На правах рукописи

Корчевский Валерий Михайлович

Усиленный закон больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель:

Петров Валентин Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Официальные оппоненты:

Егоров Владимир Алексеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры высшей математики № 2 ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)»

Розовский Леонид Викторович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики ГБОУ ВПО «Санкт-Петербургская государственная химико-фармацевтическая академия»

Ведущая организация:

ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится «____» __________ 2013 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Автореферат разослан «____» __________ 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Первые теоремы об усиленном законе больших чисел для последовательностей случайных величин были получены при условии независимости с классической нормировкой. К ним относятся классические теоремы А.Н.Колмогорова для последовательностей независимых случайных величин. Дальнейшие исследования были связаны с поиском новых достаточных условий применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям независимых случайных величин, а также обобщением классических результатов в различных направлениях. Одним из таких направлений является отказ от предположения о независимости и получение результатов о применимости усиленного закона больших чисел к различным классам зависимых случайных величин (мартингалов, ассоциированных случайных величин, последовательностей случайных величин с условиями перемешивания и т.д.). Другим направлением исследований является обобщение результатов об усиленном законе больших чисел на последовательности случайных элементов, принимающих значения в $\mathbb{R}^d$, а также в более общих измеримых пространствах. Третьим направлением является обобщение результатов об усиленном законе больших чисел с заменой классической нормировки на произвольную нормирующую последовательность. Число публикаций на эту тему, вышедших за последние несколько десятилетий, огромно.

Особый интерес представляет получение теорем об усиленном законе больших чисел при условиях, налагаемых лишь на моменты рассматриваемых случайных величин и их сумм.

Одним из основных подходов к установлению усиленного закона больших чисел является метод подпоследовательностей, который заключается в следующем: на первом шаге требуемый результат доказывается для некоторой подпоследовательности исходной последовательности случайных величин. На втором (заключительном) шаге результат, полученный для подпоследовательности, обобщается на всю исходную последовательность. Обычно на втором шаге основным инструментом является максимальное неравенство, которому удовлетворяют случайные величины последовательности.

Отметим также эффективный метод доказательства усиленного закона больших чисел для зависимых случайных величин, разработанный Н.Этемади [14], [15]. Подход Этемади основан на методе подпоследовательностей, однако позволяет обойтись без использования максимальных неравенств.

Возможности метода Этемади, а также классического метода подпоследовательностей (предполагающего использование максимальных неравенств) в установлении усиленного закона больших чисел для зависимых случайных величин далеко не исчерпаны. Это демонстрируется в настоящей работе.

Цель работы. Диссертация посвящена нахождению новых достаточных условий применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям зависимых случайных величин. Ограничиваясь рассмотрением последовательностей случайных величин, принимающих значения в $\mathbb{R}^1$, мы приводим ряд результатов, обобщающих известные теоремы об усиленном законе больших чисел на более общие классы зависимых случайных величин, а также результаты, обобщающие известные теоремы с классической нормировкой на случай произвольной нормирующей последовательности.

Методы исследований. В диссертационной работе используются классические методы доказательства сильных предельных теорем с использованием максимальных неравенств, а также новые подходы, развитые в работах Н.Этемади [14], [15], В.В.Петрова [8], [9], Т.К.Чандры и др. [11]–[13]. Ключевую роль в доказательствах теорем настоящей работы играет максимальное неравенство Серфлинга [22], которое является обобщением классического неравенства Меньшова–Радемахера для ортогональных случайных величин.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены результаты, обобщающие известные теоремы о сходимости почти наверное рядов случайных величин, а также об усиленном законе больших чисел для последовательностей случайных величин с конечными моментами второго порядка, на широкий класс зависимых случайных величин, включающий в себя класс ортогональных случайных величин.

2. Получено обобщение классической теоремы Колмогорова об усиленном законе больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин на случай зависимых неодинаково распределенных случайных величин с произвольной нормирующей последовательностью.

3. Получены результаты об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых неодинаково распределенных случайных величин с конечными моментами порядка p, где $1 < p < 2$ либо $0 < p < 1$.

