Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН)

На правах рукописи

ПЕТРОВ

Андрей Николаевич

Операторы композиции и обратные оценки в пространствах Блоха

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, доцент

Е. С. Дубцов

Санкт-Петербург

2013

Содержание

Работы автора по теме диссертации

- А. Н. Петров, *Интегральные обратные оценки для логарифмических пространств Блоха в шаре,* Зап. научн. семин. ПОМИ **416** (2013), 124–135.

- A. N. Petrov, *Reverse estimates in logarithmic Bloch spaces,* Arch. Math. (Basel) **100** (2013), no. 6, 551–560.

- E. Doubtsov, A. N. Petrov, *Bloch-to-Hardy composition operators,* Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), no. 6, 985–1003.

Введение

Пусть $H(\mathbb{D})$ обозначает пространство всех голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

0.1 Обратные оценки: постановка задачи

0.1.1 Пространства роста

Неубывающую непрерывную и неограниченную функцию $v : [0, 1) \to (0, +\infty)$ будем называть весовой функцией. Задача об обратных оценках естественным образом возникает при изучении пространства роста $\mathcal{A}^v(\mathbb{D})$, которое состоит из функций $f \in H(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leqslant Cv(|z|), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{0.1.1}$$

для некоторой константы $C > 0$. Пространство $\mathcal{A}^v(\mathbb{D})$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{\mathcal{A}^v(\mathbb{D})} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{v(|z|)}.$$

При изучении конкретных линейных операторов, заданных на пространстве роста $\mathcal{A}^v(\mathbb{D})$, часто оказываются полезными наборы тестовых функций, для которых в определенном смысле выполняется оценка, обратная к неравенству (0.1.1). Принцип максимума накладывает запрет на существование функции $f \in H(\mathbb{D})$ и весовой функции v, для которых верна непосредственная обратная оценка $|f(z)| \geqslant cv(|z|)$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Тем не менее, задача оказывается разрешимой, если рассмотреть сумму модулей $|f_1(z)|+|f_2(z)|$. Для достаточно широкого класса весовых функций v соответствующие решения получены в работе [6]. А именно, по определению весовая функция $v : [0,1) \to (0,+\infty)$ обладает *свойством удвоения,* если

$$v(1-s/2) \leqslant Av(1-s), \quad 0 < s \leqslant 1,$$

для некоторой константы $A > 1$.

Теорема 0.1.1 ([6, лемма 1]). *Предположим, что весовая функция* $v : [0,1) \to (0,+\infty)$ *обладает свойством удвоения. Тогда существуют функции* $f_1, f_2 \in \mathcal{A}^v(\mathbb{D})$, *такие что*

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| \geqslant v(|z|), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{0.1.2}$$

Для несколько менее широкого класса весовых функций аналог теоремы 0.1.1 был независимо доказан в статье [24]. Отметим, что первый результат рассматриваемого типа получили У. Рамей и Д. Уллрич [27] для весовой функции $v(t) = (1-t^2)^{-1}$.

0.1.2 Весовые пространства Блоха

Настоящая работа посвящена обратным оценкам и их приложениям в том случае, когда функция f в неравенстве (0.1.1) заменена на производную f'. Классическим примером пространства, возникающего после такой замены, является класс Блоха $\mathcal{B}(\mathbb{D})$, который состоит из функций $f \in H(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{D})} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)|(1-|z|^2) < \infty.$$

Следующая интегральная обратная оценка хорошо известна в явном или неявном виде.

Теорема 0.1.2 (см., например, [22, лемма 2.1]). *Пусть* $0 < p < \infty$. *Тогда существуют функции* $F_x \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, *такие что* $\|F_x\|_{\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$ *и*

$$\left(\int_0^1 |F_x(z)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \tau_p \left(\log\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{0.1.3}$$

для некоторой константы $\tau_p > 0$.

Известно, что показатель $\frac{1}{2}$ в правой части неравенства (0.1.3) является точным. С другой стороны, если $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$, $\|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$, то

$$|f(z)| \leqslant C \log\frac{e}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{0.1.4}$$

для некоторой абсолютной константы $C > 0$. Простые примеры показывают, что оценка (0.1.4) также точна. Таким образом, точные обратные оценки для пространств роста и пространства Блоха имеют разный характер. Действительно, с одной стороны в теореме 0.1.1 для прямой и обратной оценки используется одна и та же функция v. С другой стороны, в оценках (0.1.4) и (0.1.3) присутствуют $\log\frac{e}{1-|z|^2}$ и $\left(\log\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ соответственно.

