Baltic Way 2018

St. Petersburg, 5. november 2018 Version: *Norwegian*

Varighet: 4,5 timer.
Spørsmål kan stilles i løpet av den første halvtimen.
Eneste tillatte hjelpemidler er skrive- og tegnesaker.

Oppgave 1. En endelig samling positive reelle tall (ikke nødvendigvis forskjellige) er *balansert* dersom hvert tall er mindre enn summen av de andre. Finn alle $m \geq 3$ slik at hver balanserte endelige samling av m tall kan deles i tre deler slik at summen av tallene i enhver del er mindre enn summen av tallene i de to andre delene.

Oppgave 2. Vi har en 100×100 tabell. For hver k, $1 \leq k \leq 100$, inneholder tabellens k-te rad tallene $1, 2, \ldots, k$ i stigende rekkefølge (fra venstre til høyre), men ikke nødvendigvis i naboruter. De resterende $100 - k$ rutene inneholder 0-tall. Vis at det finnes to kolonner slik at summen av tallene i den ene kolonna er minst 19 ganger større enn summen av tallene i den andre kolonna.

Oppgave 3. La a, b, c og d være positive reelle tall slik at $abcd = 1$. Vis at

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leq 1.$$

Oppgave 4. Finn alle funksjoner f fra ikke-negative reelle tall til ikke-negative reelle tall som for ethvert positivt heltall n og vilkårlige ikke-negative reelle tall $x_1, \ldots, x_n$ oppfyller

$$f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2.$$

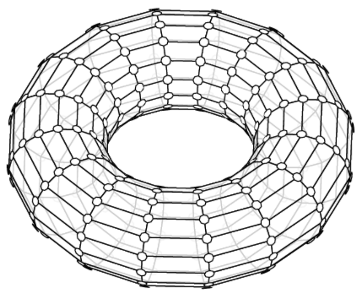
Oppgave 5. Et polynom $f(x)$ med reelle koeffisienter kalles *genererende* hvis man for hvert polynom $\varphi(x)$ med reelle koeffisienter kan finne et positivt heltall k og polynomer $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ med reelle koeffisienter slik at

$$\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x)).$$

Bestem alle genererende polynomer.

Oppgave 6. La n være et positivt heltall. Alven Alvine beveger seg i $\mathbb{R}^3$. Hun starter i origo $(0, 0, 0)$. Hun kan trylle seg mellom to punkter med heltallige koordinater dersom avstanden mellom dem er nøyaktig $\sqrt{n}$. Trylling er dog komplisert. Alvine starter som *normal*, men hver gang hun tryller seg til et nytt punkt blir hun *rar* hvis hun var *normal* eller *normal* hvis hun var *rar*.

For hvilke n kan Alvine komme seg til ethvert punkt med heltallige koordinater og være *normal* når hun kommer dit?



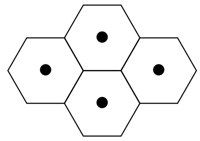
Oppgave 7. Enhver av de 512 kantene i 16×16-torusen til høyre skal fargelegges rød eller blå. En slik fargelegging kalles *god* dersom hvert hjørne er et endepunkt til et partalls antall røde kanter. Et trekk består i å bytte fargen til hver av de 4 kantene i en vilkårlig rute. Hvor mange forskjellige gode fargelegginger kan man finne slik at ingen av dem kan endres til en av de andre?

Oppgave 8. En graf har N noder. En usynlig hare befinner seg i en av nodene. En gruppe jegere forsøker å skyte haren. I hvert trekk blir jegerne enige om hvilke noder de skyter på, og deretter skyter de samtidig. Hver jeger skyter på en enkelt node. Hvis en av jegerne skyter på noden der haren sitter, er jakten over. Ellers kan haren velge å bli sittende i noden sin eller hoppe til en av nabonodene.

Det finnes en plan som sikrer jegerne å drepe haren på høyst $N!$ trekk. Vis at det finnes en plan som sikrer jegerne å drepe haren på høyst 2^N trekk.