4. Исследована связь между некоторыми классическими условиями в теоремах об усиленном законе больших чисел для последовательностей как независимых, так и зависимых случайных величин.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Основная значимость работы состоит в распространении известных результатов об усиленном законе больших чисел на последовательности случайных величин с более общим типом зависимости, а также в обобщении известных результатов об усиленном законе больших чисел с классической нормировкой на случай произвольной нормирующей последовательности. Основные результаты диссертации применимы к последовательностям неодинаково распределенных случайных величин.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на Шестнадцатой Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Санкт-Петербург, 19–24 мая 2009 г.), на Шестом международном симпозиуме по статистическому моделированию (Санкт-Петербург, 28 июня – 4 июля 2009 г.), на Третьем Северном трехстороннем (финско-шведско-российском) семинаре (Санкт-Петербург, 11–13 апреля 2011 г.), на Двадцатой Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Йошкар-Ола, 12–18 мая 2013 г.) и на Санкт-Петербургском городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика РАН И.А.Ибрагимова (в октябре 2013 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [П1]–[П6]. Из них три работы [П1]–[П3] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Каждая из работ [П1] и [П5] состоит из двух нумерованных частей; часть 1 принадлежит В.В.Петрову, часть 2 — диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из пяти параграфов и списка литературы, содержащего 61 наименование. Общий объем работы составляет 70 страниц.

Содержание работы

Во **введении (параграф 1)** излагаются сведения по истории вопроса, описывается содержание диссертации, вводятся необходимые определения, а также формулируются некоторые вспомогательные результаты.

В **параграфе 2** рассматриваются последовательности случайных величин с конечными моментами второго порядка.

Классическая теорема теорема Меньшова–Радемахера (см., например, [1]) утверждает, что если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортогональных случайных величин и

$$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 \log^2 n < \infty, \tag{1}$$

то

$$\text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{сходится п.н.}; \tag{2}$$

если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортогональных случайных величин, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{a_n^2} \log^2 n < \infty, \tag{3}$$

то

$$\frac{S_n}{a_n} \to 0 \qquad \textit{п.н.} \tag{4}$$

(Здесь и далее $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $n \geqslant 1$).

Отдельно отметим случай $a_n = n$ для всех $n \geqslant 1$:
если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортогональных случайных величин и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{n^2} \log^2 n < \infty, \tag{5}$$

то

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{6}$$

В **параграфе 2** приведено обобщение теоремы Меньшова–Радемахера на широкий класс зависимых случайных величин, включающий в себя класс случайных величин, удовлетворяющих условию $EX_iX_j \leqslant 0$ для всех $i \neq j$.

Теорема 1 (Теорема 2.1)**.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин, удовлетворяющая условиям* (1) *и*

$$ES_{a,n}^2 \leqslant C \sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2 \qquad \textit{для } n \geqslant 1 \textit{ и всех достаточно больших } a. \tag{7}$$

Тогда имеет место соотношение (2)*.*

(Здесь и далее $S_{a,n} = \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i$, $a \geqslant 0$, $n \geqslant 1$).

Теорема 2 (Теорема 2.4)**.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин. Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$1 < q \leqslant \frac{a_{2n}}{a_n} \leqslant Q \qquad \textit{для всех достаточно больших } n,$$

где q *и* Q *— некоторые постоянные. Если выполнены условия* (3) *и* (7)*, то имеет место соотношение* (4)*.*

Иные результаты, содержащие предположения о зависимости между случайными величинами рассматриваемой последовательности, отличные от (7), при которых условие (3) является достаточным для (4), приведены в работе П.А.Яськова [10].

Следуя [6], будем использовать обозначение Ψ_c для множества функций $\psi(x)$ таких, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum \frac{1}{n\psi(n)}$ сходится. Значение x_0 не предполагается одним и тем же для различных функций ψ.

В.В.Петровым в работе [7] доказан следующий результат: если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортогональных случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} EX_k^2 = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)\log^2 n}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c, \tag{8}$$

то имеет место соотношение (6).

