Baltic Way 2018

St. Petersburg, 5. November 2018 Version: *Deutsch*

Bearbeitungszeit: 4,5 Stunden
Fragen können während der ersten 30 Minuten gestellt werden.
Als Hilfsmittel sind nur Schreib- und Zeichengeräte erlaubt.

Aufgabe 1. Eine endliche Familie (nicht notwendigerweise verschiedener) positiver reeller Zahlen heißt *ausgeglichen*, falls jede der Zahlen kleiner ist als die Summe der anderen. Man bestimme alle $m \geq 3$, für die jede ausgeglichene Familie aus m Zahlen so in drei Teile zerlegt werden kann, dass die Summe der Zahlen in jedem Teil kleiner ist als die Summe der Zahlen in den beiden anderen Teilen.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine Tabelle vom Format 100×100. Für alle k, $1 \leq k \leq 100$, enthält die k-te Zeile der Tabelle die Zahlen 1, 2, …, k in aufsteigender Reihenfolge (von links nach rechts), aber nicht unbedingt in aufeinanderfolgenden Zellen. In den übrigen $100 - k$ Zellen der Zeile stehen Nullen. Man beweise, dass es zwei Spalten gibt, so dass die Summe der Zahlen in der einen Spalte mindestens 19 mal so groß ist wie die Summe der Zahlen in der anderen Spalte.

Aufgabe 3. Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen mit $abcd = 1$. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leq 1.$$

Aufgabe 4. Man bestimme alle Funktionen $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle positiven ganzen n und nichtnegativen reellen $x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2.$$

Aufgabe 5. Ein Polynom $f(x)$ mit reellen Koeffizienten heißt *erzeugend*, falls es für jedes Polynom $\varphi(x)$ mit reellen Koeffizienten eine positive ganze Zahl k und Polynome $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ mit reellen Koeffizienten gibt, so dass

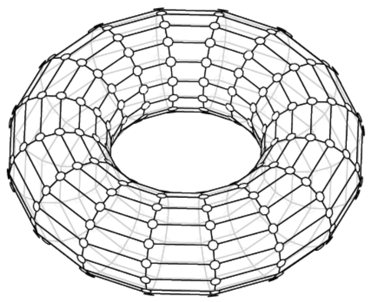
$$\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x))$$

gilt. Man bestimme alle erzeugenden Polynome.

Aufgabe 6. Es sei n eine positive ganze Zahl. Die Elfe Elfie reist durch den $\mathbb{R}^3$. Sie startet im Ursprung $(0,0,0)$. In jedem Schritt kann sie sich zu einem Punkt mit ganzzahligen Koordinaten teleportieren, der genau $\sqrt{n}$ von ihrer gegenwärtigen Position entfernt ist. Allerdings ist Teleportation eine komplizierte Angelegenheit. Elfies Ausgangszustand ist *normal*, aber sie wird *seltsam* durch die erste Teleportation. Nach der nächsten Teleportation ist sie wieder normal, nach der übernächsten seltsam usw.

Für welche n kann Elfie jeden Punkt mit ganzzahligen Koordinaten in normalem Zustand erreichen?

Aufgabe 7. Jede der 512 Kanten eines (16×16)-Torus (siehe Abbildung) ist entweder rot oder blau gefärbt. Eine Färbung ist *gut*, falls sich in jedem Knoten geradzahlig viele rote Kanten treffen. Ein Zug besteht darin, die Farben aller 4 Kanten einer beliebigen Zelle zu ändern. Was ist die größtmögliche Anzahl guter Färbungen, so dass sich keine von ihnen durch eine Abfolge von Zügen in eine andere überführen lässt.

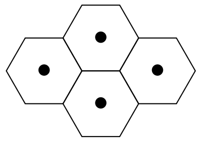


Aufgabe 8. Ein Graph hat N Knoten. Ein unsichtbarer Hase sitzt in einem der Knoten. Eine Gruppe von Jägern versucht, den Hasen zu schießen. In jedem Schritt schießen alle Jäger gleichzeitig, jeder auf einen Knoten, wobei sie die Zielknoten gemeinsam festlegen. War der Hase in einem der Zielknoten, so ist die Jagd beendet. Ansonsten kann der Hase an seiner Position bleiben oder in einen der Nachbarknoten springen.

Die Jäger kennen einen Algorithmus, der es ihnen erlaubt, den Hasen in höchstens $N!$ Schritten zu erlegen. Man beweise, dass es dann auch einen Algorithmus gibt, der es ihnen ermöglicht, den Hasen in höchstens 2^N Schritten zu erlegen.

