Введение в теорию представлений редуктивных p-адических групп

11 июня 2013 г.

Содержание

1 Распределения на l-группах

1.1 Функции и распределения на l-пространствах

Определение 1.1. Будем называть *l-пространством* хаусдорфово топологическое пространство, для любой точки которого существует база открытых компактных окрестностей. Будем называть *l-группой* хаусдорфову топологическую группу, для которой существует база открытых компактных окрестностей единицы, являющихся подгруппами.

Замечание 1.2.

(i) Компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства замкнуто в нем. Таким образом, открытые компактные окрестности из определения 1.1 являются также замкнутыми подмножествами.

(ii) Можно показать, что топологическое пространство X является l-пространством тогда и только тогда, когда оно локально компактно и для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $x_i \in U_i$ для $i = 1, 2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, и $U_1 \cup U_2 = X$.

(iii) Теорема ван Данцига утверждает, что топологическая группа является l-группой тогда и только тогда, когда она является l-пространством (то есть условие из определения 1.1 можно ослабить).

Пример 1.3.

(o) Канторово множество является компактным l-пространством.

(i) Проконечная группа с естественной топологией является компактной l-группой.

(ii) Пусть F обозначает неархимедово локальное поле с кольцом целых $\mathcal{O}_F$ и униформизующим элементом $t \in \mathcal{O}_F$. Тогда F и F^* с неархимедовой топологией являются l-группами с базами окрестностей $t^n\mathcal{O}_F$ и $1 + t^n\mathcal{O}_F$, $n \geqslant 1$, соответственно.

(iii) Пусть $\mathbf{X}$ — алгебраическое многообразие над неархимедовым локальным полем F. Тогда множество X, состоящее из F-точек $\mathbf{X}(F)$ является l-пространством, а $\mathbf{G}(F)$ является l-группой (для определения топологии на X достаточно рассмотреть случай аффинного многообразия $\mathbf{X} \subset \mathbb{A}^n$, для которого X является замкнутым подмножеством в F^n).

(iv) Для алгебраической группы $\mathbf{G}$ над неархимедовым локальным полем F группа $G := \mathbf{G}(F)$ является l-группой. Например, для линейной алгебраической группы $\mathbf{G} \subset \mathrm{GL}_d$ в качестве базы окрестностей единицы можно взять подгруппы $G \cap K_n$, $n \geqslant 1$, где

$$K_n := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_F) \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_F/t^n\mathcal{O}_F)\right).$$

(v) Пусть F — глобальное поле, и $\mathbb{A}_F^{fin}$ обозначает конечные адели, то есть ограниченное произведение полей F_v, где v пробегает все классы эквивалентности неархимедовых нормирований поля F. Тогда для любого алгебраического многообразия $\mathbf{X}$ над F множество его конечных адельных точек $\mathbf{X}(\mathbb{A}_F^{fin})$ с адельной топологией является l-пространством, а для любой алгебраической группы $\mathbf{G}$ над F группа $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F^{fin})$ является l-группой.

Определение 1.4. Для l-пространства X положим

$$\mathcal{E}(X) := \left\{\text{локально постоянные функции на } X \text{ со значениями в } \mathbb{C}\right\},$$

$$\mathcal{D}(X) := \left\{\text{функции из } \mathcal{E}(X) \text{ с компактным носителем}\right\},$$

$$\mathcal{D}'(X) := \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}(X), \mathbb{C}).$$

Элементы последнего пространства будем называть *распределениями* на X.

Теорию l-пространств можно воспринимать как аналог теории гладких многообразий. При этом аналогом пространства $\mathcal{E}(X)$ является пространство гладких функций, а аналогом $\mathcal{D}(X)$ является пространство гладких "быстро убывающих" функций.

Замечание 1.5. Для открытого подмножества $U \subset X$ корректно определено отображение $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(X)$, являющееся продолжением функций нулем. По двойственности возникает отображение ограничения распределений $\mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(U)$, $a \mapsto a|_U$.

Определение 1.6. Будем говорить, что распределение $a \in \mathcal{D}'(X)$ *имеет компактный носитель*, если существует такое компактное подмножество $Z \subset X$, что $a|_{X \smallsetminus Z} = 0$. Пусть $\mathcal{E}'(X) \subset \mathcal{D}'(X)$ обозначает пространство всех распределений с компактным носителем.

Замечание 1.7.

(i) Распределения с компактным носителем определяют функционалы на локально постоянных функциях: имеется каноническое отображение

$$\mathcal{E}'(X) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}(X), \mathbb{C}), \quad a \mapsto \left(f \mapsto \langle \tilde{f}, a\rangle\right), \tag{1}$$

где $a \in \mathcal{E}'(X)$, $f \in \mathcal{E}(X)$, а $\tilde{f}$ определяется так: рассмотрим покрытие $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ открытыми компактными подмножествами на которых f постоянно. Потом выберем из него конечное подпокрытие $U := \bigcup_i U_{\alpha_i}$ для компактного подмножества Z, где $a|_{X \smallsetminus Z} = 0$, и определим $\tilde{f} \in \mathcal{D}(X)$ как продолжение нулем ограничения f на открытое подмножество U. Заметим, что $\langle \tilde{f}, a\rangle$ не зависит от выбора $\tilde{f}$.

(ii) Отображение (1) задает каноническое сечение над подпространством $\mathcal{E}'(X) \subset \mathcal{D}'(X)$ у сюръекции

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}(X), \mathbb{C}) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}(X), \mathbb{C}) = \mathcal{D}'(X).$$

Следовательно, отображение (1) всегда инъективно, но биективно тогда и только тогда, когда X компактно (то есть тогда, когда $\mathcal{D}(X) = \mathcal{E}(X)$).

(iii) Можно показать, что для любого $a \in \mathcal{D}'(X)$ существует наименьшее замкнутое подмножество $i\colon \mathrm{supp}(a) \hookrightarrow X$, называемое носителем a, такое что ограничение a на его дополнение равно нулю. Также существует единственное распределение $\tilde{a} \in \mathcal{D}'(\mathrm{supp}(a))$, для которого $i_*(\tilde{a}) = a$, где $i_*\colon \mathcal{D}'(\mathrm{supp}(a)) \to \mathcal{D}'(X)$ — двойственное отображение к ограничению функций $i^*\colon \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(\mathrm{supp}(a))$. При этом отображение (1) задается в этих терминах так: $a \mapsto \big(f \mapsto \langle i^*(f), \tilde{a}\rangle\big)$.

Замечание 1.8.

(i) Для непрерывного отображения l-пространств $\varphi\colon Y \to X$ имеется отображение обратного образа

$$\varphi^*\colon \mathcal{E}(X) \to \mathcal{E}(Y)\,,$$
$$(\varphi^* f)(y) := f(\varphi(y)), \quad f \in \mathcal{D}(X),\, y \in Y\,.$$

Это определяет прямой образ для распределений с компактным носителем

$$\varphi_*\colon \mathcal{E}'(Y) \to \mathcal{E}'(X)$$

по формуле

$$\mathcal{E}'(Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}(Y), \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}(X), \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}(X), \mathbb{C}) = \mathcal{D}'(X)\,.$$

Поскольку образ относительно φ компактного подмножества в Y является компактным подмножеством в X, образ данной композиции содержится в подпространстве $\mathcal{E}'(X)$. При этом $\mathrm{supp}(\varphi_*(a)) = \varphi(\mathrm{supp}(a))$ для любого $a \in \mathcal{E}'(Y)$. Обобщая, можно определить отображение $\varphi_*\colon \mathcal{D}'_\varphi(Y) \to \mathcal{D}'(X)$, где $\mathcal{D}'_\varphi(Y)$ обозначает пространство всех распределений a на Y, для которых отображение $\mathrm{supp}(a) \to X$ собственно.

(ii) Для l-пространств X и Y их произведение $X \times Y$ тоже является l-пространством, и внешнее произведение функций задает изоморфизм

$$\boxtimes\colon \mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(X \times Y)\,,$$
$$(f \boxtimes f')(x, y) := f(x) f'(y), \quad f \in \mathcal{D}(X),\ f' \in \mathcal{D}(Y),\, x \in X,\, y \in Y\,.$$

Это определяет внешнее произведение распределений

$$\boxtimes\colon \mathcal{D}'(X) \otimes \mathcal{D}'(Y) \to \mathcal{D}'(X \times Y)$$

по формуле

$$\mathcal{D}'(X) \otimes \mathcal{D}'(Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y), \mathbb{C}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}(X \times Y), \mathbb{C}) = \mathcal{D}'(X \times Y)\,.$$

Поскольку произведение компактов — компакт, возникает внешнее произведение распределений с компактным носителем

$$\boxtimes\colon \mathcal{E}'(X) \otimes \mathcal{E}'(Y) \to \mathcal{E}'(X \times Y)\,.$$

1.2 Функции и распределения с коэффициентами в пучке

Все определения и конструкции из раздела 1.1 имеют тривиальное обобщение на случай произвольного пучка $\mathbb{C}$-векторных пространств $\mathcal{F}$ на l-пространстве X вместо пучка $\mathcal{O}_X$ локально постоянных функций на X. А именно, положим

$$\mathcal{E}(X,\mathcal{F}) := \Gamma(X,\mathcal{F}),$$

$$\mathcal{D}(X,\mathcal{F}) := \Gamma_c(X,\mathcal{F}),$$

$$\mathcal{D}'(X,\mathcal{F}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}(X,\mathcal{F}),\mathbb{C}),$$

где Γ обозначает пространство глобальных сечений пучка, а Γ_c обозначает пространство глобальных сечений с компактным носителем. Для открытого подмножества $U \subset X$ имеется продолжение нулем сечений с компактным носителем $\mathcal{D}(U,\mathcal{F}|_U) \to \mathcal{D}(X,\mathcal{F})$ и ограничение распределений $\mathcal{D}'(X,\mathcal{F}) \to \mathcal{D}'(U,\mathcal{F}|_U)$. Это позволяет определить подпространство $\mathcal{E}'(X,\mathcal{F}) \subset \mathcal{D}'(X,\mathcal{F})$, состоящее из распределений с компактным носителем. Для непрерывного отображения $\varphi\colon Y \to X$ возникают отображения

$$\varphi^*\colon \mathcal{E}(X,\mathcal{F}) \to \mathcal{E}(Y,\varphi^*\mathcal{F}), \quad \varphi_*\colon \mathcal{E}'(Y,\varphi^*\mathcal{F}) \to \mathcal{E}'(X,\mathcal{F}),$$

где $\varphi^*\mathcal{F}$ обозначает обратный образ пучка. Для произведения l-пространств $X \times Y$ и пучков $\mathbb{C}$-векторных пространств $\mathcal{F}$ на X и $\mathcal{G}$ на Y имеется изоморфизм

$$\mathcal{D}(X,\mathcal{F}) \otimes \mathcal{D}(Y,\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(X \times Y, p_X^*\mathcal{F} \otimes p_Y^*\mathcal{G}),$$

определяющий отображения

$$\mathcal{D}'(X,\mathcal{F}) \otimes \mathcal{D}'(Y,\mathcal{G}) \to \mathcal{D}'(X \times Y, p_X^*\mathcal{F} \otimes p_Y^*\mathcal{G}),$$

$$\mathcal{E}'(X,\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E}'(Y,\mathcal{G}) \to \mathcal{E}'(X \times Y, p_X^*\mathcal{F} \otimes p_Y^*\mathcal{G}),$$

где $p_X\colon X \times Y \to X$ и $p_Y\colon X \times Y \to Y$ обозначают естественные проекции.

Замечание 1.9. Из определения l-пространства следует, что $\mathcal{O}_X$ является постоянным пучком на X, ассоциированным с постоянным предпучком $\mathbb{C}$. Поэтому любой пучок $\mathbb{C}$-векторных на X имеет каноническую структуру пучка $\mathcal{O}_X$-модулей.

Для $\mathbb{C}$-векторного пространства V имеется пучок $V \otimes \mathcal{O}_X$ на X, сечения которого состоят из локально постоянных функций со значениями в V. Для краткости через $\mathcal{E}(X,V), \mathcal{D}(X,V), \ldots$ будем обозначать соответствующие пространства $\mathcal{E}(X, V \otimes \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{D}(X, V \otimes \mathcal{O}_X) \ldots$

Приведем пример пучка $\mathbb{C}$-векторных пространств на l-пространстве. Пусть l-группа G непрерывно действует на l-пространстве Y, и при этом фактор-топология на $X := G\backslash Y$ хаусдорфова. Тогда X с фактор-топологией является l-пространством. В качестве базы открытых компактных окрестностей в X можно взять образы относительно проекции $p\colon Y \to X$ открытых компактных подмножеств в Y.

Определение 1.10. Будем говорить, что подмножество $M \subset Y$ *компактно по модулю* G, если $p(M)$ является компактным подмножеством в X.

Из явного описания базиса топологии на X следует, что M компактно по модулю G тогда и только тогда, когда M содержится в подмножестве вида $G \cdot L$, где $L \subset Y$ — компактное подмножество.

Пусть теперь $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ — локально постоянный характер (или, что равносильно, непрерывный характер).

Определение 1.11. Определим пучок $\mathbb{C}$-векторных пространств $\mathcal{F}_\chi$ на X по формуле

$$\mathcal{F}_\chi(U) := \left\{ f \in \mathcal{E}(p^{-1}(U)) \mid \forall g \in G, y \in p^{-1}(U) : f(gy) = \chi(g) f(y) \right\}$$

для произвольного открытого подмножества $U \subset X$.

В частности, имеем

$$\mathcal{E}(X, \mathcal{F}_\chi) = \left\{ f \in \mathcal{E}(Y) \mid \forall g \in G, y \in Y : f(gy) = \chi(g) f(y) \right\},$$

$$\mathcal{D}(X, \mathcal{F}_\chi) := \left\{ \text{функции из } \mathcal{E}(X, \mathcal{F}_\chi) \text{ с компактным носителем по модулю } G \right\}.$$

1.3 Алгебра Гекке

Пусть G является l-группой. Для $g \in G$ определим левый и правый сдвиги на g по формуле

$$L_g\colon G \to G, \quad g' \mapsto g \cdot g',$$
$$R_g\colon G \to G, \quad g' \mapsto g' \cdot g.$$

Определение 1.12. *Левоинвариантной комплекснозначной мерой Хаара* на G называется такой элемент $\mu \in \mathcal{D}'(G)$, что $(L_g)_* a = a$ для любого $g \in G$ (правоинвариантные меры Хаара определяются аналогично). Пусть $\mu(G)$ обозначает пространство всех левоинвариантных комплекснозначных мер Хаара на G. Для $\mu \in \mu(G)$ и $f \in \mathcal{D}(G)$ положим $\int_G f d\mu := \langle f, \mu \rangle$.

Замечание 1.13.

(i) Легко показать, что $\mu(G)$ является одномерным $\mathbb{C}$-векторным пространством, и для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ элемент $\mu \in \mu(G)$ однозначно определяется значением $\mu(K) := \langle I_K, a \rangle$, где I_K обозначает характеристическую функцию подгруппы K. В частности, $\mu \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(K) \neq 0$.

(ii) Если G компактна, то любая левоинвариантныя мера Хаара является также и правоинвариантной, так как в этом случае $(R_g)^* I_G = I_G$ и, следовательно, $((R_g)_* \mu)(G) = \mu(G)$. Кроме того, можно зафиксировать нормализованную меру Хаара $\mu_G \in \mu(G)$, для которой $\mu_G(G) = 1$.

(iii) Унимодулярный характер принимает значения в $\mathbb{R}^*_{>0}$. Поэтому он тривиален, если G порождается компактными подгруппами.

Определение 1.14. Определим структуру ассоциативной алгебры на $\mathcal{E}'(G)$ следующим образом:

$$a_1 \cdot a_2 := m_*(a_1 \boxtimes a_2), \quad a_1, a_2 \in \mathcal{E}'(G)\,,$$

где $m\colon G \times G \to G$ обозначает групповой закон (иногда мы будем опускать точку при обозначении произведения распределений).

Пример 1.15.

(i) Для $g \in G$ обозначим через $\delta_g \in \mathcal{E}'(G)$ дельта-функцию в g:

$$\langle f, \delta_g \rangle := f(g), \quad f \in \mathcal{D}(G)\,.$$

Для любого элемента $a \in \mathcal{E}'(G)$ выполняются равенства

$$\delta_g a = (L_g)_* a, \quad a\delta_g = (R_g)_* a\,.$$

В частности, δ_e является единицей в алгебре $\mathcal{E}'(G)$, где e обозначает единичный элемент в G, а также $\delta_g \delta_{g'} = \delta_{gg'}$.

