Baltic Way 2018

S:t Petersburg, 5 november 2018 Version: *Swedish*

Skrivtid: 4.5 timmar.
Frågor kan ställas under tävlingens första 30 minuter.
Endast rit- och skrivdon tillåtna.

Problem 1. En ändlig samling av positiva reella tal (ej nödvändigtvis olika) är *balanserad*, om varje tal är mindre än summan av de övriga. Sök alla $m \geq 3$, sådana att varje balanserad, ändlig samling av m tal kan uppdelas i tre delar med den egenskapen, att summan av talen i varje del är mindre än summan av talen i de två andra delarna.

Problem 2. Givet är en 100×100-tabell. För varje k, $1 \leq k \leq 100$, innehåller rad nummer k talen $1, 2, \ldots, k$ i växande ordning (från vänster till höger), men ej nödvändigtvis i på varandra följande rutor; återstående $100 - k$ rutor fylles med nollor. Bevisa, att det existerar två kolumner av sådan beskaffenhet, att summan av talen i den ena kolumnen är minst 19 gånger summan av talen i den andra kolumnen.

Problem 3. Låt a, b, c, d vara positiva reella tal med $abcd = 1$. Bevisa olikheten

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}} + \frac{1}{\sqrt{b+2c+3d+10}} + \frac{1}{\sqrt{c+2d+3a+10}} + \frac{1}{\sqrt{d+2a+3b+10}} \leq 1.$$

Problem 4. Sök alla funktioner $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, sådana att det för varje positivt heltal n och alla icke-negativa reella tal $x_1, \ldots, x_n$ gäller att

$$f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = f(x_1)^2 + \cdots + f(x_n)^2.$$

Problem 5. Ett polynom $f(x)$ med reella koefficienter kallas *danande*, om det för varje polynom $\varphi(x)$ med reella koefficienter existerar ett positivt heltal k och polynom $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ med reella koefficienter, sådana att

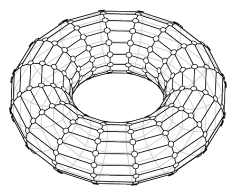
$$\varphi(x) = f(g_1(x)) + \cdots + f(g_k(x)).$$

Finn samtliga danande polynom.

Problem 6. Vare n ett positivt heltal. Alven Alva reser i $\mathbb{R}^3$. Hon startar i origo: $(0, 0, 0)$. I varje drag kan hon teleportera sig till valfri punkt med heltalskoordinater, som ligger på avstånd exakt $\sqrt{n}$ från hennes befintliga position. Teleportering är emellertid en avancerad procedur. Alva startar som *vanlig*, men hon blir *märklig* i och med sin första teleportering. Nästa gång hon teleporterar sig, blir hon ånyo *vanlig*, sedan åter *märklig*… etc.

För vilka n kan Alva färdas till varje punkt med heltalskoordinater och anlända såsom *vanlig*?

Problem 7. På en 16×16-torus, enligt bild, är samtliga 512 kanter färgade röda eller blå. En färgläggning är *god*, om varje nod är ändpunkt för ett jämnt antal röda bågar. Ett drag består i att byta färg på var och en av de 4 kanterna av en godtycklig cell. Vilket är det största antalet goda färgläggningar, sådana att ingendera kan omvandlas i någon annan genom någon sekvens av drag?

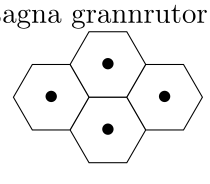


Problem 8. En graf har N noder. En osynlig hare sitter i en av noderna. En grupp jägare söker döda haren. I varje drag skjuter de samtidigt: varje jägare siktar på en enda nod, de väljer sina måltavlor i samråd. Om haren befann sig i någon av målnoderna under skottsalvan, är jakten avslutad. Eljest kan haren välja mellan att kvarstanna i sin nod eller hoppa till en angränsande nod.

Jägarna känner en algoritm, vilken tillåter dem att döda haren på högst $N!$ drag. Bevisa, att det då existerar en algoritm, som låter dem döda haren på högst 2^N drag.

Problem 9. Olga och Sasha spelar ett spel på ett oändligt hexagonalt rutmönster. De turas om att placera en sten på valfri ledig hexagon. Olga öppnar spelet. Precis före det 2018:e draget aktiveras en ny regel. En sten må nu placeras endast på fria hexagoner med åtminstone två upptagna grannrutor.

