

Mathematics - XXI century. PDMI 70th anniversary

September 13-18, 2010

Abstracts

A.Teplyaev *"Diffusions and spectral analysis on fractals"*

ABSTRACT: The classical diffusion process was first studied by Einstein, and later a mathematical theory was developed by Wiener, Kolmogorov, Levy et al. One of the basic principle is that displacement in a small time is proportional to the square root of time. Recently it was discovered that some fractals carry natural diffusion processes that obey scaling laws what are different from the classical Gaussian diffusion, but are of so called sub-Gaussian type. Moreover, in some situations the diffusion, and therefore the correspondent Laplace operator, are uniquely determined by the geometry of the space. Recently it was proved for Sierpinski square and its generalizations (a joint work with M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai). In the second half of the talk spectral analysis of the intrinsic Laplacian on finitely ramified fractals with symmetries will be discussed.

D.Kaledin *"Non-commutative Witt vectors"*

ABSTRACT: Witt vectors were originally defined for a commutative ring A . About 15 years ago L. Hesselholt discovered a generalization of this construction to non-commutative rings. His approach was heavily based on non-trivial facts from stable homotopy theory. I will present an elementary re-interpretation of Hesselholt's results which also allows to strengthen and clarify them. If time permits, I will also touch upon some applications.

O.Viro *“Tropical geometry and hyperfields”*

ABSTRACT: The notion of multifold is a straightforward generalization of the notion of field. The difference between these notions is that addition in a multifold may be multivalued. Multifolds with multivalued addition can be obtained from usual fields via factorization or degeneration. Multifolds provide a natural base for tropical geometry. The degenerations relating objects of the classical algebraic geometry to objects studied by the tropical geometry are induced by degenerations of the ground fields to multifolds. Multifolds appear naturally in other contexts and are of general interest.

“Тропическая геометрия и гиперполя”

ABSTRACT: Понятие мультиполя является непосредственным обобщением понятия поля. Разница между ними состоит в том, что сложение в мультиполе может быть многозначным. Мультиполя с многозначным сложением получаются из обычных полей посредством факторизации или вырождения. Мультиполя доставляют естественную алгебраическую основу тропической геометрии. Вырождения, связывающие объекты классических разделов алгебраической геометрии с объектами, изучаемыми тропической геометрией, оказываются порождены вырождениями соответствующих полей в мультиполя. Мультиполя естественно возникают и в других контекстах и представляют общематематический интерес.

G.Mints *“Hard Analysis: New Life of Old Ideas”*

ABSTRACT: New emphasis on finitist methods and results in mathematics indicates a turn in foundations happening under the slogans of Hard Analysis and Proof Mining. While previously non-constructive or infinitistic methods were thought (by an influential minority) to be philosophically defective, the revival of interest is caused by mathematical needs. Some of the central results needed development of new tools that turned out to be close analogs of well-known tools of proof theory.

D.Grigoriev *“Nash conjecture for binomial varieties and multidimensional Euclidean algorithm”*

“Гипотеза Нэша для биномиальных многообразий и многомерный алгоритм Евклида”

ABSTRACT: Раздутие Нэша многообразия X определяется как замыкание графика отображения Гаусса на X . Джон Нэш высказал гипотезу, что последовательность раздутий Нэша, начиная с X (над полем характеристики 0) всегда заканчивается. Тогда ввиду теоремы Липмана, полученное многообразие гладкое и тем самым, дает разрешение особенностей многообразия X . В случае размерности 2 Хиронака-Спиваковский доказали нормализованную версию гипотезы Нэша, когда раздутия чередуются с нормализациями. Сложность этого разрешения особенностей (как и любого известного) очень высока. Мы устанавливаем эквивалентность гипотезы Нэша (соответственно, нормализованной) для биномиальных многообразий и остановки многомерного алгоритма Евклида (соответственно, нормализованного). Основным результатом доказывает полиномиальную оценку сложности для двумерного нормализованного алгоритма Евклида. (Совместная работа с П.Мильманом)

F.Smirnov *“Correlation functions for quantum integrable models”*

ABSTRACT: I shall formulate the main problem of the Quantum Field Theory which consists in computing the correlation functions. I shall explain how this problem is tackled for the integrable models putting stress on the application of the Operator Product Expansion (OPE). The OPE are controlled by the methods of the Conformal Field Theory (CFT). Accepting this fact the computation of the correlation functions is reduced to the case of one-point functions. I shall explain that the one-point functions can be computed using the fermionic structure of the integrable models which was found recently.