(ii) Для каждой компактной подгруппы $\Gamma \subset G$ определим распределение $e_\Gamma \in \mathcal{E}'(G)$ при помощи нормализованной меры Хаара μ_Γ на Γ:

$$\langle f, e_\Gamma \rangle := \textstyle\int_\Gamma f d\mu_\Gamma, \quad f \in \mathcal{D}(G)\,.$$

При этом $\delta_g e_\Gamma \delta_{g^{-1}} = e_{g\Gamma g^{-1}}$, а распределение $e_{\Gamma g} := e_\Gamma \delta_g$ соответствует интегрированию по мере $(R_g)_*\mu_\Gamma$ на Γg.

(iii) Если для компактных подгрупп $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$ выполняется равенство $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$, то имеем $e_\Gamma = e_{\Gamma_1} e_{\Gamma_2}$. В частности, $e_{\Gamma_1} e_{\Gamma_2} = e_{\Gamma_2}$, если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ (это следует из единственности с точностью до пропорциональности меры Хаара и ее биинвариантности на компактной группе).

Для описания класса представлений группы G, который нас будет интересовать (а именно, для описания гладких представлений), необходимо рассмотреть следующую подалгебру в $\mathcal{E}'(G)$.

Определение 1.16. *Алгеброй Гекке* $\mathcal{H}(G)$ называется подалгебра в $\mathcal{E}'(G)$, состоящая из $a \in \mathcal{E}'(G)$, для которых существует такая открытая компактная подгруппа $K \subset G$, что a инвариантно относительно левых сдвигов на элементы из K, то есть $(L_g)_*(a) = a$ для любого $g \in K$.

Замечание 1.17.

(i) Можно сказать, что распределение $a \in \mathcal{E}'(G)$ принадлежит $\mathcal{H}(G)$ тогда и только тогда, когда оно “равномерно локально постоянно”. Отметим, что аналогичное условие равномерности для локально постоянных функций с компактным носителем выполняется автоматически.

(ii) Каждая открытая компактная подгруппа $K \subset G$ определяет идемпотент $e_K \in \mathcal{H}(G)$ (см. замечание 1.15(iii)).

(iii) В алгебре $\mathcal{H}(G)$ есть единица (равная δ_e) тогда и только тогда, когда группа G дискретна.

Утверждение 1.18.

(i) Имеется изоморфизм $\mathbb{C}$-векторных пространств:

$$\mathcal{D}(G) \otimes \mu(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(G), \quad f \otimes \mu \mapsto \big(f' \mapsto \textstyle\int_G f f' d\mu\big), \quad f, f' \in \mathcal{D}(G), \quad \mu \in \mu(G)\,.$$

(ii) Любой элемент $a \in \mathcal{H}(G)$ инвариантен слева и справа относительно некоторой открытой компактной подгруппы в G.

Доказательство. Зафисируем $0 \neq \mu \in \mu(G)$ и построим явно обратное к отображению $\mathcal{D}(G) \to \mathcal{H}(G)$, задаваемому элементом μ и отображением из (i). Из примера 1.15(ii) следует, что любой элемент $a \in \mathcal{H}(G)$ представляется в виде

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i \, e_{Kg_i}\,,$$

где $c_i \in \mathbb{C}$, $g_i \in G$, $1 \leqslant i \leqslant n$, а K является открытой компактной подгруппой в G. Поскольку $\mu(K) \neq 0$, корректно определена функция

$$f := \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\mu(K)} I_{Kg_i} \in \mathcal{D}(G)\,,$$

где $I_{Kg_i} \in \mathcal{D}(G)$ — характеристические функции открытых компактных подмножеств Kg_i. Легко проверить, что $a \mapsto f$ дает искомое обратное отображение, что доказывает (i).

Для доказательства (ii) заметим, что элемент a инвариантен слева и справа относительно открытой компактной подгруппы $\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} g_i^{-1} K g_i\big) \cap K$. □

Замечание 1.19. Зафиксируем $0 \neq \mu \in \mu(G)$. Тогда произведение в алгебре $\mathcal{H}(G)$ соответствует относительно изоморфизма из утверждения 1.18(i) произведению между функциями $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(G)$, являющемуся их сверткой $f_1 * f_2$:

$$(f_1 * f_2)(g) := \textstyle\int_G f_1(g') f_2((g')^{-1} g) d\mu(g'), \quad g \in G\,.$$

Определение 1.20. Для открытой компактной подгруппы $K \subset G$ обозначим через $\mathcal{H}_K(G)$ подалгебру в $\mathcal{H}(G)$, называемую *локальной алгеброй Гекке*, состоящую из распределений, инвариантных относительно левых и правых сдвигов на элементы из K.

Замечание 1.21.

(i) Имеется равенство $\mathcal{H}_K(G) = e_K\mathcal{H}(G)e_K$, и e_K является единицей в алгебре $\mathcal{H}_K(G)$. Кроме того,

$$\mathcal{H}(G) = \bigcup_{K\subset G} \mathcal{H}_K(G)\,,$$

где объединение берется по всем открытым компактным подгруппам $K \subset G$.

(ii) Распределение $e_{KgK} := e_K\delta_g e_K$ соответствует единственной нормализованной мере с носителем на двойном классе смежности KgK, инвариантной относительно левых и правых сдвигов на элементы из K. Все элементы из $\mathcal{H}_K(G)$ являются конечными линейными комбинациями элементов вида e_{KgK}, $g \in G$. Если $KgKg'K = Kgg'K$, то $e_{KgK} \cdot e_{Kg'K} = e_{Kgg'K}$.

Определение 1.22. *Алгеброй с идемпотентами* называется ассоциативная алгебра $\mathcal{H}$ (возможно, без единицы), в которой для любого конечного набора элементов $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{H}$ существует такой идемпотент $e \in \mathcal{H}$, что $ea_i = a_ie = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Невырожденный $\mathcal{H}$-модуль* — это левый $\mathcal{H}$-модуль M, для которого $\mathcal{H} \cdot M = M$ (здесь важно то, что в $\mathcal{H}$ может не быть единицы!). Через $\mathrm{Mod}(\mathcal{H})$ обозначим абелеву категорию всех невырожденных $\mathcal{H}$-модулей.

Замечание 1.23. Для алгебры с идемпотентами $\mathcal{H}$ и невырожденного $\mathcal{H}$-модуля M имеем

$$\mathcal{H} = \bigcup_{e\in\mathcal{H}} e\mathcal{H}e, \quad M = \bigcup_{e\in\mathcal{H}} eM\,,$$

где e пробегает все идемпотенты алгебры $\mathcal{H}$.

Пример 1.24.

(i) Для l-группы G алгебра Гекке $\mathcal{H}(G)$ является алгеброй с идемпотентами (при этом достаточно рассматривать все идемпотенты вида e_K как выше).

(ii) Для любого l-пространства X функциональное пространство $\mathcal{D}(X)$ с поточеченым умножением является алгеброй с идемпотентами (при этом достаточно рассматривать все идемпотенты вида I_U, где $U \subset X$ — открытое компактное подмножество). Можно показать, что функтор $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{D}(X, \mathcal{F})$ определяется эквивалентность категории пучков $\mathbb{C}$-векторных пространств на X и категории $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}(X))$.

1.4 Алгебра Гекке с характером

Пусть $Z \subset G$ — замкнутая подгруппа, лежащая в центре группы G, и $\chi\colon Z \to \mathbb{C}^*$ — локально постоянный характер. Как объяснялось в разделе 1.2, на l-группе G/Z возникает пучок $\mathbb{C}$-векторных пространств $\mathcal{F}_\chi$. Поскольку χ — гомоморфизм, а Z — центральна, имеется канонический изоморфизм

$$m^*\mathcal{F}_\chi \cong p_1^*\mathcal{F}_\chi \otimes p_2^*\mathcal{F}_\chi\,,$$

где $m\colon G/Z\times G/Z\to G/Z$ — умножение, а $p_i\colon G/Z\times G/Z\to G/Z$, $i=1,2$ — проекции. Из этого возникает структура алгебры на $\mathcal{E}'(G/Z,\mathcal{F}_\chi)$, заданная по стандартной формуле $a_1\cdot a_2:=m_*(p_1^*(a_1)\otimes p_2^*(a_2))$.

Для любого $g\in G$ отображения $(L_g)^*,(R_g)^*\colon \mathcal{E}(G)\to\mathcal{E}(G)$ индуцируют отображения на подпространстве $\mathcal{E}(G/Z,\mathcal{F}_\chi)\subset\mathcal{E}(G)$ (на самом деле, пучок $\mathcal{F}_\chi$ является G-эквивариантным пучком на X). Это определяет отображения $(L_g)_*,(R_g)_*$ на $\mathcal{D}'(G/Z,\mathcal{F}_\chi)$ и $\mathcal{E}'(G/Z,\mathcal{F}_\chi)$.

Определим $\mathcal{H}_\chi(G)$ как подпространство в $\mathcal{E}'(G/Z,\mathcal{F}_\chi)$, состоящее из равномерно локально постоянных распределений: $\mathcal{H}_\chi(G)$ состоит из $a\in\mathcal{E}'(G/Z,\mathcal{F}_\chi)$, для которых существует такая открытая компактная подгруппа $K\subset G$, что $(L_g)_*(a)=a$ для любого $g\in K$. Можно показать, что $\mathcal{H}_\chi(G)$ является алгеброй относительно введенного выше произведения и для нее выполняются аналоги всех утверждений из раздела 1.3.

Пусть $K\subset G$ — такая открытая компактная подгруппа, что $\chi(Z\cap K)=1$. Пусть также $p\colon G\to G/Z$ обозначает гомоморфизм факторизации. Определим элемент $e_{K,\chi}\in\mathcal{H}_\chi(G)$ по формуле

$$\langle f,e_{K,\chi}\rangle:=\textstyle\int_{p(K)}f|_K d\mu_{p(K)},\quad f\in\mathcal{D}(G/Z,\mathcal{F}_\chi)\,,$$

где $\mu_{p(K)}$ — нормализованная мера Хаара на компактной l-группе $p(K)$ (заметим, что $f|_K$ корректно определяет функцию на $p(K)$). Непосредственно проверяется, что $e_{K,\chi}$ — идемпотент.

Для произвольного элемента $g\in G$ имеется изоморфизм $\mathbb{C}$-векторных пространств

$$\mathcal{F}_\chi(p(Kg))\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}(p(Kg)),\quad f\mapsto f|_{Kg}\,.$$

Данный изоморфизм коммутирует с действием группы K левыми сдвигами. Используя это, можно показать, что аналогично утверждению 1.18(i) имеется изоморфизм

$$\mathcal{D}(G/Z,\mathcal{F}_{\chi^{-1}})\otimes\mu(G/Z)\cong\mathcal{H}_\chi(G)\,.$$

Напомним, что $\mathcal{D}(G/Z,\mathcal{F}_{\chi^{-1}})$ состоит из локально постоянных функций f на G с компактным носителем по модулю Z и таких, что $f(zg)=\chi^{-1}(z)f(g)$ для любых $z\in Z$, $g\in G$. Зафиксируем меру Хаара $\mu_{G/Z}$ на G/Z. Тогда спаривание

$$\mathcal{H}_\chi(G)\otimes\mathcal{E}(G/Z,\mathcal{F}_\chi)\to\mathbb{C}$$

и произведение

$$\mathcal{H}_\chi(G)\otimes\mathcal{H}_\chi(G)\to\mathcal{H}_\chi(G)$$

соответствуют спариванию

$$f\otimes f'\mapsto\textstyle\int_{G/Z}ff'd\mu_{G/Z},\quad f\in\mathcal{D}(G/Z,\mathcal{F}_{\chi^{-1}}),\ f'\in\mathcal{E}(G/Z,\mathcal{F}_\chi)$$

и произведению между функциями из $\mathcal{D}(G/Z,\mathcal{F}_{\chi^{-1}})$, заданному сверткой:

$$f_1\otimes f_2\mapsto f_1*f_2,\quad (f_1*f_2)(g):=\textstyle\int_{G/Z}f_1(g')f_2((g')^{-1}g)d\mu_{G/Z}(g')\,.$$

Заметим, что в обоих интегралах подынтегральное выражение является корректно определенной функцией на G/Z. При этом введенный выше идемпотент $e_{K,\chi}$ соответствует функции на $Z \cdot K$, заданной по формуле

$$z \cdot g \mapsto \frac{1}{\mu_{G/Z}(p(K))}\chi^{-1}(z), \quad z \in Z, g \in K\,.$$

Также выполняется аналог утверждения 1.18(ii), и алгебра $\mathcal{H}_\chi(G)$ является алгеброй с идемпотентами вида $e_{K,\chi}$.

2 Гладкие представления

2.1 Общие свойства

Мы будем изучать некоторые специальные комплексные представления l-группы G. При этом нами будут рассматриваться в том числе (и даже в основном) бесконечномерные представления. Иногда для представления V группы G мы будет также уточнять соответствующий гомоморфизм $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$, используя обозначение (V, π) для такого представления. Через V^G будем обозначать пространство G-инвариантов в V. Через V_G будем обозначать пространство G-коинвариантов, то есть фактор пространства V по подпространству, порожденному элементами вида $g(v) - v$, $g \in G$, $v \in V$. Для представления V и элементов $v \in V$, $l \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ определим соответствующий матричный элемент как функцию на G по формуле

$$m_{v,l}(g) := \langle g(v), l\rangle\,, \quad g \in G\,.$$

Аналогия между локально постоянными функциями и гладкими функциями подсказывает следующую терминологию:

Определение 2.1. Представление V группы G называется *гладким*, если для любого вектора $v \in V$ отображение $G \to V$, $g \mapsto g(v)$ локально постоянно (то есть принадлежит $\mathcal{E}(G, V)$). Через $\mathrm{Rep}(G)$ обозначим абелеву категорию гладких представлений группы G.

Замечание 2.2.

(i) Представление V гладкое тогда и только тогда, когда для любого вектора $v \in V$ стабилизатор $\mathrm{Stab}_G(v)$ открыт в G.

(ii) Представление V гладкое тогда и только тогда, когда

$$V = \bigcup_{K \subset G} V^K\,,$$

где K пробегает все открытые компактные подгруппы в G.

(iii) Морфизм между гладкими представлениями $V \to W$ изоморфизм тогда и только тогда, когда для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ отображение $V^K \to W^K$ является изоморфизмом.

Определение 2.3. Для произвольного представления V группы G положим

$$V_{sm} := \bigcup_{K \subset G} V^K\,,$$

где K пробегает все открытые компактные подгруппы в G. Элементы подпространства $V_{sm} \subset V$ будем называть *гладкими векторами в V относительно G*. Если нам будет необходимо уточнять группу G, относительно которой берутся гладкие вектора, то мы будем писать $V_{sm,G}$.

Замечание 2.4. Функтор $V \mapsto V_{sm}$ из категории всех представлений группы G в категорию гладких представлений $\mathrm{Rep}(G)$ является сопряженным справа к забывающему функтору.

Пример 2.5.

(i) Пусть G непрерывно действует на l-пространстве X. Тогда на $\mathcal{D}(X)$ возникает структура гладкого представления группы G, заданная по формуле $g(f) := (g^{-1})^* f$ для $g \in G$, $f \in \mathcal{D}(X)$ (то есть $((g^{-1})^* f)(x) = f(g^{-1}x)$). Заметим, что в общем случае $\mathcal{E}(X)$, $\mathcal{D}'(X)$ и $\mathcal{E}'(X)$ не являются гладкими представлениями группы G.

(ii) На $\mathcal{D}(G)$ имеются две структуры гладкого представления группы G, заданные по формулам $g(f) := (L_{g^{-1}})^* f$ и $g(f) := (R_g)^* f$ для $g \in G$, $f \in \mathcal{D}(G)$. На алгебре Гекке $\mathcal{H}(G)$ имеются две структуры гладкого представления группы G, заданные по формулам $g(a) := (L_g)_* a = \delta_g a$ и $g(a) := (R_{g^{-1}})_* a = a\delta_{g^{-1}}$ для $g \in G$, $a \in \mathcal{H}(G)$. По умолчанию, мы будем рассматривать первые структуры представлений на $\mathcal{D}(G)$ и $\mathcal{H}(G)$. По определению 1.16 и утверждению 1.18(ii) относительно обеих структур выполняется равенство $\mathcal{H}(G) = \mathcal{E}'(G)_{sm}$.

