-318.

[3] [Kl] E. Kleinfeld, *Assosymmetric rings*, Proc. AMS, **8**(1957), 983-986.

FREE NOVIKOV ALGEBRAS AS S_n-MODULE

A. Dzhumadil'daev, N. Ismailov (Almaty, Kazakhstan)

An algebra $(A, \circ)$ is called Novikov if

$$a \circ (b \circ c) - a \circ (c \circ b) = (a \circ b) \circ c - (a \circ c) \circ b,$$
$$a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c),$$

for any $a, b, c \in A$.

Let $\mathcal{Y} = \cup_n \mathcal{Y}_n$ be set of Young diagrams, i.e., set of boxes with non-increasing numbers of boxes from top to bottom. To any partition α one corresponds a Young diagram Y_α, a diagram with α_i boxes in the i-th row. For a partition $\alpha \vdash n$ denote by $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_k$ a partition of $n+1$ such that $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + 1, \tilde{\alpha}_i = \alpha_i, i > 1$. Let $\tilde{Y}_\alpha = Y_{\tilde{\alpha}}$. Let $\tilde{\mathcal{Y}}_n = \{\alpha \in \mathcal{Y}_n | \alpha_1 > \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \cdots \geqslant \alpha_k \geqslant 0\}$. Call elements of $\tilde{\mathcal{Y}}_n$ Novikov diagram of order n. So, there is one-to-one correspondence between $\mathcal{Y}_n$ and $\tilde{\mathcal{Y}}_{n+1}$.

Call first left column of Novikov diagram $\tilde{Y}_\alpha$ *left part* and other part as *right part* of Novikov diagram $\tilde{Y}_\alpha$. Say that $\tilde{Y}_\alpha$ has *block length* $l_1 \ldots l_s$, if $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{l_1} > \alpha_{l_1+1} = \cdots = \alpha_{l_1+l_2} > \alpha_{l_1+l_2+1} = \cdots > \alpha_{l_1+\cdots+l_{s-1}+1} = \cdots = \alpha_{l_1+\cdots+l_s} > 0$, $k = l_1 + \cdots + l_s$.

Let Ω be set of generators. We suppose that this set is linearly ordered. Filling of Novikov diagram by elements of Ω is a map $f : \tilde{\mathcal{Y}} \to \Omega$ with two properties given below. If $f(i,j) = a_{i,j} \in \Omega$ is an element in the box of i-th row and j-th column of Novikov diagram $\tilde{Y}_\alpha$ of the filling f, then

- elements of i-th block of left part satisfy the inequality $a_{l_1+\cdots+l_{i-1}+1,1} \geqslant a_{l_1+\cdots+l_i,1}$ for any $i = 1, \ldots, s$ and
- elements of right part are non-decreasing $a_{k,2} \leqslant a_{k,3} \leqslant a_{k,\alpha_k} \leqslant a_{k-1,2} \leqslant \cdots \leqslant a_{1,2} \leqslant a_{1,3} \leqslant \cdots \leqslant a_{1,\alpha_1+1}$.

So, we obtain Novikov tableau $\tilde{Y}_{\alpha,f}$. To each Novikov tableau we correspond Novikov element $e_{\alpha,f} = X_k \circ (X_{k-1} \circ (\cdots (X_2 \circ X_1) \cdots))$, where

$$X_i = (\cdots((a_{i,1} \circ a_{i,2}) \circ a_{i,3}) \cdots) \circ a_{i,\alpha_i+\delta_{i,1}}.$$

In [1], [2] is proved that elements $e_{\alpha,f}$, where α runs all partitions of n and f all fillings, form base of free Novikov algebra of degree n.

Endow set of Young diagrams $\mathcal{Y}_n$ by linear order: $\alpha < \beta$, if $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_i = \beta_i$, but $\alpha_{i+1} < \beta_{i+1}$ for some i. For two filings f, g of $\tilde{Y}_\alpha$ say that $f < g$, if $f(i,j) = g(i,j), j = 1, \ldots, \alpha_i + \delta_{i,1}$, for $i = 1, \ldots, r-1$, but $f_{r,j} = g_{r,j}, j = 1, \ldots, q-1, f_{r,q} < g_{r,q}$, for some r and q. These two orders induce linear order on a set of Novikov base elements $\{e_{\alpha,f} || \alpha| = n\}$. Say that $e_{\alpha,f} < e_{\beta,g}$ if $\alpha < \beta$ or $\alpha = \beta$, $f < g$.

Let $F^{(n)}$ be multilinear part of free Novikov algebra generated by n elements $a_1, \ldots, a_n$. Consider $F^{(n)}$ as S_n-module with a natural action $\sigma X(a_1, \ldots, a_n) = X(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$.

Let F_α be a subspace of $F^{(n)}$ generated by all base elements of a form $e_{\alpha,f}$, $\mathcal{F}_\alpha$ a subspace generated by base elements of a form $e_{\beta,g}$, where $\beta \leqslant \alpha$ and $\mathcal{F}_\alpha^-$ a space generated by base elements of a form $e_{\beta,g}$, where $\beta < \alpha$. Note that $\mathcal{F}_\alpha$ is a S_n-submodule of $F^{(n)}$.

For a sequence of non-negative integers α denote by $sort(\alpha)$ this sequence written in non-increasing order (zero's we can omit) and $\pi_i(\alpha)$ the number of i's in α. For example, if $\alpha = 4112050154001$ then $sort(\alpha) = 554431111$ and $\pi_0(\alpha) = 4, \pi_1(\alpha) = 4, \pi_2(\alpha) = 1, \pi_3(\alpha) = 0, \pi_4(\alpha) = 2, \pi_5(\alpha) = 2$.

Define weight map

$$w : P(n) \to \mathbf{Z}_+^{n+1}$$

by the following rule. For any partition $\alpha \in P(n)$ define its weight $w(\alpha) \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$ by

$$w(\alpha) = sort(\{1 + \sum_i (i-1)\pi_i(\alpha), \pi_1(\alpha), \dots, \pi_n(\alpha)\}).$$

For example,

$$w(5221) = sort(\{7, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}) = 7211 = 1^2 2^1 7^1$$

We endow in partitions set $P(n)$ an equivalence relation. For $\alpha, \beta \in P(n)$ say that $\alpha \sim \beta$ if $w(\alpha) = w(\beta)$. Let $\tilde{P}(n)$ be set of equivalence classes of $P(n)$ under this relation.

Example. $P(5)$ has 7 elements and 3 weights, namely $\tilde{P}(5) = \{51, 411, 321\}$.

Theorem.

- *For any partition $\alpha \in P(n-1)$, $\mathcal{F}_\alpha$ is S_n-module.*
- *S_n-modules F_α and F_β are isomorphic if $w(\alpha) = w(\beta)$.*

References

[1] A.S. Dzhumadil'daev, C. Lofwall, *Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities*, Homology,Homotopy and Appl.,4,2002, No.2(1), pp.165-190.

[2] A.S. Dzhumadil'daev, *Codimension growth and non-Koszulity of Novikov operad*, Comm. Algebra, to appear 2010.

NAGATA-HIGMAN THEOREM FOR NOVIKOV ALGEBRAS

A. Dzhumadil'daev, M. Tulenbaev (Almaty, Kazakhstan)

An algebra $(A, \circ)$ with identities

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) - (a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_3 \circ a_2) - (a_1 \circ a_3) \circ a_2,$$

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = a_2 \circ (a_1 \circ a_3),$$

for any $a_1, a_2, a_3 \in A$, is called Novikov.

Denote by A^k a subspace of A generated by products of any k elements of A for any bracketing types. Then takes place a sequence of non-increasing ideals

$$A = A^1 \supseteq A^2 \supseteq \cdots \supseteq A^k \supseteq \cdots,$$

$$A^k \circ A^s \subseteq A^{k+s}, \qquad k, s \geqslant 1.$$

Algebra A is called *nilpotent* if $A^n = 0$ for some n. Minimal n with such a property is called *index of nilpotency.*

Let $A^{\cdot k}$ be a subspace of A generated by right-normed products $a_1 \circ (a_2 \circ \cdots (a_{k-2} \circ (a_{k-1} \circ a_k)) \cdots)$. Similarly, let $A^{k\cdot}$ be a subspace of A generated by left-normed products $(\cdots (a_1 \circ a_2) \circ \cdots) \circ a_k$. Then

$$A = A^{\cdot 1} \supseteq A^2 = A^{\cdot 2} \supseteq \cdots \supseteq A^{\cdot k} \supseteq \cdots$$

and

$$A = A^{1\cdot} \supseteq A^2 = A^{2\cdot} \supseteq \cdots \supseteq A^{k\cdot} \supseteq \cdots$$

Call A *left-nilpotent* if $A^{\cdot n} = 0$ for some n and similarly, A is *right-nilpotent* if $A^{n\cdot} = 0$ for some n.

For $a \in A$ set $a^{\cdot n} = \underbrace{a \circ (a \circ (\cdots (a \circ a)))}_{n \text{ times}}$ (left power of a) $a^{n\cdot} = \underbrace{((a \circ a) \cdots a) \circ a}_{n \text{ times}}$ (right power of a). An algebra A with identity $a^{\cdot n} = 0$, for any $a \in A$ and for some n is called *left-nil.* Similarly, A is called *right-nil* if $a^{n\cdot} = 0$ is identity for some n.

Theorem 1. *Any Novikov algebra A over an algebraically closed field of characteristic $p = 0$ or $p \geqslant n$ with identities $a^{\cdot n} = 0, a^{n\cdot} = 0$ is nilpotent and index of nilpotency is less than $n^2 + 1$.*

Theorem 2. *Suppose that the main field is algebraically closed and has characteristic $p = 0$ or $p > n$. If A is right-nil Novikov algebra with nil-index n, then A left-nil with nil-index $2n - 2$.*

Corollary. *If A is right-nil Novikov algebra with nil-index n and $p = 0$ or $p > 2n-2$. Then A^2 is nilpotent with index of nilpotecy no more than $2n - 2$.*

THE HOMOTOPY CATEGORY OF THE KERNEL OF A COTORSION PAIR

Sergio Estrada Dominguez (Murcia, Spain)

We describe the homotopy category associated with various abelian model category structures obtained from cotorsion pair via the objects in the kernel of such a cotorsion pairs. We will provide with some applications of our techniques to different abelian categories.

ON SATURATION OF SUBMODULES OF MODULES OVER COMMUTATIVE RINGS

H. Fazaeli Moghimi and S. Abbasi (Birjand, Iran)

Let R be a commutative ring and M be a unitary R-module. For a prime ideal p of R and submodule N of M, the submodule $\{m \in M : rm \in N \text{ for some } r \in R - p\}$, denoted $S_p(N)$, is called the saturation of submodule N. A proper submodule N of M is called a prime (resp. primary) submodule, if $rm \in N$, then $m \in N$ or $r \in (N : M)$ (resp. $r^n \in (N : M)$ for some $n > 0$) where $(N : M)$ is the ideal $\{r \in R : rM \subseteq N\}$. The radical of a submodule, denoted $radN$, is defined to be the intersection of all prime submodules containing N. If I is an ideal of R, then the radical of I is denoted by $\sqrt{I}$. In [1, Proposition 1.1] S. Abu-Saymeh proved that these statements are equivalent: (i) $S_p(pM)$ is a proper submodule of M, (ii) $S_p(pM)$ is a prime submodule of M, (iii) $Spec_p(M) \neq \varnothing$ (in which $Spec_p(M) = \{P \in Spec(M) : (P : M) = p\}$) and (iv) $(pM : M) = (S_p(pM) : M) = p$ We show that these are equivalent to (v) $S_p(pM) \subseteq \bigcap_{N \in Spec_p(M)} N$. C. P. Lu gave some another statements for a non-zero module M which are equivalent with those of mentioned. Three of them are (1) $\psi : Spec(M) \longrightarrow$

$Spec(R/Ann(M))$ defined by $\psi(P) = (P : M) + Ann(M)$ is surjective, (2)$pM_p \neq M_p$ For every prime ideal p containing $Ann(M)$ and (3)$Spec_p(M) \neq \varnothing$ For every prime ideal p containing $Ann(M)$[2, Theorem 2.1]. Clearly these are equivalent to those of S. Abu-Saymeh provided that M is a nonzero faithful module. In this paper it was proved that if M is a non-zero finitely generated multiplication then we have the equivalent statements (a)$\mu : Spec(R/Ann(M)) \longrightarrow Spec(R)$ given by $\mu(P + Ann(M) = (P : M)$ is bijective, (b)$\varphi : Spec(M) \longrightarrow Spec(R)$ defined by $\varphi(P) = (P : M)$ is bijective, (c)$Ann(M) \subseteq \sqrt{0}$ and (d)$S_p(pM)$ is a proper submodule of M. It is easy to see these are equivalent with (i) to (iv). Also all of above statements are equivalent when M is a nonzero finitely generated faithful multiplication module. As two consequences we have $radN \subseteq S_p(pM)$ in each of following cases; (i) R is a one dimensional domain and N a p-primary submodule of M, (ii) M is a finitely generated submodule and N a p-primary submodule and $radN$ a prime submodule of M, (iii)M is a finitely generated submodule and N a p-primary submodule and $Spec_p(M)$ is a singleton set. Also it was shown that $radN = S_p(pM)$ when p is a non maximal prime ideal and $Spec_p(M)$ be a finite set containing $radN$. C. P. Lu in [3, Theorem 3.5] proved that for a p-primary ideal q of R and finitely generated module M $S_p(qM)$ is a p-primary submodule of M. On the other hand R. L. McCasland and M. E. Moore showed that for a finitely generated multiplication R-module M $rad(N) = \sqrt{(N : M)}M$[4, Theorem 4]. Consequently for a p-primary ideal q of R and finitely generated multiplication R-module M, $S_p(qM) = pM$. As a generalization we show that $S_p(IM) = S_p(I)M$ where I an ideal containing p and M is a finitely generated faithful multiplication R-module. The intersection $Q_1 \cap ... \cap Q_n$ of primary submodules of M is called a primary decomposition of N, if $N = Q_1 \cap ... \cap Q_n$. If moreover Q_j dose not contain $\bigcap_{i \neq j} Q_i$ $(1 \leq i \leq n)$ and $\sqrt{(Q_i : M)}$(resp. $rad(Q_i)$) are all distinct ideals (resp. prime submodules), then the primary decomposition of N is called a reduced (resp. module-reduced) decomposition of N. Let Q_i $(1 \leq i \leq n)$. Moore and Smith show that $Q_1 \cap ... \cap Q_n$ is a reduced primary decomposition of N if and only if $(Q_1 : M) \cap ... \cap (Q_n : M)$ is a reduced primary decomposition of $(N : M)$ provided that $\sqrt{(Q_i : M)}$ are isolated prime submodules. [5, 5] Now if M is a finitely generated R-module and $Q_1 \cap ... \cap Q_n$ a reduced primary decomposition of N and p a prime ideal containing all ideals

$(Q_i : M)(1 \leq i \leq n)$, then it is proved that $S_p(Q_1) \cap ... \cap S_p(Q_n)$ is a reduced and module-reduced primary decomposition of $S_p(N)$.

References

[1] Abu-Saymeh, S., *On dimension of finitely generated modules*, Comm. Algebra, 23(3), 1131-1144, 1995.

[2] Lu, C. P., *A module whose prime spectrum has the surjective natural map*, Houston J. Math, 33(1), 127-143, 2007.

[3] Lu, C. P., *Saturations of Submodules*, Comm. Algebra, 31(6) , 2655-2673, 2003.

[4] McCasland, R.L. and Moore, M.E., *On Radical of Submodules of finitely Generated Modules*, Canadian Mathematical Bulletin, 29(1), 37-39, 1986.

[5] Moore, M. E. and Smith, S. J., *Prime and Radical Submodules of Modules over Commutative Ring*, Communications in Algebra, 5037-5064, 30(10), 2002.

FINITE GROUPS HAVING SMALL CONJUGATE RANK

María José Felipe (Valencia, Spain)

Let G a finite group. The conjugate type vector of G is a list of the distinct conjugacy class sizes in descending order and the conjugate rank is the number of entries not equal to 1. It is well known that there is a strong relation between the structure of a group and its conjugate type vector. Some results prove this relation using the Classification of the Simple Finite Groups (CFSG), the Feit-Thompson theorem or other techniques of Ordinary and Modular Representation Theory. Recent results determine the structure of G when certain arithmetical conditions are imposed on the conjugate type vector; in particular, when the conjugate rank is small.

N. Itô prove in [5] and [6] that if G has conjugate rank 1, then G is nilpotent and that G is solvable when its conjugate rank is 2. The proof of this latter fact needs deep results which were used to obtain the CFSG. Afterwards, this result was simplified by Rebmann when G is an F-group, by using results of Baer and Suzuki, and by A.R. Camina, making use of the description of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups given by Gorenstein and Walter, if G is not an F-group. Recently, Dolfi and Jabara have obtained in [4] a complete classification of all finite groups with conjugate rank 2 using the solvability due to Itô. However, it is easier to obtain the structure of these groups in some particular cases. For instance, in 1981 Kazarin proved that if the conjugate type vector is $(m, n, 1)$ with m and n coprime numbers, then $G/Z(G)$ is a Frobenius group and the inverse image in G of the kernel and a complement are abelian. On the other hand, recently Beltrán and Felipe determined the structure of those groups whose conjugate type vector is $(mn, m, 1)$, with m and n are coprime numbers, using more elementary techniques concerning to local information of the group given the class sizes of π-elements for distinct sets π of primes.

Regarding groups with conjugate rank 3, Itô proves in [7] that the only simple groups with this rank are $\mathrm{SL}(2, 2^m)$ for $m \geq 2$. In order to prove this, Itô employs the Feit-Thompson theorem and Character Theory. We present in this talk several new results on the structure of a group G having conjugate rank 3 ([1], [2] and [3]).

References

[1] Beltrán, A., Felipe, M.J. Structure of finite groups under certain arithmetical conditions on class sizes. J. Algebra **319** (2008) 897-910.

[2] Beltrán A., Felipe, M.J. Finite groups with four conjugacy class sizes. Accepted in Comm. Algebra.

[3] A.R. Camina, R.D. Camina. Coprime conjugacy class sizes. Asian-Eur. J. Math. **2** (2009) 183-190.

[4] S. Dolfi, E. Jabara. The structure of finite groups of conjugate rank 2. Brll. London Math. Soc. **41** (2009) 916-926.

[5] Itô, N. On finite groups with given conjugate types I, Nagoya Math. **6** (1953) 17-28.

[6] Itô, N. On finite groups with given conjugate types II, Osaka J. Math. **7** (1970) 231-251.

[7] Itô, N. On finite groups with given conjugate types III, Math. Z. **117** (1970) 267-271.

ANALYTIC AND ARITHMETIC RANKS OF ELLIPTIC CURVES OVER NUMBER FIELDS

Ivan Fesenko (Nottingham, UK)

These two ranks are conjecturally equal. I will explain how one can see this using two-dimensional adelic analysis.

CONSTRUCTING BIMODULE RESOLUTIONS FOR ALGEBRAS WITH SMALL COMPLEXITY

A. I. Generalov (St.Petersburg, Russia)

We discuss methods of construction of bimodule resolutions for several families of algebras with small complexity and their use in calculating the Hochschild cohomology algebra of algebras under consideration. We also present recent results on description of the Hochschild cohomology algebra for a family of local algebras of dihedral type and for the integer group algebras of the semidihedral groups.

ON ELEMENT ORDERS IN COVERINGS OF FINITE SIMPLE CLASSICAL GROUPS

M. A. Grechkoseeva[10] (Novosibirsk, Russia)

The *spectrum* $\omega(G)$ of a finite group G is the set of its element orders. A finite group G is said to be *recognizable by spectrum* if $\omega(G) \neq \omega(H)$ for every finite group H nonisomorphic to G. In contrast, G is said to be *irrecognizable by spectrum* if there are infinitely many pairwise nonisomorphic groups H with $\omega(H) = \omega(G)$.

A finite group H is a *covering* of a finite group G if G is a homomorphic image of H. A covering of G is *proper* if it is not isomorphic to G. We say that G is *recognizable by spectrum among coverings* if $\omega(G) \neq \omega(H)$ for every proper covering H of G. Every recognizable group is clearly recognizable among coverings. Moreover, if G is not recognizable among coverings, then G is irrecognizable [1].

In the present work we address the question what finite simple classical groups are recognizable by spectrum among coverings. A.V. Zavarnitsine and V.D. Mazurov [2,3] proved that all simple linear groups $PSL_n(q)$ with $n \geqslant 5$ are recognizable among coverings, so we concern ourselves with unitary, symplectic and orthogonal groups. To establish that a finite group G is recognizable among coverings, it suffices to prove the following: if $H = K \rightthreetimes G$, where K is a nontrivial elementary abelian

[10]Supported by the RFBR (Grant 08–01–00322), the Program "Development of the Scientific Potential of Higher School" of the Russian Federal Agency for Education (Grant 2.1.1.419), and by the Federal Target Program "Scientific and Educational Personnel of Innovation Russia" in 2009-2013 (gov. contract no. 02.740.11.0429).

group, then $\omega(H) \neq \omega(G)$ (see, for example, [3, Lemma 9]). If G is a finite simple classical group over field of characteristic p, then this problem can be divided into two subproblems according to whether K is a p-group or not. We deal with the second subproblem.

