Balti Tee 2018

Peterburi, 5. november 2018 Version: *Estonian*

Lahendamisaeg: $4\frac{1}{2}$ tundi.
Küsimusi võib küsida esimese 30 minuti jooksul.
Kasutada võib ainult joonestus- ja kirjutusvahendeid.

Ülesanne 1. Positiivsete (mitte tingimata erinevate) reaalarvude lõplik kogum on *tasakaalus*, kui iga arv on väiksem kui ülejäänute summa. Leia kõik täisarvud $m \geq 3$, mille korral saab iga tasakaalus kogumi m arvust jagada kolmeks osaks nii, et iga osa kõigi arvude summa on väiksem ülejäänud kahe osa arvude summast.

Ülesanne 2. On antud tabel mõõtmetega 100×100. Iga k korral, kus $1 \leq k \leq 100$, sisaldab tabeli k. rida arve $1, 2, \ldots, k$ kasvavas järjekorras (vasakult paremale), kuid mitte tingimata järjestikustes lahtrites; ülejäänud $100 - k$ lahtrit on täidetud nullidega. Tõesta, et leiduvad kaks veergu, nii et arvude summa ühes neist on vähemalt 19 korda suurem kui arvude summa teises neist.

Ülesanne 3. Olgu a, b, c, d positiivsed reaalarvud, mille korral $abcd = 1$. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leq 1.$$

Ülesanne 4. Leia kõik funktsioonid $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, mis iga positiivse täisarvu n ja kõigi mittenegatiivsete reaalarvude $x_1, \ldots, x_n$ korral rahuldavad võrdust

$$f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2.$$

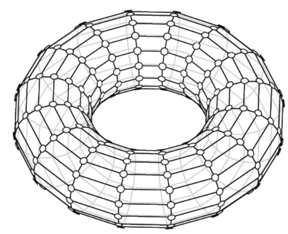
Ülesanne 5. Reaalarvuliste kordajatega polünoomi $f(x)$ nimetame *genereerivaks*, kui iga reaalarvuliste kordajatega polünoomi $\varphi(x)$ jaoks leiduvad positiivne täisarv k ja reaalarvuliste kordajatega polünoomid $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ nii, et

$$\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x)).$$

Leia kõik genereerivad polünoomid.

Ülesanne 6. Olgu n positiivne täisarv. Päkapikk reisib ruumis $\mathbb{R}^3$, alustades punktist $(0, 0, 0)$. Iga käiguga saab ta teleporteeruda suvalisse täisarvuliste koordinaatidega punkti kaugusel $\sqrt{n}$ tema hetkeasukohast. Teleporteerumine on aga keeruline. Päkapikk alustab *normaalsena*, aga muutub esimesel teleporteerumisel *veidraks*. Järgmisel teleporteerumisel muutub ta *normaalseks*, siis jälle *veidraks* jne.

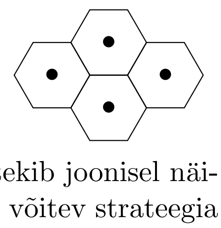
Missuguste n väärtuste korral saab päkapikk reisida igasse teise täisarvuliste koordinaatidega punkti ja olla sinna jõudes *normaalne*?



Ülesanne 7. Joonisel oleva 16×16 toori kõik 512 serva on värvitud punaseks või siniseks. Värvimine on *hea*, kui iga tipp on paarisarvu punaste servade otspunktiks. Käik on mõne ühikruudu iga 4 serva värvi vahetamine. Milline on suurim arv häid värvimisi, mille puhul pole ühtegi neist võimalik muuta teiseks mingi arvu käikudega?

Ülesanne 8. Graafil on N tippu. Nähtamatu küülik istub ühes tipus. Jahimeeste punt proovib küülikut tappa. Iga käiguga tulistavad nad kõik üheaegselt: iga jahimees laseb üht tippu, sihttipud on jahimeestel kooskõlastatud. Kui küülik oli lasu ajal ühes sihttipus, siis jaht lõppeb. Vastasel juhul võib jänes oma tipus püsida või mõnda naabertippu hüpata.

Jahimeestel on teada algoritm, mille abil tabavad nad küüliku maksimaalselt $N!$ käiguga. Tõesta, et sel juhul leidub algoritm, mille abil saab küüliku tabada maksimaalselt 2^N käiguga.



