Baltic Way 2018

St. Petersburg, November 5th, 2018

Version: *Russian*

Длительность олимпиады: 4,5 часа.
Вопросы по условиям: в течение первых 30 минут.
Разрешается использовать только письменные принадлежности.

1. Конечный набор положительных вещественных чисел (не обязательно различных) называется *сбалансированным*, если каждое из этих чисел меньше суммы всех остальных.

Найдите все $m \geqslant 3$, для которых любой сбалансированный набор из m чисел можно разбить на три таких части, что сумма чисел в любой из них меньше суммы чисел в двух остальных частях.

2. Дана таблица 100×100. Для любого k, $1 \leqslant k \leqslant 100$, в k-й строке таблицы записаны числа $1, 2, \ldots, k$ в возрастающем порядке слева направо, но не обязательно в последовательных клетках; остальные $100 - k$ клеток заполнены нулями. Докажите, что найдутся два столбца, сумма чисел в одном из которых хотя бы в 19 раз превосходит сумму чисел в другом.

3. Пусть a, b, c, d — положительные вещественные числа такие, что $abcd = 1$. Докажите, что

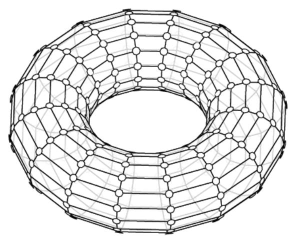
$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leqslant 1.$$

4. Найдите все такие функции $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, что $f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2$ для любого натурального числа n и любых неотрицательных чисел $x_1, \ldots, x_n$.

5. Многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентмми называется *порождающим*, если для любого многочлена $\varphi(x)$ с вещественными коэффициентами существуют натуральное число k и многочлены с вещественными коэффциентами $g_1(x), \ldots, g_k(x)$, для которых $\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x))$.

6. Дано натуральное число n. Эльфа путешествует по $\mathbb{R}^3$. Она начинает из начала координат: $(0;0;0)$. На каждом ходу она может телепортироваться в любую точку с целыми координатами, находящуюся от неё на расстоянии ровно $\sqrt{n}$. Однако, телепортация — сложная процедура. Вначале Эльфа *нормальна*, после первой телепортации она становится *безумной*, после следующей — снова нормальной, затем безумной и т.д. При каких n Эльфа может добраться до любой точки пространства с целыми координатами, причем прибыть туда в нормальном состоянии?

7. На торической клетчатой доске 16×16 (см. рисунок) каждое из 512 ребер покрашено в синий или красный цвет. Раскраска называется *хорошей*, если из каждой вершины выходит четное число красных ребер. За один ход можно сменить цвет у каждого из четырех ребер любой клетки. Каково наибольшее возможное число хороших раскрасок, которые не могут быть получены друг из друга при помощи таких ходов?

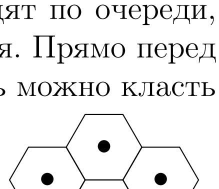


8. В графе n вершин и в одной из них сидит невидимый заяц. Группа охотников пытается убить зайца. Каждым ходом все охотники одновременно делают выстрел: каждый охотник стреляет в одну из вершин, причем вершины эти они выбирают совместно. Если во время выстрела заяц сидел в одной из вершин, по которым стреляли, охота заканчивается. В противном случае заяц может остаться на своем месте или перепрыгнуть в одну из соседних вершин.

Охотники знают алгоритм, позволяющий убить зайца не более чем за $N!$ ходов. Докажите, что существует алгоритм, позволяющий убить зайца не более чем за 2^N ходов.

9. Оля и Саша играют в игру на бесконечной шестиугольной решетке. Они ходят по очереди, за один ход игрок кладет камень в пустую шестиугольную клетку. Первой ходит Оля. Прямо перед тем, как будет положен 2018-й камень, в силу вступает новое правило: теперь камень можно класть лишь в пустую клетку, имеющую как минимум две уже занятые соседние клетки.

Игрок проигрывает, если он не может сделать ход, или после его хода появился заполненный камнями фрагмент ромбовидной формы (см. рисунок), повернутый как угодно. Имеет ли кто-нибудь из игроков выигрышную стратегию, и если имеет, то кто?



10. Числа 1, 2, …, n написаны на карточках (по одному на карточке). Первый игрок удаляет одну карточку. Затем второй игрок удаляет две карточки с последовательными числами. После этого первый игрок удаляет три карточки с последовательными числами, и наконец, второй игрок удаляет четыре карточки с последовательными числами. Каково наименьшее n, при котором второй игрок может обеспечить себе возможность совершить оба своих хода?

11. Точки A, B, C, D лежат (именно в таком порядке) на окружности ω с диаметром AD. Известно, что $AB = BC = a$ и $CD = c$ для некоторых взаимно простых натуральных чисел a и c. Докажите, что если диаметр d окружности ω также является целым числом, то одно из чисел d и $2d$ является точным квадратом.

12. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки B_2 и C_2 выбраны на отрезках BH и CH соответственно так, что $BB_2 = B_1H$ и $CC_2 = C_1H$. Описанная окружность треугольника B_2HC_2 пересекает описанную окружность треуголника ABC в точках D и E. Докажите, что треугольник DEH прямоугольный.

13. AD — биссектриса треугольника ABC. Прямая AD вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E. Точки K, L, M и N — середины отрезков AB, BD, CD и AC соответственно, P — центр описанной окружности треугольника EKL, Q — центр описанной окружности треугольника EMN. Докажите, что $\angle PEQ = \angle BAC$.

14. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. E — точка пересечения ω с диагональю AC, ближайшая к A. Точка F диаметрально противоположна точке E на окружности ω. Касательная к ω в точке F пересекает прямые AB и BC в точках A_1 и C_1, а прямые AD и CD — в точках A_2 и C_2 соответственно. Докажите, что $A_1C_1 = A_2C_2$.

15. На плоскости даны две непересекающиеся (и не лежащие одна внутри другой) окружности. У них выбираются такие диаметры A_1B_1 и A_2B_2, что отрезки A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются. Пусть A и B — середины отрезков A_1A_2 и B_1B_2, а C — точка пересечения этих отрезков. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на фиксированной прямой, не зависящей от выбора диаметров.

16. Дано нечетное простое число p. Найдите все натуральные числа n, для которых число $\sqrt{n^2 - np}$ является натуральным.

17. Докажите, что для любых натуральных p и q таких, что $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$, выполняется неравенство

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}.$$

18. Дано натуральное $n \geqslant 3$, для которого $4n+1$ — простое число. Докажите, что $n^{2n}-1$ делится на $4n+1$.

19. Бесконечное множество B, состоящее из натуральных чисел, удовлетворяет следующему условию. Для любых $a, b \in B$ $(a > b)$ число $\dfrac{a-b}{\text{НОД}(a,b)}$ принадлежит B. Докажите, что B содержит все натуральные числа.

20. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), для которых число

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

является целым, а число $a + b + c$ — простое.