Oppgave 9. Christine og Niels spiller et spill på et uendelig sekskantet rutenett. De bytter på å gjøre trekk. Hvert trekk består i å plassere én stein i en fritt valgt ledig sekskant. Christine starter. Rett før stein nummer 2018 plasseres, innføres en ny regel i spillet: En stein kan heretter bare plasseres i de ledige sekskantene som har minst to opptatte nabosekskanter.

En spiller taper dersom hun eller han ikke har noen lovlige trekk eller har lagt den fjerde steinen i et rombemønster som på figuren (eller en rotert versjon av den). Avgjør hvilken spiller, om noen, som har en vinnende strategi.



Oppgave 10. Heltallene fra 1 til n står skrevet på hvert sitt av n spillekort. Den første spilleren fjerner et kort. Deretter fjerner den andre spilleren to kort med påfølgende heltall. Så fjerner den første spilleren tre kort med påfølgende heltall. Til slutt fjerner den andre spilleren fire kort med påfølgende heltall. Hva er den minste verdien n kan ha slik at den andre spilleren helt sikkert vil kunne gjennomføre begge trekkene sine?

Oppgave 11. Punktene A, B, C og D ligger i denne rekkefølgen på sirkelen ω der AD er en diameter. Videre er $AB = BC = a$ og $CD = c$ der a og c er to relativt primiske heltall. Vis at dersom diameteren d til ω også er et heltall, så vil enten d eller $2d$ være et kvadrattall.

Oppgave 12. I en spissvinklet trekant ABC skjærer høydene BB_1 og CC_1 hverandre i punktet H. La B_2 og C_2 være punktene på linjestykkene henholdsvis BH og CH slik at $BB_2 = B_1H$ og $CC_2 = C_1H$. Omsirklene til trekantene B_2HC_2 og ABC skjærer hverandre i punktene D og E. Vis at trekanten DEH er rettvinklet.

Oppgave 13. Halveringslinja til vinkel A i trekanten ABC skjærer BC i punktet D og omsirkelen til trekanten ABC i punktet E. La K, L, M og N være midtpunktene til linjestykkene AB, BD, CD og AC, henholdsvis. La P være omsenteret til trekanten EKL, og Q være omsenteret til trekanten EMN. Vis at $\angle PEQ = \angle BAC$.

Oppgave 14. Sirkelen ω er innskrevet i firkanten $ABCD$. La E være skjæringspunktet mellom ω og diagonalen AC nærmest A. Punktet F ligger på ω diametralt motsatt E. Tangenten til ω i punktet F skjærer linjene AB og BC i punktene A_1 og C_1, og linjene AD og CD i punktene A_2 og C_2, henholdsvis. Vis at $A_1C_1 = A_2C_2$.

Oppgave 15. To sirkler i planet skjærer hverandre ikke, og ingen av dem ligger inne i den andre. Vi velger diametere A_1B_1 og A_2B_2 i disse sirklene slik at linjestykkene A_1A_2 og B_1B_2 skjærer hverandre. La A og B være midtpunktene til linjestykkene A_1A_2 og B_1B_2, og C være skjæringspunktet til disse linjestykkene. Vis at ortosenteret til trekant ABC ligger på en fast linje som ikke avhenger av hvilke diametere som er valgt.

Oppgave 16. La p være et odde primtall. Finn alle positive heltall n slik at $\sqrt{n^2 - np}$ er et positivt heltall.

Oppgave 17. Vis at for alle positive heltall p og q slik at $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$ så er

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}$$

Oppgave 18. La $n \geq 3$ være et heltall slik at $4n + 1$ er et primtall. Vis at $4n + 1$ deler $n^{2n} - 1$.

Oppgave 19. En uendelig mengde B av positive heltall er slik at dersom $a, b \in B$ og $a > b$, så er

$$\frac{a - b}{\gcd(a, b)} \in B.$$

Vis at B inneholder alle positive heltall.

Oppgave 20. Finn alle tripler av positive heltall (a, b, c) slik at tallet

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

er et heltall og $a + b + c$ er et primtall.