Theorem. *Let G be one of the groups $PSU_n(q)$, where $n \geqslant 4$, $PSp_{2n}(q)$, where $n \geqslant 2$, $\Omega_{2n+1}(q)$, where $n \geqslant 3$, and $P\Omega^{\pm}_{2n}(q)$, where $n \geqslant 4$. Suppose r is a prime coprime to q, K is an elementary abelian r-group and $H = K \leftthreetimes G$. Then either $\omega(H) \neq \omega(G)$ or one of the following holds:*

(i) *$G = U_5(q)$, q is a Mersenne prime and $r = 2$;*

(ii) *$G = U_5(2)$ and $r = 3$.*

Note that the case when $G = PSU_n(q)$ and r divides q was handled in [2-4], and the theorem together with results of these papers implies

Corollary. *Let $G = PSU_n(q)$, where either $n \geqslant 4$. If $n = 4$, suppose that q is even or prime; if $n = 5$, suppose that $q \neq 2$ and q is not a Mersenne prime. Then G is recognizable by spectrum among coverings.*

References

[1] W. Shi, "The characterization of the sporadic simple groups by their element orders", Algebra Colloq., **1**, No. 2, 159–166 (1994).

[2] A.V. Zavarnitsine and V.D. Mazurov, "On element orders in coverings of the simple groups $L_n(q)$ and $U_n(q)$", Proc. Steklov Inst. Math., **257**, Suppl. 1, S145–S154 (2007).

[3] A.V. Zavarnitsine, "Properties of element orders in covers for $L_n(q)$ and $U_n(q)$", Siberian Math. J., **49**, No. 2, 246–256 (2008).

[4] A.V. Zavarnitsine, "Exceptional action of the simple groups $L_4(q)$ in the defining characteristic", Siberian Math. Electronical Reports, **5**, 68–74 (2008) (http://semr.math.nsc.ru/v5/p68-74.pdf).

ON FINITE GROUPS ISOSPECTRAL TO FINITE SIMPLE GROUPS

M. A. Grechkoseeva, A. M. Staroletov, and A. V. Vasil′ev[11] (Novosibirsk, Russia)

The *spectrum* $\omega(G)$ of a finite group G is the set of its element orders. Two groups are said to be *isospectral* if their spectra coincide. A finite group L is *recognizable by spectrum* if every finite group G with $\omega(G) = \omega(L)$ is isomorphic to L. More generally, we say that the *problem of recognition by spectrum* is solved for L, if the number $h(L)$ of pairwise nonisomorphic finite groups isospectral to L is known. Thus, recognizability of a group L is equivalent to the equality $h(L) = 1$. Recent results on the problem of recognition by spectrum can be found in surveys [1,2].

The present paper addresses the problem of recognition by spectrum for finite simple linear and unitary groups, which will be shortly denoted by $L_n^\varepsilon(q)$, where $\varepsilon \in \{+,-\}$, $L_n^+(q) = L_n(q)$ and $L_n^-(q) = U_n(q)$. Within this class, the problem is solved for $L_2^\varepsilon(q)$ and $L_3^\varepsilon(q)$, where q is arbitrary (see details in [1]), and for $L_n(2^m)$ and $U_4(2^m)$, where n, m are arbitrary [3,4]. Here we consider a general case and give restrictions on the composition structure of finite groups isospectral to simple linear and unitary groups. Note that every finite group isospectral to $L_n^\varepsilon(q)$ with $n \geq 4$ has been also known to have a unique nonabelian composition factor.

Theorem 1. *Let $L = L_n^\varepsilon(q)$, where $n \geqslant 4$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, and $(\varepsilon, n, q) \neq (-, 4, 2)$. Then among non-abelian composition factors of finite groups isospectral to L, there are no alternating groups.*

Theorem 2. *Let $L = L_n^\varepsilon(q)$, where $n \geqslant 4$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, and $(\varepsilon, n, q) \neq (-, 5, 2)$. Then among non-abelian composition factors of finite groups isospectral to L, there are no sporadic groups nor the Tits group ${}^2F_4(2)'$.*

Theorem 3. *Let $L = L_n^\varepsilon(q)$, where $n \geqslant 4$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, $(\varepsilon, n, q) \neq (-, 4, 2)$, and q is a power of a prime p. Then among non-abelian composition factors of finite groups isospectral to L, there are no groups of Lie type over field of characteristic p distinct from L.*

---

[11]Supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 08–01–00322), the Program "Development of the Scientific Potential of Higher School" of the Russian Federal Agency for Education (Grant 2.1.1.419), and by the Federal Target Program "Scientific and Educational Personnel of Innovation Russia" in 2009-2013 (gov. contract no. 02.740.11.0429).

The group $U_4(2)$ is isospectral to a finite group having a composition factor isomorphic to $A_5 \simeq L_2(4)$, and the group $U_5(2)$ is isospectral to a finite group having a composition factor isomorphic to the Mathieu group M_{11}. Thus, the restrictions in the hypotheses of Theorems 1–3 are relevant.

For the rest of simple classical groups, namely symplectic and orthogonal groups, results analogous to Theorems 1–3 were established in [5].

References

[1] *Mazurov V. D.* "Groups with prescribed spectrum", Izv. Ural. Gos. Univ. Mat. Mekh. (7), **36**, 119–138 (2005).

[2] *Grechkoseeva M. A., Shi W. J., and Vasilev A. V.* "Recognition by spectrum of finite simple groups of Lie type", Front. Math. China, **3**, No. 2. 275–285 (2008).

[3] *Vasilyev A. V. and Grechkoseeva M. A.*,"Recognition by spectrum for finite simple linear groups of small dimensions over fields of characteristic 2", Algebra and Logic, **47**, No. 5, 314-320 (2008).

[4] *Mazurov V. D. and Chen G. Y.*, "Recognizability of finite simple groups $L_4(2^m)$ and $U_4(2^m)$ by spectrum," Algebra and Logic, **47**, No. 1, 83-–93 (2008).

[5] *Vasil′ev A. V., Grechkoseeva M. A., and Mazurov V. D.*, "On finite groups isospectral to simple symplectic and orthogonal groups", *Siberian Math. J.*, **50**, No. 6, 965–981 (2009).

DELTA-VECTOR IN HILBERT SPACE

S. S. Gritsutenko (Omsk, Russia)

It is well known that Dirac delta function is not a vector of Hilbert Space. But sometimes it is possible to find a vector in Hilbert space with delta-function properties for other vectors of this space. Let $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ are functions of a real variable $t \in T$. They are vectors of some Hilbert space H. $\{x, y, z\} \subset H$.

We set one limitation for this space: any vector $s(t - \tau) \in H$ for any $\tau \in T$ if $s(t) \in H$.

Any Hilbert space has an inner product.

Definition 1. Convolution in Hilbert space H is the following inner product: $z(t) = (x(\tau), y(t - \tau))$.

Definition 2. Delta-vector of Hilbert space H is a vector $\delta \in H$ that has a following property: $x(t) = (x(\tau), \delta(t - \tau))$, $x(t)$ is any vector of H.

Note: this delta-vector is not the classical Dirac function. This vector has delta-function properties only for other vectors of its Hilbert space but it is not true for functions that do not belong to this space. It is possible to prove following theorem.

Theorem 1. If Hilbert space H has delta-vector δ and the convolution is defined over this space then

$\delta(t) = \sum\limits_i n_i(t)n_i(0)$, $\{n_i(t)\}$ is any orthonormalized basis of H.

Delta-vectors properties.

1. $\|\delta(t)\|^2 = \delta(0)$;
2. $\delta(T) = \delta(-T)$;
3. Square delta-vectors is 1: $S = (1, \delta) = 1$.

Now we can prove the Kotelnikov theorem by a modern way.

Theorem 2. If Hilbert space has a full orthonormalized basis $\{\delta(t - nT)\}$ then any vector $x \in H$ can be presented this way:

$$x(t) = \sum_n x(nT)\delta(t - nT).$$

Below it is an example of delta-vector. There is Hilbert space of functions with limited spectrums. It means that spectrums of these functions are equal 0 outside of the interval $[-\Omega, \Omega]$. The inner product of this space is

$$(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt.$$

The delta vector of this space is

$$\delta(t) = \frac{sin\Omega t}{t}.$$

It means the Theorem 2 for this space has this form:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\tfrac{sin\Omega(t-nT)}{\Omega(t-nT)} \ , T = \tfrac{2\pi}{\Omega}.$$

It is the Kotelnikov theorem.

INFINITELY GENERATED PROJECTIVE MODULES OVER SEMILOCAL RINGS

Dolors Herbera (Barcelona, Spain)

Let R be a ring. Let $V(R)$ and $V^*(R_R) = V^*(R)$ be the set of isomorphism classes of finitely generated projective right R-modules and of countably generated projective right R-modules, respectively. Both sets have a structure of commutative monoid induced by the direct sum projective modules. For example, if $D_1, \dots, D_k$ denote division rings then for the semisimple artinian ring $R = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$, $V(R) \cong \mathbb{N}^k$ and $V^*(R) \cong (\mathbb{N}^*)^k$, where $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

If R is a semilocal ring such that $R/J(R) \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$, then $V(R)$ can be seen as a submonoid of $\mathbb{N}^k$. The kind of submonoids of $\mathbb{N}^k$ that can be realized as $V(R)$ for a semilocal rings where characterized in [1] as the full affine submonoids with order unit of $\mathbb{N}^k$. An alternative and simplified proof of this result was given by A. Yakovlev in the context of the torsion free groups of finite rank with semilocal endomorphism ring [5], [6].

A recent result of P. Příhoda [4] shows that two arbitrary projective modules are isomorphic if and only if they are isomorphic modulo the Jacobson radical. In the case of semilocal rings, this allows to see $V^*(R)$ as a submonoid of $(\mathbb{N}^*)^k$. In this talk we shall present a characterization of such submonoids when R is a (two-sided) noetherian semilocal ring. The characterization shows that a ring in this class may have a rich supply of projective modules that are not direct sums of finitely generated ones.

For noetherian semilocal rings $V^*(R_R) \cong V^*({}_RR)$, we will also show how to construct examples of rings where this is not true. There are examples of (semilocal) rings such that any projective right module is a direct sum of finitely generated ones but there are nonzero projective left modules with no nonzero finitely generated direct summands.

This talk is a report on joint work with P. Příhoda, and it is based on the papers [2], [3].

References

[1] A. Facchini, D. Herbera, K_0 *of a semilocal ring*, J. Algebra **225** (2000), 47–69.

[2] D. Herbera and P. Příhoda, *Big projective modules over noetherian semilocal rings.* To appear in J. Reine Angew. Math.

[3] D. Herbera and P. Příhoda, *Infinitely generated projective modules over pullbacks of rings.* In preparation.
[4] P. Příhoda, *Projective modules are determined by their radical factors*, J. Pure Applied Algebra **210** (2007), 827–835.
[5] A. V. Yakovlev, *On direct decompositions of p-adic groups*, (Russian) Algebra i Analiz **12** (2000), no. 6, 217–223; English translation: St. Petersburg Math. J. **12** (2001), no. 6, 1043–1047.
[6] A. V. Yakovlev, *On direct decompositions of S-local groups*, (Russian) Algebra i Analiz **13** (2001), no. 4, 229–253; English translation: St. Petersburg Math. J. **13** (2002), no. 4, 685–702.

THE SECOND COHOMOLOGY GROUPS OF SIMPLE MODULES FOR $Sp_4(k)$

S.S. Ibraev (Kyzylorda, Kazakhstan)

The second cohomology groups for simple, simply connected algebraic group $Sp_4(k)$ over an algebraically closed field k of characteristic $p > 3h - 3$ with coefficients in the simple modules are described. Here h is the Coxeter number.

In [1, 2] D.I. Stewart have separately calculated the second cohomology groups of simple modules for simple, simply connected algebraic groups SL_2 and SL_3 over an algebraically closed field of positive characteristic respectively. But the second cohomology groups of simple modules are remain opened for other groups. In this work the second cohomology groups of simple modules for $Sp_4(k)$ are calculated.

Endow the set $M = M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3 \bigcup M_4$ with elements of the simple G-modules, listed in the table 1.

Table 1

M_1
$L(\omega_0(0)) \otimes L(\omega_0(0))^{(r)}$, $L(\omega_0(0)) \otimes L(\omega_1((p-4)\lambda_1))^{(r)} \otimes L(\lambda_1)^{(r+1)}$, $L(\omega_0(0)) \otimes L(\omega_2(0))^{(r)} \otimes L(\lambda_2)^{(r+1)}$;

M_2
$L(\omega_1((p-4)\lambda_1))\otimes L(\omega_0(\lambda_1))^{(1)}$,
$L(\omega_1((p-4)\lambda_1))\otimes L(\omega_1((p-5)\lambda_1))^{(1)}\otimes L(\lambda_1)^{(2)}$,
$L(\omega_1((p-4)\lambda_1))\otimes L(\omega_2(\lambda_1))^{(1)}\otimes L(\lambda_2)^{(2)}$,
$L(\omega_1((p-4)\lambda_1))\otimes L(\lambda_1)^{(1)}\otimes L(\omega_0(0))^{(r+1)}$,
$L(\omega_1((p-4)\lambda_1))\otimes L(\lambda_1)^{(1)}\otimes L(\omega_1((p-4)\lambda_1))^{(r+1)}\otimes L(\lambda_1)^{(r+2)}$,
$L(\omega_1((p-4)\lambda_1))\otimes L(\lambda_1)^{(1)}\otimes L(\omega_2(0))^{(r+1)}\otimes L(\lambda_2)^{(r+2)}$;

M_3
$L(\omega_2(0))\otimes L(\omega_0(\lambda_2))^{(1)}$,
$L(\omega_2(0))\otimes L(\omega_1((p-6)\lambda_1+\lambda_2))^{(1)}\otimes L(\lambda_1)^{(2)}$,
$L(\omega_2(0))\otimes L(\omega_2(\lambda_2))^{(1)}\otimes L(\lambda_2)^{(2)}$,
$L(\omega_2(0))\otimes L(\lambda_2)^{(1)}\otimes L(\omega_0(0))^{(r+1)}$,
$L(\omega_2(0))\otimes L(\lambda_2)^{(1)}\otimes L(\omega_1((p-4)\lambda_1))^{(r+1)}\otimes L(\lambda_1)^{(r+2)}$,
$L(\omega_2(0))\otimes L(\lambda_2)^{(1)}\otimes L(\omega_2(0))^{(r+1)}\otimes L(\lambda_2)^{(r+2)}$.

M_4
$L(2\lambda_1)^{(1)}$, $L(\omega_1(0))$, $L(\omega_1(0))\otimes L(\lambda_2)^{(1)}$,
$L(\omega_0((p-4)\lambda_1))\otimes L(\lambda_1)^{(1)}$, $L(\omega_2((p-4)\lambda_1))\otimes L(\lambda_1)^{(1)}$

Where $\omega_0(0)=(p-3)\lambda_2,\ \omega_1(0)=2\lambda_1+(p-3)\lambda_2,\ ,\ \omega_2(0)=2\lambda_1+(p-2)\lambda_2$, $\omega_0(\lambda_1)=\lambda_1+(p-4)\lambda_2$, $\omega_2(\lambda_1)=3\lambda_1+(p-2)\lambda_2$, $\omega_0(\lambda_2)=(p-4)\lambda_2$, $\omega_2(\lambda_2)=4\lambda_1+(p-3)\lambda_2$, $\omega_0((p-4)\lambda_1)=(p-4)\lambda_1+\lambda_2$, $\omega_1((p-4)\lambda_1)=(p-2)\lambda_1+\lambda_2$, $\omega_2((p-4)\lambda_1)=(p-2)(\lambda_1+\lambda_2)$, $\omega_1((p-5)\lambda_1)=(p-3)\lambda_1+2\lambda_2$, $\omega_1((p-6)\lambda_1+\lambda_2)=(p-2)\lambda_1+2\lambda_2$.

Theorem 0.1. *Let G be the simple and simply connected algebraic group $Sp_4(k)$ over an algebraically closed field k of characteristic $p\geq 3h-3$ and $L(\lambda)^{(d)}$ be any Frobenius twist ($d\geq 0$) of the simple G-module $L(\lambda)$ with highest weight λ. Then*

$$H^2(G,L(\lambda)^{(d)})\cong\begin{cases} k, & \text{if } L(\lambda)\in M \text{ and } r\geq 1;\\ 0, & \text{in other cases.}\end{cases}$$

References

[1] Stewart D.I. *The second cohomology of simple SL_2-modules,* arXiv:0904.0623v2 [math.RT], 2009.

[2] Stewart D.I. *The second cohomology of simple SL_3-modules,* arXiv:0907.4626v1 [math.RT], 2009.

ON COMBINATORICS OF B-ORBITS

Mikhail V. Ignatev (Samara, Russia)

Let B be the Borel subgroup of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, i.e., the group of lower-triangular matrices with non-zero diagonal entries. Let $\mathfrak{n}$ be the space of lower-triangular matrices with zero diagonal entries, and $\mathfrak{n}^*$ its dual space. The group B acts on $\mathfrak{n}$ by

$$g.x = gxg^{-1}, \quad g \in B, x \in \mathfrak{n}.$$

Hence, B acts on $\mathfrak{n}^*$ by

$$(g.f)(x) = f(g^{-1}.x) = f(g^{-1}xg), \quad g \in B, f \in \mathfrak{n}^*, x \in \mathfrak{n}.$$

To each involution σ in the symmetric group S_n one can assign the B-orbit $\Omega = \Omega_\sigma \subset \mathfrak{n}^*$ by the following way. Let $\sigma = (i_1, j_1) \ldots (i_t, j_t)$, $i_l > j_l$, $j_1 < \ldots < j_t$. By definition, Ω is the orbit of the linear form $f = f_\sigma$, where

$$f(e_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{if } i = i_l \text{ and } j = j_l \text{ for some } 1 \leq l \leq t, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Here $e_{i,j}$ are usual matrix units. We say that Ω is *associated* with the involution σ (for the details, see [3]).

Let $\overline{V}$ denote the closure of variety V with respect to Zariski topology. We define a partial order on involutions in S_n as follows: $\sigma < \tau$ if $\overline{\Omega}_\sigma \subset \Omega_\tau$. We give a combinatorial description of this order in terms of certain Young tableaux. In a certain sense, our results are “dual” to the results of A. Melnikov [1], [2].

References

[1] A. Melnikov. Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices. Transformation groups, **v**. 11, no. 2, 2006, pp. 217–247, see also arXiv: `math.RT/0312290v2`.

[2] A. Melnikov. B-orbits on nilpotent order 2 and link patterns, arXiv: `math.RT/0703371v2`.

[3] A.N. Panov. Involutions in S_n and associated coadjoint orbits (in Russian). Zapiski nauchnykh seminarov POMI, **v**. 349, 2007, pp. 150–173, see also arXiv: `math.RT/0801.3022v1`.

KRULL DIMENSION OF THE POWER SERIES RING

Kang Byung Gyun (Pohang, South Korea)

We show that the Krull dimension of the power series ring over a rank-one nondiscrete valuation domain is uncountable.

INCOMPRESSIBLE VARIETIES

Nikita A. Karpenko (Paris, France)

A smooth projective variety X is called *incompressible*, if every rational map $X \to X$ is dominant. We give examples of incompressible varieties, discuss methods of proofs, and indicate some applications. Our main examples are among the generalized Severi-Brauer varieties, main methods are based on Chow motives with finite coefficients, and main applications are to questions of isotropy of involutions.

ON THEOREMS OF KEGEL-WIELANDT TYPE FOR PRODUCTS OF π-DECOMPOSABLE GROUPS

L. Kazarin (Yaroslavl, Russia), A. Martínez-Pastor and M.D. Pérez-Ramos (Valencia, Spain)

A celebrated theorem of Kegel and Wielandt asserts the solubility of a finite group which is the product of two nilpotent subgroups (see [7] and [9]). This theorem has been the motivation for a number of results in the literature on factorized groups. In our case we have considered groups $G = AB$ which are factorized as the product of two π-decomposable subgroups A and B, for a set of primes π. A group X is said to be π-*decomposable* if $X = X_\pi \times X_{\pi'}$ is the direct product of a π-subgroup and a π'-subgroup, where π' stands for the complementary of π in the set of all prime numbers.

Berkovich [2] proved that the Kegel and Wielandt's result remains true if A is 2-decomposable, B is nilpotent of odd order and the orders of A and B are coprime. Rowley [8] extended this result by proving that if B is a metanilpotent group instead of nilpotent, then G is $\pi(O(A))$-separable. Arad and Chillag [1] showed that this conclusion holds without any restriction on the nilpotent length of B. Previously Kazarin [3] had obtained that $O(A) \leq O(G)$ under the same hypotheses.

The present work constitutes a further contribution to the topic. Our initial aim was to find conditions to guaranty the π-separability of products of π-decomposable groups. As a previous step, we analized the existence of Hall π-subgroups in such factorized groups.

We have made consecutive approaches in our study. First we considered the case $G = AB$ when A is a π-decomposable group and $B = B_\pi$ is a π-group (see [4]), being π a set of odd primes. For such products we deduced a π-separability criterion which extends the above mentioned theorems of Kegel-Wielandt type. Moreover, our result provides nonsimplicity criteria for factorized finite groups.

We studied next products $G = AB$ of π-decomposable subgroups A and B, π a set of odd primes, in the special case when A and B have coprime orders ([5]), which has been widely considered in the literature.

Later on, we considered in [5] products $G = AB$ of π-decomposable subgroups A and B under the additional hypothesis that A and B are soluble, being π an arbitrary set of primes. In this case we obtained also π-separability criteria generalizing the Kegel-Wielandt theorem.

Finally, we have recently achieved in [6] the following general result:

Let π be a set of odd primes. Let the group $G = AB$ be the product of two π-decomposable subgroups A and B. Then $A_\pi B_\pi = B_\pi A_\pi$ and this is a Hall π-subgroup of G.

References

[1] Z. Arad and D. Chillag, Finite groups containing a nilpotent Hall subgroup of even order, *Houston J. Math.* **7** (1981), 23-32.

[2] Ta. G. Berkovich, Generalization of the theorems of Carter and Wielandt, *Sov. Math. Dokl.* **7** (1966), 1525-1529.

