Baltijas ceļš 2018

Sanktpēterburga, 2018. gada 5. novembris Version: *Latvian*

Risināšanas laiks: 4,5 stundas.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Izmantot atļauts tikai rakstāmpiederumus un lineālu.

1. uzdevums. Galīgu pozitīvu reālu skaitļu saimi (saime ir kopa, kuras elementi var būt vienādi) sauksim par *sabalansētu*, ja katrs no tiem ir mazāks par pārējo skaitļu summu. Atrast visus $m \geq 3$, kuriem jebkuru sabalansētu m skaitļu saimi var sadalīt trīs daļās tā, ka skaitļu summa jebkurā no tām ir mazāka par skaitļu summu abās pārējās.

2. uzdevums. Dota 100×100 rūtiņu tabula. Katram k, $1 \leq k \leq 100$, tabulas k-tā rinda satur skaitļus $1, 2, \ldots, k$ augošā secībā (no kreisās uz labo pusi), bet ne obligāti pēc kārtas sekojošās rūtiņās; atlikušās $100 - k$ rūtiņas aizpildītas ar nullēm. Pierādiet, ka eksistē divas tādas kolonnas, ka vienas kolonnas skaitļu summa vismaz 19 reizes pārsniedz skaitļu summu otrā kolonnā.

3. uzdevums. Doti pozitīvi skaitļi a, b, c, d, kuriem $abcd = 1$. Pierādiet nevienādību

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leq 1.$$

4. uzdevums. Atrodiet visas tādas funkcijas $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, ka jebkuram naturālam n un jebkuriem nenegatīviem reāliem skaitļiem $x_1, \ldots, x_n$ izpildās

$$f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2.$$

5. uzdevums. Polinomu $f(x)$ ar reāliem koeficientiem sauksim par *ģenerējošu*, ja katram polinomam ar reāliem koeficientiem $\varphi(x)$ eksistē naturāls skaitlis k un tādi polinomi ar reāliem koeficientiem $g_1(x), \ldots, g_k(x)$, ka

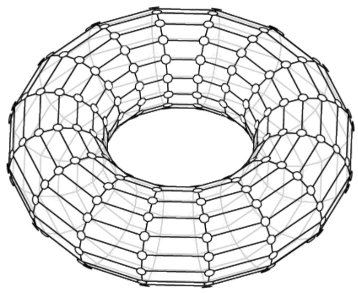
$$\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x)).$$

Atrodiet visus ģenerējošos polinomus!

6. uzdevums. Dots naturāls skaitlis n. Elfiene Elvīra ceļo R^3 telpā, savu ceļojumu viņa sāk punktā $(0, 0, 0)$. Katrā gājienā viņa var teleportēties uz jebkuru punktu ar veselām koordinātēm, kas atrodas tieši attālumā $\sqrt{n}$ no viņas atrašanās vietas. Taču telportēšanās ir sarežģīta procedūra. Elvīra sākumā ir *normāla*, bet, teleportējoties pirmo reizi, viņa kļūst *dīvaina*. Tad, teleportējoties atkal, viņa kļūst atkal normāla, pēc tam atkal dīvaina, normāla, dīvaina utt.

Kādiem n Elvīra var nonākt jebkurā punktā ar veselām koordinātām un būt normāla, kad viņa tur nonāk?

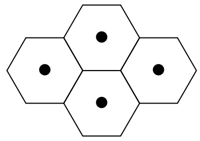
7. uzdevums. Torā, kas sastāv no 16×16 šūnām (redzams attēlā), katra no 512 šķautnēm ir nokrāsota sarkanā vai zilā krāsā. Krāsojums ir *labs*, ja katrā virsotnē satiekas pāra skaits sarkanu šķautņu. Vienā gājienā var izvēlēties šūnu un nomainīt krāsu katrai no 4 to aptverošajām šķautnēm. Kāds ir lielākais dažādu labu krāsojumu skaits, no kuriem nekādus divus nevar pārvērst vienu otrā ar jelkādu gājienu secību?



8. uzdevums. Grafā ir N virsotnes, vienā no tām sēž neredzams zaķītis. Vairāki mednieki mēģina zaķīti nomedīt. Katrā gājienā visi mednieki vienlaicīgi izšauj, katrs pa savu grafa virsotni, bet mērķus viņi izvēlas saskaņoti. Ja zaķītis atradās kādā no virsotnēm, pa kuru šāva mednieki, medības beidzas, bet, ja ne, tad zaķītis var palikt uz vietas vai pārlēkt uz kādu blakus virsotni.

Mednieki zin algoritmu, kā nomedīt zaķīti $N!$ gājienos. Pierādiet, ka eksistē algoritms, kas ļauj zaķīti nomedīt ne vairāk kā 2^N gājienos!