(iii) На одномерном пространстве комплекснозначных левоинвариантных мер Хаара $\mu(G)$ имеется структура гладкого представление группы G, заданная по формуле $g(\mu) := (R_{g^{-1}})_* \mu$. Соответствующий гомоморфизм $G \to \mathbb{C}^*$ называется *унимодулярным характером* группы G. В частности, для компактной группы G унимодулярный характер тривиален (см. замечание 1.13(ii)).

(iv) Изоморфизм $\mathcal{D}(G) \otimes \mu(G) \cong \mathcal{H}(G)$ из упражнения 1.18(i) является изоморфизмом представлений G относительно первых структур из пункта (ii) и тривиального действия G на $\mu(G)$. Также, данное отображение является изоморфизмом представлений G относительного вторых структур из пункта (ii) и действия на $\mu(G)$ из пункта (iii).

(v) Представление V *конечно порождено*, если существует такое конечное подмножество $S \subset V$, что V является минимальным подпредставлением в себе, содержащим S. Представление (V, π) компактной l-группы G гладко и конечно порождено (в частности, неприводимо) тогда и только тогда, когда V конечномерно, а π пропускается через конечную фактор-группу. В одну сторону это следует из того, что для любого вектора $v \in V$ в гладком представлении множество $G/\operatorname{Stab}_G(v)$ компактно и дискретно и, стало быть, конечно. В другую сторону это следует из того, что у единицы в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ есть открытая окрестность, не содержащая нетривиальных подгрупп.

Пусть F обозначает неархимедово локальное поле с кольцом целых $\mathcal{O}_F$ и униформизующим элементом $t \in \mathcal{O}_F$.

Пример 2.6.

(i) Характер $\chi\colon F^* \to \mathbb{C}^*$ гладкий тогда и только тогда, когда он непрерывен, то есть когда $\chi(1+t^n\mathcal{O}_F) = 1$ для некоторого $n \geqslant 1$.

(ii) Из примера 2.5(i) следует, что функциональное пространство $\mathcal{D}(F^d)$ является (бесконечномерным) гладким представлением l-группы $\mathrm{GL}_d(F)$.

Утверждение 2.7. *Для любого гладкого конечномерного представления* (V, π) *l-группы* $\mathrm{GL}_d(F)$ *имеем* $\operatorname{Ker}(\pi) \supset \mathrm{SL}_d(F)$.

Доказательство. Пусть E обозначает единичную матрицу, а E_{ij} обозначает матрицу с единственным ненулевым матричным элементом (ij), равным 1. Рассмотрим подгруппу $U = E + F \cdot E_{ij}$, $i \neq j$, в $\mathrm{GL}_d(F)$. Из конечномерности V следует, что подгруппа $\operatorname{Ker}(\pi)$ открыта в $\mathrm{GL}_d(F)$. Следовательно, подгруппа $\operatorname{Ker}(\pi) \cap U$ открыта в U, а значит, содержит матрицу $E + uE_{ij}$, где $0 \neq u \in F$, так как F не дискретна. Сопряжение диагональной матрицей с элементами $(a_1, \ldots, a_n)$ матрицы $E + uE_{ij}$ равно $E + (a_i u a_j^{-1})E_{ij}$. Так как $\operatorname{Ker}(\pi)$ нормальна в $\mathrm{GL}_d(F)$, мы получаем, что $\operatorname{Ker}(\pi) \supset U$. Теперь требуемое утверждение следует из того, что $\mathrm{SL}_d(F)$ порождается подгруппами вида U. □

2.2 Невырожденные модули над алгеброй Гекке

Заметим, что для любого векторного пространства V имеется каноническое спаривание

$$\mathcal{D}'(G) \otimes \mathcal{D}(G, V) \to V\,,$$

где $\mathcal{D}(G, V) \cong \mathcal{D}(G) \otimes V$ обозначает пространство локально постоянных функций на G с компактным носителем и со значением в V. Аналогично замечанию 1.7 это определяет спаривание

$$\mathcal{E}'(G) \otimes \mathcal{E}(G, V) \to V\,,$$

где $\mathcal{E}(G, V)$ обозначает пространство локально постоянных функций на G со значением в V.

Определение 2.8. Пусть V — гладкое представление группы G. Для элемента $a \in \mathcal{E}'(G)$ и вектора $v \in V$ положим

$$a \cdot v := \langle \big(g \mapsto g(v)\big), a \rangle$$

(иногда мы будем опускать точку при обозначении действия распределения на вектор).

Замечание 2.9.

(i) Для любых $g \in G$ и $v \in V$ имеем $\delta_g v = g(v)$.

(ii) Для элементов $v \in V$, $l \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ функция $m_{v,l}$ локально постоянна, и для любого элемента $a \in \mathcal{E}'(G)$ выполняется равенство

$$\langle av, l \rangle = \langle m_{v,l}, a \rangle .$$

(iii) Непосредственно проверяется, что для любых элементов $g \in G$, $f \in \mathcal{D}(G, V)$ и $a \in \mathcal{D}'(G)$ выполняется равенство $g\langle f, a \rangle = \langle g(f), a \rangle$. Из этого следует, что для любых элементов $g \in G$, $f \in \mathcal{E}(G, V)$ и $a \in \mathcal{E}'(G)$ выполняется аналогичное равенство $g\langle f, a \rangle = \langle g(f), a \rangle$.

(iv) Определение 2.8 задает на V структуру левого модуля над алгеброй $\mathcal{E}'(G)$. Действительно, по пункту (iii) для любых $a, a' \in \mathcal{E}'(G)$, $v \in V$ имеются равенства

$$a \cdot (a' \cdot v) := \langle (g \mapsto \langle g' \mapsto (g'g)(v), a' \rangle, a \rangle .$$

По теореме Фубини последнее выражение равно

$$\langle \big((g, g') \mapsto (gg')(v)\big), a \boxtimes a' \rangle = (a \cdot a') \cdot v .$$

(v) Возникающий функтор $\mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{E}'(G))$ не является эквивалентностью категорий, так как для произвольного $\mathcal{E}'(G)$-модуля соответствующее представление группы G, построенное по формуле из пункта (i), не обязательно гладкое. Например, $\mathcal{E}'(G)$ как регулярный модуль над самой собой соответствует в общем случае негладкому представлению группы G.

Утверждение 2.10. *Пусть V — гладкое представление группы G. Тогда действие из определения 2.8 задает на V структуру невырожденного $\mathcal{H}(G)$-модуля. Это определяет эквивалентность категорий* $\mathrm{Rep}(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(\mathcal{H}(G))$.

Доказательство. Опишем в явном виде структуру $\mathcal{H}(G)$-модуля на V. Для любого вектора $v \in V$ и распределения $a \in \mathcal{H}(G)$ существует такая открытая компактная подгруппа $K \subset G$, что $v \in V^K$, и $a = \sum_{i=1}^n c_i\, e_{g_i K}$ для некоторых $c_i \in \mathbb{C}$, $g_i \in G$. Тогда имеем $av = \sum_{i=1}^n c_i g_i(v)$. Невырожденность V как $\mathcal{H}(G)$-модуля следует из того, что $e_K v = v$.

Квазиобратный функтор $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(G)) \to \mathrm{Rep}(G)$ строится следующим образом: для невырожденного $\mathcal{H}(G)$-модуля M и элементов $g \in G$, $m \in M$ положим $g(m) := e_{gK} m$, где $m \in e_K M$. $\square$

Для гладкого представления (V, π) будем обозначать соответствующий гомоморфизм $\mathcal{H}(G) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ также через π.

Пример 2.11.

(i) Первая структура гладкого представления на $\mathcal{H}(G)$ из примера 2.5(ii) соответствует естественной структуре левого $\mathcal{H}(G)$-модуля на $\mathcal{H}(G)$.

(ii) Пусть $\imath\colon G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, и для $a \in \mathcal{H}(G)$ положим

$$a^+ := \imath_*(a) \in \mathcal{H}(G)\,.$$

Это определяет антиинволюцию алгебры Гекке. Вторая структура гладкого представления на $\mathcal{H}(G)$ из примера 2.5(ii) соответствует следующей структуре левого $\mathcal{H}(G)$-модуля на $\mathcal{H}(G)$:

$$a\colon a' \mapsto a'a^+\,.$$

Замечание 2.12. Зафиксируем меру Хаара μ на G. Тогда изоморфизм из утверждения 1.18(i) индуцирует следующее действие $\mathcal{D}(G)$ на V:

$$fv = \textstyle\int_G f(g)g(v)d\mu(g), \quad f \in \mathcal{D}(G),\, v \in V\,.$$

Пусть $Z \subset G$ — замкнутая подгруппа, лежащая в центре группы G, и $\chi\colon Z \to \mathbb{C}^*$ — локально постоянный характер. Будем говорить, что гладкое представление V группы G является *χ-представлением*, если Z действует на V через характер χ, то есть для всех $z \in Z$, $v \in V$ имеется равенство $z(v) = \chi(z)v$. Через $\mathrm{Rep}_\chi(G)$ обозначим абелеву категорию гладких χ-представлений группы G. Следующий факт аналогичен утверждению 2.10.

Утверждение 2.13. *Пусть V — гладкое χ-представление группы G. Тогда на V определена структура невырожденного $\mathcal{H}_\chi(G)$-модуля по формуле*

$$a \cdot v = \big\langle \big(g \mapsto g(v)\big), a\big\rangle, \quad a \in \mathcal{H}_\chi(G),\, v \in V\,.$$

Это определяет эквивалентность категорий $\mathrm{Rep}_\chi(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(\mathcal{H}_\chi(G))$.

2.3 Модули над локальной алгеброй Гекке

Пусть $K \subset G$ является открытой компактной подгруппой.

Замечание 2.14.

(i) Для гладкого представления V группы G идемпотент $e_K \in \mathcal{H}_K(G)$ определяет проекцию из V на K-инварианты V^K, то есть $e_K V = V^K$. В частности, функтор $V \mapsto V^K$ точен.

(ii) Для любого вектора $v \in V$ имеется равенство

$$e_K v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i(v)\,,$$

где n равно индексу $K' := K \cap \mathrm{Stab}_G(v)$ в K, а $g_i \in K$ пробегают представителей классов из K/K'. Из этого следует, что v и $e_K v$ имеют одинаковые образы в V_K. Следовательно, e_K определяет обратное отображение к естественному отображению $V^K \to V_K$, то есть пространства K-инвариантов и K-коинвариантов канонически изоморфны.

(iii) Аналогичные факты верны также для произвольной компактной подгруппы $\Gamma \subset G$ и элемента $e_\Gamma \in \mathcal{E}'(G)$.

Обозначим через $\mathrm{Rep}_K(G)$ полную подкатегорию в $\mathrm{Rep}(G)$, состоящую из гладких представлений V, порождаемых V^K и таких, что для любого подпредставления $W \subset V$ выполняется условие $W^K \neq 0$.

Утверждение 2.15. *Имеется эквивалентность категорий*

$$\mathrm{Rep}_K(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(\mathcal{H}_K(G)), \quad V \mapsto V^K .$$

Доказательство. Квазиобратный функтор строится следующим образом. Модулю M над локальной алгеброй Гекке $\mathcal{H}_K(G)$ сопоставляется представление V, являющееся фактором представления $\mathcal{H}(G)\otimes_{\mathcal{H}_K(G)}M$ по наибольшему подпредставлению с нулевыми K-инвариантами, то есть не пересекающемуся с

$$(\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}_K(G)} M)^K = e_K \otimes M .$$

□

Замечание 2.16.

(i) По утверждению 2.15 категория $\mathrm{Rep}_K(G)$ является абелевой категорией. Естественное вложение $\mathrm{Rep}_K(G) \to \mathrm{Rep}(G)$ сохраняет мономорфизмы и эпиморфизмы, но не является точным функтором.

(ii) Лемма Жаке утверждает, что для редуктивной группы над неархимедовым локальным полем существует базис открытых замкнутых подгрупп $K \subset G$ таких, что для любого $\mathcal{H}_K(G)$-модуля M представление $\mathcal{H}(G)\otimes_{\mathcal{H}_K(G)}M$ не содержит подпредставлений с нулевыми K-инвариантами. Для случая $G = \mathrm{GL}_d(F)$ в качестве таких групп K можно взять группы K_n из примера 1.3(iv).

2.4 Допустимые представления

Для гладких представлений V и W l-группы G их тензорное произведение $V \otimes W$ также является гладким представлением группы G. Это определяет симметрическую тензорную структуру на категории $\mathrm{Rep}(G)$. Тензорной единицей в этой категории является тривиальное одномерное представление $\mathbb{C}$.

Определение 2.17. Для гладких представлений V и W группы G положим

$$\mathcal{H}om(V, W) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)_{sm} ,$$

где гладкие вектора берутся относительно группы G. Также положим $V^\vee := \mathrm{Hom}\,(V, \mathbb{C})$.

Бифунктор $\mathcal{H}om(-,-)$ определяет внутренний Hom в тензорной категории $\mathrm{Rep}(G)$, то есть для гладких представлений U, V и W имеется функториальный изоморфизм:

$$\mathrm{Hom}_G(U, \mathcal{H}om(V,W)) \cong \mathrm{Hom}_G(U \otimes V, W)\,.$$

Это следует из того, что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,-)$ определяет внутренний Hom на тензорной категории всех представлений, а взятие гладких векторов сопряжено справа к забывающему функтору.

Замечание 2.18.

(i) Явным образом, элемент $g \in G$ действует на $l \in \mathcal{H}om(V,W)$ по формуле $(gl)(v) := g(l(g^{-1}v))$, где $v \in V$.

(ii) Возникающая структура модуля над алгеброй Гекке $\mathcal{H}(G)$ на $\mathcal{H}om(V,W)$ задается по формуле (см. пример 2.11(ii)): $(al)(v) = a(l(a^{+}v))$.

(iii) Для любых гладких представлений V и W имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_G(V, W^{\vee}) \cong \mathrm{Hom}_G(W, V^{\vee})\,,$$

так как оба пространства канонически изоморфны $(V \otimes W)_G$.

Лемма 2.19. *Для любого гладкого представления V группы G и векторного пространства W ограничение на K-инварианты индуцирует канонический изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^K \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^K, W)\,.$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^K$ совпадает с подпространством $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_K, W)$ в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$. Поэтому требуемое следует из замечания 2.14(ii). □

Напомним, что *дуализируемый объект* в тензорной категории $\mathrm{Rep}(G)$ — это такое гладкое представление V, что канонический морфизм $V^{\vee} \otimes W \to \mathcal{H}om(V,W)$ является изоморфизмом. Легко показать, что это равносильно конечномерности представления V.

Определение 2.20. Гладкое представление V *допустимо*, если оно самодвойственно, то есть канонический морфизм $V \to V^{\vee\vee}$ является изоморфизмом.

Из дуализируемости следует допустимость, но обратное неверно. Тем не менее, см. утверждение 2.21(iv) ниже.

Утверждение 2.21. *Пусть V — гладкое представление группы G. Следующие условия равносильны:*

(i) представление V допустимо;

(ii) для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ пространство инвариантов V^K конечномерно;

(iii) для любого гладкого представления W группы G канонический морфизм представлений l-группы $G \times G$

$$V^{\vee} \otimes W \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)_{sm, G\times G} \tag{2}$$

является изоморфизмом, где справа гладкие вектора берутся относительно группы $G \times G$;

(iv) для любого элемента $a \in \mathcal{H}(G)$ соответствующий оператор $a\colon V \to V$ имеет конечный ранг;

(v) для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ каждая изотипическая компонента в V, как представления компактной группы K, имеет конечную размерность.

Доказательство. $(i) \Longleftrightarrow (ii)$:

Морфизм $V \to V^{\vee\vee}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ отображение

$$V^K \to (V^{\vee\vee})^K \tag{3}$$

является изоморфизмом. По лемме 2.19 отображение (3) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда является изоморфизмом каноническое отображение

$$V^K \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^K, \mathbb{C}), \mathbb{C}\right).$$

Последнее равносильно конечномерности V^K.