Ülesanne 9. Oleg ja Sandra mängivad lõpmatul kuusnurksete lahtritega mänguväljal. Nad käivad vaheldumisi, asetades vabalt valitud tühja lahtrisse kivikese. Alustab Oleg. Vahetult enne 2018. kivi asetamist tuleb mängu uus reegel. Kivi võib nüüd asetada ainult kahe mittetühja naabriga tühja lahtrisse.

Mängija kaotab, kui ta ei saa ühtegi käiku teha või kui tema käigu tulemusena tekib joonisel näidatud rombikujund (pööratud ükskõik missugusel viisil). Kas kellelgi mängijatest on võitev strateegia ja kui, siis kellel?

Ülesanne 10. Täisarvud 1 kuni n on kirjutatud n kaardile, igal kaardil üks. Esimene mängija eemaldab ühe kaardi. Teine mängija eemaldab siis kaks järjestikuste täisarvudega kaarti. Siis eemaldab esimene mängija kolm järjestikuste täisarvudega kaarti ja lõpuks teine mängija neli järjestikuste täisarvudega kaarti. Mis on vähim n väärtus, mille korral saab teine mängija kindlasti mõlemad oma käigud teha?

Ülesanne 11. Kõõlnelinurga $ABCD$ ümberringjoone ω diameeter on AD. On teada, et $|AB| = |BC| = a$ ja $|CD| = c$, kus a ja c ühistegurita täisarvud. Tõesta, et kui ω diameeter d on samuti täisarv, siis kas d või $2d$ on mingi täisarvu ruut.

Ülesanne 12. Teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused BB_1 ja CC_1 lõikuvad punktis H. Olgu B_2 ja C_2 sellised punktid vastavalt lõikudel BH ja CH, et $|BB_2| = |B_1H|$ ja $|CC_2| = |C_1H|$. Kolmnurkade B_2HC_2 ja ABC ümberringjooned lõikuvad punktides D ja E. Tõesta, et kolmnurk DEH on täisnurkne.

Ülesanne 13. Kolmnurga ABC nurga A poolitaja lõikub küljega BC punktis D ning kolmnurga ABC ümberringjoonega punktis E. Olgu K, L, M ja N vastavalt lõikude AB, BD, CD ja AC keskpunktid. Olgu P kolmnurga EKL ümberringjoone keskpunkt ja Q kolmnurga EMN ümberringjoone keskpunkt. Tõesta, et $\angle PEQ = \angle BAC$.

Ülesanne 14. Puutujanelinurga $ABCD$ siseringjoone ω ja diagonaali AC lõikepunkt, mis on lähemal tipule A, on E. Punkt F asub ringjoonel ω sümmeetriliselt vastas punktile E. Ringjoone ω puutuja läbi punkti F lõikab sirgeid AB ja BC vastavalt punktides A_1 ja C_1 ning sirgeid AD ja CD vastavalt punktides A_2 ja C_2. Tõesta, et $|A_1C_1| = |A_2C_2|$.

Ülesanne 15. Kaks ringjoont tasandil ei lõiku ega asu üksteise sees. Neil ringjoontel valitakse diameetrid A_1B_1 ja A_2B_2 selliselt, et lõigud A_1A_2 ja B_1B_2 lõikuvad. Olgu A ja B vastavalt lõikude A_1A_2 and B_1B_2 keskpunktid ning C nende lõikude lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt asub teatud fikseeritud sirgel, mis ei sõltu diameetrite valikust.

Ülesanne 16. Olgu p paaritu algarv. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral $\sqrt{n^2 - np}$ on positiivne täisarv.

Ülesanne 17. Tõesta, et kõigi positiivsete täisarvude p, q jaoks, mille korral $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$, kehtib

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}.$$

Ülesanne 18. Olgu $n \geq 3$ selline täisarv, et $4n + 1$ on algarv. Tõesta, et $4n + 1$ jagab arvu $n^{2n} - 1$.

Ülesanne 19. Lõpmatu positiivsete täisarvude hulk B on järgmise omadusega: iga $a, b \in B$, kus $a > b$, puhul kuulub arv $\dfrac{a-b}{(a,b)}$ hulka B. Tõesta, et B sisaldab kõiki positiivseid täisarve. Siin tähistab (a, b) arvude a ja b suurimat ühistegurit.

Ülesanne 20. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (a, b, c), mille korral on arv

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

täisarv ja $a + b + c$ algarv.