Baltic Way 2018

St. Petersburg, 5 Listopada, 2018 Version: *Polish*

Czas pracy: 4.5 godziny.
Podczas początkowych 30 minut można zadawać pytania.
Dozwolone są tylko przyrządy do pisania i rysowania.

Problem 1. Skończoną kolekcję dodatnich liczb rzeczywistych (niekoniecznie różnych) nazwiemy *zbalansowaną* jeśli każda z liczb jest mniejsza od sumy pozostałych. Wyznacz wszystkie $m \geqslant 3$ takie, że każdą skończoną zbalansowaną kolekcję mocy m można podzielić na trzy części w taki sposób, by suma liczb w każdej części była mniejsza od sumy liczb w pozostałych dwóch częściach.

Problem 2. Dana jest tablica 100×100. Dla każdego k, $1 \leqslant k \leqslant 100$, w k-tym wierszu znajdują się liczby od 1 do k wypisane w kolejności rosnącej (od lewej do prawej), niekoniecznie w sąsiadujących komórkach. We wszystkie pozostałe $100 - k$ pól danego wiersza wpisano liczbę 0. Wykaż, że można wybrać dwie takie kolumny, że suma liczb w jednej z nich jest przynajmniej 19 razy większa niż suma liczb w drugiej kolumnie.

Problem 3. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $abcd = 1$. Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leqslant 1.$$

Problem 4. Wyznacz wszyskie funkcje $f : [0;\infty) \to [0;\infty)$, które dla każdej liczby naturalnej n i dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $x_1, ..., x_n$ spełniają warunek

$$f(x_1^2 + ... + x_n^2) = f(x_1)^2 + ... + f(x_n)^2.$$

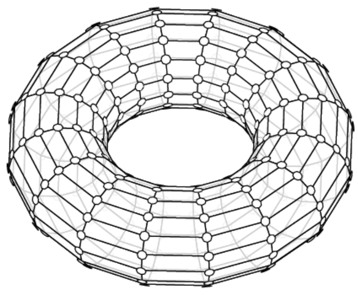
Problem 5. Wielomian $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych nazwiemy *generujacym*, jeśli dla każdego wielomianu $\phi(x)$ o współczynnikach rzeczywistych istnieje dodatnia liczba całkowita k i wielomiany $g_1(x), g_2(x), ..., g_k(x)$ o współczynnikach rzeczywistych takie, że

$$\phi(x) = f(g_1(x)) + ... + f(g_k(x)).$$

Wyznacz wszystkie wielomiany generujące.

Problem 6. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą naturalną. Elf Elfie porusza się po trójwymiarowj przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Elfie startuje w początku układu współrzędnych: $(0, 0, 0)$. W każdym ruchu może teleportować się do dowolnego punktu o współrzędnych całkowitych, który znajduje się w odległości dokładnie $\sqrt{n}$ od jego obecnego położenia. Teleportacja jest jednak skomplikowaną procedurą: Elfie zaczyna będąc w stanie *normalnym*, ale staje się *dziwny* po pierwszej teleportacji. Po kolejnej teleportacji znów staje się *normalny*, po kolejnej znowu *dziwny*, itd. Dla jakich wartości n Elfie może dotrzeć do dowolnego punktu o współrzędnych całkowitych, będąc *normalnym* gdy się w nim znajdzie?

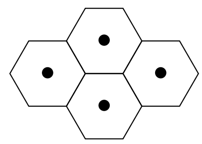
Problem 7. Na torusie o wymiarach 16×16 jak na rysunku wszystkie spośród 512 krawędzi są pokolorowane na jeden z dwóch kolorów: czerwony lub niebieski. Kolorowanie nazwiemy *dobrym*, gdy z każdego wierzchołka wychodzi parzysta liczba czerwonych krawędzi. Rozważmy ruchy polegające na zmianie koloru każdej z czterech krawędzi tworzących pojedyńczą komórkę. Jaka jest największa liczba takich dobrych kolorowań, że żadnego z nich nie można przekształcić w inne za pomocą ciągu tak zdefiniowanych ruchów?



Problem 8. Dany jest graf o N wierzchołkach. W jednym z wierzchołków znajduje się niewidzialny zając, którego próbuje upolować grupa myśliwych. Raz na minutę myśliwi strzelają jednocześnie: każdy celuje w jeden wierzchołek grafu, a swoje cele wybierają wspólnie. Jeśli zając był w wierzchołku w momencie, w którym został oddany strzał w ten wierzchołek, polowanie się kończy. W przeciwnym przypadku zając może przeskoczyć do jednego z sąsiednich wierzchołków, lub pozostać w tym samym miejscu. Myśliwi znają algorytm, który pozwala im upolować zająca w ciągu co najwyżej $N!$ ruchów. Wykaż, że w tej sytuacji istnieje algorytm, który pozwala upolować zająca w ciągu co najwyżej 2^N ruchów.

