Baltijos kelias 2018

Sankt Peterburgas, 2018 m. lapkričio 5 d. Version: *Lithuanian*

Laikas sprendimui: 4 val. 30 min.
Klausimus galima užduoti per pirmąsias 30 minučių.
Leidžiama naudotis tik rašymo ir braižymo priemonėmis.

1. Realiųjų teigiamų (nebūtinai skirtingų) skaičių baigtinį (nesutvarkytą) rinkinį vadinkime *subalansuotu*, jei kiekvienas jo skaičius yra mažesnis už likusių skaičių sumą. Raskite visus $m \geq 3$, kuriems kiekvienas m skaičių subalansuotas rinkinys gali būti padalytas į tris dalis, turinčias savybę: bet kurių dviejų dalių visų skaičių suma yra didesnė už likusios dalies visų skaičių sumą.

2. Duota 100×100 lentelė. Kiekvienam natūraliajam k, $1 \leq k \leq 100$, lentelės k-tojoje eilutėje didėjimo tvarka iš kairės į dešinę surašomi skaičiai $1, 2, \ldots, k$ (po skaičių į langelį, galbūt praleidžiant kai kuriuos langelius); į eilutės likusius $100 - k$ langelių įrašoma po skaičių 0. Įrodykite, kad yra du stulpeliai, kurių vieno skaičių suma yra mažiausiai 19 kartų didesnė nei kito skaičių suma.

3. Realieji teigiami skaičiai a, b, c, d tenkina lygybę $abcd = 1$. Įrodykite nelygybę

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leq 1.$$

4. Raskite visas tokias funkcijas $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, kad bet kuriam natūraliajam n ir bet kuriems realiesiems neneigiamiems skaičiams x_1, ..., x_n galioja lygybė

$$f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2.$$

5. Daugianarį $f(x)$ su realiaisiais koeficientais vadinkime *generuojančiu*, jei kiekvienam daugianariui $\varphi(x)$ su realiaisiais koeficientais galima nurodyti tokį natūralųjį skaičių k ir tokius daugianarius $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ su realiaisiais koeficientais, kad

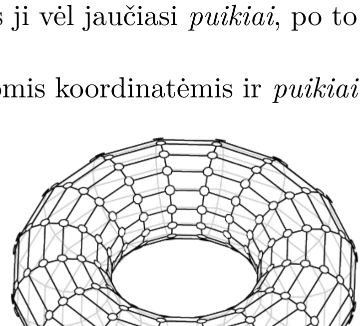
$$\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x)).$$

Raskite visus generuojančius daugianarius.

6. Duotas natūralusis skaičius n. Ragana skrajoja erdvėje $\mathbb{R}^3$. Ji pradeda kelionę taške $(0, 0, 0)$. Ji moka teleportuotis į bet kurį tašką su sveikosiomis koordinatėmis, esantį tiksliu atstumu $\sqrt{n}$ nuo jos esamos padėties. Tačiau teleportacijos burtai sudėtingi. Todėl nors pradžioje ragana jaučiasi *puikiai*, po pirmos teleportacijos ji pasijunta *klaikiai*. Po dar vienos teleportacijos ji vėl jaučiasi *puikiai*, po to vėl *klaikiai*, ir t. t.

Kurioms n reikšmėms ragana gali patekti į bet kurį tašką su sveikosiomis koordinatėmis ir *puikiai* jaustis jame?

7. Kiekviena iš pavaizduotojo 16×16 toro 512 briaunų nudažoma arba raudonai, arba mėlynai. Nudažymą vadinsime *geru*, jei kiekviena viršūnė priklauso (kaip galo taškas) lyginiam skaičiui raudonų briaunų. Turint nudažymą, leidžiama atlikti ėjimą: pasirinkti toro langelį ir pakeisti kiekvienos iš jo 4 kraštinių spalvą (raudoną spalvą mėlyna ir atvirkščiai). Kiek daugiausiai gerų nudažymų galima sugalvoti, kad jokio iš jų nebūtų galima gauti iš kito, atlikus ėjimų seką?

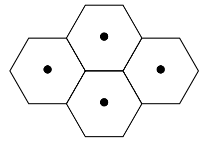


8. Grafas turi N viršūnių. Nematomas kiškis tupi vienoje iš jų. Medžiotojų būrys bando nušauti kiškį. Kaskart jie šauna vienu metu: kiekvienas į kurią nors vieną viršūnę (nebūtinai tą pačią), pasirinkę taikinius sutartinai. Jei šaunama į viršūnę, kurioje tupi kiškis, tai medžioklė baigiasi. Priešingu atveju kiškis gali likti savo viršūnėje arba peršokti į vieną iš gretimų viršūnių.

Medžiotojai žino algoritmą, kaip nušauti kiškį per daugiausiai $N!$ ėjimų (medžiotojų bendrų šūvių). Įrodykite, kad egzistuoja algoritmas, kaip nušauti kiškį per daugiausiai 2^N ėjimų.