[3] L. S. Kazarin, Criteria for the nonsimplicity of factorable groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **44** (1980), 288-308.

[4] L. S. Kazarin, A. Martínez-Pastor and M.D. Pérez-Ramos. On the product of a π-group and a π-decomposable group, *J. Algebra* **315** (2007), 640-653.

[5] L. S. Kazarin, A. Martínez-Pastor and M.D. Pérez-Ramos. On the product of two π-decomposable soluble groups, Publ. Mat **53** (2009), 439-456.

[6] L. S. Kazarin, A. Martínez-Pastor and M.D. Pérez-Ramos. On the product of two π-decomposable groups, preprint.

[7] O. H. Kegel, Produkte nilpotenter Gruppen, Arch. Math. 12 (1961), 90-93.

[8] P. J. Rowley, The π-separability of certain factorizable groups, *Math. Z.* **153** (1977), 219-228.

[9] H. Wielandt, Vertauschbarkeit von Untergruppen und Subnormalität, *Math. Z.* **133** (1973), 275-276.

PSEUDOBLOCKS OF ENDOMORPHISM ALGEBRAS

Ahmed A. Khammash (Makkah, Saudi Arabia)

The Brauer-Fitting correspondence (see [5],1.4) relates the direct summands of a module over an algebra to the representation theory of its endomorphism algebra. This correspondence proved to be vital in indicating the properties of the direct summands of in terms of the corresponding simple representation of as shown in [1] and [2]. Relating block theory of to the Brauer-Fitting correspondence was done in [3] where it was shown that Brauer-Fitting correspondence does not fully respect the block distribution of the set of the isomorphism classes of the indecomposable summands of. In [4] the notion of the pseudo-block of endomorphism algebra is introduced and it was shown that the linkage relation defined by pseudoblocks is fully compatible with the blocks of the endomorphism algebra. We shall present the progress of this subject and raise some questions in this direction.

References

[1] Ahmed A. Khammash, Functors and Projective Summands Of Permutation Modules, J. Algebra 163(3) (1994), 729-738.

[2] Ahmed A. Khammash, Hecke algebras And The Socle Of Projective Indecomposable Modules, J. Algebra 192, 294-302(1997).

[3] Ahmed A. Khammash, On The Blocks Of Endomorphism Algebras, International Math. Journal Vol. 2 No.6 2002.

[4] Ahmed A. Khammash, The Pseudoblocks of Endomorphism Algebras, International Mathematical Forum, 4, 2009, no.48, 2363 - 2368

[5] P. Landrock, Finite group algebras and their modules , Cambridge University Press ,1984

UNITARY SUBGROUP OF GROUP ALGEBRA

Manju Khan (Gandhinagar, Ahmedabad, India)

Suppose that G has a finite cyclic p-group A of index 2 such that $G = \langle A, b\rangle$ where order of b is 2 and b inverts every element of A. In this talk we will discuss the structure of $\mathcal{U}_*(FG)$ for $char F = p$ and $char F = 2$ where $\mathcal{U}_*(FG)$ is the unitary subgroup of FG with respect to canonical involution $*$.

ON ASSOCIATIVE ALGEBRAS, WHOSE LATTICES OF SUBALGEBRAS DECOMPOSES INTO DIRECT PRODUCTS OF LATTICES

S. S. Korobkov (Ekaterinburg, Russia)

Let A be an associative algebraic algebra over a finite field F. By $L(A)$ denote the lattice of all subalgebras of A. In this abstract we answer the following question:

What a structure of algebra A if the lattice $L(A)$ decomposes into a direct product of lattices?

The following theorems are holds.

Theorem 1. *Let $L(A) = \prod\limits_{i\in I} L_i$ be a direct product of lattices L_i. Then* $|I| = 2$.

Theorem 2. *Suppose the lattice $L(A)$ decompose into a direct product of lattices. Then A contains two subalgebras N and P such that:*
1) $L(A) \cong L(N) \times L(P)$;
2) N is a nilalgebra;
3) P is an algebra without non-zero nilpotent elements.

Theorem 3. *The lattice $L(A)$ decomposes in a direct product of lattices if and only if A is isomorphic to one of the next algebras:*
$A_1 = N \dotplus P$;
$A_2 = (N \dotplus S) \oplus \langle e\rangle$;
$A_3 = A_2 \dotplus P$,

where S is an algebra without non-zero nilpotent elements or $S = \{0\}$, e is the identity element of A_2.

ON ARITHMETIC IN MORDELL-WEIL GROUPS

Piotr Krason (Szczecin, Poland), G. Banaszak (Poznan, Poland)

We investigate linear dependence of points in Mordell-Weil groups of abelian varieties via reduction maps. In particular we try to determine the conditions for detecting linear dependence in Mordell-Weil groups via finite number of reductions.

REPRESENTATIONS OF MULTIVARIABLE CURRENT LIE ALGEBRA

S. Loktev (Moscow, Russia)

We discuss finite-dimensional representations of the Lie algebra $\mathfrak{g} \otimes A$, where $\mathfrak{g}$ is a reductive Lie algebra and A is a commutative unital associative algebra. This object can be treated as the Lie algebra of $\mathfrak{g}$-valued functions on $Spec(A)$.

There is a very simple well-known construction of the irreducible finite-dimensional representations of current Lie algebras, but the category of all finite-dimensional representation is very complicated, even for $A = \mathbb{C}[x]$.

In this talk we concentrate on the universal finite-dimensional highest weight representations (Weyl modules). We relate them to the space of diagonal harmonics and outline what is known for them when A is the polynomial ring in several variables.

FREE RELATIONS FOR MATRIX INVARIANTS

Artem A. Lopatin (Omsk, Russia)

We assume that $\mathcal{F}$ is an infinite field of arbitrary characteristic $\mathrm{char}\,\mathcal{F}$. Consider the polynomial ring

$$R = R_n = \mathcal{F}[x_{ij}(k)\,|\,1 \le i,j \le n,\ 1 \le k \le d],$$

in n^2d variables. The ring R is generated by the entries of *generic matrices* $X_k = (x_{ij}(k))_{1\le i,j\le n}$ $(1 \le k \le d)$.

Consider a group G from the list $GL(n)$, $O(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$, where we assume that $\mathrm{char}\,\mathcal{F} \neq 2$ in case $G = O(n)$ and n is even in case of $\mathrm{Sp}(n)$. Denote coefficients in the characteristic polynomial of an $n \times n$ matrix X by $\sigma_t(X)$, i.e.,

$$\det(X + \lambda E) = \sum_{t=0}^{n} \lambda^{n-t}\sigma_t(X). \tag{1}$$

So, $\sigma_0(X) = 1$, $\sigma_1(X) = \mathrm{Tr}(X)$ and $\sigma_n(X) = \det(X)$.

It is known that the algebra of *matrix G-invariants* $R^G \subset R$ is generated by $\sigma_t(A)$ over $\mathcal{F}$, where $1 \le t \le n$ and A ranges over all primitive monomials in

- $X_1, \ldots, X_d$, if $G = GL(n)$;
- $X_1, \ldots, X_d$, $X_1^T, \ldots, X_d^T$, if $G = O(n)$;
- $X_1, \ldots, X_d$, $X_1^*, \ldots, X_d^*$, if $G = \mathrm{Sp}(n)$.

In characteristic zero case it is enough to take traces instead of σ_t, $1 \le t \le n$, in order to obtain R^G. These results were established in [9], [7] in characteristic zero case and in [2], [10] in the general case.

A relation between generators of R^G is called *free* if it is valid for $n \times n$ generic matrices, where $n > 0$ is arbitrary. In characteristic zero case all free relations are zero (for example, see [7]). We generalize this result to the case of characteristic different from two:

Theorem 1. If $\mathrm{char}\,\mathcal{F} \neq 2$ and G is $O(n)$ or $\mathrm{Sp}(n)$, then the ideal of free relations for R^G is zero.

Note that similar result holds for $R^{GL(n)}$ over a field of arbitrary characteristic (see [3]). As a consequence, we completed description of relations between generators of $R^{O(n)}$ originated in [6]:

Theorem 2. If $\operatorname{char}\mathcal{F} \neq 2$ and $G = O(n)$, then the ideal of relations for R^G is generated by $\sigma_{t,r}$, where $t + 2r > n$.

The function $\sigma_{t,r}$ was defined in [13] and it relates to the *determinant-pfaffian* from [4] in the same was as σ_t relates to the determinant.

The notion of *supermixed* representations of a quiver was introduced in [11] and [12]. It is equivalent to the notion of representations of a *signed* quiver from [8]. *Orthogonal* and *symplectic* representations of *symmetric* quivers from [1] as well as *mixed* representations of quivers are partial cases of supermixed representations. More details can be found in Section 2.1 of [5].

In [13] relations for the algebra of invariants $I(Q, \underline{n}, i)$ of mixed representations of a quiver Q were described modulo free relations. Applying Theorem 1 in the case of $\operatorname{char}\mathcal{F} \neq 2$, we complete the description of relations between generators of $I(Q, \underline{n}, i)$.

References

[1] H. Derksen, J. Weyman, *Generalized quivers associated to reductive groups*, Colloq. Math. **94** (2002), No. 2., 151–173.

[2] S. Donkin, *Invariants of several matrices*, Invent. Math. **110** (1992), 389–401.

[3] S. Donkin, *Invariant functions on matrices*, Invent. Math. **113** (1993), 23–43.

[4] A.A. Lopatin, A.N. Zubkov, *Semi-invariants of mixed representations of quivers*, Transform. Groups **12** (2007), N2, 341–369.

[5] A.A. Lopatin, *Invariants of quivers under the action of classical groups*, J. Algebra **321** (2009), 1079–1106.

[6] A.A. Lopatin, *Relations between $O(n)$-invariants of several matrices*, submitted, arXiv: 0902.4266.

[7] C. Procesi, *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, Adv. Math. **19** (1976), 306–381.

[8] D.A. Shmelkin, *Signed quivers, symmetric quivers, and root systems*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **73** (2006), No. 3, 586–606.

[9] K.S. Sibirskii, *Algebraic invariants of a system of matrices*, Sibirsk. Mat. Zh. **9** (1968), No. 1, 152–164 (Russian).

[10] A.N. Zubkov, *Invariants of an adjoint action of classical groups*, Algebra and Logic **38** (1999), No. 5, 299–318.

[11] A.N. Zubkov, *Mixed representations of quivers and relative problems*, Bielefeld University, SFB **343** (2000), Preprint 00-094.

[12] A.N. Zubkov, *Invariants of mixed representations of quivers I*, J. Algebra Appl. **4** (2005), No. 3, 245–285.

[13] A.N. Zubkov, *Invariants of mixed representations of quivers II: Defining relations and applications*, J. Algebra Appl. **4** (2005), No. 3, 287–312.

ON PERIODIC GROUPS ACTING FREELY ON ABELIAN GROUPS

D. V. Lytkina (Novosibirsk, Russia)

Let G be a group which acts on a non-trivial group V. This action is a *free* action (and G acts *freely* on V) if for every non-trivial $g \in G$ and every non-trivial $v \in V$ elements v^g and v are different.

It is proved in [1] that a group of finite exponent dividing $2^m \cdot 9$ which acts freely on an Abelian group, is finite. We generalize this result as follows.

Theorem 1. *Let G be a $\{2,3\}$-group which does not contain an element of order 3^3. If G can act freely on a non-trivial Abelian grooup then G is locally finite and one of the following holds:*

(1) *G is finite;*

(2) *G is isomorphic to the direct product of a locally cyclic or locally quaternionic 2-group and a cyclic 3-group;*

(3) *G is an extension of the direct product of a 2-group $H \simeq C$ and a cyclic 3-group R by a group of order 2. Moreover there exists an element x of order 4 in G, such that $\langle H, x\rangle \simeq Q$ and $r^x = r^{-1}$ for every $r \in R$.*

Here the locally cyclic 2-group is the group $C = \langle c_i, i = 1, 2, 3, \cdots \mid c_1^2 = 1, c_{i+1}^2 = c_i \text{ for } i > 1\rangle$ and locally quaternionic 2-group is the group $Q = \langle b, C \mid b^2 = c_1, c_i^b = c_i^{-1}, i = 2, 3, \dots\rangle$.

Theorem 1 is a corollary of the following result.

Theorem 2. *Let G be a periodic group whose finite 2-subgroups are cyclic or dihedral groups. If none of non-trivial elements of G of odd order is conjugated with its inverse then all 2-elements of G compose a (of case, normal) 2-subgroup which is either finite or is isomorphic to the locally cyclic or locally dihedral group.*

Here the locally dihedral group is the group

$$D = \langle d, C \mid d^2 = 1, c_i^d = c_i^{-1}, i = 1, 2, \dots\rangle.$$

References

[1] E. Jabara, P. Mayr. Frobenius complements of exponent dividing $2^m \cdot 9$, Forum math., **21**, No. 1 (2009), 217-220.

[2] Д.В.Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов. О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых гоупп. Сиб.матем.ж., **49**, N 2 (2008), 395–400.
[3] А.Х. Журтов. О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса. Сиб.матем.ж., **41**, N 2 (2000), 329–338.

ON GALOIS STABLE FINITE ARITHMETIC GROUPS

Dmitry Malinin (Vlora, Albania)

The starting point and motivation of our research was the study of scalar extensions of positive definite quadratic and Hermitian lattices and also classification of finite flat group schemes over $\mathbf{Z}$ and Abelian varieties over number fields. It is interesting that it is possible to treat the existence and some properties of finite Galois stable arithmetic groups in positive characteristic using similar methods as in the case of number fields, but the properties and classification are completely different.

Let E/F be a Galois extension of finite degree of global fields, i.e. E, F are finite extensions of the field of rationals $\mathbf{Q}$ or a field of rational functions $R(x)$ with a finite field R.

Let us denote by $\mathcal{O}_E$ and $\mathcal{O}_F$ the maximal orders of E and F, and let Γ be the Galois group of E/F. Let $E = F(G)$ be a field obtained via adjoining to F all matrix coefficients of all matrices $g \in G$ for some finite subgroup $G \subset GL_n(E)$.

We are interested in 3 basic conditions for the Γ-operation on G and the integrality of G.

A. G is Γ-stable under the natural Galois operation.

B. $G \subset GL_n(\mathcal{O}_E)$.

C. A primitive t-root of 1 $\zeta_t \notin E$.

We intend to discuss the following questions:

Question 1. Do the conditions A., B. imply $G \subset GL_n(FE_{ab})$, where E_{ab} is the maximal abelian subextension of $E/\mathbf{Q}$?

Question 2. Do the conditions A., B., C. imply $G \subset GL_n(F)$?

Question 3. Classify the possible fields $E = F(G)$.

The case $F = \mathbf{Q}$, the field of rationals, is specially interesting. The following theorem was proven using the classification of finite flat group schemes over $\mathbf{Z}$, the ring of rational integers, annihilated by a prime p obtained by V. A. Abrashkin and J.- M. Fontaine:

Theorem 1. Let $K/\mathbf{Q}$ be a normal extension with Galois group Γ, and let $G \subset GL_n(\mathcal{O}_K)$ be a finite Γ-stable subgroup. Then $G \subset GL_n(\mathcal{O}_{K_{ab}})$ where K_{ab} is the maximal abelian over $\mathbf{Q}$ subfield of K.

Similar results for totally real extensions $K/\mathbf{Q}$ were considered earlier. In this case there are some interesting arithmetic applications to positive definite quadratic lattices and Galois cohomology.

Theorem 2. Let F be a global field of a positive characteristic p, and let E be a splitting field of some irreducible polynomial $f(y) \in F[y]$ whose roots are the conjugates of some element $t \in E$. Then $E = F(G)$ for any positive integer n and an appropriate group $G \subset GL_n(E)$. Moreover, if $t \in E$ is an element of $\mathcal{O}_E$, then $G \subset GL_n(\mathcal{O}_E)$.

ELEMENTS OF SMALL ORDERS IN PERIODIC GROUPS

A. S. Mamontov [12] (Novosibirsk, Russia)

The work is dedicated to the periodical groups with elements of small orders. These are the groups, which may turn out to be locally finite.

Let's use the notion of *spectrum* $\omega(G)$, widely used in finite groups, to represent the set of element orders in periodical group G. There is an interesting question: which $\omega(G)$ may guarantee the local finiteness of the corresponding group G?

Talk will be dedicated to one of the recent results obtained in joint work with V. D. Mazurov:

Theorem. *If G is a group, such that $\omega(G) = \{1, 2, 3, 5, 6, \}$, then G is a soluble locally finite group and one of the following is true:*

[12] Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 10-0-00391, Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1), интеграционного проекта СО РАН №97, Лаврентьевского гранта для коллективов молодых учёных СО РАН, постановление Президиума СО РАН №43 от 04.02.2010, а также стипендии Независимого Московского университета.

(1) *G is an extension of an elementary abelian 5-group by a cyclic group of order 6;*
(2) *G is an extension of a nilpotent 3-group of class 3 by a dihedral group of order 10;*
(3) *G is an extension of a direct product of a nilpotent 3-group of class 3 and an elementary abelian 2-group by a group of order 5.*

Also the talk will contain some later results on groups of period 12. One of the results there may be stated in the following way:

Statement. *Let G be a group of period 12. If G is an extension of 2-group by an element z of order 3 and G acts on a vector space over the field $GF(3)$ in such a way that every element of order 3 acts quadratically, then $[O_2(G), z]$ is nilpotent of class not greater than 2.*

Conditions in the statement are natural due to Hall–Higman theorem.

ESSENTIAL DIMENSION IN ALGEBRA

Alexander Merkurjev (Los Angeles, USA)

Essential dimension of an algebraic object is the smallest number of algebraically independent parameters required to define the object. This notion was introduced by Buhler, Reichstein and Serre. Relations to algebraic geometry, representation theory and embedding problem in Galois theory will be discussed.

ON THE CLASSIFICATION OF LEAVITT PATH ALGEBRAS

Mercedes Siles Molina (Málaga, Spain)

In this talk we will try to do a brief historical tour of Leavitt path algebras and their classification. Some ideals will be shown to have an important role; this is, for example, the case of the socle.

We will speak also about the Loewy series of a Leavitt path algebra and will show that it is possible to obtain graphically the elements of this series.

THE POINCARÉ SERIES OF MULTIPLIER IDEALS OF A SIMPLE COMPLETE IDEAL

Francisco Monserrat (Valencia, Spain)

Multiplier ideals are a recent and important tool in singularity theory and in birational geometry. They have the virtue of giving information on the type of singularity corresponding to an ideal or divisor and of accomplishing several vanishing theorems which makes them very useful. Multiplier ideals are intimately related to jumping numbers, which form a sequence of rational numbers that provides a sequence of singularity invariants. For a simple complete ideal $\wp$ of a local ring at a closed point on a smooth complex algebraic surface, we introduce an algebraic object, named Poincaré series $P_\wp$, that gathers in a unified way the jumping numbers and the dimensions of the vector space quotients given by consecutive multiplier ideals attached to $\wp$. We will show that $P_\wp$ is a "rational function", giving an explicit expression for it.

DIVIDED POWER STRUCTURES AND RINGS OF DIFFERENTIAL OPERATORS

L. Narváez Macarro (Sevilla, Spain)

Let k be a commutative ring, A a commutative k-algebra and D the filtered ring of k-linear differential operators of A. When A is a polynomial ring or a power series ring in the variables $x_1, \ldots, x_n$, it appears that the graded ring $\operatorname{gr} D$ is a free divided powers algebra with generators $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, where σ_i is the symbol of the partial derivative with respect to x_i. So, a natural question is whether the graded ring $\operatorname{gr} D$ has a (canonical) divided powers structure or not for an arbitrary A. In this talk we will explain how $\operatorname{gr} D$ can be always included in the graded algebra of symmetric multiderivations $\mathrm{SDer}_k(A)$, which has a canonical divided powers structure. We will also explain how the equality $\operatorname{gr} D = \mathrm{SDer}_k(A)$ is related with Hasse-Schmidt derivations, integrability and differential smoothness.

ON THE CHARACTER DEGREE OF SOME PRO-p GROUPS

Alejandro P. Nicolás, Jon González-Sánchez (Santander, Espaca)

Let p be a prime and q a power of p. Following Isaacs [1] we say that a finite p-group G is *q-power degree* if all irreducible characters of G have degrees that are powers of q. Let $\mathbb{F}_q$ be the finite field with q elements and R a finite dimensional $\mathbb{F}_q$-algebra. Let $J(R)$ be the Jacobson radical of R. In [1], Isaacs proved that the groups of the form $G = 1 + J(R)$ are q-power degree groups. Moreover, under certain additional conditions, irreducible characters of G are induced from q-power degree subgroups.

The cited result was extended by C. A. M. André and A. P. Nicolás in [2]. Let $\mathcal{O}$ be the ring of integers of an extension of $\mathbb{Q}_p$, the field of p-adic numbers. Suppose that $\mathbb{F}_q$ is the residue field of $\mathcal{O}$. Consider $G = 1 + J(R)$, where R is a $\mathcal{O}$-algebra of finite rank, then G is a q-power degree group [2]. The monomiality was also proved under some restrictions.

The aim of this work is to obtain analogous results for the case of R-powered groups where R is a discrete valuation domain of characteristic 0. An R-group is a nilpotent group G together with a family of group homomorphisms which satisfy certain properties (for a more detailed definition of R-powered group see [3, §10]). The groups considered in [1] and [2] are particular cases of this kind of structures.

Partially supported by the Spanish grants MTM2008-06680-C02-01 (MICINN).

References

[1] Isaacs, I. M. (1995) Characters of Groups Associated with Finite Algebras, *Journal of algebra*, **177**, 708–730.