9. uzdevums. Olga un Saša spēlē spēli uz bezgalīga laukuma, kurš sastāv no regulāriem sešstūriem. Viņas pēc kārtas liek akmentiņus uz brīviem sešstūriem, spēli sāk Olga. Tieši pirms tiek uzlikts 2018. akmentiņš, stājas spēkā jauns noteikums: akmentiņš tagad var tikt uzlikts tikai uz tāda brīva sešstūra, kuram blakus ir vismaz divi sešstūri ar akmentiņiem.



Spēlētāja zaudē, ja nespēj veikt gājienu vai arī ja pēc viņas gājiena izveidojas rombveida figūra, kas parādīta attēlā (tā var būt pagriezta). Noskaidrojiet, vai kādai no spēlētājām ir uzvaroša stratēģija un, ja ir, tad kurai?

10. uzdevums. Dotas n kārtis ar skaitļiem no 1 līdz n. Vispirms pirmais spēlētājs paņem vienu kārti. Tad otrais spēlētājs paņem divas kārtis ar pēc kārtas sekojošiem skaitļiem. Tad pirmais spēlētājs paņem trīs kārtis ar pēc kārtas sekojošiem skaitļiem. Visbeidzot, otrais spēlētājs paņem četras kārtis ar pēc kārtas sekojošiem skaitļiem. Kāda ir mazākā n vērtība, kurai otrais spēlētājs var garantēt, ka viņš varēs veikt abus savus gājienus?

11. uzdevums. Punkti A, B, C un D atrodas (šādā secībā) uz riņķa līnijas ω, AD ir ω diametrs. Zināms, ka $AB = BC = a$ un $CD = c$ ir savstarpēji pirmskaitļi. Pierādiet, ka, ja ω diametrs d arī ir naturāls skaitlis, tad vai nu d vai $2d$ ir naturāla skaitļa kvadrāts!

12. uzdevums. Šaurleņķa trijstūrī ABC augstumi BB_1 un CC_1 krustojas punktā H. Uz nogriežņiem BH un CH attiecīgi atzīmēti punkti B_2 un C_2 tā, ka $BB_2 = B_1H$ un $CC_2 = C_1H$. Trijstūrim B_2HC_2 apvilktā riņķa līnija krusto trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju punktos D un E. Pierādiet, ka trijstūris DEH ir taisnleņķa!

13. uzdevums. Trijstūra ABC bisektrise ir AD, tam apvilkto riņķa līniju taisne AD vēlreiz krusto punktā E. Punkti K, L, M un N ir attiecīgi nogriežņu AB, BD, CD un AC viduspunkti. Punkts P ir trijstūrim EKL apvilktās riņķa līnijas centrs, bet Q — trijstūrim EMN apvilktās riņķa līnijas centrs. Pierādiet, ka $\sphericalangle PEQ = \sphericalangle BAC$

14. uzdevums. Ap riņķa līniju ω apvilkts četrstūris $ABCD$. Punkts E ir tas riņķa līnijas ω un diagonāles AC krustpunkts, kurš ir tuvāks punktam A. Punktam E diametrāli pretējais punkts uz ω ir F. Caur punktu F novilktā riņķa līnijas ω pieskare krusto taisnes AB un BC attiecīgi punktos A_1 un C_1, bet taisnes AD un CD attiecīgi punktos A_2 un C_2. Pierādiet, ka $A_1C_1 = A_2C_2$

15. uzdevums. Divas riņķa līnijas atrodas vienā plaknē, nekrustojas un neatrodas viena otrai iekšpusē. Izvēlamies šo riņķa līniju diametrus A_1B_1 un A_2B_2 tā, ka nogriežņi A_1A_2 un B_1B_2 krustojas. Punkti A un B ir nogriežņu A_1A_2 un B_1B_2 viduspunkti, punkts C ir šo nogriežņu krustpunkts. Pierādiet, ka trijstūra ABC augstumu krustpunkts pieder fiksētai taisnei, kas nav atkarīga no diametru izvēles!

16. uzdevums. Dots nepāra pirmskaitlis p. Atrodiet visus naturālos n, kuriem $\sqrt{n^2 - np}$ arī ir naturāls skaitlis.

17. uzdevums. Pierādiet, ka visiem naturāliem skaitļiem p, q, kuriem $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$, ir spēkā nevienādība

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}.$$

18. uzdevums. Dots tāds naturāls skaitlis $n \geq 3$, ka $4n + 1$ ir pirmskaitlis. Pierādiet, ka $n^{2n} - 1$ dalās ar $4n + 1$.

19. uzdevums. Bezgalīgai naturālu skaitļu kopai B piemīt sekojoša īpašība: jebkuriem $a, b \in B$, kuriem $a > b$, arī skaitlis $\dfrac{a-b}{\mathrm{LKD}(a,b)}$ pieder kopai B. Pierādiet, ka kopa B satur visus naturālos skaitļus. (Ar $\mathrm{LKD}(a,b)$ apzīmē skaitļu a un b lielāko kopīgo dalītāju).

20. uzdevums. Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus (a, b, c), kuriem skaitlis

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

ir naturāls un skaitlis $a + b + c$ ir pirmskaitlis.