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$:

Морфизм (2) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда для любых открытых компактных подгрупп $K_1, K_2 \subset G$ следующее отображение является изоморфизмом:

$$(V^{\vee} \otimes W)^{K_1 \times K_2} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^{K_1 \times K_2} \tag{4}$$

По лемме 2.19 имеются изоморфизмы

$$(V^{\vee} \otimes W)^{K_1 \times K_2} = (V^{\vee})^{K_1} \otimes W^{K_2} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{K_1}, \mathbb{C}) \otimes W^{K_2},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^{K_1 \times K_2} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{K_1}, W^{K_2}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{K_1}, W^{K_2})$$

Значит, отображение (4) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда является изоморфизмом каноническое отображение

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{K_1}, \mathbb{C}) \otimes W^{K_2} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{K_1}, W^{K_2}).$$

Последнее равносильно конечномерности V^{K_1}.

$(ii) \Longleftrightarrow (iv)$:

Условие (ii) равносильно тому, что для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ пространство $e_K V$ конечномерно. Это равносильно тому, что для любого элемента $a \in \mathcal{H}(G)$ пространство aV конечномерно, так как $\mathcal{H}(G)$ является алгеброй с идемпотентами e_K.

$(ii) \Longleftrightarrow (v)$:

Очевидно, что из (v) следует (ii) (для этого достаточно рассмотреть одномерные тривиальные представления групп K). Докажем обратную импликацию. Как объясняется в примере 2.5(iv), любое неприводимое гладкое представление (R, ρ) группы K конечномерно, и его ядро $\mathrm{Ker}(\rho)$ содержит открытую компактную подгруппу $K' \subset K$. Поскольку $V^{K'}$ конечномерно, пространство $\mathrm{Hom}_K(R, V)$ тоже конечномерно, что доказывает (v). $\square$

Пример 2.22. В общем случае гладкие представления $\mathcal{H}(G)$ и $\mathcal{D}(X)$ из примера 2.5(i) не являются допустимыми.

Замечание 2.23. По утверждению 2.21(iv) для допустимого представления (V, π) и элемента $a \in \mathcal{H}(G)$ корректно определен след $\mathrm{Tr}_\pi(a) := \mathrm{Tr}(\pi(a))$. По утверждению 1.18$(i)$ это определяет элемент

$$\mathrm{Tr}_\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(G), \mathbb{C}) \cong \mathcal{D}'(G) \otimes \mu(G)^\vee \,.$$

Нетрудно проверить, что функционал Tr_π пропускается через фактор по коммутанту $\mathcal{H}(G)/[\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G)]$. Заметим, что для любого открытого подмножества $U \subset G$ имеется каноническое вложение $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{D}'(U) \otimes \mu(G)^\vee$. Глубокая теорема Хариш–Чандры утверждает, что для любого допустимого представления (V, π) редуктивной группы G над неархимедовым локальным полем F существует (явно описываемое) открытое по Зарисскому подмножество $U \subset G$, такое что $\mathrm{Tr}_\pi|_U$ задается локально постоянной функцией на U. Ее значение на элементе $g \in U$ можно считать "следом" g на V (хотя оператор $\pi(g)$ на V имеет бесконечный ранг).

2.5 Замена группы

Пусть даны функторы $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Будем говорить, что *имеется сопряженность функторов* (F, G), если функтор F является сопряженным слева к функтору G, то есть задана биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, G(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), Y) \,,$$

функториальная по объектам X из $\mathcal{A}$ и Y из $\mathcal{B}$. Заметим, что в этом случае функтор F точен справа, а G точен слева.

Пусть задан непрерывный гомоморфизм l-групп $\varphi\colon H \to G$. Тогда возникает естественный функтор (иногда называемый *ограничением*)

$$\varphi^*\colon \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Rep}(H) \,.$$

В частности, на алгебре Гекке $\mathcal{H}(G)$ возникают левое и правое действия группы H, и, стало быть, $\mathcal{H}(G)$ имеет каноническую структуру бимодуля над $\mathcal{H}(H)$. Эту структуру можно также описать аналогично определению 1.16, рассматривая отображения умножения $H \times G \to G$ и $G \times H \to G$, заданные при помощи φ и умножения в G.

Определение 2.24. Определим функтор (иногда называемый *индукцией* и обозначаемый Ind_H^G)

$$\varphi_*\colon \mathrm{Rep}(H) \to \mathrm{Rep}(G)$$

по формуле

$$W \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(H)}(\mathcal{H}(G), W)_{sm,G}\,,$$

где на $\mathcal{H}(G)$ рассматривается естественная структура левого $\mathcal{H}(H)$-модуля, а гладкие вектора берутся относительно действия G на $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(H)}(\mathcal{H}(G), W)$, возникающего из правого действия G на $\mathcal{H}(G)$ правыми сдвигами.

Явным образом, для $g \in G$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(H)}(\mathcal{H}(G), W)$ и $a \in \mathcal{H}(G)$ имеем $(g\phi)(a) = \phi(a\delta_g)$.

Определение 2.25. Определим функтор (иногда называемый *компактной индукцией* и обозначаемый ind_H^G)

$$\varphi_!\colon \mathrm{Rep}(H) \to \mathrm{Rep}(G)$$

по формуле

$$W \mapsto \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} W\,,$$

где на $\mathcal{H}(G)$ рассматривается структура правого $\mathcal{H}(H)$-модуля.

Определение 2.26. Определим функтор

$$\varphi^!\colon \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Rep}(H)$$

по формуле

$$V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V)_{sm,H}\,,$$

где на $\mathcal{H}(G)$ рассматривается естественная структура левого $\mathcal{H}(G)$-модуля, а гладкие вектора берутся относительно левого действия H на $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V)$, возникающего из действия H на $\mathcal{H}(G)$ правыми сдвигами.

Замечание 2.27.

(i) Имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V) \cong \varprojlim_K V^K\,,$$

где обратный предел берется по всем открытым компактным подгруппам $K \subset G$, и для $K' \subset K$ рассматривается отображение $e_K\colon V^{K'} \to V^K$. При этом действие группы G задается по формуле $g(\{v_K\})_K := e_K g(v_{K'})$, где $K' := K \cap g^{-1}Kg$.

(ii) Функтор $V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V)$ из категории $\mathrm{Rep}(G)$ в категорию всех представлений группы G является сопряженным справа к функтору $V \mapsto V_{sm}$.

Следующий факт следует из стандартных свойств тензорного произведения и Hom.

Утверждение 2.28. *Имеются сопряженности функторов* (φ^*, φ_*) *и* $(\varphi_!, \varphi^!)$. *Функтор* φ^* *точен, функтор* φ_* *точен слева, функтор* $\varphi_!$ *точен справа, а функтор* $\varphi^!$ *точен слева.*

Замечание 2.29.

(i) Для гладкого представления V группы G имеется функториальное вложение

$$\varphi^* V \hookrightarrow \varphi^! V, \quad v \mapsto \big(a \mapsto av\big)\,.$$

При этом образ этого вложения совпадает с G-гладкими векторами в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V)$.

(ii) Если $\varphi(H) \subset G$ является открытой подгруппой, то $\varphi^* V = \varphi^! V$ (для проверки этого факта надо использовать то, что стабилизаторы в H векторов из $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V)$ содержат ядро гомоморфизма φ).

(iii) Если фактор-пространство $\varphi(H)\backslash G$ компактно, то функтор φ^* сохраняет конечную порожденность представлений. Действительно, пусть V из $\mathrm{Rep}(G)$ порождается над G векторами $v_1, \ldots, v_n$, причем $v_i \in V^K$, где $K \subset G$ — открытая компактная подгруппа. Множество $\varphi(H)\backslash G/K$ конечно, так как оно компактно и дискретно, и V порождается над H векторами $g_j v_i$, где $g_j \in G$ пробегает представителей двойных классов смежности $\varphi(H)\backslash G/K$.

(iv) Непосредственно проверяется, что функторы φ^*, φ_*, $\varphi_!$, $\varphi^!$ хорошо себя ведут относительно композиции непрерывных гомоморфизмов l-групп.

Пример 2.30.

(i) Рассмотрим отображение $\varphi\colon H \to \{e\}$. Тогда $\varphi^* V \cong \varphi^! V = V$ является тривиальным представлением группы H для векторного пространства V. Для гладкого представления W группы H имеем $\varphi_* W = W^H$, $\varphi_! = W_H$.

(ii) Рассмотрим вложение $\varphi\colon \{e\} \hookrightarrow G$. Тогда функтор φ^* является забывающим функтором из $\mathrm{Rep}(G)$ в категорию $\mathbb{C}$-векторных пространств. Для гладкого представления V группы G имеем $\varphi^! V = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V)$. Для векторного пространства W представление $\varphi_! W = \mathcal{H}(G) \otimes G$ изоморфно пространству локально постоянных функций на G со значением в $\mu(G) \otimes W$. В частности, $\varphi_! \mathbb{C} = \mathcal{H}(G)$. Наконец, $\varphi_* W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(G), W)_{sm,G}$ изоморфно пространству равномерно локально постоянных функций на G со значением в W.

(iii) В обозначениях из пункта (ii) пространство $\varphi^! \mathcal{H}(G) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G))$ имеет следующее описание. По утверждению 2.10 $\mathcal{D}(G)$ является невырожденным $\mathcal{H}(G)$-модулем. Это позволяет определить на $\mathcal{D}'(G)$ структуру

$\mathcal{H}(G)$-модуля (возможно, не являющегося невырожденным) как в замечании 2.18(ii). Эквивалентно, замечание 1.8(i) позволяет определить произведение распределения из $\mathcal{E}'(G)$ (и, в частности, элемента из $\mathcal{H}(G)$) и распределения из $\mathcal{D}'(G)$. Пусть $\mathcal{D}'_r(G)$ состоит из таких распределений $a \in \mathcal{D}'(G)$, что для любого $a' \in \mathcal{H}(G)$ имеем $a'a \in \mathcal{H}(G)$ (в частности, $\mathcal{E}'(G) \subset \mathcal{D}'_r(G)$). Тогда имеется канонический изоморфизм

$$\mathcal{D}'_r(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G)), \quad a \mapsto \big(a' \mapsto a'a\big)\,.$$

Обратное отображение сопоставляет элементу $l \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G))$ распределение $a \in \mathcal{D}'(G)_r$, удовлетворяющее $\langle f, a\rangle = \langle f, l(e_K)\rangle$ для любой функции $f \in \mathcal{D}(G)^K$.

Утверждение 2.31. *Для любого V из $\mathrm{Rep}(G)$ имеется функториальный изоморфизм $(\varphi^*V)^\vee \cong \varphi^!(V^\vee)$. Для любого W из $\mathrm{Rep}(H)$ имеется функториальный изоморфизм $(\varphi_!W)^\vee \cong \varphi_*(W^\vee)$.*

Доказательство. По сопряженности между тензорным произведением и $\mathcal{H}om$ имеется изоморфизм

$$\varphi^!(V^\vee) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G), V^\vee)_{sm,H} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G) \otimes V, \mathbb{C})_{sm,H}\,.$$

Далее, отображение

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G) \otimes V, \mathbb{C}), \quad l \mapsto \big(a \otimes v \mapsto l(a^+v)\big)\,,$$

является изоморфизмом G-модулей, где действие G на правой части задается правым действием G на $\mathcal{H}(G)$. Действительно, функционал l восстанавливается по элементу $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(\mathcal{H}(G) \otimes V, \mathbb{C})$ по формуле $l(v) = m(e_K \otimes v)$, где $v \in V^K$. Беря гладкие вектора относительно H, получаем изоморфизм $\varphi^!(V^\vee) \cong (\varphi^*V)^\vee$. Изоморфизм $(\varphi_!W)^\vee \cong \varphi_*(W^\vee)$ выводится из предыдущего изоморфизма при помощи замечания 2.18(iii) и сопряженностей из упражнения 2.28. $\square$

Дадим теперь геометрическое описание функторов φ_* и $\varphi_!$.

Утверждение 2.32. *Для любого W из $\mathrm{Rep}(H)$ имеется канонический изоморфизм гладких представлений группы G:*

$$\varphi_*W \cong \big\{f\colon G \to W \;\mid\; \forall h \in H, g \in G : f(\varphi(h)g) = h(f(g))\big\}_{sm,G}\,,$$

где действие G на правой части задается по формуле $g(f)(g') := f(g'g)$.

Доказательство. Имеется канонический изоморфизм

$$\big\{f\colon G \to W\big\}_{sm,G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(G), W)_{sm,G}\,, \quad f \mapsto \big(a \mapsto \langle f, a\rangle\big)\,. \tag{5}$$

То, что это изоморфизм, следует из сравнения K-инвариантов левых и правых частей. Действительно, K-инварианты правой части состоят из функций на

G/K со значениями в W, а K-инварианты левой части по лемме 2.19 равны $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}(G)^K, W)$. При этом векторное пространство $\mathcal{H}(G)^K = \mathcal{H}(G)e_K$ имеет базис вида a_{gK}, где g пробегает представителей классов из G/K.

Условие на функцию f из формулировки утверждения соответствует при изоморфизме (5) тому, что отображение $\mathcal{H}(G) \to W$ является морфизмом H-модулей (или, что равносильно, является морфизмом $\mathcal{H}(H)$-модулей). $\square$

До конца данного раздела мы будем предполагать, что φ является *замкнутым вложением*. Для любого элемента $h \in H$ будем обозначать $\varphi(h)$ просто через h.

Определение 2.33. Одномерное гладкое представление $\mu(H, G)$ группы H определяется по формуле (см. пример 2.5(iii)):

$$\mu(H, G) := \mu(H) \otimes \mu(G)|_H^{-1} .$$

Утверждение 2.34. *Для любого W из $\mathrm{Rep}(H)$ имеется канонический изоморфизм представлений группы G:*

$$\varphi_!\big(W \otimes \mu(H, G)\big) \cong \big\{f : G \to W \mid \forall h \in H, g \in G : f(\varphi(h)g) = h(f(g))\big\}_c , \tag{6}$$

где индекс c обозначает, что рассматриваются функции на G с компактным носителем по модулю H (см. определение 1.10), а действие G на правой части задается по формуле $g(f)(g') := f(g'g)$.

Доказательство. Для краткости обозначим правую часть в изоморфизме (6) через A.

Рассмотрим второе действие H на $\mathcal{H}(G)$ из примера 2.5(ii), то есть $h : a \mapsto a\delta_{h^{-1}}$. Тогда имеется равенство

$$\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(H)} \big(W \otimes \mu(H, G)\big) = \big(\mathcal{H}(G) \otimes W \otimes \mu(H, G)\big)_H .$$

По утверждению 1.18(i) и примеру 2.5(iv) имеется канонический изоморфизм H-модулей

$$\mathcal{H}(G) \otimes W \otimes \mu(H, G) \cong \mathcal{D}(G) \otimes W \otimes \mu(H) = \mathcal{D}(G, W) \otimes \mu(H) ,$$

где действие H на $\mathcal{D}(G, W)$ задается по формуле $h(f)(g) := h(f(gh))$.

Теперь рассмотрим композицию оператора усреднения по H и (для удобства) обращения аргумента функций на G:

$$\Psi : \mathcal{D}(G, W) \otimes \mu(H) \to \mathcal{E}(G, H) ,$$

$$f \otimes \mu \mapsto \big(g \mapsto \textstyle\int_H hf(g^{-1}h)d\mu(h)\big) .$$

Легко проверяется, что данное отображение пропускается через H-коинварианты, а его образ лежит в $A \subset \mathcal{E}(G, W)$. Таким образом, возникает отображение

$$\Phi : \big(\mathcal{D}(G, W) \otimes \mu(H)\big)_H \to A .$$

Все рассматриваемые выше отображения являются морфизмами представлений группы G и, в частности, это верно и для Φ. Заметим также, что A является гладким представлением группы G (ср. с замечанием 1.17(i)). Таким образом, чтобы доказать, что Φ — изоморфизм, достаточно доказать, что для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ индуцированное отображение на K-инвариантах является изоморфизмом.