Следующая теорема обобщает этот результат на широкий класс зависимых случайных величин, включающий в себя класс случайных величин, удовлетворяющих условию $EX_iX_j \geqslant 0$ для всех $i, j \geqslant 1$, а также на случай произвольной нормирующей последовательности.

Теорема 3 (Теорема 2.7). *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leqslant Q \qquad \text{для всех } n \geqslant 1, \tag{9}$$

где Q — некоторая постоянная. Если выполнены условия

$$ES_{a,k}^2 + ES_{a+k,m}^2 \leqslant ES_{a,k+m}^2$$

для $1 \leqslant k < k+m$ и всех достаточно больших a и

$$ES_n^2 = O\left(\frac{a_n^2}{\psi_(n)\log^2 n}\right) \tag{10}$$

для некоторой функции $\psi \in \Psi_c$, то имеет место соотношение (4).

В **параграфе 2** также доказано, что что в теореме 3 условие (10) не может быть заменено ни условием

$$ES_n^2 = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)\log^{2-\delta} n}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c,$$

ни даже условием

$$ES_n^2 = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)(\log n)^2(\log\log n)^{-\delta}}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c$$

и некоторого $\delta > 0$.

Условия на моменты сумм случайных величин вида (10) (с использованием функций из класса Ψ_c) в теоремах об усиленном законе больших чисел впервые появились и систематически использовались в работах В.В.Петрова [5], [6], [8], [9].

Классическим результатом является следующая теорема Колмогорова [2]: если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < \infty, \tag{11}$$

то

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{12}$$

В.В.Петровым [5] установлен следующий результат: если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} DX_k = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c, \tag{13}$$

то имеет место соотношение (12).

Известно [2], [6], что каждое из условий (11) и (13) является оптимальным. В **параграфе 2** исследована связь между этими условиями.

Также исследована связь между условиями (5) и (8).

Следующая теорема является обобщением теоремы Петрова [5] для независимых случайных величин на случай произвольной нормирующей последовательности.

Теорема 4 (Теорема 2.23). *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (9). Если выполнено соотношение*

$$DS_n = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)}\right) \qquad \textit{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c,$$

то

$$\frac{S_n - ES_n}{a_n} \to 0 \qquad \textit{п.н.} \tag{14}$$

Также мы доказываем, что в теореме 4 условие (9) не может быть опущено.

Помимо сформулированных результатов в **параграфе 2** приведены теоремы об усиленном законе больших чисел, а также о сильной устойчивости сумм случайных величин, обобщающие некоторые результаты Н.Этемади [15], [16]. Также приведен новый результат, содержащий достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям зависимых случайных величин.

В **параграфе 3** рассматриваются последовательности случайных величин с конечными моментами порядка p, где $1 < p < 2$.

Классическим результатом является следующая теорема Марцинкевича–Зигмунда: если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными моментами порядка p, где $0 < p < 2$, $p \neq 1$ (в случае $1 < p < 2$ предполагаем, что $EX_1 = 0$), то имеет место соотношение

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{15}$$

Существуют различные обобщения этой теоремы как на последовательности зависимых, так и на последовательности неодинаково распределенных случайных величин. Так, С.Сойером [21] было показано, что в теореме Марцинкевича–Зигмунда в случае $0 < p < 1$ условие независимости можно опустить.

В настоящее время остается открытым вопрос, можно ли в теореме Марцинкевича–Зигмунда условие взаимной независимости случайных величин ослабить до условия попарной независимости в случае $1 < p < 2$. Тем не менее, в этом случае, при введении дополнительных предположений, можно получить результаты, применимые к последовательностям попарно независимых случайных величин. Результаты такого типа, а также некоторые смежные результаты приведены в работах А.И.Мартикайнена [3], [19], С.Сунга [23], К.Ву [24].

Заметим, что большинство результатов, содержащих различные обобщения теоремы Марцинкевича–Зигмунда применимы только к последовательностям одинаково распределенных случайных величин. Актуальным является распространение этого результата на последовательности неодинаково распределенных случайных величин.