Aufgabe 9. Olga und Sasha spielen ein Spiel auf einem unendlichen Sechseckgitter. Sie legen abwechselnd jeweils einen Spielstein auf ein freies Sechseck ihrer Wahl. Olga beginnt. Unmittelbar bevor der 2018-te Spielstein platziert wird, tritt eine neue Regel in Kraft. Ab dann kann ein Spielstein nur noch auf einem freien Sechseck platziert werden, das mindestens zwei bereits belegte Nachbarsechsecke hat.

Ein Spieler verliert, wenn sie oder er entweder nicht mehr ziehen kann oder einen Zug macht, durch den ein Muster wie in der Abbildung (eventuell nach einer geeigneten Drehung) entsteht. Man ermittle, ob einer der Spieler eine Gewinnstrategie hat und, wenn ja, welcher.



Aufgabe 10. Die natürlichen Zahlen von 1 bis n sind auf n Karten geschrieben, jede auf eine eigene Karte. Der erste Spieler entfernt eine Karte. Danach entfernt der zweite Spieler zwei Karten mit aufeinanderfolgenden Zahlen. Anschließend entfernt der erste Spieler drei Karten mit aufeinanderfolgenden Zahlen. Schließlich entfernt der zweite Spieler vier Karten mit aufeinanderfolgenden Zahlen. Was ist das kleinste n, für das der zweite Spieler sicherstellen kann, dass er seine beiden Züge ausführen kann?

Aufgabe 11. Die Punkte A, B, C, D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis ω, wobei AD ein Durchmesser von ω ist. Weiterhin gelte $AB = BC = a$ und $CD = c$ mit teilerfremden ganzen Zahlen a und c. Man zeige: Ist der Durchmesser d von ω ebenfalls ganzzahlig, so ist entweder d oder $2d$ eine Quadratzahl.

Aufgabe 12. Die Höhen BB_1 und CC_1 eines spitzwinkligen Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt H. B_2 und C_2 seien Punkte auf den Strecken BH bzw. CH, für die $BB_2 = B_1H$ und $CC_2 = C_1H$ gilt. Der Umkreis des Dreiecks B_2HC_2 schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC in den Punkten D und E. Man beweise, dass DEH ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Aufgabe 13. In einem Dreieck ABC schneidet die Winkelhalbierende des Winkels bei A die Seite BC im Punkt D und den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt E. Die Punkte K, L, M und N seien in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Strecken AB, BD, CD bzw. AC. Ferner seien P und Q die Umkreismittelpunkte der Dreiecke EKL bzw. EMN. Man beweise: $\angle PEQ = \angle BAC$.

Aufgabe 14. Ein Viereck $ABCD$ habe einen Inkreis ω. Der Punkt E sei derjenige Schnittpunkt von ω mit der Diagonalen AC, der näher an A liegt. Der Punkt F liegt auf ω dem Punkt E diametral gegenüber. Die Tangente an ω in F schneidet die Geraden AB und BC in den Punkten A_1 bzw. C_1 und die Geraden AD und CD in den Punkten A_2 bzw. C_2. Man beweise: $A_1C_1 = A_2C_2$.

Aufgabe 15. Zwei Kreise in der Ebene schneiden sich nicht, und keiner von beiden liegt im anderen. Die Durchmesser A_1B_1 und A_2B_2 dieser Kreise seien so gewählt, dass sich die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 schneiden. A und B seien die Mittelpunkte der Strecken A_1A_2 bzw. B_1B_2, und C sei der Schnittpunkt dieser Strecken. Man beweise, dass der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC auf einer festen Geraden liegt, die nicht von der Wahl der Lage der Durchmesser abhängt.

Aufgabe 16. Es sei p eine ungerade Primzahl. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die $\sqrt{n^2 - np}$ eine positive ganze Zahl ist.

Aufgabe 17. Man beweise, dass für alle positiven ganzen Zahlen p, q mit $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}.$$

Aufgabe 18. Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl, für die $4n + 1$ eine Primzahl ist. Man beweise, dass $4n + 1$ ein Teiler von $n^{2n} - 1$ ist.

Aufgabe 19. Eine unendliche Menge B positiver ganzer Zahlen hat die folgende Eigenschaft: Gilt $a, b \in B$ mit $a > b$, dann gehört auch die Zahl $\dfrac{a-b}{(a,b)}$ zu B. Man zeige, dass B alle positiven ganzen Zahlen enthält. Hierbei bezeichnet (a, b) den größten gemeinsamen Teiler von a und b.

Aufgabe 20. Man bestimme alle Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen, für die

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

ganzzahlig und $a + b + c$ eine Primzahl ist.