Для этого мы построим отображение $A^K \to \mathcal{D}(G, W) \otimes \mu(H)$. Зафиксируем элемент $0 \neq \mu \in \mu(H)$ и выберем множество представителей $S \subset G$ в двойных классах смежности $H \backslash G / K$. Функции $f' \in A^K$ сопоставим элемент

$$f \otimes \mu \in \mathcal{D}(G) \otimes W \otimes \mu(H) = \mathcal{D}(G, W) \otimes \mu(H)\,,$$

где

$$f := \sum_{g \in S} \frac{1}{\mu(H \cap gKg^{-1})} I_{Kg} \otimes f'(g)\,.$$

Используя то, что $f'(g) \in W^{H \cap gKg^{-1}} \subset W$, можно проверить, что $\Psi(f \otimes \mu) = f'$. Более того, используя определение H-коинвариантов, а также применяя замечание 2.14(ii) к открытой компактной подгруппе $H \cap gKg^{-1} \subset H$, можно показать, что для любого элемента из $(\mathcal{D}(G, W) \otimes \mu(H))^K$ найдется элемент вида $f \otimes \mu$ с тем же образом в $\big(\mathcal{D}(G, W) \otimes \mu(H)\big)_H$. Это доказывает, что Φ индуцирует изоморфизм на K-инвариантах и, следовательно, Φ является изоморфизмом. $\square$

Замечание 2.35.

(i) Выберем множество представителей $S \subset G$ в двойных классах смежности $H \backslash G / K$. Из утверждений 2.32 и 2.34 следует, что для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ имеются канонические изоморфизмы

$$(\varphi_* W)^K \cong \big\{ f \colon S \to W \ \mid \ f(g) \in W^{H \cap gKg^{-1}} \big\} = \prod_{g \in S} W^{H \cap gKg^{-1}}\,,$$

$$\varphi_!\big(W \otimes \mu(H, G)\big)^K \cong \big\{ f \colon S \to W \ \mid \ f(g) \in W^{H \cap gKg^{-1}} \big\}_c = \bigoplus_{g \in S} W^{H \cap gKg^{-1}}\,,$$

где индекс c обозначает, что рассматриваются функции на S с конечным носителем.

(ii) Из пункта (i), а также из замечания 2.14(ii), примененного к открытой компактной подгруппе $H \cap gKg^{-1} \subset H$, следует, что функторы φ_* и $\varphi_!$ точны (для случая замкнутого вложения φ).

(iii) Пусть $j \colon K \hookrightarrow G$ обозначает вложение открытой компактной подгруппы. Тогда имеется канонический изоморфизм алгебр

$$\mathrm{End}_G(j_! \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}_K(G)\,.$$

Это следует из утверждений 2.34, 1.18(i) и из того, что имеется канонический изоморфизм представлений группы K (ср. с замечанием 1.13(ii)):

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mu(K), \quad c \mapsto c \cdot \mu_K\,.$$

Следствие 2.36. *Предположим, что фактор $H\backslash G$ компактен. Тогда для любого W из* $\mathrm{Rep}(H)$ *имеется канонический изоморфизм $\varphi_*(W) \cong \varphi_!\big(W \otimes \mu(H,G)\big)$. Кроме того, в этом случае функторы φ_* и $\varphi_!$ сохраняет допустимость гладких представлений.*

Доказательство. Это следует из замечания 2.35(i) и из того, что для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ множество $H\backslash G/K$ дискретно и компактно, и, значит, конечно. □

Замечание 2.37. У функторов φ_* и $\varphi_!$ есть также интерпретация в терминах пучков. Пусть $p\colon G \to H\backslash G$ обозначает факторизацию. Аналогично определению 1.11 для W из $\mathrm{Rep}(H)$ рассмотрим пучок $\mathbb{C}$-векторных пространств $\mathcal{F}_W$ на $H\backslash G$, заданный по формуле

$$\mathcal{F}_W(U) := \big\{f \in \mathcal{E}(p^{-1}(U), W) \mid \forall h \in H, g \in p^{-1}(U) : f(hg) = h(f(g))\big\}$$

для произвольного открытого подмножества $U \subset H\backslash G$. Тогда утверждения 2.32 и 2.34 означают, что имеются канонические изоморфизмы

$$\varphi_* W \cong \mathcal{E}(H\backslash G, \mathcal{F}_W)_{sm,G}\,,$$

$$\varphi_!(W \otimes \mu(H,G)) \cong \mathcal{D}(H\backslash G, \mathcal{F}_W)\,.$$

Пример 2.38. Пусть F является неархимедовым локальным полем, $G = \mathrm{GL}_2(F)$, $i\colon B \hookrightarrow G$ состоит из верхнетреугольных матриц, $T \cong F^* \times F^* \subset G$ состоит из диагональных матриц, и $\chi\colon T \to \mathbb{C}^*$ — локально постоянный характер. Обозначим через $\pi\colon B \to T$ факторизацию по верхнеунитреугольным матрицам. Тогда фактор $B\backslash G \cong \mathbb{P}^1(F)$ компактен, и по следствию 2.36 представление $i_*\pi^*(\chi)$ является допустимым представлением группы G.

3 Неприводимые гладкие представления

3.1 Разложения абелевых категорий

Предположим, что для абелевой категории $\mathcal{A}$ неприводимые объекты с точностью до изоморфизма образуют множество. Обозначим его через $\mathrm{Irr}(\mathcal{A})$. Для объекта X из $\mathcal{A}$ через $JH(X)$ обозначим подмножество в $\mathrm{Irr}(\mathcal{A})$, состоящее из всех неприводимых подфакторов в X. Под полной абелевой подкатегорией в $\mathcal{A}$ мы понимаем полную подкатегорию в $\mathcal{A}$, для которой функтор вложения точный. Легко проверяется следующий факт:

Утверждение 3.1. *Предположим, что в $\mathcal{A}$ нет ненулевых объектов X с пустым множеством $JH(X)$. Пусть имеется эквивалентность категорий $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ для абелевых категорий $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Тогда существует однозначно определенное разложение* $\mathrm{Irr}(\mathcal{A}) = S_1 \coprod S_2$, *такое что $\mathcal{A}_1$ эквивалентна полной абелевой подкатегории в $\mathcal{A}$, состоящей из объектов X_1, для которых $JH(X_1) \subset S_1$, а $\mathcal{A}_2$ эквивалентна полной абелевой подкатегории в $\mathcal{A}$, состоящей из объектов X_2, для которых $JH(X_2) \subset S_2$.*

Замечание 3.2.

(i) Условие $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ равносильно тому, что в $\mathcal{A}$ есть две полные абелевы подкатегории $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$, такие что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_2, X_1) = 0$ для любых объектов X_1 из $\mathcal{A}_1$ и X_2 из $\mathcal{A}_2$ (то есть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ ортогональны), и любой объект из $\mathcal{A}$ (однозначно) раскладывается в прямую сумму объекта из $\mathcal{A}_1$ и объекта из $\mathcal{A}_2$.

(ii) Условие $\mathcal{A} \cong \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$, где I — некоторое множество, означает, что $\mathcal{A}_i$ эквивалентны попарно ортогональным полным абелевым подкатегориям в $\mathcal{A}$, и любой объект X из $\mathcal{A}$ (однозначно) раскладывается в прямую сумму $X \cong \bigoplus_{i\in I} X_i$, где объекты X_i из $\mathcal{A}_i$.

Определение 3.3. Подмножества в $\mathrm{Irr}(\mathcal{A})$, возникающие из разложения категории $\mathcal{A}$ как в утверждении 3.1, будем называть *отщепимыми.*

Пусть $\mathcal{H}$ является алгеброй с идемпотентами (см. определение 1.22). Тогда мощность размерности произвольного неприводимого (невырожденного) $\mathcal{H}$-модуля ограничена мощностью размерности $\mathcal{H}$, и поэтому корректно определено множество $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}) := \mathrm{Irr}(\mathrm{Mod}(\mathcal{H}))$.

Лемма 3.4.

(i) Для любого невырожденного $\mathcal{H}$-модуля M и ненулевого элемента $m \in M$ существует подмодуль $N \subset M$, содержащий m, и такой неприводимый фактор-модуль $N \to P$, что образ m в P ненулевой.

(ii) Если M конечно порожден, то у него имеется неприводимый фактор-модуль.

Доказательство. Положим $N := \mathcal{H} \cdot m$. Применяя лемму Цорна к подмодулям в N, не содержащим m, получаем максимальный такой подмодуль. Фактор модуля N по нему и будем искомым неприводимым подфактором P, что доказывает пункт (i).

Для доказательства пункта (ii) надо сначала рассмотреть фактор-модуль модуля M, порожденный одним элементом, а потом применить к нему пункт (i). □

Таким образом, по лемме 3.4(i) утверждение 3.1 применимо к категории $\mathrm{Mod}(\mathcal{H})$.

Замечание 3.5.

(i) Задать разложение $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}) \cong \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ равносильно тому, чтобы задать разложение $\mathcal{H} \cong \oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ в прямую сумму подалгебр с идемпотентами. В этом случае $\mathcal{A}_i \cong \mathrm{Mod}(\mathcal{H}_i)$ и соответствующее отщепимое подмножество $S_i \subset \mathrm{Irr}(\mathcal{H})$ состоит из всех невырожденных неприводимых $\mathcal{H}$-модулей, действие на которое пропускается через фактор $\mathcal{H}_i$. Если $\mathcal{H}$ обладает единицей, то множество I должно быть конечно.

(ii) Пусть $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}) = \coprod_{i \in I} S_i$ и $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ соответствует $S_i \subset \mathrm{Irr}(\mathcal{H})$ как в утверждении 3.1. Тогда имеется разложение $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ тогда и только тогда, когда для любого идемпотента $e \in \mathcal{H}$ имеется лишь конечное число $i \in I$, для которых существует M_i из S_i с $eM_i \neq 0$, а также для любого $i \in I$ подмножество $S_i \subset \mathrm{Irr}(\mathcal{H})$ отщепимое. Отметим, что данные условия достаточно требовать для всех $i \in I$, кроме одного элемента $i_0 \in I$.

(iii) Пусть полная абелева подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathrm{Mod}(\mathcal{H})$ замкнута относительно взятия подфакторов, и любой неприводимый модуль в $\mathcal{A}$ отщепимый. Тогда имеется эквивалентность категорий

$$\mathcal{A} \cong \prod_{M \in \mathrm{Irr}(\mathcal{A})} \mathcal{A}_M\,,$$

где $\mathcal{A}_M$ состоит из всех M-изотипических модулей из $\mathcal{A}$, то есть модулей N из $\mathcal{A}$ для которых $JH(N) = \{M\}$. Действительно, если N из $\mathcal{A}$ порожден конечным набором элементов $n_1, \ldots, n_r$, то N однозначно раскладывается в конечную прямую сумму M_i-изотипических компонент, где неприводимых подфакторы M_i в N соответствуют элементам n_i как в лемме 3.4(i). Далее надо воспользоваться тем, что произвольный модуль является объединением конечно порожденных подмодулей.

Идея описания категории $\mathrm{Rep}(G)$ для l-группы G заключается в нахождении отщепимых подмножеств в $\mathrm{Irr}(G) := \mathrm{Irr}(\mathrm{Rep}(G))$.

Пример 3.6.

(i) Предположим, что G конечна. Тогда все неприводимые представления группы G конечномерны, множество $\mathrm{Rep}(G)$ конечно, любое подмножество в нем отщепимое, и имеется эквивалентность категорий

$$\mathrm{Rep}(G) \cong \prod_{\mathrm{Irr}(G)} \mathrm{Vect}(\mathbb{C})\,,$$

где каждое V из $\mathrm{Irr}(G)$ задает вложение категорий

$$\mathrm{Vect}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Rep}(G), \quad W \mapsto W \otimes V\,.$$

(ii) Предположим, что G компактна. Тогда по примеру 2.5(v) любое конечно порожденное представление раскладывается в конечную прямую сумму конечномерных неприводимых представлений, причем разложение на изотипические компоненты однозначно определено. Поскольку любое представление есть объединение конечно порожденных представлений, мы опять получаем эквивалентность категорий

$$\mathrm{Rep}(G) \cong \prod_{\mathrm{Irr}(G)} \mathrm{Vect}(\mathbb{C})\,.$$

Отметим, что множество $\mathrm{Irr}(G)$ уже может быть бесконечным. Для коммутативной компактной l-группы все неприводимые представления одномерны.

(iii) Для группы $\mathbb{Z}$ имеется эквивалентность категорий $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Mod}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. В частности, $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z})$ состоит из одномерных представлений и биективно $\mathbb{C}^*$. В $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z})$ нет нетривиальных отщепимых подмножеств.

(iv) Для неархимедового локального поля F гладкое представление l-группы $F^* \cong \mathcal{O}_F^* \times \mathbb{Z}$ можно разложить по характерам коммутативной компактной подгруппы $\mathcal{O}_K^*$. Данное разложение будет коммутировать с действием $\mathbb{Z}$. Таким образом, имеется эквивалентность категорий

$$\mathrm{Rep}(G) \cong \prod_{\mathrm{Irr}(G)} \mathrm{Mod}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])\,.$$

3.2 Общие свойства неприводимых представлений

Определение 3.7. Будем говорить, что l-пространство *счетно на бесконечности*, если оно является счетным объединеним компактных подмножеств.

Пример 3.8. Любое l-пространство как в примере 1.3(iii) счетно на бесконечности.

Замечание 3.9. Легко показать, что если G счетна на бесконечности, то любое конечно порожденное гладкое представление группы G порождается над $\mathbb{C}$ счетным набором векторов.

Утверждение 3.10 (Лемма Шура)**.** *Предположим, что G счетна на бесконечности. Тогда для любого неприводимого гладкого представления V группы G имеется изоморфизм* $\mathrm{End}_G(V) \cong \mathbb{C}$.

Доказательство. Это следует из замечания 3.9 и леммы 3.11 ниже, примененной к телу $\mathrm{End}_G(V)$. □

Лемма 3.11. *Любое тело T над $\mathbb{C}$ с единицей не более, чем счетной размерности, изоморфно $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Предположим обратное и рассмотрим любой элемент $x \in T \setminus \mathbb{C}$. Образ естественного гомоморфизма $\mathbb{C}[X] \to T$, $X \mapsto x$, является областью целостности, отличной от $\mathbb{C}$. Следовательно, этот гомоморфизм инъективен. Таким образом, возникает вложение поля рациональных функций $\mathbb{C}(X)$ в T. Однако $\mathbb{C}(X)$ несчетно над $\mathbb{C}$ (например, элементы вида $\frac{1}{X-c}$, $c \in \mathbb{C}$, линейно независимы). □

Следствие 3.12. *Для G и V как в утверждении 3.10 центр группы G действует скалярно на V. В частности, все неприводимые гладкие представления счетной на бесконечности коммутативной l-группы одномерны.*

Пример 3.13. Из утверждения 2.7 следует, что для неархимедова локального поля F любое неприводимое гладкое представление группы $\mathrm{GL}_d(F)$ задается характером вида $\chi \circ \det$, где $\chi\colon F^* \to \mathbb{C}^*$ — локально постоянный характер.

Утверждение 3.14.

(i) *Гладкое представление V группы G неприводимо тогда и только тогда, когда для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ либо $V^K = 0$, либо $\mathcal{H}_K(G)$-модуль V^K неприводим.*

(ii) *Пусть $K \subset G$ — открытая компактная подгруппа. Тогда для любого неприводимого $\mathcal{H}_K(G)$-модуля M существует единственное с точностью до изоморфизма неприводимое представление V группы G, для которого $M \cong V^K$.*

Доказательство. Это вытекает из утверждения 2.15 и из следующего факта: гладкое представление V с $V^K \neq 0$ неприводимо тогда и только тогда, когда V принадлежит подкатегории $\mathrm{Rep}_K(G)$ и является в ней неприводимым объектом. Для его доказательства надо использовать то, что второе условие влечет неприводимость $\mathcal{H}_K(G)$-модуля V^K по утверждению 2.15. □

Утверждение 3.15 (Лемма об отделимости)**.** *Пусть l-группа G счетна на бесконечности. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in \mathcal{H}(G)$ существует неприводимое представление (V, π) группы G, для которого оператор $\pi(h) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ненулевой.*

Доказательство. Для функции $f \in \mathcal{D}(G)$ положим $f^{\#}(g) := \overline{f(g^{-1})}$ и $f' := f^{\#} * f$. Тогда $f'(1) = \int_G |f(g)|^2 d\mu(g)$ и $(f')^{\#} = f'$. Таким образом, если $f \neq 0$, то $f' \neq 0$ и $f' * f' \neq 0$. По индукции, f' не является нильпотентом относительно свертки.