Одним из основных результатов **параграфа 3** является следующая теорема:

Теорема 5 (Теорема 3.1)**.** *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно независимых случайных величин, причем $E|X_n|^p < \infty$ для всех $n \geqslant 1$ при некотором $1 < p < 2$ и $EX_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$. Пусть выполнены условия*

$$\int_0^\infty x^{p-1} G(x)\,dx < \infty, \qquad \textit{где}\ \ G(x) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{\sum_{i=1}^n P(|X_i| > x)}{n} \tag{16}$$

и

$$\sum_{n=1}^\infty P(|X_n| > n^{1/p}) < \infty. \tag{17}$$

Тогда

$$\frac{S_n}{n^{1/p}\log n} \to 0 \qquad \textit{п.н.} \tag{18}$$

Заметим, что теорема 5 остается верной и в случае $0 < p \leqslant 1$, но в этой ситуации результат не представляет интереса, поскольку известно, что если $0 < p \leqslant 1$, то множитель $\log n$ в знаменателе в левой части (18) можно опустить (см. [21], [14], [12]). Случай $0 < p \leqslant 1$ подробно рассмотрен в **параграфах 4 и 5**.

Следующий результат является распространением классической теоремы Марцинкевича–Зигмунда для независимых случайных величин на случай неодинаково распределенных случайных величин:

Теорема 6 (Теорема 3.2). *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых случайных величин, причем $E|X_n|^p < \infty$ для всех $n \geqslant 1$ при некотором $1 < p < 2$ и $EX_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$. Пусть выполнены условия* (16) *и* (17). *Тогда имеет место соотношение* (15).

Заметим, что теорема 6 остается верной и в случае $0 < p < 1$, но в этом случае условие независимости можно существенно ослабить (соответствующие результаты изложены в **параграфе 5**).

В **параграфе 4** рассматриваются последовательности случайных величин с конечными моментами первого порядка.

Классическим результатом является следующая теорема Колмогорова [2]: если $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин такая, что $E|X_1| < \infty$, то $S_n/n \to EX_1$ п.н. Эта теорема была обобщена Н.Этемади [14] на последовательности попарно независимых одинаково распределенных случайных величин.

Существуют различные обобщения теоремы Колмогорова–Этемади как на последовательности случайных величин с более общим типом зависимости, чем попарная независимость, так и на последовательности неодинаково распределенных случайных величин. Так, П.Матула [18] обобщил теорему Колмогорова–Этемади на широкий класс зависимых случайных величин, включающий в себя класс попарно независимых случайных величин.

А.Бозе и Т.К.Чандра [11] обобщили теорему Колмогорова–Этемади на случай неодинаково распределенных случайных величин. Следующая теорема обобщает результат Бозе и Чандры на случай произвольной нормирующей последовательности.

Теорема 7 (Следствие 5.2). *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность попарно независимых случайных величин,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *неубывающая последовательность положительных чисел такая, что*

$$a_n \geqslant C \cdot n \qquad \text{для всех } n \geqslant 1.$$

Пусть выполнены условия

$$\int_0^{\infty} G(x)\,dx < \infty, \qquad \text{где } G(x) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > x)}{a_n}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > a_n) < \infty.$$

Тогда имеет место соотношение (14).

В **параграфе 4** приведен также новый результат о сильной устойчивости сумм зависимых случайных величин.

В **параграфе 5** рассматриваются последовательности случайных величин без предположения о существовании моментов первого порядка. Основным результатом этого параграфа является теорема, содержащая достаточные условия для применимости усиленного закона больших чисел в форме (4) к последовательности неодинаково распределенных случайных величин с конечными моментами порядка p, где $0 < p < 1$. Эта теорема является обобщением теоремы Марцинкевича–Зигмунда для случая $0 < p < 1$. Другие условия, достаточные для (4), приведены в работах В.В.Петрова [20], А.И.Мартикайнена и В.В.Петрова [4], В.М.Круглова [17]. Основной результат параграфа 5 не является обобщением результатов указанных работ (мы предполагаем существование моментов порядка p для некоторого положительного $p < 1$ у случайных величин рассматриваемой последовательности — требование, отсутствующее в [20], [4] и [17]). Тем не менее, в отличие от теорем, содержащихся в указанных работах, наш результат применим к последовательностям неодинаково распределенных случайных величин.

