Суммы Клоостермана с простыми числами и их применение

М.А. Королёв (Москва, МИАН им. В.А. Стеклова)

Пусть $q \geqslant 3$ – произвольное целое число, и пусть для целого n, взаимно простого с q, символ $\overline{n}$ обозначает вычет, обратный к n по модулю q, т.е. решение сравнения $n\overline{n} \equiv 1 \pmod{q}$. Тригонометрическая сумма вида

$$S(q;a,b) \,=\, \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} \exp\left(2\pi i\,\frac{a\overline{n}+bn}{q}\right) \tag{1}$$

называется полной суммой Клоостермана по модулю q. Суммы (1) естественным образом возникают при решении ряда задач аналитической теории чисел.

Наряду с (1) рассматриваются суммы более общего вида

$$S(q;a,b;\mathcal{A}) \,=\, \sum_{n\in\mathcal{A}} \exp\left(2\pi i\,\frac{a\overline{n}+bn}{q}\right), \tag{2}$$

также называемые суммами Клоостермана, в которых переменная пробегает некоторое множество $\mathcal{A}$ значений, взаимно простых с модулем q. В случае, когда множество $\mathcal{A}$ целиком содержится в приведённой системе вычетов $\mathbb{Z}_q^*$ по модулю q, и при этом $|\mathcal{A}| < \varphi(q)$, такие суммы называются, в отличие от (1), неполными суммами Клоостермана.

Нетривиальные оценки сумм (2), т.е. неравенства $|S(q;a,b;\mathcal{A})| \leqslant |\mathcal{A}|\Delta$, где $0 < \Delta < 1$, позволяют исследовать распределение величин $a\overline{n}+bn$, $n \in \mathcal{A}$, в кольце вычетов $\mathbb{Z}_q$, устанавливать разрешимость некоторых сравнений, содержащих величины $\overline{n}$, $n \in \mathcal{A}$, и т.д.

Частным случаем (2) являются суммы Клоостермана с простыми числами, т.е. суммы

$$S_1(q;a,b;N) \,=\, {\sum_{p\leqslant N}}' \exp\left(2\pi i\,\frac{a\overline{p}+bp}{q}\right), \tag{3}$$

где штрих в знаке суммы означает, что $p \nmid q$. Величина N называется длиной суммы S_1. Наибольшую трудность представляет оценка “короткой” суммы S_1, длина которой связана с модулем неравенством $N \leqslant q^{1-c}$, $0 < c < 1$.

Оценкам сумм (3) при различных предположениях относительно q, N, a, b посвящены работы Э. Фаври и П. Мишеля [1], М.З. Гараева [2], Ж. Бургейна [3], Э. Фаври и И.Е. Шпарлинского [4], Р. Бейкера [5], Ж. Бургейна и М.З. Гараева [6] и ряд статей докладчика.

В докладе будет рассказано о новой оценке суммы S_1, справедливой для произвольного модуля $q \geqslant q_0(\varepsilon)$ и любых a, b, взаимно простых с q, при условии, что длина суммы N удовлетворяет неравенствам $q^{3/4+\varepsilon} \leqslant N \leqslant q^{3/2-\varepsilon}$. Особое внимание будет уделено приложениям этой оценки к ряду задач теории сравнений.

В качестве примера будет рассмотрено сравнение вида

$$g(p_1) \,+\, g(p_2) \,+\, \ldots \,+\, g(p_k) \,\equiv\, m \pmod{q}, \tag{4}$$

в котором $g(x) = a\overline{x}+bx$, $k \geqslant 3$ - фиксированное целое число, а переменные $p_1, \ldots, p_k$ принимают значения простых чисел “короткого” промежутка $(1, N]$.

Упомянутая выше оценка позволяет получить для числа $I_k(q, N) = I_k(q, N; a, b, m)$ решений (4) выражение вида

$$I_k(q, N) \,=\, \frac{(\pi(N))^k}{q}\,\bigl(\varkappa_k \,+\, O(\Delta_k)\bigr), \tag{5}$$

где $\pi(N)$ – количество простых чисел, не превосходящих N, $\Delta_k = \Delta_k(q, N) \to 0$ при $q \to +\infty$, а $\varkappa_k = \varkappa_k(q; a, b, m)$ - некоторая мультипликативная функция параметра q.

Величина $\varkappa_k(q)$ является своеобразным аналогом “особого” (“сингулярного”) ряда, возникающего при решении аддитивных задач с помощью кругового метода. Отыскание всех троек $(a, b, m) \pmod q$, при которых формула (5) является асимптотической, является нетривиальной задачей, представляющей и самостоятельный интерес. В частности, можно доказать существование абсолютной постоянной $c_1 > 0$ такой, что для любого модуля q с условием $(q, 6) = 1$ неравенство

$$\varkappa_k(q; a, b, m) \,\geqslant\, c_1$$

выполняется равномерно по всем a, b, m и $k \geqslant 7$ (в случае, если верна расширенная гипотеза Римана - и при $k \geqslant 5$). В случаях $q = 2^n$, $q = 3^n$, $n \geqslant 1$, можно указать значения k и отвечающие им тройки (a, b, m), для которых $\varkappa_k(q; a, b, m) = 0$.

Список литературы

[1] E. Fouvry, P. Michel. Sur certaines sommes d’exponentielles sur les nombres premiers // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 1998. Vol. 31, № 1. P. 93–130.

[2] М. З. Гараев. Оценка сумм Клоостермана с простыми числами и применение // Матем. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 41–64.

[3] J. Bourgain. More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications // Int. J. Number Theory. 2005. Vol. 1, № 1. P. 1–32.

[4] E. Fouvry, I. E. Shparlinski. On a ternary quadratic form over primes // Acta Arithmetica. 2011. Vol. 150, № 3. P. 285–314.

[5] R. C. Baker. Kloosterman sum with prime variable // Acta Arith. 2012. Vol. 156, № 4. P. 351–372.

[6] Ж. Бургейн, М.З. Гараев. Сумма множеств, образованных обратными элементами в полях простого порядка, и полилинейные суммы Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 4. С. 19–72.