По утверждению 1.18(i) имеется равенство $a = f\mu$, где $\mu \in \mu(G)$, $0 \neq f \in \mathcal{D}(G)$. Положим $a' := f'\mu = (f^{\#}\mu) \cdot a$. Заметим, что если a' действует на $\mathcal{H}(G)$-модуле ненулевым образом, то и a тоже действует на нем ненулевым образом.

По доказанному выше a' не является нильпотентом. Кроме того, существует такая открытая компактная подгруппа $K \subset G$, что $a' \in \mathcal{H}_K(G)$. Так как G счетна на бесконечности, алгебра $\mathcal{H}_K(G)$ счетна. Далее все следует из леммы 3.16 ниже и из утверждения 3.14(ii) (либо можно обойтись без последнего утверждения, требуя, чтобы в G была счетная база открытых компактных подгрупп). □

Лемма 3.16. *Пусть A — алгебра над $\mathbb{C}$ с единицей не более, чем счетной размерности, $0 \neq x \in A$ — элемент, не являющийся нильпотентом. Тогда существует неприводимый A-модуль, на который x действует ненулевым образом.*

Доказательство. Покажем, что существует $0 \neq c \in \mathbb{C}$, для которого $x - c$ необратим в A. Действительно, иначе гомоморфизм $\mathbb{C}[X] \to A$, $X \mapsto x$, определяет гомоморфизм из локального кольца $\mathbb{C}[X]_{(X)}$ идеала (X) в A. Так как x не нильпотент, последний гомоморфизм инъективен, что противоречит счетномерности A (ср. с доказательством леммы 3.11).

Требуемый модуль возникает, как фактор модуля $A/A(x-c)$ по максимальному подмодулю, не содержащему 1, который существует по лемме Цорна (ср. с доказательством леммы 3.4(i)). □

Лемма 3.17. *Пусть $i\colon H \hookrightarrow G$ является вложением нормальной подгруппы конечного индекса в произвольную l-группу G. Тогда для любого неприводимого представления V группы G представление i^*V группы H изоморфно конечной прямой сумме неприводимых представлений.*

Доказательство. Поскольку подгруппа H имеет конечный индекс в G, представление i^*V конечно порождено. Следовательно, у представления i^*V существует неприводимый фактор W по лемме 3.4(ii). Из утверждения 2.28 и неприводимости V возникает вложение $V \hookrightarrow i_*W$ представлений группы G.

Из утверждения 2.32 следует, что имеется изоморфизм $i^*i_*W \cong \bigoplus_g \mathrm{Ad}(g)^*(W)$ представлений группы H, где g пробегает всех представителей классов смежности из $H\backslash G$, и $\mathrm{Ad}(g)\colon h \mapsto ghg^{-1}$, $g \in G$, $h \in H$. Так как i^*V является подпредставлением в i^*i_*W, это доказывает лемму. □

3.3 Компактные представления

Определение 3.18. Гладкое представление V группы G называется *компактным*, если для любой пары $v \in V$, $l \in V^\vee$ матричный элемент $m_{v,l} \in \mathcal{E}(G)$ имеет компактный носитель.

Утверждение 3.19. *Для гладкого представления V группы G следующие условия равносильны:*

(i) представление V компактно;

(ii) для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ и элементов $v \in V^K$, $l \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^K, \mathbb{C})$ функция

$$K\backslash G/K \to \mathbb{C}, \quad KgK \mapsto l(e_{KgK}v)$$

имеет конечный носитель;

(iii) для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ и $v \in V^K$ отображение

$$K\backslash G/K \to V^K, \quad KgK \mapsto e_{KgK}v$$

имеет конечный носитель.

Доказательство. Равносильность (i) и (ii) следует из гладкости V и $V^\vee$, а также из того, что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^K, \mathbb{C}) \cong (V^\vee)^K$ выделяется в $V^\vee$ прямым слагаемым (см. лемму 2.19 и замечание 2.14(i)). Равносильность (ii) и (iii) следует из леммы 3.20 ниже. □

Лемма 3.20. *Пусть дано отображение $\phi\colon S \to W$ произвольного множества S в $\mathbb{C}$-векторное пространство W. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) для любого $l \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, \mathbb{C})$ отображение $l \circ \phi\colon S \to \mathbb{C}$ имеет конечный носитель;

(ii) отображение ϕ имеет конечный носитель.

Доказательство. Ясно, что из (ii) следует (i). Предположим (i). Пусть векторное пространство $\langle\phi(S)\rangle_{\mathbb{C}}$ бесконечномерно. Тогда найдется бесконечно много элементов $s_1, s_2 \ldots$ в S, для которых векторы $\phi(s_1), \phi(s_2), \ldots$ линейно независимы. Существует такой элемент $l \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, \mathbb{C})$, что $l(\phi(s_i)) = 1$ для всех i, что приводит к противоречию с (i). Следовательно, пространство $\langle\phi(S)\rangle_{\mathbb{C}}$ конечномерно. Тогда существует конечный набор таких элементов $l_1, \ldots, l_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, \mathbb{C})$, что $\phi(s) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $l_i(\phi(s)) \neq 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Это выводит (ii) из (i). $\square$

Замечание 3.21. Если существует неприводимое компактное представление счетной на бесконечности группы G, то центр группы G должен быть компактен, так как по следствию 3.12 центр действует скалярно, и для любых $v \in V$, $l \in V^\vee$ носитель функции $m_{v,l}$ инвариантен относительно центра. Например, у группы $\mathrm{GL}_d(F)$ нет неприводимых компактных представлений.

Определение 3.22. Пусть $Z \subset G$ — замкнутая подгруппа, лежащая в центре группы G. Будем говорить, что гладкое представление V группы G *компактно по модулю* Z, если для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ и $v \in V^K$ отображение

$$K\backslash G/K \to V^K, \quad KgK \mapsto e_{KgK}v$$

имеет конечный носитель по модулю группы Z, действующий на $K\backslash G/K$ по формуле $z\colon KgK \mapsto KgzK$.

Замечание 3.23.

(i) Гладкое представление V компактно по модулю Z тогда и только тогда, когда для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ и $v \in V$ отображение

$$f_v\colon G \to V, \quad g \mapsto e_K g(v)\,,$$

имеет компактный носитель по модулю Z.

(ii) Пусть $H \subset G$ — подгруппа, для которой $H \cdot Z$ имеет конечный индекс в G. Тогда компактность V по модулю Z равносильна компактности ограничения представления V на G относительно $Z \cap H$. При этом для того, чтобы ограничить носитель функции f_v, надо рассмотреть носители функций $f_{v_1}, \ldots, f_{v_n}$, где $v_i := g_i(v)$, а $g_1, \ldots, g_n$ являются представителями классов смежности из $(H \cdot Z)\backslash G$.

(iii) Для локально постоянного характера $\chi\colon Z \to \mathbb{C}^*$ гладкое χ-представление V компактно тогда и только тогда, когда все его матричные элементы $m_{v,l}$, $v \in V$, $l \in V^\vee$, имеют компактный носитель по модулю Z (см. определение 1.10). Это доказывается также, как утверждение 3.19. Отметим, что подобная ситуация встречается также в утверждении 4.6 ниже.

Следствие 3.24.

(i) Для локально постоянного характера $\chi\colon Z \to \mathbb{C}^*$ любое гладкое конечно порожденное компактное χ-представление V допустимо.

(*ii*) *Если группа G счетна на бесконечности, то любое неприводимое гладкое представление компактное по модулю Z допустимо.*

Доказательство. Для доказательства (i) предположим, что V порождается как представление группы G элементами $v_1, \ldots, v_n$. Тогда V порождается как векторное пространство над $\mathbb{C}$ элементами вида $g(v_i)$, $g \in G$. Следовательно, V^K порождается как векторное пространство над $\mathbb{C}$ элементами вида $e_{KgK}(e_K v_i)$, где g пробегает представителей классов смежности в $K\backslash G/K$. Поскольку Z действует на V скалярно, достаточно выбрать по одному представителю в орбитах действия Z на $K\backslash G/K$, что доказывает допустимость представления V. Для доказательства (ii) надо воспользоваться следствием 3.12. □

3.4 Отщепимость компактных представлений

Предположим, что l-группа G счетна на бесконечности и ее унимодулярный характер тривиален (см. пример 2.5(iii)). Пусть V — неприводимое компактное представление группы G.

Замечание 3.25.

(i) Как и для любого гладкого представления, имеется гомоморфизм алгебр $\mathcal{H}(G) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)_{sm, G\times G}$, где на $\mathcal{H}(G)$ рассматриваются обе структуры гладкого представления группы G из примера 2.5(ii). По следствию 3.24(ii) представление V допустимо, поэтому по утверждению 2.21 имеется изоморфизм $V \otimes V^\vee \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)_{sm, G\times G}$. Это определяет гомоморфизм алгебр

$$\alpha\colon \mathcal{H}(G) \to V \otimes V^\vee\,,$$

являющийся также морфизмом представлений группы $G \times G$.

(ii) Поскольку V компактно, возникает морфизм представлений группы $G \times G$

$$\beta\colon V \otimes V^\vee \to \mathcal{D}(G), \quad v \otimes l \mapsto m_{v,l}\,.$$

Заметим, что при этом $\beta(A)(g) = \mathrm{Tr}(gA)$ для $A \in V \otimes V^\vee$. Зафиксируем $\mu \in \mu(G)$. Поскольку $\mu(G)$ — тривиальное представление, по примеру 2.5(iv) возникает морфизм представлений группы $G \times G$

$$\beta \cdot \mu\colon V \otimes V^\vee \to \mathcal{H}(G), \quad A \mapsto \beta(A) \cdot \mu\,.$$

(iii) Пусть для (W, ρ) из $\mathrm{Rep}(G)$ выполняется $V \notin JH(W)$. Тогда для любого $A \in V \otimes V^\vee$ имеем $\rho(\beta(A)\mu) = 0$. Действительно, иначе для некоторых $l \in V^\vee$ и $w \in W$ возникает ненулевой морфизм представлений группы G

$$V \to W, \quad v \mapsto \rho(\beta(v \otimes l)\mu)(w)\,.$$

(iv) Композиция $V \otimes V^\vee \xrightarrow{\beta} \mathcal{D}(G) \xrightarrow{\mu} \mathbb{C}$ нулевая, так как она является морфизмом представлений группы $G \times G$ и $V^G = (V^\vee)^G = 0$.

Утверждение 3.26. *Существует единственная мера* $\mu_V \in \mu(G)$, *для которой* $\alpha \circ (\beta\mu_V) = \mathrm{Id}$. *При этом* $\beta\mu_V$ *является гомоморфизмом алгебр.*

Доказательство. Композиция $\alpha \circ (\beta\mu_V)$ является эндоморфизмом неприводимого гладкого представления $V \otimes V^\vee$ группы $G \times G$. Так как G счетна на бесконечности, по утверждению 3.10 мы видим, что для любого элемента $\mu \in \mu(G)$ имеется равенство $\alpha \circ (\beta\mu) = c \cdot \mathrm{Id}$, $c \in \mathbb{C}$. При этом для $\mu \neq 0$ имеем $c \neq 0$: иначе возникает противоречие по замечанию 3.25(iii) и утверждению 3.15, примененному к элементу вида

$$m_{v,l} \cdot \mu = \beta(v \otimes l)\mu \in \mathcal{H}(G)\,,$$

где $v \in V$, $l \in V^\vee$ и $m_{v,l} \neq 0$. Значит, существует единственная мера μ_V, для которой $\alpha \circ (\beta\mu_V) = \mathrm{Id}$.

Снова по замечанию 3.25(iii) и утверждению 3.15 мы получаем тривиальность элемента

$$(\beta(A)\mu_V) \cdot (\beta(B)\mu_V) - (\beta(AB)\mu_V) \in \mathcal{H}(G)$$

для любых $A, B \in V \otimes V^\vee$. □

Пример 3.27.

(i) Предположим, что G конечна. Тогда для любого неприводимого представления V группы G имеем $\mu_V = \dim_{\mathbb{C}}(V) \cdot \mu_G$, где $\mu_G(G) = 1$. Это следует, например, из равенства

$$\mathrm{Tr}\left(\alpha(\beta(\mathrm{Id})\mu_G)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g)^2 = 1 = \frac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(V)}\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Id})\,,$$

где $\mathrm{Id} \in V \otimes V^\vee$.

(ii) По пункту (i) и примеру 2.5(v) аналогичное верно, если G компактна.

Замечание 3.28.

(i) Из утверждения 3.26 следует, что алгебра $\mathcal{H}(G)$ раскладывается в произведение подалгебр с идемпотентами

$$\mathcal{H}(G) \cong \mathcal{H}(G)_1 \times \mathcal{H}(G)_2\,,$$

$$\mathcal{H}(G)_1 := \mathrm{Im}(\beta\mu_V) \cong V \otimes V^\vee, \quad \mathcal{H}(G)_2 := \mathrm{Ker}(\alpha)\,.$$

(ii) Имеется эквивалентность категорий

$$\mathrm{Vect}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(V \otimes V^\vee), \quad W \mapsto W \otimes V\,.$$

Это следует из аналогичного свойства конечномерной матричной алгебры $V^K \otimes (V^\vee)^K \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^K)$ для каждой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ (см. следствие 3.24(*ii*)). В частности, единственный неприводимый объект в $\mathrm{Mod}(V \otimes V^\vee)$ изоморфен V.

Обозначим через $\mathrm{Irr}(G)^{co}$ подмножество в $\mathrm{Irr}(G)$, состоящее из классов изоморфизма всех компактных неприводимых гладких представлений. Обозначим через $\mathrm{Rep}(G)^{co}$ полную абелеву подкатегорию в $\mathrm{Rep}(G)$, состоящую из представлений, все неприводимые подфакторы которых компактны, а через $\mathrm{Rep}(G)^{nco}$ обозначим полную абелеву подкатегорию в $\mathrm{Rep}(G)$, состоящую из представлений без компактных неприводимых подфакторов.

Теорема 3.29. *Как и выше, предположим, что группа G^c счетна на бесконечности и ее унимодулярный характер тривиален. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(i) любое конечное подмножество S в $\mathrm{Irr}(G)^c$ отщепимо;

(ii) имеется эквивалентность категорий

$$\mathrm{Rep}(G)^{co} \cong \prod_{\mathrm{Irr}(G)^{co}} \mathrm{Vect}(\mathbb{C})\,;$$

(iii) имеется разложение

$$\mathrm{Rep}(G) \cong \mathrm{Rep}(G)^{co} \times \mathrm{Rep}(G)^{nco}$$

тогда и только тогда, когда для любой открытой компактной подгруппы $K \subset G$ существует лишь конечное число V из $\mathrm{Irr}(G)^{co}$, для которых $V^K \neq 0$

Доказательство. Пункт (i) следует из замечаний 3.5(i) и 3.28(i). Пункт (ii) следует из замечаний 3.5(iii), 3.28(ii) и пункта (i). Пункт (iii) следует из замечания 3.5(ii) и пункта (ii). □

Замечание 3.30. Пусть $Z \subset G$ — замкнутая подгруппа, лежащая в центре группы G, и $\chi\colon Z \to \mathbb{C}^*$ — локально постоянный характер. Для всех утверждений данного раздела верны их обобщения, где $\mathrm{Rep}(G)$ заменяется на $\mathrm{Rep}_\chi(G)$, $\mathrm{Irr}(G)$ заменяется на $\mathrm{Irr}_\chi(G) := \mathrm{Irr}(\mathrm{Rep}_\chi(G))$, $\mathcal{H}(G)$ заменяется на $\mathcal{H}_\chi(G)$, а компактные представления заменяются на χ-представления, компактные по модулю Z.

4 Каспидальные представления редуктивных групп

4.1 Обозначения и общие факты о редуктивных группах

Пусть F является неархимедовым локальным полем с кольцом целых $\mathcal{O}_F$ и униформизующим элементом $t \in \mathcal{O}_F$. Пусть $\mathbf{G}$ — связная *редуктивная группа* над полем F, то есть *радикал* группы $\mathbf{G}$ (максимальная связная разрешимая нормальная замкнутая алгебраическая подгруппа в $\mathbf{G}$) является тором (возможно, нерасщепимым над полем F). Равносильно, радикал группы $\mathbf{G}$ не содержит унипотентных элементов. Отметим, что радикал является связной компонентой единицы в центре группы $\mathbf{G}$.