Список литературы

[1] *Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

[2] *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

[3] *Мартикайнен А.И.* Замечание об усиленном законе больших чисел для сумм попарно независимых случайных величин // Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1992, Т. 194, С. 114–118.

[4] *Мартикайнен А.И., Петров В.В.* Об одной теореме Феллера // Теор. вероятн. и примен., 1980, Т. 25, №1, С. 194–197.

[5] *Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел // Теор. вероятн. и примен., 1969, Т. 14, №2, С. 193–202.

[6] *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

[7] *Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел для ортогональных случайных величин // Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1977, Т. 72, С. 103–106.

[8] *Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин // Теор. вероятн. и примен., 2008, Т. 53, №2, С. 379–382.

[9] *Петров В.В.* Об устойчивости сумм неотрицательных случайных величин // Зап. научн. семинаров ПОМИ, 2008, Т. 361, С. 78–82.

[10] *Яськов П.А.* Об одном обобщении теоремы Меньшова-Радемахера // Матем. заметки, 2009, Т. 86, Вып. 6, С. 925–937.

[11] *Bose A., Chandra T.K.* A note on the strong law of large numbers // Calcutta Statistical Association Bulletin, 1994, Vol. 44, P. 115–122.

[12] *Chandra T.K.* Laws of large numbers. Narosa Publishing House. New Delhi. 2012.

[13] *Chandra T.K., Goswami A.* Cesáro uniform integrability and a strong laws of large numbers // Sankhyā, 1992, Ser. A, Vol. 54, P. 215–231.

[14] *Etemadi N.* An elementary proof of the strong law of large numbers // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1981, Bd. 55, N 1, S. 119–122.

[15] *Etemadi N.* On the law of large numbers for non-negative random variables // J. Multivariate Analysis, 1983, Vol. 13, P. 187–193.

[16] *Etemadi N.* Stability of sums of weighted non-negative random variables // J. Multivariate Analysis, 1983, Vol. 13, P. 361–365.

[17] *Kruglov V.M.* A strong law of large numbers for pairwise independent identically distributed random variables with infinite means // Statist. Probab. Lett., 2008, Vol. 78, P. 890–895.

[18] *Matula P.* A note on the almost sure convergence of sums negatively dependent random variables // Statist. Probab. Lett., 1992, Vol. 15, P. 209–213.

[19] *Martikainen A.* On the strong law of large numbers for sums of pairwise independent random variables // Statist. Probab. Lett., 1995, Vol.25, P. 21–26.

[20] *Petrov V.V.* On the strong law of large numbers // Statist. Probab. Lett., 1996, Vol. 26, P. 377–380.

[21] *Sawyer S.* Maximal inequalities of weak type // Ann. Math., 1966, Vol. 84, P. 157–174.

[22] *Serfling R.J.* Moment inequalities for the maximum cumulative sum // Ann. Math. Statist., 1970, Vol. 41, N 4, P. 1227–1234.

[23] *Sung S.H.* On the strong law of large numbers for pairwise i.i.d. random variables // Bull. Korean Math. Soc., 1997, N 4, P. 617–626.

[24] *Wu Qunying* Convergence properties of pairwise NQD sequences // Acta Math. Sinica, 2002, Vol. 45, N 3, P. 617–624.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[П1] *Корчевский В.М., Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, 2010, Вып. 3, С. 26–30.

[П2] *Корчевский В.М.* Об условиях применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям независимых случайных величин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, 2010, Вып. 4, С. 32–35.

[П3] *Корчевский В.М.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности случайных величин без предположения о независимости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, 2011, Вып. 4, С. 38–41.

Другие публикации:

[П4] *Корчевский В.М.* Об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 2, С. 266–267.

[П5] *Petrov V.V., Korchevsky V.M.* On the strong law of large numbers for sequences of dependent random variables // Proceedings of the 6-th St. Petersburg Workshop on Simulation, 2009, P. 977–980.

[П6] *Корчевский В.М.* Об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин с конечными дисперсиями // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 2, С. 143–144.