A.Vershik *“Несвободные действия групп и теория характеров”*

ABSTRACT: Обобщение классической теории характеров конечных групп на

бесконечные группы еще отсутствует. Оказывается представления таких групп, где появляются характеры, связано с, так называемыми, вполне несвободными действиями групп с инвариантной мерой. Эти действия можно охарактеризовать, как действия групп на решетке ее подгрупп. Хотя эти решетки изучались как чисто алгебраический объект, связь с динамикой даже для конечных групп, по-видимому, оставалась в тени. Вырисовывается новая серия задач - отыскание всех таких действий для тех или иных бесконечных групп, и конструкция соответствующих характеров. Для бесконечной симметрической группы и некоторых других групп, решение этих задач было найдено ранее, однако, внутреннее (алгебраическое и динамическое) объяснение решения появилось лишь сейчас.

"Totally non-free actions of the groups and theory of the characters"

ABSTRACT: In opposite to the case of the finite groups there is no well-developed theory of the characters of the infinite groups. It happened, and partially explained the reason why, the representations which equipped with character, intimately related to the adjoint action of the group on its lattice of its subgroups with an invariant measure, and the character is nothing more than the measure of the set of fixed points of the element of the group under that action.

Although the lattice of the subgroups intensive studied in algebraic context from 30-th, the question about adjoint invariant measure was in the shadow and only now becomes clear the importance of the problem about the list of such measures for one or another groups, and the construction of the corresponding characters. For infinite symmetric groups and some similar groups the problems were solved several years ago but intrinsic (algebraic and dynamic) explanation of the link is appeared now.

D.Treschev *"Oscillator and thermostat"*

ABSTRACT: We study the problem of a potential interaction of a finite-dimensional Lagrangian system (an oscillator) with a linear infinite-dimensional one (a thermostat). In spite of the energy preservation and the Lagrangian (Hamiltonian) nature of the total system, under some natural assumptions the final dynamics of the finite-dimensional component turns out to be simple while the thermostat produces an effective dissipation.

N.Nikolski *"A few interesting (for me but not only) problems in classical Analysis"*

ABSTRACT: 1. The Kadison-Singer problem.

2. The Riemann-Beurling hypothesis, II.

3. The spectrum of Fourier multipliers.

4. Asymptotics of the basis constant, and orthogonal polynomials.

Несколько интересных (не только мне) задач классического анализа

ABSTRACT: 1. Гипотеза Кадисона-Зингера.

2. Гипотеза Римана-Берлинга, II.

3. Спектр мультипликаторов Фурье.

4. Асимптотика константы базиса, и ортогональные многочлены.

G.Seregin *"Global wellposedness and local regularity for Navier-Stokes Equations"*

ABSTRACT: The question whether or not energy solutions to the Navier-Stokes equations are smooth is one of the seven Millennium problems. In the talk, an elementary introduction to the problem will be given and basic facts of the theory of those celebrated equations will be explained. Some general analytical questions will be raised in connection with investigations of differentiability properties of solutions to the Navier-Stokes equations. Another important aim of the talk will be to highlight the great contribution of members of the Laboratory of Mathematical Physics of LOMI/POMI (as a part of St Petersburg's school of Mathematical Physics and Partial Differential Equations) to the theory of the Navier-Stokes equations starting with pioneering results of O. A. Ladyzhenskaya and her colleagues K.K. Golovkin, A.V. Ivanov, L.V. Kapitsanskii, A.P. Oskolkov, and V.A. Sillonikov up to the latest works of the current members.

"Глобальная однозначная разрешимость и локальная регулярность для уравнений Навье-Стокса"

ABSTRACT: Проблема гладкости энергетических решений уравнений Навье-Стокса отмечена институтом Клея как одна из семи важнейших задач тысячелетия. В докладе мы дадим относительно элементарное описание проблемы, а также поясним основные факты теории уравнений Навье-Стокса. Кроме того, мы

сформулируем некоторые аналитические проблемы общего характера, решение которых привело бы к прорыву в исследованиях дифференциальных свойств решений уравнений Навье-Стокса. В докладе будет подчеркнут существенный вклад, внесенный в развитие теории уравнений Навье-Стокса сотрудниками лаборатории математической физики ЛОМИ/ПОМИ, начиная с пионерских результатов О.А. Ладыженской и её коллег К.К.Головкина, А. В. Иванова, Л.В. Капитанского, А.П.Осколкова, В.А. Солонникова, и до последних работ нынешних сотрудников лаборатории.

В. А. Гриценко *"К3 поверхности и автоморфные формы"*.

ABSTRACT: К3 поверхность -- одно из наиболее интересных обобщений эллиптической кривой. Комплексная К3 поверхность принадлежит одновременно к двум классам многообразий, интенсивно изучаемых математиками и физиками: многообразиям Калаби-Яу и голоморфным симплектическим многообразиям. Модули К3 поверхностей степени $2d$, т.е. периоды, определяющие поверхность с точностью до изоморфизма, образуют 19-мерное квазипроективное многообразие. Определение геометрического типа этих многообразий является последним нерешённым вопросом сформулированной в 1957 г. программы А. Вейля о К3 поверхностях. Теория автоморфных форм на ортогональных группах играет ключевую роль в решении этой проблемы (и ее обобщений), которое было предложено мною совместно с К. Hulek (Hannover) и G. Sankaran (Bath) в серии из 5 статей, опубликованных в 2007--2010 гг. В докладе будут представлены основные идеи доказательства, а также новые приложения автоморфных произведений Борчердса в геометрии модулярных многообразий.