Параболические подгруппы

Пусть $\mathbf{P}$ — *параболическая подгруппа* в $\mathbf{G}$, то есть такая замкнутая алгебраическая подгруппа в $\mathbf{G}$, что фактор $\mathbf{G}/\mathbf{P}$ является проективным алгебраическим многообразием над F. Обозначим через $\mathbf{N}$ *унипотентный радикал* в $\mathbf{P}$, то есть множество унипотентных элементов в радикале группы $\mathbf{P}$. Тогда $\mathbf{N}$ является наибольшей связной нормальной унипотентной подгруппой в $\mathbf{P}$, и фактор-группа $\mathbf{P}/\mathbf{N}$ редуктивна. В $\mathbf{P}$ существует *подгруппа Леви* $\mathbf{L}$, то есть замкнутая алгебраическая подгруппа, отображающаяся изоморфно на фактор $\mathbf{P}/\mathbf{N}$. Группа $\mathbf{P}$ является полупрямым произведением групп $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$. Все подгруппы Леви $\mathbf{L}$ в $\mathbf{P}$ сопряжены элементами из $\mathbf{P}(F)$.

Существует единственная параболическая подгруппа $\bar{\mathbf{P}}$ в $\mathbf{G}$, такая что пересечение $\bar{\mathbf{P}} \cap \mathbf{P} = \mathbf{L}$. Такую параболическую подгруппу $\bar{\mathbf{P}}$ будем называть *противоположной* к $\mathbf{P}$. Унипотентный радикал в $\bar{\mathbf{P}}$ будем обозначать через $\bar{\mathbf{N}}$.

Параболическая подгруппа $\mathbf{P}_0$ в $\mathbf{G}$ минимальна тогда и только тогда, когда максимальный расщепимый тор $\mathbf{T}$ в радикале группы $\mathbf{P}_0$ также является максимальным расщепимым тором в $\mathbf{G}$. Все минимальные параболические подгруппы в $\mathbf{G}$ сопряжены элементами из $\mathbf{G}(F)$. Заметим, что подгруппа Леви $\mathbf{L}_0$ в $\mathbf{P}_0$ содержит максимальный расщепимый тор $\mathbf{T}$ в $\mathbf{G}$, но в общем случае может не равняться ему и быть некоммутативной.

Группы F-точек

Положим $G := \mathbf{G}(F)$. Любая связная алгебраическая подгруппа $\mathbf{H}$ в $\mathbf{G}$ однозначно определяется своей группой F-точек $H := \mathbf{H}(F)$, так как H плотно по Зарисски в $\mathbf{H}$. Рассмотренные выше подгруппы $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$ связны. Поэтому мы будем также называть $P := \mathbf{P}(F)$ параболической подгруппой в G, а $L := \mathbf{L}(F)$ и $N := \mathbf{N}(F)$ — подгруппами Леви и унипотентным радикалом в P, соответственно. Для любой редуктивной группы $\mathbf{G}$ группа G унимодулярна.

Компактные подгруппы

Все максимальные компактные подгруппы в G открыты и образуют конечное множество классов эквивалентности относительно сопряжений. Для любой параболической подгруппы $P \subset G$ существует максимальная компактная подгруппа $K_0 \subset G$, для которой выполняется *разложение Ивасавы*:

$$G = P \cdot K_0 \,.$$

Из этого следует, что фактор $P\backslash G$ компактен.

Пусть $\mathbf{G} \to \mathbb{G}_m^r$ является наибольшим фактором группы $\mathbf{G}$, являющимся расщепимым тором над F. Пусть $G^c \subset G$ обозначает прообраз $(\mathcal{O}_F^*)^r$ относительно возникающего гомоморфизма $G \to (F^*)^r$. Тогда G^c является открытой, замкнутой, нормальной и унимодулярной подгруппой в G. Любая компактная подгруппа в G содержится в G^c. Факторгруппа $\Lambda(G) := G/G^c$ является свободной абелевой ранга r, пересечение $G^c \cap Z$ компактно, а $G^c \cdot Z$ является подгруппой конечного индекса в G, где Z обозначает центр группы G. Кроме того, число r равно размерности максимального расщепимого тора в радикале группы G.

Специальные элементы в минимальной подгруппе Леви

Рассмотрим минимальную параболическую подгруппу $P_0 \subset G$ и построим некоторые специальные подмножества в ее подгруппе Леви L_0. Напомним, что $\Lambda(L_0) = L_0/L_0^c$ является свободной абелевой группой конечного ранга, а T обозначает максимальный расщепимый тор в радикале группы L_0 (напомним, что T лежит в центре группы L_0). Тогда образ T в $\Lambda(L_0)$ имеет конечный индекс (на самом деле, можно показать, что данный образ изоморфен $\Lambda(T)$). Из этого следует, что существуют свободная абелева подгруппа $\Lambda \subset T$ и конечное подмножество $S \subset L_0$, такие что подмножество $\Lambda \cdot S \subset L_0$ отображается биективно на $\Lambda(L_0)$ (при этом $\Lambda \cong \Lambda(T)$).

Отметим, что собственные значения элементов из T в любом алгебраическом представлении тора T над F принадлежат F. Пусть Λ^+ состоит из таких элементов $\lambda \in \Lambda \subset T$, что все собственные значения отображения

$$\mathrm{Ad}(\lambda)\colon \mathrm{Lie}(N_0) \to \mathrm{Lie}(N_0)$$

принадлежат $\mathcal{O}_F \subset F$, где $\mathrm{Ad}(\lambda)(g) := \lambda g \lambda^{-1}$. Подмножество $\Lambda^+ \subset \Lambda$ является полугруппой, заданной условиями вида $l_i(\lambda) \geqslant 0$, где $l_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z})$ соответствуют весам тора T в представлении $\mathrm{Lie}(N_0)$. Полугруппа Λ^+ конечно порождена, а пересечение $\Lambda^+ \cap Z$ состоит из таких элементов $\lambda \in \Lambda$, для которых $l_i(\lambda) = 0$ при всех i.

Для любого элемента $\lambda \in \Lambda^+$ существует наименьшая параболическая подгруппа P_λ, содержащая P_0, для которой все собственные значения отображения

$$\mathrm{Ad}(\lambda)\colon \mathrm{Lie}(N_\Lambda) \to \mathrm{Lie}(N_\lambda)$$

принадлежат максимальному идеалу $(t) \subset \mathcal{O}_F$, где N_λ — унипотентный радикал группы P_λ. Более того, для любой параболической подгруппы $P \supset P_0$ существует (не единственный) элемент $\lambda \in \Lambda^+$, такой что $P = P_\lambda$. При этом $P_\lambda = G$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Lambda^+ \cap Z$.

Пусть $\lambda_0 \in \Lambda^+$ удовлетворяет условию $P_{\lambda_0} = P_0$. Заменяя при необходимости множество $S \subset L_0$ на $S \cdot \lambda_0^n$, $n \geqslant 0$, можно считать, что для достаточно большого N выполняется условие $S^N \subset \Lambda^+ \cdot L_0^c$. В дальнейшем мы будет предполагать, что для множества S выполнено данное условие.

Имеется *разложение Картана*:

$$G = K_0 \cdot \Lambda^+ \cdot S \cdot K_0\,.$$

При этом данное разложение однозначно, то есть множество $\Lambda^+ \cdot S$ биективно множеству двойных классов смежности по K_0.

Если группа G *расщепима*, то есть максимальный тор в ней расщепим, то он совпадает с подгруппой Леви L_0 в P_0, и в этом случае можно считать, что S состоит только из единичного элемента.

Хорошие открытые компактные подгруппы

Зафиксируем минимальную параболическую подгруппу P_0 и максимальную открытую компактную подгруппу K_0, удовлетворяющие разложению Ивасавы, а также зафиксируем подгруппу Леви $L_0 \subset P_0$ и подмножества $\Lambda^+, S \subset L_0$ как выше. Будем говорить, что открытая компактная подгруппа $K \subset G$ *хорошая*, если выполняются следующие условия:

(i) K является нормальной подгруппой в K_0;

(ii) для любой параболической подгруппы $P \subset G$, содержащей P_0, имеется *разложение Ивахори*:
$$K = K_N \cdot K_L \cdot K_{\bar{N}}\,,$$
где $L \subset P$ — подгруппа Леви, содержащая L_0, и $K_N := K \cap N$, $K_L := K \cap L$, $K_{\bar{N}} := K \cap \bar{N}$;

(iii) в обозначениях из пункта (ii) множество $\Lambda^+ \cdot S$ нормализует подгруппу K_N, а множество $(\Lambda^+ \cdot S)^{-1}$ нормализует подгруппу $K_{\bar{N}}$. Кроме того, если для $\lambda \in \Lambda^+$ выполняется условие $P \subset P_\lambda$, то $\lambda K_L \lambda^{-1} = \lambda^{-1} K_L \lambda = K_L$.

Важный результат заключается в том, что для любой редуктивной группы G и фиксированных данных P_0, L_0, Λ^+ и S как выше существует база хороших открытых компактных подгрупп.

Можно показать, что для любого элемента $\lambda \in \Lambda^+$ и для любой хорошей открытой компактной подгруппы $K \subset G$ результат сопряжения $\mathrm{Ad}(\lambda)(K_{N_\lambda})$ является открытой подгруппой в K_{N_λ}, отличной от K_{N_λ}. Так возникает последовательность строго вложенных открытых компактных подгрупп $\Gamma_i := \mathrm{Ad}(\lambda^{-i})(K_{N_\lambda})$, $i \geqslant 0$ в N_λ, $\Gamma_0 = K_N$, $\Gamma_i \subset \Gamma_{i+1}$. Легко показать, что тогда $N = \cup_i \Gamma_i$, то есть N является объединением открытых компактных подгрупп. Поскольку любая параболическая подгруппа $P \subset G$ сопряжена подгруппе вида P_λ для некоторого $\lambda \in \Lambda^+$, мы видим, что соответствующий унипотентный радикал N является объединением открытых компактных подгрупп.

Случай $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_d$

В качестве примера, рассмотрим случай $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_d$. Тогда любая параболическая подгруппа в G с точностью до сопряжения совпадает с группой P блочно-верхнетреугольных матриц, соответствующая подгруппа Леви с точностью до сопряжения совпадает с группой L блочно-диагональных матриц, унипотентный радикал N группы P совпадает с группой блочно-строго-верхнетреугольных матриц, противоположная подгруппа $\bar{P}$ совпадает с группой блочно-нижнетреугольных матриц, а $\bar{N}$ совпадает с группой блочно-строго-нижнетреугольных.

Любая максимальная компактная подгруппа сопряжена $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_F)$, и разложение Ивасавы легко получается из элементарных преобразований над матрицами. Группа G^c состоит из матриц с определителем из $\mathcal{O}_F^*$. Имеется изоморфизм $\Lambda(G) \cong \mathbb{Z}$, задаваемый нормированием определителя, центр группы G^c состоит из скалярных матриц со значениями в $\mathcal{O}_F^*$, и $G/(C^c \cdot Z) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, где центр $Z \cong F^*$ состоит из скалярных матриц.

Любая минимальная параболическая подгруппа в G с точностью до сопряжения совпадает с группой P_0 верхнетреугольных матриц, а ее подгруппа Леви L_0 коммутативна и с точностью до сопряжения совпадает с группой диагональных матриц. В качестве Λ можно рассмотреть диагональные матрицы с элементами вида t^l, $l \in \mathbb{Z}$, а в качестве S можно взять одну единичную матрицу. Тогда Λ^+ состоит из матриц с диагональю $(t^{l_1}, \ldots, t^{l_d})$, для которых $l_1 \geqslant \ldots \geqslant l_d$, а $\Lambda^+ \cap Z$ состоит из скалярных матриц с элементом на диагонали вида t^l, $l \in \mathbb{Z}$. Разложение Картана следует из применения элементарных преобразований над матрицами.

Рассмотрим элемент $\lambda = (t^{l_1}, \ldots, t^{l_d})$, для которого

$$l_1 = \ldots = l_{d_1} > l_{d_1+1} = \ldots = l_{d_1+d_2} > \ldots > l_{d-d_r+1} = \ldots = l_d \,.$$

Тогда соответствующая параболическая подгруппа P_λ состоит из блочно-верхнетреугольных матриц с диагональными блоками размеров $d_1, \ldots, d_r$.

В качестве базиса хороших открытых компактных подгрупп можно взять подгруппы K_n из примера 1.3(iv). Их необходимые свойства также следуют из применения элементарных преобразований над матрицами.

4.2 Каспидальные представления

Для любой l-группы унимодулярный характер принимает значения в $\mathbb{R}^*_{>0}$. Поэтому однозначно определен квадратный корень из унимодулярного характера.

Рассмотрим параболическую подгруппу $i\colon P \hookrightarrow G$. Пусть $\pi\colon P \to L$ обозначает факторизацию по унипотентному радикалу N группы P.

Определение 4.1. *Функторы Жаке* определяются по следующим формулам (см. определение 2.33):

$$r_P^G\colon \operatorname{Rep}(G) \to \operatorname{Rep}(L), \quad V \mapsto \pi_!(i^*V \otimes \mu(P,G)^{1/2}) \,,$$

$$i_P^G\colon \operatorname{Rep}(L) \to \operatorname{Rep}(G), \quad W \mapsto i_*(\pi^*W \otimes \mu(P,G)^{-1/2}) \,.$$

Замечание 4.2.

(i) Морфизм π сюръективен, так как у него есть сечение, задаваемое подгруппой Леви в P. Поэтому по замечанию 2.29(ii) выполняется равенство $\pi^! = \pi^*$, и по утверждению 2.28 имеется сопряженность функторов (r_P^G, i_P^G).

(ii) Поскольку фактор $P\backslash G$ компактен, по следствию 2.36 имеется изоморфизм $i_*(W) \cong i_!(W \otimes \mu(P,G))$, функтор i_P^G сохраняет допустимость, и по замечанию 2.29(iii) функтор r_P^G сохраняет конечную порожденность представлений.

(iii) По пункту (ii) и утверждению 2.31 для любого W из $\mathrm{Rep}(L)$ имеется канонический изоморфизм $i_P^G(W^\vee) \cong (i_P^G W)^\vee$ (именно для этого и нужно тензорное умножение на $\mu(P,G)^{-1/2}$).

(iv) Функтор i_G^P точен, как композиция точных функторов (см. замечание 2.35(ii)).

(v) Так как N является объединением открытых компактных подгрупп $N = \cup_i \Gamma_i$, по замечанию 1.13(iii) ограничение $\mu(P,G)|_N$ является тривиальным представлением. Следовательно, имеется изоморфизм $r_P^G(V) := V_N \otimes \mu(P,G)^{1/2}$. Поскольку $V_N = \varinjlim V_{\Gamma_i}$, а Γ_i компактны, по замечанию 2.14(i),(iii) мы получаем, что функтор r_P^G точен.

(vi) Для вложения параболических подгрупп $Q \subset P$, имеются канонические изоморфизмы функторов (см. замечание 2.29(iv)):

$$i_Q^G \cong i_P^G \circ i_{\pi(Q)}^L, \quad r_Q^G \cong r_P^G \circ r_{\pi(Q)}^L\,.$$

Определение 4.3. Представление V из $\mathrm{Rep}(G)$ *каспидально*, если для любой параболической подгруппы $P \subset G$ выполнено условие $r_P^G(V) = 0$.

Замечание 4.4.

(i) Представление V из $\mathrm{Rep}(G)$ каспидально тогда и только тогда, когда для любой параболической подгруппы $P \subset G$ выполнено условие $V_N = 0$, где, как и раньше, N обозначает унипотентный радикал группы P.

(ii) По замечанию 4.2(v) и замечанию 2.14(ii),(iii) представление V каспидально тогда и только тогда, когда для любой параболической подгруппы $P \subset G$ и для любого вектора $v \in V$ существует такая компактная подгруппа $\Gamma \subset N$, что $e_\Gamma \cdot v = 0$, то есть $\int_\Gamma g(v) d\mu_\Gamma(g) = 0$.

(iii) Из точности функторов r_P^G (см. замечание 4.2(v)) следует, что любой подфактор каспидального представление каспидален.