[2] C. A. M. André, A. P. Nicolás (2008) Supercharacters of the adjoint group of a finite radical group, *Journal of Group Theory*, **11**, 709–746.

[3] R. B. Warfield (1976) Nilpotent groups, *Lecture Notes in Mathematics*, **513**.

DOUBLING RATIONAL NORMAL CURVES

Ignacio Ojeda (Extremadura, Spain)

In this talk, we study double structures supported on rational normal curves. After recalling the general construction of double structures supported on a smooth curve described in [D. Ferrand, *Courbes gauches et fibres de rang 2*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A **281** (1977), 345–347.], we specialize it to double structures on rational normal curves. To every double structure we associate a triple of integers $(2r, g, n)$ where r is the degree of the support, $n \geq r$ is the dimension of the projective space containing the double curve, and g is the arithmetic genus of the double curve. We compute also some numerical invariants of the constructed curves, and we show that the family of double structures with a given triple $(2r, g, n)$ is irreducible. Furthermore, we prove that the general double curve in the families associated to $(2r, r+1, r)$ and $(2r, 1, 2r-1)$ is arithmetically Gorenstein. Finally, we prove that the closure of the locus containing double conics of genus $g \leq -2$ form an irreducible component of the corresponding Hilbert scheme, and that the general double conic is a smooth point of that component. Moreover, we prove that the general double conic in $\mathbb{P}^3$ of arbitrary genus is a smooth point of the corresponding Hilbert scheme.

This talk is based on the joint paper with R. Notari (Politecnico di Milano, Italy) and M.L. Spreafico (Politecnico di Torino, Italy) with the same title published in *Liaison, Schottky Problem and Invariant Theory*, 149–187. Progress in Mathematics, 280. Birkhauser, 2010. ISBN: 978-3-0346-0200-6

PARABOLIC SUBALGEBRAS AND GRADINGS OF COMPLEX LIE SUPERALGEBRAS

A. L. Onishchik (Yaroslavl, Russia)

My talk concerns certain studies in the theory of complex Lie superalgebras that were made recently in Yaroslavl Demidov University. The objects of these studies are the following ones: parabolic subalgebras, $\mathbb{Z}$-gradings, gradings by the root systems of classical simple subalgebras.

In what follows, all the Lie algebras and Lie superalgebras are supposed to be finite-dimensional and defined over the complex number field $\mathbb{C}$.

The parabolic subalgebras of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ constitute an important and well studied class of subalgebras. They are defined usually as subalgebras which contain a maximal solvable subalgebra (Borel subalgebra) of $\mathfrak{g}$. Their description is reduced to the case when $\mathfrak{g}$ is semisimple (or, moreover, simple) and in this case can be easily made in terms of the simple root system (more precisely, conjugacy classes of parabolic subalgebras correspond bijectively to subsets of the Dynkin diagram of $\mathfrak{g}$). The importance of these subalgebras is, in particular, based on the following fact: the corresponding class of homogeneous spaces of complex Lie groups coincides with the class of projective algebraic complex homogeneous manifolds. Parabolic subalgebras of a classical simple linear Lie algebra are precisely stabilizers of the flags formed by vector subspaces of the corresponding type.

The parabolic subalgebras of Lie superalgebras were first defined and studied in the works of Manin, Penkov and Voronov (see [1, 2]), where the ambient Lie superalgebra $\mathfrak{g}$ was supposed to be a classical simple Lie superalgebra in the sense of Kac. A subalgebra of $\mathfrak{g}$ was called parabolic if it contains a Borel subalgebra which was defined in terms of the so-called simple root system of the Lie superalgebra $\mathfrak{g}$. Unfortunately, certain classical simple Lie superalgebras (those of the series P and Q for example) do not posses any simple root systems, and hence this definition does not apply to them (for the series Q another definition was used). In [1, 2] a description of parabolic subalgebras, similar to the classical one, was given.

We proposed another definition of a parabolic subalgebra. It was suggested by the following well known fact: a subalgebra of a semisimple Lie algebra $\mathfrak{g}$ is parabolic if and only if it coincides with the non-negative part of a $\mathbb{Z}$-grading of $\mathfrak{g}$. We call a subalgebra $\mathfrak{p}$ of a Lie superalgebra $\mathfrak{g}$ a *weakly parabolic* one if there exists a $\mathbb{Z}$-grading $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$, such that $\mathfrak{p} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathfrak{g}_n$. Suppose that $\mathfrak{g}$ is reductive (i.e., its even part $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ is a reductive Lie algebra and its adjoint representation in $\mathfrak{g}$ is algebraic; all the classical simple Lie superalgebras are reductive). A subalgebra $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ is called *parabolic* if it is weakly parabolic and contains the even part of the centre of $\mathfrak{g}$ (the second condition is clearly satisfied if $\mathfrak{g}$ is simple). A complete classification of $\mathbb{Z}$-gradings and parabolic subalgebras of the classical simple Lie superalgebras was obtained (an exposition see in [3]).

It is based on a description of maximal algebraic tori in the Lie algebras of even derivations of these Lie superalgebras. It was also proved that parabolic subalgebras of the classical linear Lie superalgebras coincide with the stabilizers of corresponding flags.

Let us now suppose that a Lie superalgebra $\mathfrak{g}$ contains a reductive subsuperalgebra $\mathfrak{h}$, and let $\mathfrak{t}$ be a Cartan subalgebra of $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ and Δ denote the system of roots of $\mathfrak{h}$ with respect to $\mathfrak{t}$. For any $\lambda \in \Delta \cup \{0\}$, the non-zero weight vector subspace V_λ of $\mathfrak{g}$ is defined. We speak that $\mathfrak{g}$ *is graded by the root system* Δ of its reductive subsuperalgebra $\mathfrak{h}$ if $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda\in\Delta\cup\{0\}} V_\lambda$ and $V_0 = \sum_{\pm\lambda\in\Delta}[V_\lambda, V_{-\lambda}]$. In this case, the pair $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ is called a *graded pair*.

The classification of all graded pairs $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ of simple Lie algebras was given in [4], and a correspondence between parabolic subalgebras of $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{h}$ was established. The study of superalgebras graded by the root system of a classical simple Lie subsuperalgebra was initiated in [5], but no classification results similar to those of [4] were obtained. In [6, 7] the general classification problem for graded pairs of classical simple Lie superalgebras was considered. It was solved in the case when the ambient Lie superalgebra $\mathfrak{g}$ belongs to the series A. A correspondence between parabolic subalgebras of $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{h}$ was also studied in this case.

References

[1] Yu. Manin, A. Voronov. Supercellular decompositions of the superspaces of flags. Contempor. Problems in Math. Newest Results. 32 (1988), 27-70 (Russian). English transl. in J. Soviet Math. 51 (1990), no. 1, 2083-2108.

[2] Yu. Manin. Topics in noncommutative geometry. Princeton Univ. Press, Princeton, 1991.

[3] N. Ivanova, A. Onishchik. Parabolic subalgebras and gradings of reductive Lie superalgebras. Contempor. Math. Fundam. Directions. 20 (2006), 5-68 (Russian). English transl. in J. Math. Sci. 152 (2008), no. 1, 1-60.

[4] J. Nervi. Algèbres de Lie simples graduées par un système de racines et sous-algèbres C-admissibles. J. Algebra. 223 (2000), 307-343.

[5] G. Benkart, A. Elduque. Lie superalgebras graded by root systems $C(n)$, $D(m, n)$, $D(2, 1, \alpha)$, $F(4)$ and $G(3)$. Canad. Math. Bull. 45 (2002), no. 4, 509-524.

[6] A. Sudarkin. Gradings of Lie superalgebras of the series $A(m, n)$ by the root systems of their classical simple subalgebras. Mathematics in the Yaroslavl University. YarGU, Yaroslavl, 2006, 429-445 (Russian).

[7] A. Sudarkin. Classification of gradings of simple Lie superalgebras of the series A by the root systems of their classical simple subalgebras. Ouspekhi Mat. Nauk

63 (2008), no 3, 165-166 (Russian). English transl. in Russ. Math. Surveys 63 (2008), no 3, 576-578.

RESTRICTIONS OF MODULAR IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF SYMPLECTIC GROUPS TO SUBSYSTEM a_1-SUBGROUPS

Anna A. Osinovskaya (Minsk, Belarus)

Restrictions of modular irreducible representations of the symplectic algebraic groups to subsystem subgroups of type A_1 are studied. The composition factors of such restrictions are found. This completes the description of restrictions of classical algebraic groups to subsystem A_1-subgroups in [1] and gives an example of a new inductive system of representations of symplectic groups that has no analogues in characteristic 0.

In what follows K is an algebraically closed field of characteristic $p > 0$ and $G = C_n(K)$ with $n > 1$. Let $\omega_1, \dots, \omega_n$ be fundamental weights of G, $\omega = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$ be a dominant p-restricted weight of G, and let $H \subset G$ be a subsystem subgroup of type A_1, i.e., H is generated by the root subgroups of G associated with a certain simple root α and the opposite root $-\alpha$. We call H long (short) if α is long (short), respectively. Denote by V_ω a simple rational G-module with the highest weight ω. Suppose that IrrV is a set of composition factors of G-module V (without their multiplicities) and $V|H$ is a restriction of V to H. We can identify a set of weights of H with the set of all integers and a set of all its dominant weights with the set $\mathbb{N}$ of all nonnegative integers. Hence $\mathrm{Irr(V|H)} \subset \mathbb{N}$. Denote by $M(\omega, H)$ the value of ω on the maximal root of the same length as H. Then

$$M(\omega, H) = \begin{cases} m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} + m_n, & G = C_n(K), H \text{ is long;} \\ m_1 + 2m_2 + \dots + 2m_{n-1} + 2m_n, & G = C_n(K), H \text{ is short.} \end{cases}$$

Theorem 0.2. *Let $p > 0$ and ω be p-restricted.*

(i) *Suppose that H is long.*

(a) *If $m_1 + \dots + m_n + 2 < p < m_{n-1} + 2m_n + 3$, then*

$$\mathrm{Irr(V_\omega|H)} = \{\mathrm{i} \in \mathbb{N} \mid \mathrm{p - m_1 - \dots - m_n - 2 \le i \le M(\omega, H)}\}.$$

(b) *If $n = 2$, $p > 2$, $m_2 + 1 \neq p$, and $1 + m_2 + m_1/2 \geq p$, then*

$$\mathrm{Irr(V_\omega|H)} = \{\mathrm{i} \in \mathbb{N} \mid \mathrm{p - m_2 - 1 \le i \le M(\omega, H)}\}.$$

(d) *If* $p = 2$, $\omega = \omega_n$, *then*

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{V}_\omega|\mathrm{H}) = \{\mathrm{M}(\omega, \mathrm{H})\} = \{1\}.$$

(ii) *In all other cases* $\mathrm{Irr}(\mathrm{V}_\omega|\mathrm{H})$ *coincides with the relevant set in characteristic 0, i.e.*

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{V}_\omega|\mathrm{H}) = \begin{cases} \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq M(\omega, H), i \equiv m_1 (\mathrm{mod}\ 2)\}, & G = C_n(K), H \textit{ is short}; \\ \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq M(\omega, H)\}, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

The above theorem actually describes an inductive system for representations of symplectic groups. The notion of inductive system was introduced by Zalesskii in [2]. Let

$$\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma_2 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \Gamma_n \hookrightarrow \ldots$$

be a sequence of embeddings of algebraic groups Γ_n over K. Let Φ_n be a nonempty finite subset of irreducible Γ_n-modules. We say that the collection $\Phi = \{\Phi_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ is an inductive system of representations if

$$\bigcup_{V \in \Phi_{n+1}} \mathrm{Irr}(\mathrm{V}|\Gamma_\mathrm{n}) = \Phi_\mathrm{n}.$$

for all $n = 1, 2, \ldots$.

Corollary 0.3. Let $\Gamma_n = C_n(K)$ and

$$\Phi_n = \{V_\omega \mid m_1 + \ldots + m_n + 2 < p < m_{n-1} + 2m_n + 3\}.$$

Then $\Phi = \{\Phi_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ is an inductive system.

References

[1] Osinovskaya A.A. Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups // Commun. in Algebra. 2003. Vol. 31, No. 5. P. 2357–2379.

[2] Zalesskii A.E. Group rings of locally finite groups and representation theory // In *Proceedings of the International Conference on Algebra (Novosibirsk, 1989)*. Contemporary Math. 1992. Vol. 131. Part 1. P. 453–472.

HARMONIC ANALISYS ON LOCAL FIELDS AND ADELIC SPACES

D. V. Osipov, A. N. Parshin (Moscow, Russia)

We develop harmonic analysis in some categories C_2^{ar} of filtered abelian groups and infinite-dimensional vector spaces over the fields $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. These categories contain as objects local fields $\mathbb{R}((t))$, $\mathbb{C}((t))$, two-dimensional local fields and adelic spaces arising from algebraic surfaces defined over finite fields and arithmetical surfaces. We develope the theory of the Fourier transform on these objects and obtain two-dimensional Poisson formulas. We prove also some structure theorems for quotients of the adelic groups of algebraic and arithmetical surfaces which generalize the well-known results from the theory of one-dimensional arithmetic schemes. The talk is based on works [1], [2].

References

[1] Osipov D.V., Parshin A.N., *Harmonic analisys on local fields and adelic spaces I*, Izvestiya RAN: Ser. Mat., 2008, 72:5, pp. 77-140; english translation in Izvestiya: Mathematics, 2008, 72:5, pp. 915-976, e-print arXiv:0707.1766.

[2] Osipov D.V., Parshin A.N., *Harmonic analisys on local fields and adelic spaces II*, e-print arXiv:arXiv:0912.1577.

SPHERICAL FUNCTIONS AND REGULAR COADJOINT ORBITS

A. N. Panov (Samara, Russia)

Let $\mathfrak{g}$ be a simple split Lie algebra over a field K of zero characteristic, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ its decomposition into the direct sum of lower (resp.upper) maximal nilpotent subalgebra $\mathfrak{n}_-$ (resp. $\mathfrak{n}_+$) and Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$. Let G be a linear group with the Lie algebra $\mathfrak{g}$ and N, B, H its subgroups with Lie algebras $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$. By the Killing form we identify the conjugate space $\mathfrak{n}^*$ (resp. $\mathfrak{b}^*$) with $\mathfrak{n}_-$ (resp. $\mathfrak{b}_-$).

The talk will be devoted to the problem of description of the field and the ring of invariants of the coadjoint representation of the Lie algebra $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_+$ (resp. $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$). In the papers [1], [2] this problem was solved for the case $\mathfrak{g} = A_n$ and in [3] for the cases $\mathfrak{g} = B_n, C_n, D_n$ and

$\mathfrak{g} = G_2$. The general case was treated in [4]. Let us formulate the main statements of this paper.

To any regular function $F(g)$ on the group G we correspond the polynomial
$F(\exp tx) = t^k(F_0(x)+tF_1(x)+t^2F_2(x)+\ldots)$ in t with coefficients $F_i(x)$ of the ring of regular functions on $\mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}^*$, $\quad F_0(x) \neq 0$.

For any irreducible, finite dimensional representation T we denote by $S_T(g)$ the spherical function $S_T(g) = l_0(T_g v_0)$, where v_0 (resp. l_0) is the highest vector of representation T (resp. of conjugate representation).

Theorem 1. The lowest coefficient $(S_T)_0(x)$ for an arbitrary spherical function $S_T(g)$ is an invariant of the coadjoint representation of the group N.

Let $S_1(g), \ldots, S_n(g)$, $\quad n = \mathrm{rank}\mathfrak{g}$, be the list of spherical functions for the fundamental representations of the group G. Denote by $P_1, \ldots, P_n$ lowest coefficients of decompositions $S_i(\exp tx)$, $\; x \in \mathfrak{n}_-$.

Let ξ_1 be the greatest positive root for $\mathfrak{g}$. In extended Dynkin diagram the root $-\xi_1$ linked with one or two simple roots (the last only for A_n). Deleting these roots in the system of positive roots Π, we obtain the system Π_1, that is irreducible for all series, apart from B_n and D_n. Choose the greatest positive root ξ_2 for Π_1, if the system Π_1 is irreducible, and a pair of maximal positive root $\xi_2 > \xi_3$ (resp. a triple $\xi_2 > \xi_3 > \xi_4$ for D_4), if Π_1 is reducible. Continuing the process further we have got the system of positive roots $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m\}$, where $m \leqslant n = \mathrm{rank} = \mathfrak{g}$.

Proposition 2. Let w_0 be the element of the Weyl group of the greatest length. We claim that 1) for any fundamental weght ϖ_i there exists the system of integers $\mathbb{K}_i = \{k_{ij}\}$, such that $(1 - w_0)\varpi_i = k_{i1}\xi_1 + \ldots + k_{im}\xi_m$; 2) the greatest common divider $\mathrm{GCD}(\mathbb{K}_i)$ equals to 1 or 2; 3) each polynomial P_i is irreducible, if $\mathrm{GCD}(\mathbb{K}_i) = 1$, and is a square of irreducible polynomial, if $\mathrm{GCD}(\mathbb{K}_i) = 2$. In the first case, we denote $Q_i = P_i$; in the second case $Q_i = \sqrt{P_i}$.

Theorem 3. The ring of invariants of the coadjoint representation of the group N is a polynomial ring in $Q_1, \ldots, Q_m$.

Theorem 4. 1) The ring of invariants of the coadjoint representation of the group B consists of constants. 2) If $\mathfrak{g}$ is a simple Lie algebra such that $w_0 = -\mathrm{id}$, then the field of invariants of the coadjoint representation of the group B consists of constants.

It remains to treat the case $w_0 = -\varphi$, where φ is some nontrivial involutive automorphism of system of simple roots. Automorphism φ

acts by permutations on the set of fundamental weights $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$. Choose the subset $\mathfrak{A}$ in the set $\{1, \ldots, n\}$, obeying the following two conditions: i) $\varphi(i) \neq i$ for any $i \in \mathfrak{A}$; ii) if $\varphi(i) \neq i$, then either $i \in \mathfrak{A}$, or $\varphi(i) \in \mathfrak{A}$.

To any regular function $F(g)$ on the group G we correspond the polynomial
$F(\exp t\tilde{x}) = t^k(F_0(\tilde{x}) + tF_1(\tilde{x}) + t^2F_2(\tilde{x}) + \ldots)$ in t with coefficients $F_i(\tilde{x})$ of the ring of regular functions on $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{b}^*$, $F_0(\tilde{x}) \neq 0$. For each spherical function S_i, $i \in \mathfrak{A}$, we denote

$$J_i(\tilde{x}) = \frac{S_{i1}(\tilde{x})}{S_{i0}(\tilde{x})}.$$

Theorem 5. If $\mathfrak{g}$ is a simple Lie algebra such that $w_0 = -\varphi$, where $\varphi \neq \mathrm{id}$, then the field of invariants of the coadjoint representation of the group B is a field of rational functions in $\{J_i(\tilde{x}) : i \in \mathfrak{A}\}$.
In the talk we'll concern the question of classification of regular coadjoint orbits for N and B and integrability of Toda flows on regular orbits.

References

[1] A.A.Arhangel'skii, Completely integrable hamiltonian systems on group of triangular matrices, Sbornik:Mathematics vol.108, no.1, 1979, 134-142;

[2] P.Deift, L.C.Li, T.Nanda, C.Tomei, The Toda flow on a generic orbit is integrable, Comm.Pure Appl. Math., V.39, 1986, №2, 183-232 (Bull. Am. Math. Soc., V.11, №2, 1984, P.367-368);

[3] V.V.Trofimov, Euler equation on Borel subalgebras of semisimple Lie algebras, Izvestiya:Mathemetics, Mathematical series, vol.43, no.3, 1979, 715-733;

[4] A.N.Panov, Reduction of spherical functions, arXiv:0911.2369

MOTIVES OF SOME PROJECTIVE HOMOGENEOUS VARIETIES OF OUTER TYPE

Victor Petrov (Bonn, Germany)

Despite the current progress in the study of motives of projective homogeneous varieties, there were little known about varieties of outer type until recently. Daniel Krashen showed that varieties of outer type ${}^2A_n$ are closely related to those of inner type D_{n+1}. We study a similar relationship for varieties of types ${}^2E_6$ (compared to E_7) and ${}^3D_4$ (compared to F_4). Using a recent result of Nikita Karpenko, we are able to compute the motives of all generically quasi-split homogeneous varieties.

WEAKLY REGULAR AND SELF-INJECTIVE LEAVITT PATH ALGEBRAS

Gonzalo Aranda Pino (Malaga, Spain)

In this talk we will characterize the Leavitt path algebras over arbitrary graphs which are weakly regular rings as well as those which are self-injective. Concretely we will show the following: Let E be an arbitrary graph and K a field.

- The Leavitt path algebra $L_K(E)$ is left (right) weakly regular if and only if the graph E satisfies Condition (K), and
- $L_K(E)$ is left (right) self-injective if and only if the graph E is row-finite, acyclic and every in finite path contains a line point.

Along the way, we extend and prove several results on projective, injective and at modules over Leavitt path algebras and, more generally, over not necessarily unital rings with local units.

STRUCTURABLE SUPERALGEBRAS OF CARTAN

A. P. Pojidaev (Novosibirsk, Russia)

We describe the simple Lie superalgebras arising from the unital structurable superalgebras of characteristic 0 and construct four series of the unital simple structurable superalgebras of Cartan type. We give a classification of simple structurable superalgebras of Cartan type over an algebraically closed field F of characteristic 0. Together with the Faulkner theorem on the classification of classical such superalgebras, it gives a classification of the simple structurable superalgebras over F.