En spelare förlorar, då hon eller han antingen är förhindrad att göra ett drag, eller också gör ett drag, efter vilket ett rombiskt mönster enligt bilden (roterat på varjehanda tänkbart vis) uppstår. Avgör om någon spelare, och i så fall vilkendera, har en vinnande strategi.



Problem 10. Heltalen från 1 till n står skrivna på n kort, ett på vardera. Förste spelaren plockar bort ett kort. Andre spelaren plockar sedan bort två kort med konsekutiva tal. Därefter avlägsnar förste spelaren tre kort med konsekutiva tal. Slutligen avlägsnar andre spelaren fyra kort med konsekutiva tal. Vilket är det minsta värdet på n, för vilket andre spelaren kan garantera sig om, att få utföra bägge sina drag?

Problem 11. Punkterna A, B, C, D ligger, i denna ordning, på en cirkel ω, där AD är diameter i ω. Vidare är $AB = BC = a$ och $CD = c$ för några relativt prima heltal a och c. Visa att, om diametern d i ω också är ett heltal, så är antingen d eller $2d$ en heltalskvadrat.

Problem 12. Höjderna BB_1 och CC_1 i den spetsvinkliga triangeln ABC skär varandra i punkten H. Låt B_2 och C_2 vara punkter på segmenten BH respektive CH, sådana att $BB_2 = B_1H$ och $CC_2 = C_1H$. Omskrivna cirkeln till triangeln B_2HC_2 skär omskrivna cirkeln till triangeln ABC i punkterna D och E. Bevisa, att triangeln DEH är rätvinklig.

Problem 13. Bisektrisen till vinkeln A i triangeln ABC skär BC i punkten D och skär omskrivna cirkeln till triangeln ABC i punkten E. Låt K, L, M och N vara mittpunkterna på sträckorna AB, BD, CD respektive AC. Låt P vara medelpunkten för omskrivna cirkeln till triangeln EKL, och Q vara medelpunkten för omskrivna cirkeln till triangeln EMN. Bevisa, att $\angle PEQ = \angle BAC$.

Problem 14. En fyrhörning $ABCD$ är omskriven kring en cirkel ω. Den skärningspunkt mellan ω och diagonalen AC, som ligger närmast A, är E. Punkten F ligger diametralt motsatt punkten E på cirkeln ω. Tangenten till ω i punkten F skär linjerna AB och BC i punkterna A_1 respektive C_1, och linjerna AD och CD i punkterna A_2 respektive C_2. Bevisa, att $A_1C_1 = A_2C_2$.

Problem 15. Två cirklar i planet skär varandra ej, och ligger ej heller inneslutna i varandra. Vi väljer diametrar A_1B_1 och A_2B_2 i dessa cirklar så, att sträckorna A_1A_2 och B_1B_2 möts. Låt A och B vara mittpunkterna på sträckorna A_1A_2 respektive B_1B_2, och C vara skärningspunkten mellan dessa sträckor. Bevisa, att höjdernas skärningspunkt i triangeln ABC ligger på en fix linje, oberoende av valet av diametrar.

Problem 16. Låt p vara ett udda primtal. Sök samtliga positiva heltal n, för vilka $\sqrt{n^2 - np}$ är ett positivt heltal.

Problem 17. Bevisa att, närhelst $\sqrt{11} > \frac{p}{q}$ för några positiva heltal p, q, är följande olikhet giltig:

$$\sqrt{11} - \frac{p}{q} > \frac{1}{2pq}.$$

Problem 18. Låt $n \geq 3$ vara ett heltal, för vilket $4n + 1$ är ett primtal. Bevisa, att $4n + 1$ delar $n^{2n} - 1$.

Problem 19. En oändlig mängd B, bestående av positiva heltal, har följande egenskap. För alla $a, b \in B$ med $a > b$, är talet $\dfrac{a-b}{(a,b)}$ tillhörande B. Bevisa, att B omfattar samtliga positiva heltal. Här betecknar (a, b) den största gemensamma delaren till talen a och b.

Problem 20. Finn alla trippler av positiva heltal (a, b, c), för vilka talet

$$\frac{(a+b)^4}{c} + \frac{(b+c)^4}{a} + \frac{(c+a)^4}{b}$$

är ett heltal och $a + b + c$ ett primtal.