Reshetikhin N. *"Hamiltonian structure of first order classical field theories"*

ABSTRACT: The concept of Hamiltonian mechanics can be extended to Euclidean space times. Roughly speaking, it can be regarded as a functor from the space time category to the category of symplectic manifolds. The goal of the talk is to explain this concept and to demonstrate how it works in known classical field theories. The emphasis will be on gauge field theories.

Götze F. *"Approximations in Free and Classical Central Limit Theorems"*

ABSTRACT: We show asymptotic approximations of first and second order in the Central Limit Theorem of Free Probability. For the n -fold free convolution we establish error bounds of order $o(n^{-1/2})$ and $o(n^{-1})$ depending on the existence of three or four moments.

In the classical CLT the rate convergence in the entropy distance to the normal distribution and the behavior of this distance under convolution is investigated.

(Joint works with G. Chistyakov and S. Bobkov)

Dynnikov I. *"Monotonic simplification algorithms for knots"*

ABSTRACT: I will survey results and ideas concerning a very naive approach to recognition problems in knot theory, the one that is based on the monotone complexity reduction of the knot presentation. This approach is successful for the cases of recognizing the trivial knot and link factorizations. Examples found by D.Kazantsev show that the direct extension of the method to the problem of recognizing satellite knots does not work.

Takhtajan L. *"О магистерской диссертации В.И.Смирнова, проективных связностях с вещественной монодромией и уравнении Лиувилля"*

ABSTRACT: The solution of the famous problem of uniformization of Riemann surfaces was obtained in a definitive form by Koebe and Poincare in 1907 with the aid of potential theory. However, already in 1884 and 1898, Poincare presented approaches to this problem, making use, correspondingly, of second order ordinary differential equations with regular singular points, and of nonlinear partial differential

equation for the hyperbolic metric on the surface, the so-called Liouville's equation. Nowadays these two approaches play an important role in two-dimensional conformal field theory and in its connection with four-dimensional quantum theory.

In the present talk we give a survey of this development, from classic results of Klein and Poincare to the results, obtained in LOMI in the middle 1980s. Especially we will discuss V.I. Smirnov's thesis (Petrograd, 1918), devoted to the study of the monodromy group and the developing map for a second order ordinary differential equation with four real regular singular points. We will relate V.I. Smirnov results to the modern approach to real projective structures on Riemann surfaces, and will apply them to solutions of the Liouville equation with "black hole" type singularities.

Решение знаменитой проблемы униформизации римановых поверхностей в окончательном виде было получено Кёбе и Пуанкаре в 1907 г. с помощью теории потенциала. Однако, еще в 1884 и 1898 гг. Пуанкаре предложил подходы к этой проблеме, использующие, соответственно, обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с регулярными особыми точками, и нелинейное уравнение в частных производных для гиперболической метрики на поверхности, т.н. уравнение Лиувилля. В настоящее время эти подходы играют важную роль в двумерной конформной теории поля и её связи с четырехмерной квантовой теорией.

В настоящем докладе мы дадим обзор этого направления, от классических работ Клейна и Пуанкаре до результатов, полученных в ЛОМИ в середине 80-х годов прошлого столетия. Особое внимание мы уделим магистерской диссертации В.И. Смирнова (Петроград, 1918 г.), посвященной исследованию группы монодромии и отображения развертки обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя вещественными регулярными особыми точками. Мы свяжем результаты В.И. Смирнова с современными исследованиями о вещественных проективных структурах на римановых поверхностях, а также укажем их приложение к решениям уравнения Лиувилля с сингулярностями типа "черных дыр".

Ivanov S. *"From differential geometry to metric geometry and back again"*

ABSTRACT:

Classic differential geometry, studying intrinsic properties of Riemannian manifolds and similar spaces, have developed heavy machinery to handle various problems. However powerful these tools are, some problems still resist them.

M. Gromov pioneered another approach: objects of differential geometry can be viewed in a context of more general metric spaces that do not have to have any differential structure (but preserve other, more geometric, features of Riemannian spaces). Furthermore, the "space" of (nice) metric spaces can be equipped with its own structure which brings new tools to differential geometry, much like function spaces bring new tools to the study of functions.

I will survey some old and new fruits of this approach: groups of polynomial growth, curvature bounds, systolic and filling inequalities, inverse boundary problems.

Smirnov S. *"Discrete Complex Analysis and Probability"*

We discuss possible discretizations of complex analysis and some of their applications to probability and mathematical physics, following our recent work with Dmitry Chelkak, Hugo Duminil-Copin and Clément Hongler.