ON THE CLASSIFICATION OF REAL DECOMPOSABLE 7th DEGREE CURVES

G. M. Polotovskiy (Nizhni Novgorod, Russia)

A problem belonging to the topic of the Hilbert 16th problem will be under consideration. Namely, the problem of classification of decomposable algebraic curves of degree 7 in the real projective plane with respect to isotopies preserving cofactors, under following natural conditions of maximality and general position: i) each cofactor is an M-curve; ii) cofactors are in general position; iii) every two cofactors have the maximal number of common real points and these points belong to the same real branch of each cofactor.

The investigation of this problem was started in 1985 and now is practically completed, mainly due to efforts of E. Shustin, S. Orevkov, A. Korchagin, and the author. So, in [1]–[3] was completed classification of arrangements of a plane real quintic curve with respect to a pair of lines.

We shall discuss most recent results which concern most difficult case – classification of arrangements of a quartic and a cubic with 12 common points on odd branch of the cubic and on one oval of the quartic. The answer here is the following: there are exists 239 mutually different arrangements of the given type and exists 4 more arrangements of this type which are realizable by pseudoholomorphic curve of degree 7; one of the last 4 is unrealizable as algebraic 7th-degree curve and question about algebraic realizability of 3 other still open.

The results have been obtained by using the Viro method "patchworking" for constructions and the Orevkov method based on links and braids theory – for restrictions.

References

[1] A.B. Korchagin, G.M. Polotovskii. *On arrangements of a plane real quintic curve with respect to a pair of lines*// Communications in Contemporary Mathematics, vol. 5, no. 1 (2003), 1-24.

[2] S.Yu. Orevkov. *Arrangements of an M-quintic with respect to a conic which maximally intersects its odd branch*//Algebra i Analiz, vol. 19, no. 4 (2007), 174-242 (Russian; English transl.: St. Petersbourg Math. J., 19(2008), 625-674).

[3] A.B. Korchagin, G.M. Polotovskiy. *On arrangements of a plane real quintic curve with respect to a pair of lines. II*// Algebra i Analiz, vol. 21, no. 2 (2009), 92-112 (Russian; English transl.: St. Petersbourg Math. J., 21 (2010), 231-244).

[4] O.Ya. Viro. *G*luing algebraic hypersurfaces and constructions of curves, Tezisy Leningradskoj Mezhdunarodnoj Topologicheskoj Konferencii 1982, Nauka (1983) 149-197 (Russian).

[5] S.Yu. Orevkov. *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*// Topology, v. 38, no. 4 (1999), 779-810.

ESSENTIAL DIMENSION OF ALGEBRAIC TORI

Sergei Yu. Popov (Samara, Russia)

Let k be an arbitrary field. Recall the notion of essential dimension of an algebraic k-group G proposed by A. Merkurjev [1]. Consider the Galois cohomology functor $F_G = H^1(*, G)$ from the category of field extensions K/k to the category of sets. For any object $\alpha \in F_G(K)$ one can calculate the value $\mathrm{ed}_k(\alpha)$ as the minimum of the transcendence degrees taken over all fields $k \subseteq K_0 \subseteq K$ such that α is in the image of the map $F_G(K_0) \to F_G(K)$. Then the essential dimension $\mathrm{ed}_k(G)$ of G is defined as the maximal value of $\mathrm{ed}_k(\alpha)$ where the maximum is taken over all fields K/k and all $\alpha \in F_G(K)$. We apply this notion to algebraic k-tori. Let T be an algebraic k-torus. It is easy to obtain an upper bound for $\mathrm{ed}_k(T)$.

Proposition 1. Let T be an algebraic k-torus, then

$$\mathrm{ed}_k(T) \leqslant \min \dim N,$$

where the minimum is taken over all exact sequences of algebraic k-tori of the form

$$1 \to T \to S \to N \to 1,$$

where S is a quasi-split k-torus.

For the wide class of algebraic tori we obtain a lower bound for their essential dimension.

Proposition 2. If an algebraic k-torus T admits a closed embedding to a torus $S = R_{F/k}(R^1_{L/F}(\mathbb{G}_m))$, here $k \subseteq F \subseteq L$ is a tower of fields, then

$$\mathrm{ed}_k(T) \geqslant \mathrm{ed}_k(S) = [F : k].$$

Using the Propositions 1 and 2 we estimate the essential dimension of maximal tori without affect of connected semisimple algebraic groups.

References

[1] G. Berhuy, G. Favi. Essential Dimension: A Functorial Point of View (after A. Merkurjev), Doc. Math. 8: 279 – 330, 2003

CROSS-SECTIONS, QUOTIENTS, AND REPRESENTATION RINGS OF SEMISIMPLE ALGEBRAIC GROUPS

Vladimir L. Popov (Moscow, Russia)

Let G be a connected semisimple algebraic group over an algebraically closed field k. In 1965 Steinberg proved that if G is simply connected, then in G there exists a closed irreducible cross-section of the set of closures of regular conjugacy classes. We address the problem of existence of such a cross-section in arbitrary G and find its solution. The existence of a cross-section in G implies, at least for $\operatorname{char} k = 0$, that the algebra $k[G]^G$ of class functions on G is generated by $\operatorname{rk} G$ elements. We describe, for arbitrary G, a minimal generating set of $k[G]^G$ and that of the representation ring of G and answer two Grothendieck's questions on constructing generating sets of $k[G]^G$. We also address the problem of existence of a rational cross-section in any G and its relation to the problem of existence of a rational W-equivariant map $T \dashrightarrow G/T$ where T is a maximal torus of G and W the Weyl group. We find complete answers to these problems as well.

SIMPSON'S CORRESPONDENCE AND ARITHMETIC DIFFERENTIAL OPERATORS IN POSITIVE CHARACTERISTIC

Adolfo Quirós (Madrid, Spain)

In 1992, Carlos Simpson [4] established an equivalence between the category of representations of the fundamental group of a compact Kähler manifold X and the category of Higgs bundles on X, subject to certain stability conditions. By the classical Riemann-Hilbert correspondence, a representation of the fundamental group of X can be viewed as a locally free sheaf E with integrable connection, and Simpson's main result, the nonabelian Hodge decomposition, is an isomorphism between the de Rham cohomology for E and the cohomology of the corresponding Higgs complex that generalizes the usual Hodge decomposition.

Several authors have studied analogues of Simpson's correspondence in p-adic or finite characteristic settings. Most notably, Arthur Ogus and Vladimir Vologodsky developed in [3] a theory in characteristic $p > 0$ in which p-curvature plays the role of the Higgs field. It allowed them to prove an analogue of the Hodge decomposition generalizing the results of Deligne and Illusie.

We present recent work [1], done jointly with M. Gros and B. Le Stum (U. de Rennes, France), where we use arithmetic differential operators of level m to extend some of the Ogus-Vologodsky results. We will work on X/S, where S is a scheme of positive characteristic p and X is a smooth scheme over S.

We will start by defining the notion of p^m-curvature, and will use it to show that the results of Masaharu Kaneda [2] on the (semi-linear) Azumaya nature of the ring of differential operators of higher level hold over any base. Then, under the assumption that there exists a strong lifting of Frobenius mod p^2, we lift the divided Frobenius and derive a Frobenius map Φ on $\widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$, the completion of the ring of differential operators of level m. Our key theorem says that we can do better: in fact these data determine a splitting of a central completion of this ring of differential operators. After defining *Higgs modules* (they are $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$, endowed with an $\mathcal{O}_X$-linear map $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ such that $\theta^{(1)} \circ \theta = 0$), it is not hard to derive from the key theorem

Theorem (Simpson correspondence)**.** Let X be a smooth scheme over S of positive characteristic p. If there exists a strong lifting of the $m+1$-st iterate of the relative Frobenius of X modulo p^2, then there is an equivalence of categories between quasi-nilpotent $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules and quasi-nilpotent Higgs modules on X' given by

$$\mathcal{E} \mapsto (F_{X*}\mathcal{E})^{1-\Phi}$$

and

$$\mathcal{F} \mapsto F_X^*\mathcal{F},$$

where $F_X : X \to X'$ is the $m+1$-st iterate of the relative Frobenius and Φ is the Frobenius on $\widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ introduced before.

And we can even give some explicit formulas.

References

[1] M. Gros, B. Le Stum and A. Quirós, A Simpson correspondence in positive characteristic, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **46** (2010), 1–35.

[2] M. Kaneda, Direct images of $\mathcal{D}$-modules in prime characteristic, *RIMS kōkyūroku* **1382** (2004), 154-170.

[3] A. Ogus and V. Vologodsky, Nonabelian Hodge theory in characteristic p, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **106** (2007), 1–138.
[4] C. T. Simpson, Higgs bundles and local systems, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **75** (1982), 5–95.

AN INVARIANT APPROACH TO THE CLASSIFICATION PROBLEM OF FINITE DIMENSIONAL COMPLEX FILIFORM LEIBNIZ ALGEBRAS

I. S. Rakhimov (Serdang, Selangor D.E., Malaysia)

In this paper we suggest an approach classifying a subclass of nilpotent Leibniz algebras called filiform Leibniz algebras. The approach is based on algebraic invariants. The conditions of being isomorphic are given in terms of invariant functions. This method allows to classify all filiform Leibniz algebras (including filiform Lie algebras) in the given finite dimensional case. Moreover, the results can be used for geometric classification (the description of orbit closures) of such algebras.

1. Introduction

Let n be an nonnegative integer. A solution to the classification problem for n-dimensional nonassociative algebras consists in setting up a list of examples which represents each isomorphism class exactly once. Such a list may also be interpreted as a parametrization of the orbit space $GL(V)\diagdown Hom(V\bigotimes V,V)$, where V is an n-dimensional vector space acted upon canonically by the general linear group, with the induced diagonal action on $V\bigotimes V$ and its natural extension to $Hom(V\bigotimes V,V)$. In this way, the classification problem for n-dimensional algebras relates to questions in invariant theory.

2. The vector space of algebras.

Let V be a vector space of dimension n over an algebraically closed field K (char$K$=0). Bilinear maps $V\times V\rightarrow V$ form a vector space $Hom(V\otimes V,V)$ of dimensional n^3, which can be considered together with its natural structure of an affine algebraic variety over K and denoted by $Alg_n(K)\cong K^{n^3}$. An n-dimensional algebra L over K can be considered as an element $\lambda(L)$ of $Alg_n(K)$ via the bilinear mapping $\lambda : L\otimes L\rightarrow L$ defining a binary algebraic operation on L : let $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ be a basis of the algebra L. Then the table of multiplication of L is represented by point (γ_{ij}^k) of this affine space as follows:

$$\lambda(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k.$$

Here γ_{ij}^k are called *structure constants* of L.

3. A group action.

The linear reductive group $GL_n(K)$ acts on $Alg_n(K)$ by $(g{*}\lambda)(x, y) = g(\lambda(g^{-1}(x), g^{-1}(y)))$("transport of structure"). Two algebras λ_1 and λ_2 are isomorphic if and only if they belong to the same orbit under this action.

The talk deals with a class of nonassociative algebras that generalizes the class of Lie algebras. These algebras satisfy certain identities that were suggested by C.Cuvier [3] and J.-L.Loday [4] . When one uses the tensor product instead of external product in the definition of the n-th cochain, in order to prove the differential property, that is defined on cochains, it suffices to replace the anticommutativity and Jacobi identity by the Leibniz identity. This is one of the motivations to appear for this class of algebras. It turned out later that they appeared to be related in a natural way to several topics such as differential geometry, homological algebra, classical algebraic topology, algebraic $K-$theory, loop spaces, noncommutative geometry, quantum physics etc., as a generalization of the corresponding applications of Lie algebras to these topics. Recall that an algebra L over a field F is called a *Leibniz algebra* if it satisfies the following Leibniz identity:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y], \tag{2}$$

where $[\cdot, \cdot]$ denotes the multiplication in L.

A skew-symmetric Leibniz algebra is a Lie algebra. In this case (2) is just the Jacobi identity.

Let $LB_n(K)$ be a subvariety of $Alg_n(K)$ consisting of all n-dimensional Leibniz algebras over K. It is stable under the above mentioned action of $GL_n(K)$. As a subset of $Alg_n(K)$ the set $LB_n(K)$ is specified by the system of equations with respect to structure constants

γ_{ij}^k:

$$\sum_{l=1}^{n} (\gamma_{jk}^l \gamma_{il}^m - \gamma_{ij}^l \gamma_{lk}^m + \gamma_{ik}^l \gamma_{lj}^m) = 0, \quad \text{where} \quad i,j,k = 1,2,...,n.$$

The lower central series of a Leibniz algebra L is defined as:

$$L^1 = L, \ L^{k+1} = [L^k, L], \ k \geq 1.$$

A Leibniz algebra L is said to be filiform if $dimL^i(L) = n - i$, where $n = dimL$ and $2 \leq i \leq n$.

Let Lb_n denote the variety of filiform Leibniz algebra structures on n-dimensional vector space V. Algebras considered are supposed to be over the field of complex numbers $\mathbb{C}$.

4. Strategy

Our strategy to classify Lb_n is as follows:

(1) We break up the class Lb_n into three subclasses. They are denoted by FLb_n, SLb_n and TLb_n, respectively. Two of the classes come out from naturally graded non Lie filiform Leibniz algebras and the third one comes out from naturally graded filiform Lie algebras. Note that filiform Lie algebras are in TLb_n.

(2) We choose bases called adapted and write each of FLb_n, SLb_n and TLb_n in terms of their structure constants.

(3) Consider respective subgroup G_{ad} of $GL_n(V)$ operating on FLb_n, SLb_n and TLb_n. This subgroup is called adapted transformations group. Hence the classification problem reduces to the problem of classifying the orbits of G_{ad} acting on Lb_n.

(4) Define elementary base change. We show that only few types of elementary transformations act on Lb_n. Therefore, it suffices to consider the only specified base changes.

5. Results

(1) The general isomorphism criterion for each FLb_n, SLb_n and TLb_n is given [1], [2] and [5] ([13]).

(2) We classify FLb_n, SLb_n and TLb_n for $n \leq 9$. [6], [7], [8].

(3) The isomorphism classes with respective invariants (orbit functions) are provided.

---

[13] A combined version of [1], [2] and [5] will appear in *Communications in Algebra.*

(4) We refine the existing lists of complex filiform Lie algebras.

6. Acknowledgements

The research was supported by FR5523445 UPM (Malaysia).

References

[1] U. D. Bekbaev and I. S. Rakhimov, *On classification of finite dimensional complex filiform Leibniz algebras (part 1)*, (2006), http://front.math.ucdavis.edu/, arXiv:math. RA/01612805.

[2] U. D. Bekbaev and I. S. Rakhimov, *On classification of finite dimensional complex filiform Leibniz algebras (part 2)*, (2007), http://front.math.ucdavis.edu/, arXiv:0704.3885v1 [math.RA] .

[3] Cuvier, C. (1994). Algébres de Leibniz: définitions, propriétés, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^a série, 27:1–45.

[4] J.-L.Loday, Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. *L'Ens. Math.*, vol. 39, 1993, p. 269 - 293.

[5] B. A. Omirov and I. S. Rakhimov, On Lie-like complex filiform Leibniz algebras, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **79**(2009), 391-404.

[6] I. S. Rakimov, S. K. Said Husain, On isomorphism classes and invariants of low-dimensional Complex filiform Leibniz algebras (Part 1), http://front.math.ucdavis.edu/, arXiv:0710.0121 v1.[math RA] 1 Oct 2007 (appears in *Linear and Multilinear Algebra*)

[7] I. S. Rakimov, S. K. Said Husain. On isomorphism classes and invariants of low-dimensional complex filiform Leibniz algebras (Part 2).http://front.math.ucdavis.edu/, arXiv:0806.1803 v1.[math RA] 11 Jun 2008 (appears in *Linear and Multilinear Algebra*).

[8] I. S. Rakhimov, Munther A. Hassan, On one dimensional Leibniz central extensions of a naturally graded filiform Lie algebra. (to appear)

ALGEBRAS WITH INVOLUTIONS AFTER REGULAR SCALAR EXTENSIONS

U. Rehmann (Bielefeld, Germany), S. V. Tikhonov,
V. I. Yanchevskiĭ(Minsk, Belarus)

The aim of the talk is to present the following

Theorem. *Let A be a central simple algebra over a field K with an involution τ of the second kind. Assume that p^2 divides ind(A) for some prime number p. Then there exists a regular field extension E/K such that $A \otimes_K E$ is an algebra of the index p^2 Brauer equivalent to a bicyclic algebra of degree p^2 and has an involution of the second kind extending τ.*

The proof of the theorem is based on the ideas developed in [1]. In particular, this theorem allows to reduce the Suslin's conjecture about special unitary groups to algebras of a special type.

References

[1] Rehmann U., Tikhonov S.V., Yanchevskii V.I. Symbols and cyclicity of algebras after a scalar extension. Journal of Mathematical Sciences. **164** (2010), n° 1, 131-142.

ON A RELATION BETWEEN THE SYLOW AND BAER-SUZUKI THEOREMS

D. O. Revin (Novosibirsk, Russia)

In this communication, we always assume that p denotes a prime and π denotes a set of primes. For a finite group G, we denote by $\mathcal{O}_\pi(G)$ the π-radical of G, i. e. the largest normal π-subgroup of G. We also write p instead of $\{p\}$.

The following two famous theorems hold [1, 2, 3].

Theorem (L. Sylow) *Let G be a finite group and let p be a prime. Then*

($\mathscr{E}$) G has a p-subgroup of index not divisible by p (the so-called p-Sylow subgroup);
($\mathscr{C}$) every two p-Sylow subgroups of G are conjugate;
($\mathscr{D}$) every p-subgroup is included in a p-Sylow subgroup.

Theorem (R. Baer, M. Suzuki) *Let G be a finite group and let p be a prime. Assume x is an element of G such that $\langle x, x^g \rangle$ is a p-group for every $g \in G$. Then $x \in \mathcal{O}_p(G)$.*

It is well known that one cannot replace p by a set of primes π in the Sylow Theorem. Following P. Hall [4], for a finite group G, we write

$G \in \mathscr{E}_\pi$, if G has a π-subgroup of index which is divisible by no number in π (the so-called π-Hall subgroup);

$G \in \mathscr{C}_\pi$, if $G \in \mathscr{E}_\pi$ and every two π-Hall subgroups of G are conjugate;

$G \in \mathscr{D}_\pi$, if $G \in \mathscr{C}_\pi$ and every π-subroup is included in a π-Hall subgroup.

Following H. Wielandt [5], we say that *the π-Sylow theorem holds for a finite group G* if $G \in \mathscr{D}_\pi$.

In the Baer-Suzuki Theorem, one cannot replace p by a set of primes π as well as in the Sylow Theorem. Consider the following example.

Let $p > 3$ be a prime and let $G = S_p$ be the symmetric group of degree p. Assume π consists of the primes r such that $r < p$. Let x be a transposition in G. Then, for every $m < p - 1$, the subgroup generated by m transpositions is a π-group. In particular, $\langle x, x^g \rangle$ is a π-group for every $g \in G$. On the other hand, $\mathcal{O}_\pi(G) = 1$ and $x \notin \mathcal{O}_\pi(G)$.

By analogy with the Sylow Theorem, we say that *the π-Baer-Suzuki theorem holds for a finite group G* and write $G \in \mathscr{BS}_\pi$ if $D \subseteq \mathcal{O}_\pi(G)$ for every conjugacy class D of G such that every two elements of D generate a π-subgroup.

The Sylow Theorem is used in some proofs of the Baer-Suzuki Theorem (cf. [2, 6] for instance). There is a more closed causal relation between these theorems, since the following statement is proved.

Theorem 6.1. *$\mathscr{D}_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi$ for every set π of primes.*

In other words, if the π-Sylow theorem holds for a finite group G then the π-Baer-Suzuki theorem holds for G. This is a generalization of the original Baer-Suzuki Theorem.

In the case $2 \notin \pi$, a stronger statement holds.

Theorem 6.2. *If π is a set of odd primes then the π-Baer-Suzuki theorem holds for every finite group.*

In the proofs of Theorems 6.1 and 6.2, the Classification of Finite Simple Groups is used. Furthermore Theorem 6.1 depends on the characterization of the class $\mathscr{D}_\pi$ [7], while Theorem 6.2 depends on the characterization of the elements of prime odd orders in the solvable radical of finite groups [9, 8] and the Odd Order Theorem [10].

References

[1] M. L. Sylow, Théorèmes sur les groupes de substitutions, Math. Ann., 5 (1872), no. 4, 584–594.

[2] R. Baer, Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen, Math. Ann., 133 (1957), 256–270.

[3] M. Suzuki, Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed, Ann. of Math. (2), 82 (1968), 191–212

[4] P. Hall, Theorems like Sylow‘s, Proc. London Math. Soc., 6, no. 22 (1956), 286–304.

[5] H. Wielandt, Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen, Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. London: Cambridge Univ. Press, 1960, 268–278.

[6] J. Alperin, R. Lyons, On conjugacy classes of p-elements, J. Algebra, 19 (1971), no. 2, 536–537.

[7] D. O. Revin, The D_π-property in finite simple groups, Algebra and Logic, 47 (2008), no. 3, 210–227.

[8] N. Gordeev, F. Grunewald, B. Kunyavskiĭ, E. Plotkin, A description of Baer-Suzuki type of the solvable radical of a finite group, J. Pure Appl. Algebra, 213 (2009), N2, 250–258.

[9] P. Flavell, S. Guest, R. Guralnick, Characterizations of the solvable radical, Proc. Amer. Math. Soc., 138 (2010), no. 4, 1161–1170.

[10] W. Feit, J. G. Thompson, Solvability of groups of odd order, Pacif. J. Math., 13 (1963) no. 3, 775–1029.

The work is supported by RFBR, grants 08-01-00322 and 10-01-00391, and by ADTP “Development of the Scientific Potential of Higher School” of the Russian Federal Agency for Education, grant 2.1.1.419.