Problem 9. Olga i Sasza grają w grę na nieskończonej heksagonalnej planszy. Wykonują na zmianę ruchy polegające na położeniu pionka na jednym z pustych pól, przy czym Olga wykonuje pierwszy ruch. Zaczynając od 2018-go ruchu, zaczyna obowiązywać dodatkowa zasada: pionek można postawić tylko na tych pustych polach, które mają już co najmniej dwa sąsiednie pola zajete przez pionki.

Gracz przegrywa, kiedy nie może wykonać kolejnego ruchu, lub kiedy postawiony przez niego pionek uzupełni kształt rombu jak na rysunku (obróconego w dowolnym kierunku). Określ, czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą i jeśli tak, to który.



Problem 10. Liczby naturalne od 1 do n są zapisane po jednej, na każdej z n kart. Pierwszy gracz usuwa jedną kartę. Następnie drugi gracz usuwa pewne dwie karty, na których znajdują się dwie kolejne liczby naturalne. Po tym pierwszy gracz usuwa pewne trzy karty z trzema kolejnymi liczbami. Na koniec drugi gracz usuwa cztery karty, na których znajdują się cztery kolejne liczby. Jaka jest najmniejsza wartość n, dla której drugi gracz ma pewność, że będzie mógł wykonać oba swoje ruchy?

Problem 11. Punkty A, B, C, D leżą w tej kolejności na okręgu ω o średnicy AD. Ponadto $AB = BC = a$ oraz $CD = c$ dla pewnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych a i c. Udowodnij, że jeśli średnica $AD = d$ okręgu ω jest liczbą całkowitą, to któraś z liczb d i $2d$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Problem 12. Wysokości BB_1 i CC_1 trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Niech B_2 i C_2 będą takimi punktami na odcinkach odpowiednio BH i CH, że $BB_2 = B_1H$ oraz $CC_2 = C_1H$. Okrąg opisany na B_2HC_2 przecina okrąg opisany na ABC w punktach D i E. Wykaż, że trójkąt DEH jest prostokątny.

Problem 13. Niech D będzie przecięciem dwusiecznej trójkąta ABC przy wierzchołku A z bokiem BC. Prosta AD przecina okrąg opisany na ABC w punkcie $E \neq A$. Niech K, M, L, N będą środkami odcinków odpowiednio AB, BD, CD, AC. Niech P i Q będą środkami okręgów opisanych na trójkątach odpowiednio EKL i EMN. Udowodnij, że $\angle PEQ = \angle BAC$.

Problem 14. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu ω. Niech E będzie punktem przecięcia przekątnej AC z okręgiem ω, który leży bliżej punktu A. Niech F będzie takim punktem na okręgu ω, że EF jest jego średnicą. Prosta styczna do ω w punkcie F przecina proste AB i BC w punktach odpowiednio A_1 i C_1 oraz proste AD i DC w punktach odpowiednio A_2 i C_2. Wykaż, że $A_1C_1 = A_2C_2$.

Problem 15. Dane są dwa nieprzecinające się okręgi z rozłącznym wnętrzem oraz ich średnice A_1B_1 i A_2B_2 takie, że odcinki A_1A_2 oraz B_1B_2 przecinają się. Niech A i B będą środkami odcinków odpowiednio A_1A_2 oraz B_1B_2 i niech C będzie punktem przecięcia tych odcinków. Udowodnij, że ortocentrum trójkąta ABC leży na ustalonej prostej, która nie zależy od wyboru średnic.

Problem 16. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których $\sqrt{n^2 - np}$ jest dodatnią liczbą całkowitą.

Problem 17. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych p, q spełniających $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$ zachodzi następująca nierówność:

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}.$$

Problem 18. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą taką, że $4n + 1$ jest liczbą pierwszą. Wykaż, że $4n + 1$ dzieli $n^{2n} - 1$.

Problem 19. Nieskończony zbiór B złożony z liczb całkowitych posiada następującą własność. Dla każdej pary $a, b \in B$ spełniającej $a > b$ liczba $\frac{a-b}{(a,b)}$ należy do B. Udowodnij, że B zawiera wszystkie dodatnie liczby całkowite. Uwaga: (a, b) oznacza największy wspólny dzielnik liczb a i b.

Problem 20. Znajdź wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych (a, b, c), dla których liczba

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

jest liczbą całkowitą oraz $a + b + c$ jest liczbą pierwszą.