Eystrasaltskeppnin 2018

Pétursborg, 5. nóvember 2018 Version: *Icelandic*

Tímamörk: $4\frac{1}{2}$ klukkustund.
Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.
Einungis skriffæri og teikniáhöld eru leyfð.

Dæmi 1. Endanlegt safn jákvæðra rauntalna (ekki endilega ólíkra) er sagt *yfirvegað* ef hver og ein talnanna er minni en summa allra hinna. Finnið öll $m \geq 3$ þannig að sérhverju yfirveguðu safni m talna má skipta í þrjá hluta, með þann eiginleika að summa talnanna í hverjum hluta er minni en summa talnanna í hinum tveimur hlutunum.

Dæmi 2. Gefin er 100×100 tafla. Fyrir sérhvert k, $1 \leq k \leq 100$, inniheldur k-ta lína töflunnar tölurnar $1, 2, \ldots, k$ í vaxandi röð (frá vinstri til hægri), en ekki endilega í aðliggjandi reitum. Í hinum $100 - k$ reitum línunnnar er 0. Sannið að til eru tveir dálkar þannig að summa talnanna í öðrum dálknum er að minnsta kosti 19-föld summa talnanna í hinum dálknum.

Dæmi 3. Látum a, b, c, d vera jákvæðar rauntölur þannig að $abcd = 1$. Sannið ójöfnuna

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leq 1.$$

Dæmi 4. Finnið öll föll $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ sem fyrir allar jákvæðar heiltölur n og allar rauntölur $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ fullnægja skilyrðinu

$$f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2.$$

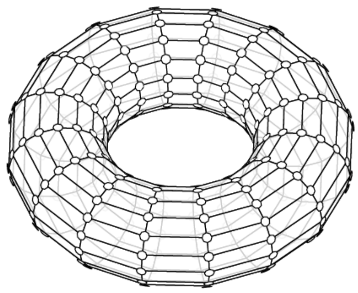
Dæmi 5. Margliða $f(x)$ með rauntalnastuðlum er sögð *framleiðandi*, ef fyrir sérhverja margliðu $\varphi(x)$ með rauntalnastuðlum eru til jákvæð heiltala k og margliður $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ með rauntalnastuðlum, þannig að

$$\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x)).$$

Finnið allar framleiðandi margliður.

Dæmi 6. Látum n vera jákvæða heiltölu. Álfurinn Álfrún ferðast um í $\mathbb{R}^3$. Hún hefur för sína í upphafspunktinum $(0, 0, 0)$. Í hverju skrefi getur hún ferðast með fjarflutningi í punkt með heiltöluhnit sem er nákvæmlega í fjarlægðinni $\sqrt{n}$ frá þeim punkti þar sem hún er stödd. En fjarflutningur er flókin aðgerð. Álfrún byrjar í ástandi sem er *eðlilegt*, en eftir fyrsta fjarflutninginn er hún í ástandi sem er *skrýtið*. Eftir næsta fjarflutning verður ástand hennar aftur *eðlilegt*, svo aftur *skrýtið*, og þannig koll af kolli.

Fyrir hvaða gildi á n getur Álfrún komist í hvaða punkt sem er með heiltöluhnit og verið í *eðlilegu* ástandi þegar hún kemur þangað?

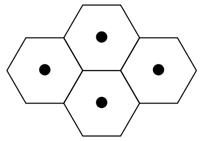


Dæmi 7. Á 16×16 hjólneti, eins og myndir sýnir, er sérhver 512 leggja þess litaður rauður eða blár. Litun er sögð *góð*, ef sérhver hnútur er endahnútur slétts fjölda rauðra leggja. *Færsla* er aðgerð sem felst í að víxla litum á sérhverjum fjögurra leggja einhvers möskva í netinu. Hver er mesti fjöldi góðra litana, þannig að engri þeirra er unnt að breyta í aðra með röð af færslum?

Dæmi 8. Net hefur N hnúta. Ósýnilegur héri er staddur í einum af hnútum netsins. Hópur veiðimanna reynir að skjóta hérann. Í hverju skrefi skjóta allir veiðimennirnir samtímis: hver veiðimaður skýtur að einum hnúti, og þeir hafa samráð um val á skotmörkum. Ef hérinn er staddur í hnúti, sem skotið er á, þá lýkur veiðunum. Annars getur hérinn verið kyrr þar sem hann er eða stokkið í einhvern aðlægan hnút.

Veiðimennirnir kunna aðferð til að skjóta hérann í að mesta lagi $N!$ skrefum. Sannið að þá er til aðferð sem gerir þeim unnt að skjóta hérann í að mesta lagi 2^N skrefum.