ANALOG OF THE LEVITZKI THEOREM FOR INFINITELY GENERATED ASSOCIATIVE ALGEBRAS

L. Samoilov (Ulyanovsk, Russia)

It follows from the Levitzki theorem concerning the affirmative solution of the Kurosh-Levitzki problem for the PI-algebras that, if PI-algebra A is generated by a finite set $a_1, \ldots, a_k$ and every word in the generators in the set $\{a_i\}$ is nilpotent of degree not exceeding m, then the algebra A is a nilalgebra of bounded index N. The number N depends on the degree of the identity, on m and on k.

One cannot omit the condition of finite generation in the above assertion over fields of characteristic zero, which is proved by the following simple example.

Example. Let F be a field of characteristic zero. Consider the free associative and commutative algebra $F[x_1, \dots, x_n, \dots]$ over F (without identity element). Let $A = F[x_1, x_2, \dots]/I$, where the ideal I is generated by all relation $x_i^2 = 0$, $i = 1, 2, \dots$. Then every word in the algebra A in the generators $a_i = x_i + I$ is nilpotent of degree 2. But the algebra A is not a nilalgebra of bounded index.

Note that, if the field F in the above example is of characteristic $p > 0$, then A is a nilalgebra of index p. We prove Theorem which shows that, over a field of positive characteristic, the condition of finite generation in the classical formulation of the Kurosh-Levitzki problem is excessive in the general case.

Theorem. *Let A be an associative algebra over a field of characteristic $p > 0$. Assume that A satisfies the identity $f = 0$. In this case, if A is generated by a set $\{a_i, i \in I\}$ and every word in the elements a_i is nilpotent of degree not exceeding m, that A is a nilalgebra of bounded index N. Here N depends of the characteristic p, on the identity f, and on the number m (and does not depend on the cardinality of the set I).*

Theorem is proved on the basis of an affirmative solution of the Kemer problem on the nilindex of the radical of a relatively free associative algebra (this solution was obtained by the author in [1]): *the radical of a relatively free associative algebra of countable rank over an infinite field of positive characteristic is a nilideal of bounded index.*

References

[1] L.M. Samoilov, "Radical of a relatively free associative algebra over fields of positive characteristic", *Sbornik: Mathematics*, **199**:5 (2008), 11-56.

ON CHARACTERIZATION OF THE FITTING CLASS OF ALL FINITE π-GROUPS

N. V. Savelyeva, N. T. Vorob'ev (Vitebsk, Belarus)

All groups considered are finite. We use standard notations and definitions taken from [1].

A class of groups $\mathfrak{F}$ is called a Fitting class if it is closed under taking of normal subgroups and normal $\mathfrak{F}$-subgroups products. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is called maximal (by inclusion) in a Fitting class $\mathfrak{X}$ (it is denoted by $\mathfrak{F} < \cdot\mathfrak{X}$), if $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}$ and the condition $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$, where $\mathfrak{M}$ is a Fitting class, always implies $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$.

In the class $\mathfrak{S}$ of all solvable groups the problem of description of necessary and sufficient condition of maximality of a Fitting class $\mathfrak{F}$ in a Fitting class $\mathfrak{H}$ was formulated by R.A. Bryce and J. Cossey in 1974 [1, p. 170]. Later K. Doerk and T. Hawkes remarked it as one of the most difficult problem in the theory of Fitting classes [2, p. 735].

This problem was solved for the Fitting class $\mathfrak{S}$ of all solvable groups [2] and for the Fitting class $\mathfrak{E}$ of all groups [3].

Let π be a nonempty set of prime numbers and let $\mathfrak{E}_\pi$ denote the Fitting class of all π-groups.

A criterion of maximality of a Fitting class $\mathfrak{F}$ in the Fitting class $\mathfrak{E}_\pi$ is established by the following

Theorem. *Let π be a nonempty set of primes and $\mathfrak{F}$ be a Fitting class such that $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}_\pi$. Then $\mathfrak{F}$ is maximal in $\mathfrak{E}_\pi$ if and only if $|G : G_\mathfrak{F}| \in \{1, p\}$ for all $G \in \mathfrak{E}_\pi$ and for some prime $p \in \pi$.*

Note, if π is the set of all prime numbers, the theorem implies the result of H. Laue [3].

References

[1] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. — Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

[2] R. A. Bryce, J. Cossey. Maximal Fitting classes of finite soluble groups // Bull. Austral. Math. Soc. — 1974. — Vol. 10. — P. 169–175.

[3] H. Laue. Über nichtaflösbare normale Fittingklassen // J. Algebra. — 1977. — 45. — P. 274–283.

PROFINITE GROUPS AND VERBAL SUBGROUPS

Daniel Segal (Oxford, UK)

I will explain how the study of verbal width in finite groups leads to the solution of an old problem about profinite groups: in a finitely generated profinite group, the open subgroups are just the subgroups of finite index. The related general question of which verbal subgroups are necessarily open, or closed, will also be discussed.

AN EXPLICIT DUALITY IN THE KOSZUL COMPLEX ON AN ISOLATED 0-DIMENSIONAL COMPONENT OF THE MANIFOLD FOR NON-HOMOGENEOUS POLYNOMIALS

Timur R. Seifullin (Kiev, Ukraine)

Let $\mathbf{R}$ be a commutative ring with a unity. We will consider $\otimes$ and Hom only over $\mathbf{R}$. Let $x{=}(x_1,\ldots,x_n)$ be variables, denote $\mathbf{A}{=}\mathbf{R}[x]$, $\mathbf{A}_*{=}\operatorname{Hom}(\mathbf{A};\mathbf{R})$. Let $f{=}(f_1,\ldots,f_s)$ be polynomials in $\mathbf{A}$. Denote by $(f)_{\mathbf{A}}$ the ideal of polynomials f in $\mathbf{A}$. Denote by $\mathbf{C}$ the Koszul complex of polynomials f, denote $\mathbf{C}_*{=}\operatorname{Hom}(\mathbf{C};\mathbf{R})$ the dual Koszul complex of polynomials f. $\mathbf{C}$ is a commutative differential graded algebra over $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}_*$ is a module over $\mathbf{C}$. Denote by $1_{\mathbf{C}}$ the unity of $\mathbf{C}$, denote by $\mathbf{1}_{\mathbf{C}}$ the identity mapping on $\mathbf{C}$. There is the natural injection $\mathbf{A}\to\mathbf{C}$; for $h{\in}\mathbf{A}$ denote by $h_{\mathbf{C}}$ the image of h under this mapping. Denote $\mathbf{Z}{=}\partial^{-1}\left[\{0_{\mathbf{C}}\}\right]$, $\mathbf{B}{=}\partial\left[\mathbf{C}\right]$, $\mathbf{H}{=}\mathbf{Z}/\mathbf{B}$; $\mathbf{Z}_*{=}\partial^{-1}\left[\{0_{\mathbf{C}_*}\}\right]$, $\mathbf{B}_*{=}\partial\left[\mathbf{C}_*\right]$, $\mathbf{H}_*{=}\mathbf{Z}_*/\mathbf{B}_*$.

Gradings in complexes we call order. In any considering complex C holds $\partial\left[C_r\right]\subseteq C_{r-1}$ for all r; denote $C^r{=}C_{-r}$; for $a{\in}C_r$ denote $|a|{=}r$; for $a,b{\in}C$ we will write $a\overset{\partial}{\simeq}b$, if $a{-}b\in\partial\left[C\right]$.

There exists an explicitly constructed element $J{\in}\mathbf{C}{\otimes}\mathbf{C}$ of the order $s{-}n$ such that $\partial\left[J\right]{=}0$, which is homotopy $\mathbf{C}$-linear, (i. e. the mappings

$$\mathbf{C}\ni a\mapsto J{\cdot}(1_{\mathbf{C}}{\otimes}a)\in\mathbf{C}{\otimes}\mathbf{C},\qquad \mathbf{C}\ni a\mapsto J{\cdot}(a{\otimes}1_{\mathbf{C}})\in\mathbf{C}{\otimes}\mathbf{C}$$

are homotopic) and homotopy symmetric (i. e. $J^{\top}\overset{\partial}{\simeq}(-1)^{s-n}{\cdot}J$).

Let $c{\in}\mathbf{C}_*$, denote $J.c=(-1)^{|J|\cdot|c|}{\cdot}(\mathbf{1}_{\mathbf{C}}{\otimes}c).J$, then $J.c{\in}\mathbf{C}$. The mapping

$J\colon \mathbf{C}_*\ni c\mapsto J.c\in\mathbf{C}$ is a complex morphism of the order $s{-}n$, homotopy $\mathbf{C}$-linear and homotopy self-dual (i. e. $J_*\overset{\partial}{\simeq}(-1)^{s-n}{\cdot}J$).

Let $\mathrm{E}\in\mathbf{Z}_*$, then the mapping

$E\colon \mathbf{C} \ni a \mapsto \mathrm{E}\cdot a \in \mathbf{C}_*$

is a complex morphism of the order $|\mathrm{E}|$, $\mathbf{C}$-linear and self-dual (i. e. $E_* = E$).

Definition 1. The set of all functionals in $\mathbf{A}_*$ that annul the ideal $(f)_\mathbf{A}$ we call generalized manifold of polynomials f (this is Macaulay's inverse system [1]).

If $F{=}(F_1,\dots,F_t)$ are polynomials in $\mathbf{A}$ such that $\mathbf{A}/(F)_\mathbf{A}$ is finitely generated as a module over $\mathbf{R}$ and $(F)_\mathbf{A} \subseteq (F{\cdot}F)_\mathbf{A} + (f)_\mathbf{A}$, then we shall say that polynomials F extract an isolated 0-dimensional component of the manifold of polynomials f, and the set of all functionals in $\mathbf{A}_*$ that annul the ideal $(f,F)_\mathbf{A}$ we call a generalized isolated 0-dimensional component of the manifold of polynomials f extracted by polynomials F.

Theorem 1. *Let $F = (F_1,\dots,F_t)$ be polynomials in $\mathbf{A}$ such that $\mathbf{A}/(f,F)_\mathbf{A}$ is finitely generated as a module over $\mathbf{R}$ and $(F)_\mathbf{A} \subseteq (F{\cdot}F)_\mathbf{A} + (f)_\mathbf{A}$.*

Let $\mathcal{Z}$ be the set of all $a\in\mathbf{Z}$ such that $(F)_\mathbf{A}{\cdot}a \overset{\partial}{\simeq} \{0_\mathbf{C}\}$; let $\mathcal{H} = \mathcal{Z}/\mathbf{B}$.

Let $\mathcal{Z}_*$ be the set of all $c\in\mathbf{Z}_*$ such that $(F)_\mathbf{A}{\cdot}c \overset{\partial}{\simeq} \{0_{\mathbf{C}_*}\}$; let $\mathcal{H}_* = \mathcal{Z}_*/\mathbf{B}_*$.

Then:

1. There exist $\mathrm{E}\in\mathbf{Z}_*^{s-n}$ and $e\in\mathbf{A}$ such that $(F)_\mathbf{A}{\cdot}\mathrm{E} \overset{\partial}{\simeq} \{0_{\mathbf{C}_*}\}$, $J.\mathrm{E} \overset{\partial}{\simeq} e_\mathbf{C}$, $1_\mathbf{A}{-}e \in (f,F)_\mathbf{A}$; for this $e{\cdot}\mathrm{E} \overset{\partial}{\simeq} \mathrm{E}$, $e{\cdot}e{-}e \in (f)_\mathbf{A}$, and $(f,F)_\mathbf{A} = (f,1{-}e)_\mathbf{A}$. Let E be the mapping

$\mathbf{C} \ni a \mapsto \mathrm{E}{\cdot}a \in \mathbf{C}_*.$

2. $\mathrm{E}\in\mathcal{Z}_*$, $e_\mathbf{C}\in\mathcal{Z}$.

3. $a\in\mathcal{Z} \Leftrightarrow a\in\mathbf{Z}$ & $e{\cdot}a \overset{\partial}{\simeq} a$; $l\in\mathcal{Z}_* \Leftrightarrow l\in\mathbf{Z}_*$ & $e{\cdot}l \overset{\partial}{\simeq} l$.

4. $\mathcal{Z} = e{\cdot}\mathbf{Z} + \mathbf{B}$, $\mathcal{H} = e{\cdot}\mathbf{H}$; $\mathcal{Z}_* = e{\cdot}\mathbf{Z}_* + \mathbf{B}_*$, $\mathcal{H}_* = e{\cdot}\mathbf{H}_*$.

5. $J.\mathcal{Z}_* \subseteq \mathcal{Z}$, $J.\mathbf{B}_* \subseteq \mathbf{B}$; $E.\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}_*$, $E.\mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}_*$, moreover, $E.\mathbf{Z} \subseteq \mathcal{Z}_*$.

6. The mappings E and J induce the mappings $\widetilde{J}\colon \mathcal{H}_* \to \mathcal{H}$ and $\widetilde{E}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_*$.

7. The mapping $\widetilde{E}$ is an inverse to the mapping $\widetilde{J}$.

8. $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}_*$ are $\mathbf{H}$-modules.

9. The mappings $\widetilde{J}$ and $\widetilde{E}$ are $\mathbf{H}$-linear.

10. $\mathcal{H}_r \simeq \mathcal{H}_*^{s-n-r}$.

11. $\mathcal{H}_r = \{0\}$, $\mathcal{H}_*^r = \{0\}$ for any $r{>}s{-}n$ and $r{<}0$.

12. $\mathcal{H}_0$ and $\mathcal{H}_*^{s-n}$ are finitely generated as modules over $\mathbf{R}$.

13. If $\mathbf{R}$ *is a Noetherian ring, then* $\mathcal{H}_r$ *and* $\mathcal{H}_*^r$ *are finitely generated as modules over* $\mathbf{R}$ *for any* r.

Remark 1. If $\mathbf{A}/(f)_\mathbf{A}$ is finitely generated as a module over $\mathbf{R}$, then the generalized manifold of polynomials f is a generalized isolated component of the manifold extracted by empty system of polynomials $F{=}(F_1, \ldots, F_t) = ()$, where $t{=}0$. In this case $1_\mathbf{A}{-}e \in (f)_\mathbf{A}$, $\mathcal{Z} = \mathbf{Z}$, $\mathcal{H} = \mathbf{H}$; $\mathcal{Z}_* = \mathbf{Z}_*$, $\mathcal{H}_* = \mathbf{H}_*$.

MATRICES DIVISORS GENERATED BY TRANSFORMABLE MATRICES

V. P. Shchedryk (L'viv, Ukraine)

Let A be $n \times n$ matrix over a commutative elementary divisor domain R [1]. There exists invertible matrices P, Q such that

$$PAQ = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0) = \Psi, \varepsilon_k \neq 0, \varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}, i = 1, \ldots, k-1,$$

where Ψ is canonical diagonal form (c.d.f.) and P, Q transformable matrices of the matrix A. Let us denote by $\mathbf{P}_A$ the set of all transformable matrices P. Let

$$\Phi = diag(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0), \varphi_t \neq 0, \varphi_j | \varphi_{j+1}, j = 1, \ldots, t-1$$

and $\Psi = \Phi\Delta$. Then

$$A = P^{-1}\Psi Q^{-1} = (P^{-1}\Phi)(\Delta Q^{-1}) = (P^{-1}\Phi U^{-1})(U\Delta Q^{-1}),$$

where $U \in GL_n(R)$. It follows that the set $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi GL_n(R)$ is the set of left divisors of the matrix A with c.d.f. Φ. **Question**: when the set $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi GL_n(R)$ is a set of all left divisors of the matrix A with c.d.f. Φ.

Consider the sets of matrices [2]

$$\mathbf{G}_\Phi = \{H \in GL_n(R) | H\Phi = \Phi K \quad \text{for some} \quad K \in GL_n(R)\},$$

$$\mathbf{G}_\Psi = \{H \in GL_n(R) | H\Psi = \Psi K \quad \text{for some} \quad K \in GL_n(R)\},$$

$$\mathbf{L}(\Psi, \Phi) = \{L \in GL_n(R) | L\Psi = \Phi S \quad \text{for some} \quad S \in M_n(R)\}.$$

The sets $\mathbf{G}_\Phi, \mathbf{G}_\Psi$ are to be multiplicative groups.

Theorem 1. *The set* $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi GL_n(R)$ *consists of all left divisors of the matrix* A *with c.d.f.* Φ *if and only if* $\mathbf{L}(\Psi, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi$.

Theorem 2. *Let R be an adequate domain [3] and $det\Psi \neq 0$. The sets $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$ and $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi$ coincide if and only if*

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right) = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\ \varepsilon_j)}$$

for each $i = 2, \ \ldots\ , \ n, j = 1, \ \ldots\ , \ n-1, i > j.$

References

[1] Kaplansky I. *Elementary divisor ring and modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.

[2] Shchedryk V.P. *Factorization of matrices over elementary divisor domain* // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. –No 2. – P. 79–99.

[3] Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 225 – 236.

BRANCHING RULES FOR PROJECTIVE REPRESENTATIONS OF THE SYMMETRIC GROUPS

Vladimir Shchigolev (Moscow, Russia)

Let $\mathbb{F}$ be an algebraically closed field of characteristic $p \neq 2$. We consider the supergroup $Q(n)$, which is the functor from the category $\mathfrak{salg}_\mathbb{F}$ of supercommutative $\mathbb{F}$-algebras to the category of groups that takes $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ to the group $Q(n)(A)$ of invertible $2n \times 2n$ matrices of the form

$$\left(\begin{array}{c|c} S & S' \\ \hline -S' & S \end{array}\right),$$

where S is an $n \times n$ matrix with entries in $A_{\bar{0}}$ and S' is an $n \times n$ matrix with entries in $A_{\bar{1}}$. The functor $Q(n)$ takes an (even) morphism $f : A \to B$ to the morphism $Q(n)(f) : Q(n)(A) \to Q(n)(B)$ acting as f on each element of matrices of $Q(n)(A)$. We assume that $Q(n-1)$ is naturally embedded in $Q(n)$ by embedding each $(n-1) \times (n-1)$-submatrix in the upper left corner of the corresponding $n \times n$-submatrix.

In [1], it was proved that irreducible $Q(n)$-supermodules are parameterized by their highest weights as follows. Consider the set $X_p^+(n)$ of all integer sequences $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ such that $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ and the equality $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ holds only if p divides λ_i. Then for any $\lambda \in X_p^+(n)$, there exists the irreducible $Q(n)$-supermodule $L(\lambda)$ with highest weight λ and any irreducible $Q(n)$-supermodule is isomorphic to one of these supermodules.

The aim of this report is to formulate the following criterion for existence of nonzero $Q(n-1)$-primitive vectors in $L(\lambda)$ having weight $\lambda-\alpha$, where α is a positive root. Let $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ be a weight of $X_p^+(n)$. We define the function $R_{\bar{0}}(\lambda):[1..n]\to\bigcup_{k=1}^n\{-_k-_k,+_k-_k,+_k+_k,\varnothing\}$

$$R_{\bar{0}}(\lambda)_k:=\begin{cases}-_k-_k, & \text{if } \lambda_k\equiv 1 \pmod p;\\ +_k-_k & \text{if } \lambda_k\equiv 0 \pmod p;\\ +_k+_k & \text{if } \lambda_k\equiv -1 \pmod p;\\ \varnothing & \text{otherwise.}\end{cases}$$

For any nonzero residue $\beta\in\mathbb{Z}_p$, we define the function $R_\beta(\lambda):[1..n]\to\bigcup_{k=1}^n\{-_k,+_k,\varnothing\}$ by the following rules:

$$R_\beta(\lambda)_k:=\begin{cases}-_k & \text{if } \overline{\lambda_k(\lambda_k-1)}=\beta;\\ +_k & \text{if } \overline{(\lambda_k+1)\lambda_k}=\beta;\\ \varnothing & \text{otherwise.}\end{cases}$$

In these formulas and in what follows, we mean by $\bar{x}$ the residue of x modulo p.

Any sequence U with entries of the form $-_k$ or $+_l$ can be reduced to some sequence $[U]$ by successively erasing as many subsequences $-_k+_l$ as possible. The resulting sequence $[U]$ does not depend on the order in which we erase subsequences $-_k+_l$ and is called the *reduction* of U.

Definition. Let $\lambda\in X_p^+(n)$ and $1\leqslant i<n$. We set $\beta:=\overline{\lambda_i(\lambda_i-1)}$. The index i is called λ-*normal* if the reduction $\big[R_\beta(\lambda)_i\cdots R_\beta(\lambda)_{n-1}\big]$ contains the symbol $-_i$ and the following conditions do not hold simultaneously: $\big[R_\beta(\lambda)_{i+1}\cdots R_\beta(\lambda)_{n-1}\big]=\varnothing$ and $\lambda_i\equiv\lambda_n\equiv 0 \pmod p$. This index is call λ-*good* if it is λ-normal but there is no λ-normal node h such that $h<i$ and $\overline{\lambda_h(\lambda_h-1)}=\overline{\lambda_i(\lambda_i-1)}$.

Theorem. Let $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in X_p^+(n)$ and $1\leqslant i<n$. There exists a nonzero $Q(n-1)$-primitive vector of weight $\mu:=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_i-1,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_{n-1})$ in the irreducible $Q(n)$-supermodule $L(\lambda)$ if and only if i is a λ-normal index. There exists a $Q(n-1)$-subsupermodule of $L(\lambda)$ isomorphic to $L(\mu)$ if and only if i is a λ-good index.

Note that via the Schur functor this theorem allows to describe the socle of the restriction of an irreducible projective representation of the symmetric group S_n to its subgroup S_{n-1}.

The results of this report were obtained jointly by the author and A.S. Kleshchev.

References

[1] Kleshchev A. Brundan J., Modular representations of the supergroup $Q(n)$, I, *J. of Algebra*, **260** (2003), 64–98.

