Baltian tie 2018

Pietari, 5. marraskuuta, 2018 Versio: *Suomi*

Sallittu aika: 4.5 tuntia.
Kysymyksiä saa esittää ensimmäisten 30 minuutin aikana.
Vain kirjoittamiseen ja piirtämiseen tarkoitetut työvälineet ovat sallittuja.

Tehtävä 1. Äärellinen positiivisten (ei välttämättä erillisten) reaalilukujen kokoelma on *tasapainotettu*, jos jokainen luku on pienempi kuin muiden lukujen summa. Etsi kaikki sellaiset luvut $m \geq 3$, että jokainen äärellinen, tasapainotettu m luvun kokoelma voidaan jakaa kolmeen osaan, joista kunkin osan lukujen summa on pienempi kuin toisten kahden osan lukujen summa.

Tehtävä 2. Tarkastellaan 100×100 -taulukkoa. Jokaiselle k, $1 \leq k \leq 100$, taulukon k:s rivi sisältää luvut $1, 2, \ldots, k$ kasvavassa järjestyksessä (vasemmalta oikealle), mutta ei välttämättä vierekkäisissä ruuduissa; loput $100 - k$ ruutua täytetään nollilla. Osoita, että on olemassa kaksi saraketta, joista yhden sarakkeen lukujen summa on vähintään 19 kertaa niin suuri kuin toisen sarakkeen lukujen summa.

Tehtävä 3. Olkoot a, b, c, d sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $abcd = 1$. Todista epäyhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leq 1.$$

Tehtävä 4. Etsi kaikki sellaiset funktiot $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, että mille tahansa positiiville kokonaisluvulle n ja mille tahansa ei-negatiivisille reaalilukuvuille $x_1, \ldots, x_n$ pätee

$$f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2.$$

Tehtävä 5. Reaalilukukertoimista polynomia $f(x)$ kutsutaan *generoivaksi*, jos jokaista reaalilukukertoimista polynomia $\varphi(x)$ kohti on olemassa positiivinen kokonaisluku k ja sellaiset reaalilukukertoimiset polynomit $g_1(x), \ldots, g_k(x)$, että

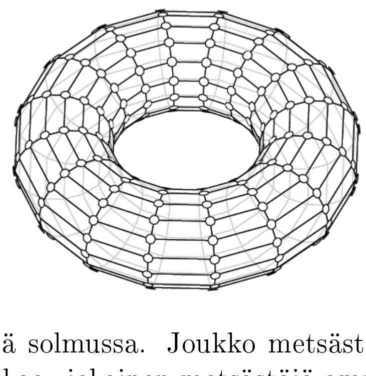
$$\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x)).$$

Etsi kaikki generoivat polynomit.

Tehtävä 6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Haltija Elfie matkustaa avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Hän aloittaa origosta: $(0, 0, 0)$. Jokaisella vuorolla hän teleporttaa mihin tahansa kokonaislukukoordinaattiin, joka sijaitsee tasan etäysyydellä $\sqrt{n}$ hänen nykyisestä sijainnistaan. Teleporttaus on kuitenkin monimutkainen menetelmä. Elfie aloittaa *normaalina*, mutta muuttuu *oudoksi* ensimmäisellä teleporttauksellaan. Kun hän teleporttaa seuraavan kerran, hän muuttuu taas *normaaliksi*, sitten taas *oudoksi* jne.

Millä luvun n arvoilla voi Elfie matkustaa mihin tahansa kokonaislukukoordinaattiin ja olla *normaali*, kun hän saapuu sinne?

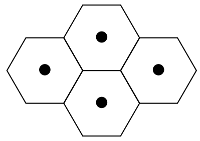
Tehtävä 7. Kuvan näköisen 16×16 -toruksen 512 särmästä jokainen on väritetty punaiseksi tai siniseksi. Väritys on *hyvä*, jos jokainen solmu on päätepisteenä parilliselle määrälle punaisia särmiä. Siirto koostuu mielivaltaisen yksikköruudun jokaisen 4 särmän värin vaihtamisesta. Mikä on suurin määrä sellaisia hyviä värityksiä, että mitään niistä ei voi muokata toiseksi sarjalla siirtoja?



Tehtävä 8. Verkossa on N solmua. Näkymätön jänis istuu yhdessä solmussa. Joukko metsästäjiä yrittää tappaa jäniksen. Jokaisella siirrolla he kaikki ampuvat yhtä aikaa: jokainen metsästäjä ampuu yhtä solmua kohti, ja he valitsevat kohteensa yhteistyössä toistensa kanssa. Jos jänis oli yhdessä kohteina olleista solmuista ammunnan aikana, metsästys päättyy. Muutoin jänis joko pysyy samassa solmussa tai hyppää yhteen viereisistä solmuista.

Metsästäjät tuntevat algoritmin, jolla he pystyvät tappamaan jäniksen korkeintaan $N!$ siirrolla. Osoita, että tällöin on olemassa algoritmi, jolla he pystyvät tappamaan jäniksen korkeintaan 2^N siirrolla.