Утверждение 4.5. *Для любого неприводимого гладкого представления V группы G существует параболическая подгруппа $P \subset G$ и неприводимое каспидальное представление W соответствующей группы Леви L, такие что представление V вложено в $i_P^G(W)$.*

Доказательство. Рассмотрим минимальную параболическую подгруппу $P \subset G$, для которой $r_P^G(V) \neq 0$ (она существует из соображения размерности). Тогда по замечанию 4.2(vi) представление $r_P^G(V)$ фактора Леви L каспидально. По замечанию 4.2(ii) представление $r_P^G(V)$ конечно порождено. Следовательно, у $r_P^G(V)$ имеется неприводимый фактор W по лемме 3.4(*ii*). По замечанию 4.4(iii) представление W каспидально. По сопряженности из замечания 4.2(i) сюръективный морфизм $r_P^G(V) \to W$ определяет ненулевой морфизм $V \to i_P^G(W)$, который является вложением, так как V неприводимо. $\square$

Утверждение 4.6. *Для гладкого представления V редуктивной группы G следующие условия равносильны:*

(i) представление V компактно по модулю центра Z (см. определение 3.22);

(ii) для любой пары $v \in V$, $l \in V^\vee$ матричный элемент $m_{v,l} \in \mathcal{E}(G)$ имеет компактный носитель;

(iii) ограничение на G^c представления V компактно.

Доказательство. Напомним, что группа $Z \cap G^c$ компактна, а группа $G/(Z \cdot G^c)$ конечна. По замечанию 3.23(ii) из этого следует равносильность (i) и (iii). Для доказательства равносильности (ii) и (iii) надо также использовать то, что G^c открыта в G, и поэтому имеется равенство

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})_{sm,G} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})_{sm,G^c}\,.$$

□

Теорема 4.7 (Хариш-Чандра)**.** *Гладкое представление редуктивной группы G каспидально тогда и только тогда, когда оно компактно по модулю центра Z группы G.*

Объединяя утверждение 4.5, замечание 4.2(ii), теорему 4.7 и следствие 3.24(ii), мы получаем следующий важный факт:

Следствие 4.8. *Любое гладкое неприводимое представление редуктивной группы G допустимо.*

4.3 Доказательство теоремы Хариш-Чандры

Для доказательства теоремы Хариш-Чандры нам понадобится явное описание локальных алгебр Гекке. Зафиксируем минимальную параболическую подгруппу $P_0 \subset G$ и максимальную компактную подгруппу $K_0 \subset G$, для которых выполнено разложение Ивасавы. Пусть $K \subset K_0$ — хорошая открытая компактная подгруппа. Для краткости будем обозначать через $a(g)$ элемент $e_{KgK} \in \mathcal{H}_K(G)$, $g \in G$. Рассмотрим следующие $\mathbb{C}$-подпространства в $\mathcal{H}_K(G)$:

$$A := \langle a(\lambda)\rangle_{\mathbb{C}},\ \lambda \in \Lambda^+, \quad B := \langle a(s)\rangle_{\mathbb{C}},\ s \in S, \quad \mathcal{H}_0 := \mathcal{H}_K(K_0)\,.$$

Отметим, что B является конечномерным $\mathbb{C}$-векторным пространством, размерность которого равна $|S|$, а $\mathcal{H}_0 \cong \mathcal{H}(K/K_0)$ является конечномерной ассоциативной алгеброй над $\mathbb{C}$ с единицей.

Лемма 4.9. *Для любых элементов $\lambda, \mu \in \Lambda^+$ и $s \in S$ имеются равенства:*

$$a(\lambda)a(\mu) = a(\lambda\mu), \quad a(\lambda)a(s) = a(\lambda s)\,.$$

Доказательство. Пусть $P = P_0$. Поскольку $\mathrm{Ad}(\lambda)(K_N) \subset K_N$, имеется вложение $\lambda K_N \subset K_N\lambda$. Из этого следует равенство $K\lambda K_N = K\lambda$. Аналогично, имеются равенства

$$K_{\bar{N}}\mu K = \mu K, \quad K_{\bar{N}} sK = sK\,.$$

Кроме того, поскольку $P = P_0 \subset P_\lambda$, выполняется равенство $K\lambda K_L = K\lambda$.

Значит, по разложению Ивахори, имеются равенства

$$K\lambda K\mu K = K\lambda K_N K_L K_{\bar{N}}\mu K = K\lambda\mu K\,.$$

Следовательно, $a(\lambda)a(\mu) = a(\lambda\mu)$ (случай $a(\lambda)a(s)$ разбирается аналогично). □

Утверждение 4.10. *Имеется равенство*

$$\mathcal{H}_K(G) = \mathcal{H}_0 \cdot A \cdot B \cdot \mathcal{H}_0\,.$$

При этом $A \cong \mathbb{C}[\Lambda^+]$ является конечно порожденной коммутативной подалгеброй в $\mathcal{H}_K(G)$.

Доказательство. Выберем представителей классов смежности $x_1, \ldots, x_n \in K_0$ из K_0/K. Поскольку K нормальна в K_0, имеются равенства $Kx_i = x_iK = Kx_iK$. Вместе с разложением Картана это показывает, что любой двойной класс смежности G по K имеет вид

$$Kx_i\lambda s x_j K, \quad \lambda \in \Lambda^+,\ s \in S\,.$$

Теперь требуемый результат следует из леммы 4.9. □

Лемма 4.11. *Для любого представления V из* $\mathrm{Rep}(G)$ *и для любого элемента $\lambda \in \Lambda^+$ выполняется равенство*

$$V^K \cap \mathrm{Ker}(a(\lambda)) = V^K \cap \mathrm{Ker}(e_\Gamma)\,,$$

где $\Gamma := \lambda^{-1}K_{N_\lambda}\lambda \subset N_\lambda$.

Доказательство. Подобным образом, как в доказательстве леммы 4.9 можно показать, что имеются равенства (здесь важно, что рассматривается не произвольная параболическая подгруппа, а подгруппа P_λ):

$$K\lambda K = K_{N_\lambda}K_{L_\lambda}K_{\bar{N}_\lambda}\lambda K = K_{N_\lambda}\lambda K = \lambda(\lambda^{-1}K_{N_\lambda}\lambda)K\,.$$

Следовательно, имеется равенство $a(\lambda) = \delta_\lambda e_\Gamma e_K$ в $\mathcal{H}_K(G)$. Это доказывает требуемый факт, так как элемент $\delta_\lambda \in \mathcal{H}(G)$ обратим. □

Утверждение 4.12. *Для любого представления V из* $\mathrm{Rep}(G)$*, элемента $\lambda \in \Lambda^+$ и хорошей подгруппы $K \subset K_0$ следующие условия равносильны:*

(i) *элемент $a(\lambda) \in \mathcal{H}_K(G)$ действует локально нильпотентно на V^K (то есть для любого элемента $v \in V^K$ существует натуральное число n такое, что $a(\lambda)^n v = 0$);*

(ii) $r^G_{P_\lambda}(V)^K = 0$.

Доказательство. Это следует из точности функтора взятия K-инвариантов, замечания 4.4, леммы 4.9, леммы 4.11, а также из того, что $N_\lambda = \cup_i \lambda^{-i} K_{N_\lambda} \lambda^i$. □

Лемма 4.13. *Предположим, что подмножество $\Sigma \subset \Lambda^+$ компактно по модулю $\Lambda^+ \cap Z$. Тогда для любого элемента $\lambda \in \Lambda^+ \setminus (\Lambda^+ \cap Z)$ существует натуральное n такое, что $\lambda^n \notin \Sigma$.*

Доказательство. Пусть $\Lambda^+ \subset \Lambda$ задается условиями вида $l_i(\lambda) \geqslant 0$, $l_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z})$. При этом $\Lambda^+ \cap Z$ состоит из $\lambda \in \Lambda$, для которых $l_i(\lambda) = 0$ при всех i. Поэтому для любого $\lambda \in \Lambda^+ \setminus (\Lambda^+ \cap Z)$ найдется i такое, что $l_i(\lambda) \neq 0$.

Поскольку Σ конечно по модулю $\Lambda^+ \cap Z$, функция l_i принимает конечной число значений на Σ. Следовательно, существует натуральное n такое, что $l_i(\lambda^n) = n l_i(\lambda) \notin l_i(\Sigma)$, что доказывает лемму. □

Теперь мы готовы дать доказательство теоремы Хариш-Чандры.

Доказательство теоремы 4.7. Рассмотрим гладкое представление V группы G. Утверждается, что V компактно по модулю Z тогда и только тогда, когда для любой хорошей открытой компактной подгруппы $K \subset G$ и $v \in K^K$ функция

$$\Lambda^+ \to V^K, \quad \lambda \mapsto a(\lambda)v\,,$$

имеет конечный носитель по модулю $\Lambda^+ \cap Z$. Это следует из того, что хорошие открытые компактные подгруппы образуют базу окрестностей единицы, а также из того, что элементы $a(x)$, $x \in K_0$, обратимы, подпространство $B \cdot \mathcal{H}_{K_0}(K)$ в $\mathcal{H}_K(G)$ конечномерно, и предложения 4.10.

По лемме 4.13 последнее условие равносильно тому, что для любого элемента $\lambda \in \Lambda^+ \setminus (\Lambda^+ \cap Z)$ оператор $a(\lambda)$ действует локально нильпотентно на V^K. По утверждению 4.12 это равносильно тому, что $r^G_{P_\lambda}(V) = 0$ для любого элемента $\lambda \in \Lambda^+ \setminus (\Lambda^+ \cap Z)$. Поскольку любая параболическая подгруппа $P \subset G$, $P \neq G$, сопряжена подгруппе вида P_λ, $\lambda \in \Lambda^+ \setminus (\Lambda^+ \cap Z)$, это доказывает теорему. □

4.4 Каспидальные компонентны

Обозначим через $\mathrm{Irr}(G)^{cu}$ подмножество в $\mathrm{Irr}(G)$, состоящее из классов изоморфизма всех каспидальных неприводимых гладких представлений. Определим группу $\Psi(G)$ по формуле

$$\Psi(G) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(G), \mathbb{C}^*)\,.$$

Замечание 4.14.

(i) Имеется изоморфизм $\Psi(G) \cong (\mathbb{C}^*)^r$, где r равно размерности максимального расщепимого тора в радикале группы G.

(ii) Группа $\Psi(G)$ является группой $\mathbb{C}$-точек алгебраической группы $\mathrm{Spec}\big(\mathbb{C}[\Lambda(G)]\big)$.

(iii) Группа $\Psi(G)$ действует на множестве $\mathrm{Irr}(G)$ по формуле

$$\chi\colon V \mapsto V \otimes \chi\,,$$

где V — неприводимое представление группы G, и характер $\chi\colon \Lambda(G) \to \mathbb{C}^*$ рассматривается также как характер группы G, пропускающийся через эпиморфизм $G \to \Lambda(G)$.

(iv) Из замечания 4.4(ii) и из того, что G^c содержит любую компактную подгруппу в G следует, что действие группы $\Psi(G)$ сохраняет каспидальность неприводимых гладких представлений.

Определение 4.15. Орбиты действия группы $\Psi(G)$ на $\mathrm{Irr}(G)^{cu}$ называются *каспидальными компонентами* в $\mathrm{Irr}(G)$.

Утверждение 4.16. *Пусть V и V' являются неприводимыми гладкими представлениями группы G. Через $V|_{G^c}$ и $V'|_{G^c}$ будем обозначать ограничения представлений V и V', соответственно, на подгруппу $G^c \subset G$. Выполняются следующие утверждения:*

(i) Представление $V|_{G^c}$ изоморфно конечной прямой сумме неприводимых гладких представлений группы G^c. В частности, $\mathrm{End}_{G^c}(V_{G^c})$ является конечномерным $\mathbb{C}$-пространством.

(ii) Для характера $\chi \in \Psi(G)$ имеет место изоморфизм $f\colon V \xrightarrow{\sim} V' \otimes \chi$ представлений группы G тогда и только тогда, когда f является χ^{-1}-собственным вектором относительно действия группы $\Lambda(G)$ на пространстве $\mathrm{Hom}_{G^c}(V|_{G^c}, V'|_{G^c})$.

(iii) Существует изоморфизм $V|_{G^c} \cong V'|_{G^c}$ представлений группы G^c тогда и только тогда, когда $V \cong V' \otimes \chi$ для некоторого $\chi \in \Psi(G)$.

Доказательство. По лемме 3.17 ограничение $V|_{G^c \cdot Z}$ изоморфно конечной прямой сумме неприводимых гладких представлений группы $G^c \cdot Z$. По следствию 3.12 каждое из этих неприводимых представлений также является неприводимым представлением группы G^c, что доказывает пункт (i).

Группа $\Lambda(G)$ действует на $\mathrm{Hom}_{G^c}(V|_{G^c}, V'|_{G^c})$ сопряжением морфизмов представлений: $[g](f) := gfg^{-1}$, где $f \in \mathrm{Hom}_{G^c}(V|_{G^c}, V'|_{G^c})$, а $[g]$ обозначает класс в $\Lambda(G)$ элемента $g \in G$. Из этого следует пункт (ii), так как любой ненулевой морфизм между неприводимыми представлениями является изоморфизмом.

Равносильность из пункта (iii) очевидна в одну сторону. Предположим, что $V|_{G^c} \cong V'|_{G^c}$. Тогда пространство $\mathrm{Hom}_{G^c}(V|_{G^c}, V'|_{G^c})$ является ненулевым представлением группы $\Lambda(G) \cong \mathbb{Z}^{\oplus r}$. По пункту (i) оно конечномерно, следовательно, в $\mathrm{Hom}_{G^c}(V|_{G^c}, V'|_{G^c})$ имеется собственный вектор относительно некоторого характера группы $\Lambda(G)$. Теперь все следует из пункта (ii). $\square$

Замечание 4.17.

(i) Из утверждения 4.16(i),(ii) следует, что стабилизаторы действия группы $\Psi(G)$ на $\mathrm{Irr}(G)$ конечны.

(ii) Из пункта (i) следует, что любая каспидальная компонента $D \subset \mathrm{Irr}(G)^{cu}$ биективна множеству $\mathbb{C}$-точек торсора над группой $\Psi(G)/R$, где $R \subset \Psi(G)$ является конечной подгруппой. В частности, имеются (неканонические) изоморфизмы $D \cong \Psi(G)/R \cong (\mathbb{C}^*)^r$.

(iii) Предположим, что для неприводимых гладких представлений V и V' группы G выполняется условие $JH(V|_{G^c}) \cap JH(V'|_{G^c}) \neq \varnothing$. Тогда по утверждению 4.16(i) пространство $\mathrm{Hom}_{G^c}(V|_{G^c}, V'|_{G^c})$ ненулевое, и из доказательства утверждения 4.16(iii) следует, что V и V' лежат в одной каспидальной компоненте

Утверждение 4.18. *Любая каспидальная компонента $D \subset \mathrm{Irr}(G)^{cu}$ отщепима.*

Доказательство. Для неприводимого представления W из D положим $S := JH(W|_{G^c})$. Из теоремы 4.7 и утверждений 4.6, 4.16 следует, что S является конечным подмножеством в $\mathrm{Irr}(G^c)^{co}$ и не зависит от выбора W в D. Кроме того, подмножество $S \subset \mathrm{Irr}(G^c)$ инвариантно относительно действия группы G на $\mathrm{Irr}(G^c)$, заданного по формуле $U \mapsto \mathrm{Ad}(g)^*(U)$, где U — неприводимое гладкое представление группы G^c (на самом деле, данное действие пропускается через фактор-группу $\Lambda(G)$).

По теореме 3.29(i) произвольное гладкое представление V группы G раскладывается в прямую $V \cong V_1 \oplus V_2$ представлений группы G^c, где $JH(V_1) \subset S$, $JH(V_2) \cap S = \varnothing$. Из нормальности группы G^c в G следует, что для любого элемента $g \in G$ подпространства $g(V_i)$, $i = 1, 2$, также являются подпредставлениями группы G^c в V, причем $V_i \cong \mathrm{Ad}(g^{-1})^*(V_i)$. Поскольку $\mathrm{Ad}(g^{-1})^*(S) = S$ и $V \cong g(V_1) \oplus g(V_2)$, мы получаем, что $V_i = g(V_i)$. Следовательно, V_i являются подпредставлениями в V относительно действия всей группы G.

Наконец, из замечания 4.17(iii) следует, что $JH(V_1) \subset D$, $JH(V_1) \cap D = \varnothing$. Это завершает доказательство. □