RATIONAL LINK THEORY AND FREE LIE ALGEBRAS

M. Skopenkov (Moscow, Russia; Thuwal, Saudi Arabia)

This talk is on the classification of knots and links in higher dimensions. A natural question is: *in which dimensions the set of isotopy classes of links is finite?* It turns out that the answer reduces to the following result on Lie algebras. Let $L = \bigoplus_{m=1}^{\infty} L_m$ be a free graded Lie superalgebra over $\mathbb{Q}$ generated by two elements $P \in L_p$ and $Q \in L_q$. Let $w : L_{m-p} \oplus L_{m-q} \to L_m$ be the linear map given by the formula $w(x,y) = [P,x] + [Q,y]$.

Theorem. Let $m \neq kp, kq$ for $k = 1,2,3$. Then the following 3 conditions are equivalent:

- the set of isotopy classes of smooth embeddings $S^{m-p+1} \sqcup S^{m-q+1} \to S^{m+3}$ having unknotted components is finite;
- the map $w : L_{m-p} \oplus L_{m-q} \to L_m$ is injective;
- there are no points $(x,y) \in U_{(-1)^p,(-1)^q}$ such that $px + qy = m$.

Here $U_{\pm 1,\pm 1}$ are certain subsets of the lattice $\mathbb{Z}^2$ defined in the talk. A similar result for $p = q$ was obtained independently by Crowley and Ferry in 2008.

A formula for the dimension of the kernel of the map w is also presented, giving a *rational classification of links.* Corollaries for the classification of embeddings $S^k \times S^l \to S^m$ are obtained.

The proofs are based on an exact sequence of Haefliger and a generalization of the Witt formula by Petrogradsky.

SOME CONSTRUCTIONS OF NEAR-RINGS

Mirela Stefanescu and Camelia Ciobanu (Constanta, Romania)

In the last sixty years, the theory of near-rings has been developed constantly. A problem considered since the beginning of the theory was that of constructing near-ring multiplications on a given group. For finite groups this tag is accomplished by using computers and the package SONATA. The case of infinite groups as well as the case of finite groups with a big order is much more complicated.

We give here some constructions for some cases:

(i) Groups satisfying certain conditions regarding the existence of two endomorphisms with properties;

(ii) Groups endowed with an endomorphism (different from zero and identity) which is either idempotent or an involution or nilpotent of degree 2;

(iii) Groups which are semidirect sum of two subgroups.

More precisely, we associate, to each group satisfying some properties, a near-ring defined on one of its subgroups. The construction was inspired by a construction imagined for rings by A. I. Mal'cev.

Some structure theorems are obtained for distributive near-rings with a finite number of central idempotents and for near-rings satisfying descending chain conditions for its ideals.

THE BEHAVIOUR OF UNIPOTENT ELEMENTS IN IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF SPECIAL LINEAR AND SYMPLECTIC GROUPS WITH LARGE HIGHEST WEIGHTS WITH RESPECT TO A GIVEN ELEMENT

I. D. Suprunenko (Minsk, Belarus)

The behaviour of unipotent elements in irreducible representations of special linear and symplectic groups in odd characteristic with large highest weights with respect to a given element is investigated. It is proved that usually the images of relevant elements in such representations have at least two Jordan blocks of size equal to their order. In what follows K is an algebraically closed field of characteristic $p > 2$, $G = A_r(K)$ or $C_r(K)$, $r \geq 2$, ω_i, $1 \leq i \leq r$, are the fundamental weights of G, $\omega(\varphi)$ is the highest weight of an irreducible rational representation φ. Recall that a dominant weight $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$ is p-restricted if all the coefficients $a_i < p$. An arbitrary dominant weight ρ can be represented in the form $\sum_{j=0}^{l} p^j\rho_j$ where ρ_j are p-restricted. Set $\overline{\rho} = \sum_{j=0}^{l} \rho_j$. If $d_1 \geq d_2 \geq d_t$ are the sizes of all Jordan blocks of a unipotent element $x \in G$ in the standard realization of this group, put $J(x) = (d_1, d_2, \ldots, d_t)$. Here we assume that $d_2 = 0$ if x has a single Jordan block. A similar notation is used for unipotent elements of the general linear group as well.

For unipotent $x \in G$ we define the class of irreducible representations φ with large highest weights with respect to x with the help of a function b_x described below. Let $|x| = p^{s+1}$, $y = x^{p^s}$ and $J(y) = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ (if $s = 0$, we have $y = x$). Set

$$N(y) = (m_1 - 1, m_1 - 3, \ldots, 3 - m_1, 1 - m_1,\\ m_2 - 1, \ldots, 1 - m_2, \ldots, m_k - 1, \ldots, 1 - m_k)$$

and denote by the symbol b_i the sum of i maximal members of the collection $N(y)$. Let $\overline{\omega(\varphi)} = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$. Then put $b_x(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} a_i b_i$.

Theorem 1. Let $x \in G$ be an element of order p^{s+1} and φ be a rational irreducible representation of G with $b_x(\varphi) \geq p$. Then $\varphi(x)$ has at least two Jordan blocks of size $|x|$, except the following cases:

1) $d_1 = p^s + p$, $s > 0$, $d_2 \leq p^s - p$, $\overline{\omega(\varphi)} = \omega_p$;
2) $G = A_r(K)$, $d_1 = p^s + p$, $s > 0$, $d_2 = p^s - p + 1$, $d_3 < d_2$, $\overline{\omega(\varphi)} = \omega_p$;
3) $G = C_{p+1}(K)$, $d_1 = 2p$, $d_2 = d_3 = 1$, $\overline{\omega(\varphi)} = \omega_{p+1}$.

In Case 1) $\varphi(x)$ has no Jordan blocks of size $|x|$, the degree of its minimal polynomial is smaller. In Cases 2) and 3) $\varphi(x)$ has just one such block.

In Case 3 of Theorem 1 x is conjugate to a regular unipotent element of a subsystem subgroup of type C_p.

The question considered is inspired by a search of "rare" unipotent elements whose presence in a group can be effectively used for recognizing representations and linear groups. It has been proved in [1, Corollary 1] that if an irreducible Zariski closed simple subgroup of rank > 1 in $GL_n(K)$ is not isomorphic to $G_2(K)$ and contains an element of order p with $d_1 - d_2 > 12$, then this is one of the classical groups $SL_n(K)$, $Sp_n(K)$ or $SO_n(K)$. We would like to find out to what extent this statement can be transferred to arbitrary unipotent elements. Theorem 1 is one of the first steps in this direction.

This research was partially supported by the Belarus Basic Research Foundation, Project F09URO001.

References

[1] I.D. Suprunenko. Unipotent elements of a prime order in representations of exceptional algebraic groups: the second Jordan block (in Russian). // Doklady NAN Belarusi, 49 (2005), No 4, 5–9.

ON A COMPACTIFICATION OF MODULI OF VECTOR BUNDLES BY TREES OF BUBBLINGS OF THE SURFACE

Nadezda V. Timofeeva (Yaroslavl', Russia)

We construct a non-classical algebro-geometric compactification of the scheme of moduli of Gieseker – stable vector bundles with fixed Hilbert polynomial on a smooth projective algebraic surface (S, L) over the field $k = \bar{k}$ of zero characteristic. We restrict ourselves by the case of rank 2.

Families of locally free sheaves on the surface S are completed by locally free sheaves of some special type, on schemes which are certain modifications of S. This may be done by taking the modifications to be smooth irreducible surfaces obtained by so-called *trees of bubblings* of the surface S.

Gauge-theoretical approach to this project was provided by Nicholas Buchdahl [1, 2]. In his version the bubbling of the complex surface S at its point x means forming a (real) topological connected sum with projective plane $S\sharp\overline{\mathbb{P}}^2$ equipped with a suitable metric. The attachment is done so as the neck of the connected sum circles the point x. Bubblings can be iterated. The process of consequent bubblings is described by consequent choice of points x and then can be displayed by the graph of tree type.

We provide the algebro-geometric approach to what was done by N. Buchdahl. The role of bubbling is played by blowing up of reduced point on the surface S and the role of metric in the construction is played by ample divisor class. We prove that any stable rank 2 coherent sheaf E can be transformed in the certain procedure into the locally free sheaf $\widetilde{E}$ on the another surface $\widetilde{S}$. This surface is obtained from S by the tree of bubblings which depends on the initial sheaf E. It is clear that this tree of bubblings is defined not uniquely. We propose moduli functor for pairs $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ consisting of bubble-tree-blown up surface $\widetilde{S}$ with distinguished ample line bundle $\widetilde{L}$ and of locally free sheaf of fixed class. Coarse moduli space for this functor is a projective algebraic scheme. It is birational to Gieseker – Maruyama scheme and bijective to the manifold constructed by N. Buchdahl.

References

[1] Nicholas P. Buchdahl. Sequences of stable bundles over compact complex surfaces. Journal of Geom. Analysis, Vol. 9, No. 3, 1999, 391 – 428.

[2] Nicholas P. Buchdahl. Blowups and gauge fields. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 196, No. 1, 2000, 69 – 111. This paper is available via http://nyjm.albany.edu:8000/PacJ/2000/196-1-4.html.

ALGEBRAIC LATTICES OF FORMATIONS

A. A. Tsarev, N. N. Vorob'ev (Vitebsk, Belarus)

All groups considered are finite. All unexplained notations and terminology are standard (see [1–3]). Recall that a group class closed under taking homomorphic images and finite subdirect products is called a formation.

In every group G we select a system of subgroups $\tau(G)$; τ is called a subgroup functor if the following conditions hold: 1) $G \in \tau(G)$ for every group G; 2) for every epimorphism $\varphi : A \mapsto B$ and groups $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ we have $H^{\varphi} \in \tau(B)$ and $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$ (see [2]). A formation $\mathfrak{F}$ is called τ-closed [2] if $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ for any group $G \in \mathfrak{F}$. We consider only subgroup functors τ such that for any group G the set $\tau(G)$ consists of some subnormal subgroups of G.

Let ω be an arbitrary nonempty set of primes and $\omega' = \mathbb{P} \backslash \omega$. Functions of the form

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$$

are called ω-composition satellites. We use $C^p(G)$ to denote the intersection of all centralizers of chief p-factors of the group G ($C^p(G) = G$ if G has no such chief factors). Symbol $R_\omega(G)$ denotes the largest normal soluble ω-subgroup of G. If f is an ω-composition satellite, then $CF_\omega(f)$ is the class (see [3])

$$(G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ and } G/C^p(G) \in f(p) \text{ for any } p \in \omega \cap \pi(Com(G))).$$

We use $Com(G)$ to denote the class of all abelian simple groups A such that $A \cong H/K$ for some composition factor H/K of group G.

If $\mathfrak{F}$ is a formation such that $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ for an ω-composition satellite f, then $\mathfrak{F}$ is called ω-composition [3]. Every formation is 0-multiply ω-composition. For $n > 0$ formation is called n-multiply ω-composition if $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ and all nonempty values of f are $(n-1)$-multiply ω-composition formations.

Theorem. *The lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations is algebraic.*

When $n = 1$, we have:

Corollary 1. *The lattice of all τ-closed ω-composition formations is algebraic.*

Let $\mathfrak{L}$ be a class of abelian simple groups. Since $\mathfrak{L}$-composition formations are ω-composition for $\omega = \pi(\mathfrak{L})$ (see [2, Remark 3]), we obtain as a special case of the theorem the following result:

Corollary 2 [3, Theorem 4]**.** *The lattice of all n-multiply $\mathfrak{L}$-composition formations is algebraic.*

If $\omega = \mathbb{P}$ and $\tau(G) = \{G\}$, we have:

Corollary 3. *The lattice of all n-multiply composition formations is algebraic.*

Let $\omega = \mathbb{P}$, $\tau(G) = \{G\}$ and $n = 1$. Hence we have the following:

Corollary 4. *The lattice of all composition formations is algebraic.*

References

[1] *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

[2] *Skiba A.N.* Algebra of formations. Minsk: Belarusskaya navuka, 1997. – 240 p. (in Russian)

[3] *Skiba A.N., Shemetkov L.A.* Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups // Ukrainian Mathematical Journal. – 2000. – Vol. 52, no. 6. – P. 898–913.

INTERSECTIONS OF CONJUGATE SUBGROUPS IN FINITE GROUPS

E. P. Vdovin (Novosibirsk, Russia)

Let G be a group and H be a subgroup of G of finite index n. Denote by H_G the largest normal subgroup of G contained in H. Clearly

$$H_G = \bigcap_g H^g, \qquad (1)$$

where g runs over a right transversal of $N_G(H)$ in G, so we need $|G : N_G(H)|$ conjugates of H in order to obtain H_G. We try to find better bounds in equality (1) in some particular cases. More precisely, we consider the following hypothesises.

Hypothesis 1. Let H be a solvable subgroup of a finite group G. Do there exist elements $x, y, z, t \in G$ such that $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t \leq R(G)$, where $R(G)$ is the solvable radical of G?

Hypothesis 2. Let H be a nilpotent subgroup of a finite group G. Do there exist elements $x, y \in G$ such that $H \cap H^x \cap H^y \leq F(G)$, where $F(G)$ is the Fitting subgroup of G?

In particular we show that the minimal counter example to both hypothesis must be a subgroup in $\mathrm{Aut}(S)$ for a nonabelian finite simple group S.

The work is supported by RFBR, projects 08-01-00322 and 10-01-00391, Federal Target Grant "Scientific and educational personnel of innovation Russia"for 2009-2013 (government contract No. 02.740.11. 0429), ADTP “Development of the Scientific Potential of Higher School” of the Russian Federal Agency for Education (Grant 2.1.1.419), and Deligne 2004 Balzan prize in mathematics.

THE HOCHSCHILD COHOMOLOGY ALGEBRA FOR ONE FAMILY OF SELF-INJECTIVE ALGEBRAS OF TREE CLASS D_n

Y. V. Volkov (St.Petersburg, Russia)

Let R be a representation-finite self-injective basic algebra over an algebraically closed field. It is known that the stable AR-quiver of the such algebra is described with using an associate tree and this tree is one of the Dynkin diagram A_n, D_n, E_6, E_7, or E_8 [1]. If this tree is A_n, then the algebra R is stably equivalent to some serial self-injective algebra or to so called "Möbius algebra" [2]. In [3] the Hochschild cohomology algebra $\mathrm{HH}^*(R)$ was calculated for serial self-injective algebras, and for Möbius algebra the subalgebra $\mathrm{HH}^{*r}(R)$ of the algebra $\mathrm{HH}^*(R)$ was calculated in [4] (here, r is a parameter related with the algebra R). In these papers the fact that the syzygy of an appropriate order for the R-bimodule R can be described as twisted bimodule was essentially used. More direct approach to the calculation of Hochschild cohomology for Möbius algebra R was initiated in [5, 6]. Namely, the minimal projective resolution for algebra R as a Λ-module, where Λ is the enveloping algebra of the algebra R, was constructed, and then this resolution was used for calculation of the additive structure for the algebra $\mathrm{HH}^*(R)$, i.e. dimensions of the groups $\mathrm{HH}^n(R)$ were calculated.

As in [5] the minimal projective bimodule resolution was constructed and the additive structure of the algebra $\mathrm{HH}^*(R)$ was described for a family of self-injective algebras with the associate tree D_n ($n \geqslant 4$) in [7]. In this talk we continue this paper and describe the algebra $\mathrm{HH}^*(R)$ for the same family of algebras in the terms of generators with relations.

References

[1] C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv., 1980, v. 55, 199–224.

[2] C. Riedtmann, *Representation-finite self-injective algebras of class A_n.* — Lect. Notes Math., 1980, v. 832, 449–520.

[3] K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math., 1999, v. 11, 177–201.

[4] K. Erdmann, T. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*, II. — Algebras and Repr. Theory, 2002, v. 5, 457–482.

[5] Генералов А. И., Качалова М. А., *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. науч. семин. ПОМИ, т. 321 (2005), 36–66.

[6] Качалова М. А., *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. науч. семин. ПОМИ, т. 330 (2006), 173–200,

[7] Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*.I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, 2007, т. 343, 121–182.

PRODUCT OF p^n-POWER RESIDUES AS AN ABELIAN INTEGRAL

S. V. Vostokov, M. A. Ivanov (St.Petersburg, Russia)

It was Leopold Kronecker who first understood that there is a deep relationship between algebraic numbers and algebraic functions. He stated that the prime ideals in the felds of algebraic functions play the same role as the points of Riemann surfaces, and that prime divisors of the discriminant of a number field correspond to the ramification points of a Riemann surface, etc. David Hilbert was the first who investigate this idea in the fields of algebraic numbers. He noticed that his reciprocity law for the product of norm residue symbols, is an analog of Cauchy's integral theorem (see [1, p. 367–368]). Igor Shafarevich continued this investigation and studied from this point of view the local norm residue symbol $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ is an analog of the Abelian differential $\alpha d\beta$ at the point $\mathfrak{p}$ (see [2, p. 114]). In the paper [3] we consider the classical reciprocity law for power residues in the cyclotomic field, as a finite product of the local norm residue symbols. This riciprocity law, in the Gilbert–Shafarevich concept, should be an analog of the integral theorem stating that an Abelian integral of a differential form on a Riemann surface is equal to the sum of residues of this form at the singular points.

It was shown in the paper [3], the right-hand side of the reciprocity law is an analog of sum of the function's residues in the singular points, which are roots of unity in our case. In the present paper we show that the product of the p^nth power residues is an integral of some function. More precisely, we consider cyclotomic field p^nth power, ζ be a primitive p^nth root of 1, and $\pi=\zeta-1$. Then, we have in our case,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{p^n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{p^n}^{-1}=\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right). \qquad (1)$$

Right-hand side of this equality, by Vostokov's explicit formula (see [4]), becomes

$$\zeta^{\operatorname{Tr}\operatorname{Res}\frac{\Phi(\alpha(X),\,\beta(X))}{\underline{\zeta}(X)^{p^n}-1}},$$

where Φ is a function of α and β, which can be obteined in the explicit form, and $\underline{\zeta}$ is a polinomial, such that $\underline{\zeta}(\pi)=\zeta$. We show that the left-hand side of (1), i. e. the product of power residue symbols, is an Snirel'mann's integral (see [5]):

$$\int_{0,\pi} \frac{\Phi(\underline{\alpha}(X), \underline{\beta}(X))X}{\underline{\zeta}(X)^{p^n} - 1} \mod p^n,$$

where the inverse of $\underline{\zeta}^{p^n} - 1$ is taken in the in the two dimension local ring, i. e. there exists integer number k and the polinomial $V(X)$ such that $\frac{V(X)}{X^k} \mathrm{mod}_{p^n} \frac{1}{\underline{\zeta}(X)^{p^n}-1}$. Finally we prove that this integral is trivial for Eisenstein's resiprocity law.

References

[1] D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1, Springer, Berlin , 1932

[2] I. R. Shafarevich, A general reciprocity law, Amer. Math. Soc. Transl., Ser.2 4 (1956), 73–106.

[3] S. V. Vostokov, The classical reciprocity law for power residues as an analog of the Abelian integral theorem, St. Petersburg Math. J., 20 (2009), 929–936.

[4] S. V. Vostokov, Explicit form of the law of reciprocity, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 42 6 (1978), 1288–1321.

[5] L.G. Snirel'mann, Sur les fonctions dans les corps normes et alge'briquement fermes. (Russian. French summary) Bull. Acad. Sci. URSS, Ser. Math. 2 1938, No.5–6, 487–498 (1938).

INTRODUCTION TO QUIVERS WITH POTENTIALS

Jerzy Weyman (Boston, USA)

This is a talk based on a joint work with H. Derksen and A. Zelevinski. For a quiver Q with a potential S (i.e. a fixed linear combination of oriented cycles in a quiver) we define its Jacobian algebra $P(Q, S)$. For any vertex x in the quiver Q one can define the mutation of a potential at x and extend this definiton to mutations of nilpotent representations of the algebras $P(Q, S)$. This approach gives a natural generalization of classical reflection functors of Bernstein–Gelfand–Ponomarev. One can apply this theory to prove several conjectures of Fomin and Zelevinsky on cluster algebras.

RANKS OF ABELIAN VARIETIES IN TOWERS OF FUNCTION FIELDS

Yuri G. Zarhin (Pennsylvania State University, USA)

This is a report on a joint work with Douglas Ulmer [3].

Let $\mathbb{Z}$ be the ring of integers and $\mathbb{Q}$ the field of rational numbers. If k is a field of characteristic zero then we write $\bar{k}$ for its algebraic closure and $k(t)$ for the rational function field over k. If A is an abelian variety over k then we write $\mathrm{End}(A)$ for the ring of its $\bar{k}$-endomorphisms. We say that A is *isotrivial* if there exists an abelian variety A_0 over $\bar{\mathbb{Q}}$ such that A and A_0 become isomorphic over $\bar{k}$.

Let g be a positive integer. Let X_1 and X_2 be the smooth projective irreducible genus g curves over $\mathbb{Q}(t)$ with affine plane models

$$ty^2 = x^{2g+1} - x + t - 1$$

and

$$ty^2 = x^{2g+2} - x + t - 1$$

respectively. Let J_1 be the jacobian of X_1 and J_2 the jacobian of X_2; both J_1 and J_2 are g-dimensional abelian varieties over $\mathbb{Q}(t)$.