9. Olia ir Saša žaidžia žaidimą, visą plokštumą padaliję į lygius taisyklinguosius šešiakampius bei pakaitomis atlikdami ėjimus. Ėjimo metu reikia padėti šaškę bet kuriame tuščiame šešiakampyje. Pirmąjį ėjimą atlieka Olia. Prieš pat padedant 2018-ąją šaškę įsigalioja nauja taisyklė: nuo šiol šaškę galima dėti tik tuščiame šešiakampyje, turinčiame bent du gretimus šešiakampius, kuriuose šaškės jau guli.

Žaidėjas pralaimi, jei negali atlikti ėjimo arba jei po jo ėjimo susidaro rombo formos figūra, parodyta paveikslėlyje (bet kaip pasukta). Ar kuris nors žaidėjas turi pergalės strategiją? Jei taip, nustatykite kuris.



10. Ant padėtų n kortelių užrašyta po vieną iš skaičių $1, 2, \ldots, n$; visi užrašyti skaičiai skirtingi. Pirmasis žaidėjas pasiima vieną kortelę. Tada antrasis žaidėjas pasiima dvi korteles, kurių skaičiai yra gretimi. Toliau pirmasis žaidėjas pasiima tris korteles, ant kurių užrašyti trys gretimi skaičiai. Pagaliau antrasis žaidėjas pasiima keturias korteles, ant kurių užrašyti keturi gretimi skaičiai. Su kokia mažiausia n reikšme antrasis žaidėjas gali užsitikrinti, kad jam pavyks atlikti abu savo ėjimus?

11. Apskritime ω iš eilės ratu pažymėti taškai A, B, C, D. Atkarpa AD yra ω skersmuo. Be to, $AB = BC = a$ ir $CD = c$, kur a ir c yra natūralieji tarpusavyje pirminiai skaičiai. Įrodykite, kad jei $AD = d$ taip pat yra sveikasis skaičius, tai arba d, arba $2d$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

12. Smailiojo trikampio ABC aukštinės BB_1 ir CC_1 kertasi taške H. Atkarpose BH ir CH atitinkamai pažymėti tokie taškai B_2 ir C_2, kad $BB_2 = B_1H$ ir $CC_2 = C_1H$. Trikampių ABC ir B_2HC_2 apibrėžtiniai apskritimai kertasi taškuose D ir E. Įrodykite, kad trikampis DEH statusis.

13. Trikampio ABC kampo A pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške D, o trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą – taške E. Taškai K, L, M, N atitinkamai dalija pusiau atkarpas AB, BD, CD, AC. Trikampių EKL ir EMN apibrėžtinių apskritimų centrai atitinkamai pažymėti P ir Q. Įrodykite, kad $\angle PEQ = \angle BAC$.

14. Į keturkampį $ABCD$ įbrėžtas apskritimas ω. Įstrižainės AC ir ω sankirtos taškas, arčiausias taškui A, pažymėtas E. Taškas F yra vienas iš ω skersmens EF galų. Apskritimo ω liestinė taške F kerta tieses AB, BC, AD, CD atitinkamai taškuose A_1, C_1, A_2, C_2. Įrodykite, kad $A_1C_1 = A_2C_2$.

15. Du apskritimai yra vienas kito išorėje ir neturi bendrų taškų. Pasirinkime tokius jų skersmenis A_1B_1 ir A_2B_2, kad atkarpos A_1A_2 ir B_1B_2 kirstųsi. Atkarpų A_1A_2 ir B_1B_2 vidurio taškus atitinkamai pažymėkime A ir B, o šių atkarpų sankirtą pažymėkime C. Įrodykite, kad trikampio ABC aukštinių sankirtos taškas yra fiksuotoje tiesėje, kurios padėtis nepriklauso nuo skersmenų parinkimo.

16. Duotas nelyginis pirminis skaičius p. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, kuriems $\sqrt{n^2 - np}$ yra natūralusis skaičius.

17. Įrodykite, kad bet kurie natūralieji skaičiai p, q, kuriems $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$, tenkina nelygybę

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}.$$

18. Skaičius $n \geq 3$ natūralusis, o skaičius $4n + 1$ pirminis. Įrodykite, kad $4n + 1$ dalija $n^{2n} - 1$.

19. Begalinė aibė B, sudaryta iš natūraliųjų skaičių, pasižymi tokia savybe: jei $a, b \in B$ ir $a > b$, tai skaičius $\dfrac{a - b}{\mathrm{DBD}(a, b)}$ priklauso aibei B. Įrodykite, kad aibei B priklauso visi natūralieji skaičiai. Čia $\mathrm{DBD}(a, b)$ yra skaičių a ir b didžiausias bendras daliklis.

20. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c), kuriems skaičius

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

yra natūralusis, o skaičius $a + b + c$ yra pirminis.