Dæmi 9. Olga og Ívan spila borðspil sem leikið er á óendanlegu borði með sexhyrningslaga reitum. Þau leggja til skiptis stein á lausan sexhyrning að eigin vali. Olga leikur fyrst. Rétt áður en 2018-di steinninn er lagður tekur ný regla gildi. Þaðan í frá má einungis leggja stein á lausa reiti sem hafa að minnsta kosti tvo aðliggjandi reiti með steini á.



Leikmaður tapar þegar hún eða hann getur ekki leikið, eða þarf að leggja niður stein þannig að fram komi tígullaga mynstrið sem myndin sýnir, eða önnur slík sem fást með snúningi. Ákvarðið hvor leikmanna, ef einhver, á örugga vinningsleið.

Dæmi 10. Heilu tölurnar frá 1 til n eru ritaðar n spjöldum, ein á hvert spjald. Fyrri leikmaður fjarlægir eitt spjald. Þá fjarlægir seinni leikmaður tvö spjöld með aðliggjandi heiltölum. Fyrri leikmaðurinn fjarlægir þá þrjú spjöld með aðliggjandi heiltölum. Að lokum fjarlægir seinni leikmaðurinn fjögur spjöld með aðliggjandi heiltölum. Hvert er minnsta gildi tölunnar n þannig að seinni leikmaðurinn geti tryggt að hann leiki báða sína leiki?

Dæmi 11. Punktar A, B, C, D liggja í þessari röð á hring ω, þar sem AD er miðstrengur ω. Að auki er $AB = BC = a$ og $CD = c$ fyrir ósamþátta heiltölur a og c. Látum d vera þvermál ω. Sýnið að ef d er heiltala, þá er d eða $2d$ ferningstala.

Dæmi 12. Hæðir BB_1 og CC_1 í hvasshyrndum þríhyrningi ABC skerast í punkti H. Látum B_2 vera punkt á strikinu BH og C_2 punkt á CH þannig að $BB_2 = B_1H$ og $CC_2 = C_1H$. Umritaður hringur B_2HC_2 sker umritaðan hring ABC í punktum D og E. Sannið að þríhyrningurinn DEH er rétthyrndur.

Dæmi 13. Helmingalína hornsins A í þríhyrningi ABC sker BC í punkti D, og umritaðan hring ABC í punkti E. Látum K, L, M og N vera miðpunkta strikanna AB, BD, CD og AC, í þessari röð. Látum P vera ummiðju þríhyrningsins EKL og Q vera ummiðju þríhyrningsins EMN. Sannið að $\angle PEQ = \angle BAC$.

Dæmi 14. Ferhyrningur $ABCD$ er umritaður um hring ω. Látum E vera þann skurðpunkt ω og hornalínunnar AC sem er nær A. Látum F vera punkt á ω þannig að EF er miðstrengur ω. Snertill við ω í punktinum F sker línurnar AB og BC í punktum A_1 og C_1, og línurnar AD og CD í punktum A_2 og C_2. Sannið að $A_1C_1 = A_2C_2$.

Dæmi 15. Tveir hringir í plani skerast ekki og hvorugur þeirra liggur innan hins. Við veljum miðstrengi A_1B_1 og A_2B_2 í hringjunum þannig að strikin A_1A_2 og B_1B_2 skerast. Látum A og B vera miðpunkta strikanna A_1A_2 og B_1B_2 og látum C vera skurðpunkt þessara strika. Sýnið að skurðpunktur hæða þríhyrningsins ABC liggur á vissri línu, sem er óháð vali á miðstrengjunum.

Dæmi 16. Látum p vera frumtölu sem er oddatala. Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að $\sqrt{n^2 - np}$ er jákvæð heiltala.

Dæmi 17. Sannið að fyrir jákvæðar heiltölur p, q þannig að $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$, þá gildir ójafnan

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}.$$

Dæmi 18. Látum $n \geq 3$ vera heiltölu þannig að $4n + 1$ sé frumtala. Sannið að $4n + 1$ gengur upp í $n^{2n} - 1$.

Dæmi 19. Óendanlegt mengi B af jákvæðum heiltölum hefur eftirfarandi eiginleika. Fyrir sérhver $a, b \in B$ með $a > b$ þá er talan $\frac{a-b}{(a,b)}$ í B. Hér táknar (a, b) stærsta samdeili talnanna a og b. Sannið að B inniheldur allar jákvæðar heiltölur.

Dæmi 20. Finnið allar þrenndir jákvæðra heiltalna (a, b, c) þannig að talan

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

sé heiltala og $a + b + c$ sé frumtala.