Theorem. Suppose that $g \geqslant 2$. Let up put $K = \mathbb{Q}(t)$. Then J_1 and J_2 are absolutely simple *nonisotrivial* abelian varieties over K that are *not* isogenous over $\bar{K}$. In addition,

$$\mathrm{End}(J_1) = \mathbb{Z},\ \mathrm{End}(J_2) = \mathbb{Z}.$$

For every prime p and every integer $r \geqslant 0$ both $J_1(\bar{\mathbb{Q}}(t^{1/p^r}))$ and $J_2(\bar{\mathbb{Q}}(t^{1/p^r}))$ are finitely generated commutative groups, whose ranks are as follows. The rank of $J_1(\bar{\mathbb{Q}}(t^{1/p^r}))$ is $2g$. The rank of $J_2(\bar{\mathbb{Q}}(t^{1/p^r}))$ is either $2g$ if p is odd or $2g+1$ if $p = 2$ and $r > 0$.

References

[1] L. Berger, *Towers of surfaces dominated by products of curves and elliptic curves of large rank over function fields.* J. Number Theory **128** (2008), 3013–3030.

[2] D. Ulmer, *On Mordell–Weil groups of jacobians over function fields.* arXiv:1002.3310 [math.NT]

[3] D. Ulmer, Yu. G. Zarhin, *Ranks of jacobians in towers of function fields.* arXiv:1002.3318 [math.NT].

[4] J. Xue, *Endomorphism algebras of jacobians of certain superelliptic curves.* arXiv:0902.4657 [math.AG].

[5] Yu. G. Zarhin, *Homomorphisms of hyperelliptic jacobians.* In: Shafarevich Festschrift, Trudy Steklov Math. Inst. **241** (2003), 90–104; Proceedings of the Steklov Institute of Math. **241** (2003), 79–92.

[6] Yu. G. Zarhin, *Endomorphism algebras of superelliptic Jacobians.* In: F. Bogomolov, Yu. Tschinkel (ed.) Geometric methods in Algebra and Number Theory, Progress in Math. **235**, 339–362, Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 2005.

PROPERTIES OF THE PRIME GRAPH OF CERTAIN SIMPLE GROUPS

Andrei V. Zavarnitsine (Novosibirsk, Russia)

The *prime graph* $\Gamma(G)$ of a finite group G is the graph whose vertex set is the set $\pi(G)$ of prime divisors of the order $|G|$ in which two distinct vertices $p, q \in \pi(G)$ are joined by an edge if and only if G contains an element of order pq.

It is often the case that the structure of the prime graph carries much information about the underlying group. For example, the finite groups whose prime graph is disconnected have a very limited structure as shown by the Gruenberg-Kegel theorem [2].

Of particular interest are the finite groups that are uniquely determined by their prime graph. The group G is said to be *recognizable by graph* if, for every finite group H, the equality of vertex-labeled graphs $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ implies the isomorphism $H \cong G$. Examples of recognizable by graph groups are the simple groups $\mathrm{G}_2(7)$, J_4, ${}^2\mathrm{G}_2(q)$, $q > 3$, see [3]. One observes that all the known examples of such groups G have the property that $\Gamma(G)$ is disconnected. Whether there exists a recognizable-by-graph group whose prime graph is connected or there does not, has been unknown so far.

It turns out that proving recognizability of G by graph may require the knowledge of subtle properties of modular representations for G such as the presence of nontrivial fixed points of large prime-order elements. In this paper, we show how one can use this information in the case of 2-modular representations for $\mathrm{L}_{16}(2)$.

The main result of the present paper can be stated as follows:

Theorem 3. If G is a finite group such that $\Gamma(G) = \Gamma(\mathrm{L}_{16}(2))$ and $G/\mathrm{O}_2(G) \cong \mathrm{L}_{16}(2)$ then $\mathrm{O}_2(G) = 1$.

This, together with [1], gives the first example of a recognizable-by-graph group whose prime graph is connected.

Corollary 4. $\mathrm{L}_{16}(2)$ is recognizable by its prime graph.

We remark that an attempt to give a complete proof that $\mathrm{L}_{16}(2)$ is recognizable by graph was made in [1]. However, there appears to be a gap in the proof of Lemma 3.4 (p. 56, line 20), where Lemma 2.5 is applied to conclude that $(2^{15}-1)p$ is an element order of G. However, Lemma 2.5 cannot be used in the case $p=2$.

References

[1] B. Khosravi, B. Khosravi, B. Khosravi, A characterization of the finite simple group $L_{16}(2)$ by its prime graph. Manuscr. Math. 2008. V. 126. N 1. 49–58.

[2] J. S. Williams, Prime graph components of finite groups. J. Algebra. 1981. V. 69. N 2. 487–513.

[3] A. V. Zavarnitsine, On recognition of finite groups by the prime graph. Algebra and Logic. 2006. V. 45. N 4. 220–231.

HOW ALGEBRAS GROW

Efim Zelmanov (San Diego, USA)

We will review the recent attempts to apply geometric methods to study of growth of algebras and their representations.

CENTRAL AND NUCLEAR SKEW-SYMMETRIC ELEMENTS IN ALTERNATIVE ALGEBRAS

Natalia Zhukavets (Czech Technical University in Prague)

In any nonassociative algebra we define the *associator* $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$, the *commutator* $[x,y] = xy - yx$, and the *symmetric product* $x \circ y = xy + yx$. An algebra A is called *alternative* if $(x,x,y) = 0$ and $(x,y,y) = 0$ for all $x, y \in A$. Alternativity is a weaker condition than the associativity. An octonion algebra is an important example of alternative algebra which is not associative.

Denote the *associative center* (or *nucleus*) of A by $N(A)$, and its *center* by $Z(A)$, i.e.

$$\begin{aligned} N(A) &= \{z \in A \mid (z,A,A) = (A,z,A) = (A,A,z) = 0\}, \\ Z(A) &= \{z \in N(A) \mid [z,A] = 0\}. \end{aligned}$$

It would be interesting to find all central and nuclear elements in alternative algebras. Since no effective base is known for the free alternative algebra, it seems natural to consider first central and nuclear elements of special type, for instance, skew-symmetric elements. In this case, due to papers of I. Shestakov [1] and M. Vaughan-Lee [4], the problem is reduced to the free alternative superalgebra on one odd generator, which is easier to deal with.

We recall the passage from identities of the free alternative superalgebra $\mathcal{A} = Alt[\varnothing; x]$ on one odd generator x to skew-symmetric identities of the free alternative algebra $Alt[T]$ on a countable set of generators T.

Let $f = f(x)$ be a homogeneous nonassociative polynomial of degree n on one variable x. It may be written in the form $f(x) = \tilde{f}(x, x, \ldots, x)$, for a certain multilinear polynomial $\tilde{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Define the skew-symmetric polynomial $Skew\, f = Skew\, f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ as follows:

$$Skew\, f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{\sigma \in Sym(n)} \operatorname{sign}(\sigma) \tilde{f}(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \ldots, t_{\sigma(n)}).$$

Then $Skew : \mathcal{A} \to Alt\,[T]$ is a linear map which maps isomorphically the homogeneous component $\mathcal{A}^{[n]}$ of degree n of $\mathcal{A}$ to the subspace $Alt_{Skew}[T_n]$ of multilinear skew-symmetric elements on $T_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ of $Alt\,[T]$. More exactly, for a fixed homogeneous nonassociative polynomial $f = f(x)$ of degree n we have: $f(x) = 0$ in $\mathcal{A}$ if and only if $Skew\, f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0$ in $Alt[T]$.

Mark the super-commutator and the super-symmetric product by index s. Define by induction

$$x^{[1]} = x,\ x^{[i+1]} = [x^{[i]}, x]_s,\ i > 0,$$

and denote

$$t = x^{[2]},\ z^{[k]} = [x^{[k]}, t],\ u^{[k]} = x^{[k]} \circ_s x^{[3]},\ k > 1.$$

In [3] we constructed a base of $\mathcal{A}$, and described its nucleus and center:

$$N(\mathcal{A}) = id_{\mathcal{A}}\langle u^{[k]}, z^{[k]} \mid k > 2\rangle,$$

$$Z(\mathcal{A}) = vect_F\langle t^m z^{[k]},\ t^m(2z^{[k]}x - u^{[k]}) \mid m \geq 0,\ k > 2\rangle.$$

Moreover, we proved in [2] that the elements

$$Skew\, z^{[k]}(t_1, \ldots, t_{k+2}),\ k \in \{4n, 4n+1\},\ k > 4,$$

are nonzero central skew-symmetric functions in $Alt\,[T]$.

Evidently, any central and nuclear skew-symmetric functions in alternative algebras should be of the type $Skew\, f$, where $f \in Z(\mathcal{A})$ and $f \in N(\mathcal{A})$ for central and nuclear functions, respectively. Note that not every element in $Z(\mathcal{A})$ produces central or nuclear function. For example, $z^{[4]} \in Z(\mathcal{A})$ but $Skew\, z^{[4]}$ is neither a central nor a nuclear function in the algebra of octonions $\mathbb{O}$.

To obtain new results on central and nuclear skew-symmetric functions in alternative algebras we investigate the structure of the alternative superalgebra $\mathcal{A}[y]$, the split extension of $\mathcal{A}$ by its free one-generated superbimodule with the generator y.

The work was partially supported by the Grant Agency of the Academy of Sciences of Czech Republic under grant No. KJB101210801

References

[1] I. P. Shestakov: Alternative and Jordan superalgebras, *Siberian Adv. Math.*, **9**(2) (1999), 83–99.

[2] I. Shestakov, N. Zhukavets: The universal multiplicative envelope of the free Malcev superalgebra on one odd generator, *Comm. Algebra*, **34**(4) (2006), 1319–1344.

[3] I. Shestakov, N. Zhukavets: The free alternative superalgebra on one odd generator, *Internat. J. Algebra Computations*, **17**(5/6) (2007), 1215-1247.

[4] M. Vaughan-Lee: Superalgebras and dimensions of algebras, *Int. J. Algebra and Computation*, **8**(1) (1998), 97–125.

RAMIFICATION OF HOMOMORPHISMS OF 2-DIMENSIONAL RINGS

Igor Zhukov (St.Petersburg, Russia)

We introduce a special class of finite homomorphisms between complete regular 2-dimensional local rings.

Let A, B be two such rings, both with a fixed coefficient subfield k of characteristic $p > 0$. A finite k-homomorphism $h : A \to B$ is said to be a model homomorphism if for a certain choice of regular local parameters t, u in A and x, y in B we have:

(i) $h(t) = \delta \cdot x^{e_n}$,

(ii) $h(u) \equiv \varepsilon \cdot y^{e_f} \operatorname{mod} x$,

where e_n is a non-negative integer, e_f is a non-negative power of p; $\delta, \varepsilon \in B^*$.

We consider also a restriction

(iii) $J(t,u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h(t)}{\partial x} & \frac{\partial h(t)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(u)}{\partial x} & \frac{\partial h(u)}{\partial y} \end{vmatrix} = \gamma \cdot x^M$,

where $\gamma \in B^*$, M is a non-negative integer.

Such homomorphisms occur naturally in the theory of desingularization of morphisms of regular surfaces. It can be also observed from examples that the study of ramification for morphisms of formal curves induced by model homomorphisms helps to understand ramification in extensions of 2-dimensional local fields.

We establish some basic properties of model homomorphisms per se and in relation to extensions of 2-dimensional local fields.

INVARIANTS OF MICROPRIMES FOR p-ADIC FIELDS

Ernst-Wilhelm Zink (joint with Julia Mehlig and Ernst Ludwig Wirl)
(Berlin, Germany)

Let k be a p-adic field, i.e. a complete discrete valuation field with finite residue field of characteristic p, and let $G = G(k^{sep}|k)$ be the full Galois group. Via reduction we have a natural surjective homomorphism $d : G \to \widehat{\mathbb{Z}}$ which takes Frobenius lifts to 1. More generally a Frobenius element $\varphi \in G$ is defined by the property that $d(\varphi) \in \{1, 2, 3, ...\}$ is a natural number. A microprime $\mathfrak{p}$ is a certain equivalence class in the set $Frob(k)$ of all Frobenius elements. We call a subfield $\mathcal{F} \subset k^{sep}$ a Frobenius field if $\mathcal{F}|k$ is of finite inertial degree but admits only unramified extensions: $\mathcal{F} \cdot k^{ur} = k^{sep}$. Call $\mathcal{F}' \sim \mathcal{F}$ if there exists $\sigma \in G$ such that $\sigma(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{F}'$ is again a Frobenius field i.e. it is again of finite inertial degree over k. It is convenient to think of a microprime $\mathfrak{p}$ as an equivalence class of Frobenius fields. If a micro prime $\mathfrak{p}$ is fixed then the

minimal fields $\mathcal{F} \in \mathfrak{p}$ form a unique conjugacy class of Frobenius fields which corresponds to a conjugacy class of Frobenius elements. Therefore microprimes can also be thought of as conjugacy classes inside the Weil group $d^{-1}(\mathbb{Z})$ which are outside of $I = Ker(d)$ and such that all conjugacy classes in $W - I$ are obtained as integral powers of those microprimes.
The notion has been introduced by J.Neukirch in 1993, and he posed the problem to describe the microprimes in terms of the base field k. In Mehlig, Yu.; Zink, E.-W. Invariants of micro primes for p-adic fields. Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XI, 141–177, we gave an iterative approach to this problem. Let $\{D^n I\}_{n \geqslant 0}$ be the sequence of derived subgroups of I and $k^{n*}|k$ the fixed point field of $D^n I$. The set $\mathrm{Spec}(k)$ of microprimes for G can be considered as projective limit of the sets $\mathrm{Spec}(k^{n*}|k)$ for the groups $G/D^n I$. In the first step we got a natural bijection

$$\mathrm{Spec}(k^{1*}|k) \leftrightarrow G(k^{ur}|k)\backslash \mathcal{P}(k^{ur})$$

between microprimes and conjugacy classes of prime elements in the maximal unramified extension. For the iteration step fix $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(k^{n*}|k)$ and consider $\mathrm{Spec}(k^{(n+1)*}|k)_{\mathfrak{p}}$ the fiber of all microprimes which project to $\mathfrak{p}$. Moreover let $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \subset k^{n*}$ be a minmal Frobenius field for $\mathfrak{p}$. Then $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}^{ur} = k^{n*}$, $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}^{1*} = k^{(n+1)*}$, and

$$\mathrm{Spec}(k^{(n+1)*}|k)_{\mathfrak{p}} \leftrightarrow G(k^{n*}|\mathcal{F}_{\mathfrak{p}})\backslash \mathcal{P}(k^{n*}),$$

where the problem is to interpret what are the prime elements of k^{n*} and to describe them. In loc.cit. this could be done only in a preliminary way.
Now in forthcoming work of E.L.Wirl a satisfying answer is given when $n = 1$. Without loss of generality we may assume that $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(k^{1*}|k)$ corresponds to a prime $\pi \in k$. Then $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \subset k^{1*}$ is a fixed complement of k^{ur} such that π is a universal norm of $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}|k$. We may obtain $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ as the union of arithmetically profinite extensions $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(f)|k$ for all $f \geqslant 1$ which become abelian after unramified shift of degree f resp.. Let Y^f be the field of norms with respect to $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(f)|k$. Prime elements of Y^f determine normic Lubin-Tate power series $\ell(X) \in \mathrm{LT}_{norm}(k, \pi, q^f)$ where $q = q(k)$, the coefficients are in o_k, and the height is f. Related to the norm maps one has natural maps $V_{f|f'} : \mathrm{LT}_{norm}(k, \pi, q^{f'}) \to \mathrm{LT}_{norm}(k, \pi, q^f)$ if f divides f'. As a result microprimes $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(k^{2*}|k)_{\mathfrak{p}}$ can be interpreted as sequences of normic Lubin-Tate power series with respect to the maps $V_{f|f'}$ where the coefficients are in k or in some unramified extension of k. Replacing (k, q) by (k_m, q^m) we obtain all microprimes of degree dividing m.

Author Index

CHARACTERIZATION OF *f*-IDEALS OF DEGREE 2

Imran Anwar (Lahore-Pakistan)

In this talk, we introduce the concept of *f*-ideals and discuss its algebraic properties. In particular, we characterize the *f*-ideals of degree 2.
My talk consists of these points;

- Simplicial complexes
- Monomial ideals associated to Simplicial complexes
- *f*-ideals and classification of *f*-ideals of degree 2.

Key words : simplicial complex, height of an ideal, Primary Decomposition, *f*-
vector.

Some new results on Gröbner-Shirshov bases for universal linear algebras

L.A. Bokut
Sobolev Institute of Mathematics
Yuqun Chen
South China Normal University

In this survey paper, we report some recent results on Gröbner-Shirshov bases.

The following results are included.

New Composition-Diamond lemmas for: 1.1 Right-symmetric algebras; 1.2 Associative Ω-algebras; 1.3 Tensor product of free associative algebras; 1.4 Lie algebras over a commutative algebra; 1.5 Dialgebras; 1.6 Rota-Baxter algebras; 1.7 Differential algebras; 1.8 Modules over an algebra; 1.9 Categories; 1.10 L-algebras.

Gröbner-Shirshov bases for: 2.1 Free inverse semigroups; 2.2 Free Lie algebras as anti-commutative algebras; 2.3 Some one-relator groups; 2.4 HNN extensions of groups; 2.5 Chinese monoids; 2.6 Braid groups in Adyan-Thurston generators; 2.7 The Onsager Lie algebra (it is due to E. Poroshenko); 2.8 Classical simple Lie algebras relative to any order of simple roots (it is due to A. Koryukin).

Some applications: 3.1 Embedding of algebras into simple algebras and two-generated algebras; 3.2 Embedding dendriform dialgebra into its universal enveloping Rota-Baxter algebra; 3.3 Schreier extensions of groups and algebras; 3.4 PBW type theorems and normal forms theorems.

Secant Varieties of Classical Algebraic Varieties

Anthony V. Geramita

Queen's University, University of Genoa

The talk will give a brief discussion of some fundamental problems regarding the dimensions of the higher Secant Varieties of families of classically discussed varieties. More details will be offered about the recent work of the speaker and his collaborators (especially J. Ahn, E. Carlini, L. Chiantini and Y.S. Shin) on the secant varieties of the Varieties of Reducible Forms.

ON OPERATIONS WITH GENERALIZED ENTROPIC PROPERTY

AMIR EHSANI

We investigate the relationship between the generalized entropic property and the entropic law for operations.

References

[1] K. Adaricheva, A. Pilitowska, D. Stanovsk. *complex algebras of subalgebras*, arXiv:math/0610832v1 [math.RA] 2006.
[2] I. Bonjak and R. Madarsz, *On power structures*, Algebra and Discr. Math. 2 (2003), 14-35.
[3] C. Brink, *Power structures*, Algebra Universe. 30 (1993), 177-216.
[4] T. Evans, *Properties of algebras almost equivalent to identities*, J. London Math. Soc. 35(1962), 53-59.
[5] G. Grtzer, H. Lakser, *Identities for globals (complex algebra) of algebras*, Colloq. Math. 56(1988), 19-29.
[6] J. Jeek, T. Kepka, *Medial groupoids*, Rozpravy ?SAV 93/2 (1983).
[7] Movsisyan Yu.M., *Introduction to the theory of algebras with hyperidentities*, Yerevan State University Press, 1986 (Russian).
[8] Movsisyan Yu.M., *Hyperidentities and hypervarieties in algebras*, Yerevan State University Press, 1990 (Russian).
[9] Movsisyan Yu.M., *Hyperidentities in algebras and varieties*, Uspekhi Math. Nauk. 53(1998), 61-114. English transl. in Russ. Math. Surveys 53(1998), No1, 57-108.
[10] A. Romanowska, J.D.H. Smith, *Modal Theory-an Algebraic Approach to Order*, Geometry, and Convexity, Heldermann Verlag, Berlin, (1985).
[11] A. Romanowska, J.D.H. Smith, *On the structure of the subalgebra systems of idempotent entropic algebras*, J. Algebra 12(1989), 263-283.
[12] . A. Romanowska, J.D.H. Smith, *Modes*. World Scientific, (2002).

E-mail address: A.Ehsani@mahshahric.ac.ir

Islamic Azad University, Ahvaz Branch, Iran

Monolithic modules over Noetherian Rings

Paula A.A.B. Carvalho, Departamento de Matemática Faculdade de Ciências Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre 687, 4169-007 Porto, Portugal, pbcarval@@fc.up.pt
Ian M. Musson University of Wisconsin-Milwaukee PO Box 413,
Milwaukee, WI 53201 U.S.A., musson@@csd.uwm.edu

July 2, 2010

A module M is called *monolithic* if it has a unique minimal submodule. We investigate Noetherian rings such that

$(\diamond)$ every finitely generated monolithic A-module is Artinian.

This problem has an interesting history. Indeed it was shown in the 1970's by A.V. Jategaonkar and J.E. Roseblade that if G is a polycylic-by-finite group, then the group ring RG has property $(\diamond)$ whenever R is the ring of integers, or is a field that is algebraic over a finite field. This result is the key step in the positive solution of a problem of Philip Hall. Hall asked whether every finitely generated abelian-by-(polycylic-by-finite) group is residually finite. Next A.V. Jategaonkar showed that a fully bounded Noetherian ring A satisfies property $(\diamond)$, and used this fact to show that Jacobson's conjecture holds for A.

Interest in this problem was renewed recently by a question of P.F. Smith. Smith asked whether a Noetherian down-up algebra A has property $(\diamond)$. We completely characterize Noetherian down-up algebras having property $(\diamond)$, and in particular we exhibit the first examples that do not have this property. These examples are constructed using the fact that either the coordinate algebra of the quantum plane or the quantized Weyl algebra is an image of A.

*The first author was partially supported by Centro de Matemática da Universidade do Porto, financed by FCT (Portugal) through the programs POCTI and POSI with national and European community structural funds.

The groups of points on abelian surfaces over finite fields

Sergey Rybakov
Moscow

Let A be an abelian surface over a finite field k. The k-isogeny class of A is uniquely determined by a Weil polynomial f_A of degree 4. We give a classification of the groups of k-rational points on varieties from this class in terms of Newton polygon of $f_A(1-t)$.