Tehtävä 9. Olga ja Sasha pelaavat peliä äärettömällä kuusikulmioista koostuvalla ruudukolla. He sijoittavat vuorotellen kiven valitsemaansa vapaaseen kuusikulmioon. Olga aloittaa pelin. Juuri ennen kuin 2018:s kivi pelataan, peliin tulee uusi sääntö. Kivi voidaan nyt sijoittaa vain sellaiseen kuusikulmioon, jolla on vähintään kaksi naapuria, joissa on kivi.



Pelaaja häviää, jos hän joko ei pysty tekemään siirtoa tai täyttää oheisessa kuvassa näytetyn vinoneliön muotoisen kuvion siirtonsa tuloksena (käännettynä millä tahansa mahdollisella tavalla). Määritä, kummalla pelaajalla, jos kummallakaan, on voittostrategia.

Tehtävä 10. Kokonaisluvut luvusta 1 lukuun n on kirjoitettu n kortille, yksi jokaiselle. Ensimmäinen pelaaja poistaa yhden kortin. Sitten toinen pelaaja poistaa kaksi korttia, joissa on peräkkäiset kokonaisluvut. Tämän jälkeen ensimmäinen pelaaja poistaa kolme korttia, joissa on peräkkäiset kokonaisluvut. Lopuksi toinen pelaaja poistaa neljä korttia, joissa on peräkkäiset kokonaisluvut. Mikä on pienin luku n, jolla toinen pelaaja voi varmistaa, että hän pystyy suorittamaan kummatkin siirtonsa?

Tehtävä 11. Pisteet A, B, C ja D ovat tässä järjestyksessä ympyrällä ω ja jana AD on ympyrän ω halkaisija. Olkoot $AB = BC = a$ ja $CD = c$, missä a ja c ovat yhteistekijättömiä kokonaislukuja. Osoita, että jos ympyrän ω halkaisijan pituus d on kokonaisluku, niin joko d tai $2d$ on neliöluku.

Tehtävä 12. Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanat BB_1 ja CC_1 leikkaavat pisteessä H. Olkoon B_2 sellainen janan BH ja C_2 sellainen janan CH piste, että $BB_2 = B_1H$ ja $CC_2 = C_1H$. Kolmion B_2HC_2 ympäri piirretty ympyrä leikkaa kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteissä D ja E. Osoita, että kolmio DEH on suorakulmainen.

Tehtävä 13. Kolmion ABC kulman A puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D ja kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteessä E. Olkoot janojen AB, BD, CD ja AC keskipisteet K, L, M ja N, tässä järjestyksessä. Olkoon P kolmion EKL ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja Q kolmion EMN ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Osoita, että $\angle PEQ = \angle BAC$.

Tehtävä 14. Olkoon $ABCD$ ympyrän ω ympäri piirretty nelikulmio. Olkoon E ympyrän ω ja lävistäjän AC leikkauspisteistä se, joka on lähimpänä pistettä A. Olkoon F pisteen E kautta kulkevan, ympyrän ω halkaisijan toinen päätepiste. Ympyrän ω pisteeseen F piirretty tangentti leikkaa suoran AB pisteessä A_1 ja suoran BC pisteessä C_1 sekä suoran AD pisteessä A_2 ja suoran CD pisteessä C_2. Osoita, että $A_1C_1 = A_2C_2$.

Tehtävä 15. Tasossa on kaksi ympyrää, jotka eivät leikkaa toisiaan eivätkä ole sisäkkäisiä. Valitaan näiden ympyröiden sellaiset halkaisijat A_1B_1 ja A_2B_2, että janat A_1A_2 ja B_1B_2 leikkaavat. Olkoot A ja B janojen A_1A_2 ja B_1B_2 keskipisteet sekä C näiden janojen leikkauspiste. Osoita, että kolmion ABC ortokeskus sijaitsee jollain kiinteällä suoralla, joka ei riipu tarkasteltavien halkaisijoiden valinnasta.

Tehtävä 16. Olkoon p pariton alkuluku. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla $\sqrt{n^2 - np}$ on positiivinen kokonaisluku.

Tehtävä 17. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla p, q, joilla $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$, seuraava epäyhtälö on voimassa:

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}.$$

Tehtävä 18. Olkoon $n \geq 3$ sellainen kokonaisluku, jolla luku $4n + 1$ on alkuluku. Osoita, että luku $4n + 1$ jakaa luvun $n^{2n} - 1$.

Tehtävä 19. Positiivisista kokonaisluvuista koostuvalla äärettömällä joukolla B on seuraava ominaisuus: Kun $a, b \in B$ ja $a > b$, niin luku $\dfrac{a-b}{(a,b)}$ kuuluu joukkoon B. Osoita, että joukko B sisältää kaikki positiiviset kokonaisluvut. Merkintä (a, b) tarkoittaa lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää.

Tehtävä 20. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen (a, b, c) kolmikot, joilla luku

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

on kokonaisluku ja luku $a + b + c$ on alkuluku.