Для произвольной весовой функции w аналог свойства (0.1.1) порождает пространство $\mathcal{B}^w(\mathbb{D})$, состоящее из функций $f \in H(\mathbb{D})$, таких что

$$\|f\|_{\mathcal{B}^w(\mathbb{D})} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|f'(z)|}{w(|z|)} < \infty.$$

Если $w(t) = (1-t^2)^{-1}$, то пространства $\mathcal{B}^w(\mathbb{D})$ и $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ совпадают. Таким образом, полагая $w_\alpha(t) = (1-t^2)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, можно рассмотреть пространства $\mathcal{B}^{w_\alpha}(\mathbb{D})$ в качестве возможных аналогов пространства Блоха $\mathcal{B}(\mathbb{D})$. Однако, при $0 < \alpha < 1$ пространство $\mathcal{B}^{w_\alpha}(\mathbb{D})$ совпадает с голоморфным пространством Липшица $\Lambda^{1-\alpha}(\mathbb{D})$ и, следовательно, в этом случае нетривиальных обратных оценок не существует. Если $\alpha > 1$, то $\mathcal{B}^{w_\alpha}(\mathbb{D})$ совпадает с пространством роста $\mathcal{A}^{v_\alpha}(\mathbb{D})$, $v_\alpha(t) = (1-t^2)^{1-\alpha}$, следовательно, обратные оценки получаются с помощью теоремы 0.1.1. Таким образом, чтобы найти аналоги пространства Блоха $\mathcal{B}(\mathbb{D})$, следует рассматривать достаточно слабые, например, логарифмические мультипликативные возмущения весовой функции $w(t) = (1-t^2)^{-1}$.

0.1.3 Логарифмические пространства Блоха в круге

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ логарифмическое пространство Блоха $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ состоит из функций $f \in H(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)|(1-|z|^2)\left(\log\frac{e}{1-|z|^2}\right)^\alpha < \infty.$$

Отметим, что функция $w_\alpha(t) = \frac{1}{1-t^2}\left(\log\frac{e}{1-t^2}\right)^{-\alpha}$ возрастает на промежутке $[0,1)$ при $\alpha \leqslant 1$. Если $\alpha = 0$, то $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ — это пространство Блоха $\mathcal{B}(\mathbb{D})$.

Основная цель главы 1 — предсказать и доказать точные обратные оценки в пространствах $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Отметим, что при $\alpha > \frac{1}{2}$ пространство $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ является весьма малым, поэтому нетривиальные обратные оценки в нём отсутствуют (подробности приведены в главе 1).

0.1.4 Логарифмические пространства Блоха в шаре

Задача об обратных оценках естественным образом распространяется на пространства Блоха в единичном шаре $B_m = \{z \in \mathbb{C}^m : |z| < 1\}$, $m \geqslant 1$. Отметим, что в зависимости от ситуации в дальнейшем для единичного круга будет использоваться обозначение $\mathbb{D}$ или B_1.

Пусть $H(B_m)$ обозначает пространство всех голоморфных функций в шаре B_m. Для $\alpha \in \mathbb{R}$ логарифмическое пространство Блоха $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$ состоит из тех функций $f \in H(B_m)$, для которых

$$\|f\|_{L^\alpha\mathcal{B}(B_m)} = |f(0)| + \sup_{z\in B_m} |\mathcal{R}f(z)|(1-|z|^2)\left(\log\frac{e}{1-|z|^2}\right)^\alpha < \infty,$$

где

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{j=1}^{m} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z), \quad z \in B_m,$$

обозначает радиальную производную функции f. В главе 1 будет показано, что вид точных обратных оценок в пространствах $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$ не зависит от размерности $m \geqslant 1$.

0.2 Операторы композиции

Пусть n, $m \geqslant 1$. Каждое голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ порождает оператор композиции $C_\varphi : H(B_m) \to H(B_n)$ с помощью следующей формулы:

$$(C_\varphi f)(z) = f(\varphi(z)), \quad f \in H(B_m), \quad z \in B_n.$$

Разнообразные свойства операторов C_φ представлены в монографиях [12] и [28]. Центральными объектами настоящей работы являются операторы C_φ, заданные на пространствах $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$, $m \geqslant 1$.

Во-первых, с помощью известных обратных оценок в пространствах роста удаётся описать те символы φ, для которых оператор C_φ действует из $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ в классическое пространство Харди $H^2(\mathbb{D})$. Это описание позволяет предсказать точные обратные оценки в логарифмических пространствах Блоха (см. главу 1).

Во-вторых, обратные оценки в пространствах $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ непосредственно применимы при изучении операторов C_φ, действующих из $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ в пространство $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$, состоящее из тех функций $f \in H^2(\mathbb{D})$, граничные значения которых имеют ограниченную среднюю осцилляцию. Ещё одно непосредственное применение полученных обратных оценок — это количественная задача о росте гиперболических градиентов голоморфных отображений (см. главу 2).

В-третьих, обратные оценки в пространстве Блоха $\mathcal{B}(B_m)$ оказываются действенным инструментом при решении задачи об описании тех регулярных символов φ, для которых оператор C_φ действует из $\mathcal{B}(B_m)$ в пространство Харди $H^p(B_n)$ для заданного показателя $p > 0$. Данному вопросу посвящена глава 3. Отметим, что при $m = 1$ соответствующие описания известны и могут быть получены иными методами. Также напомним, что П. Ахерн и У. Рудин сформулировали в работе [8] вопрос об описании операторов композиции C_φ, действующих из пространства Блоха $\mathcal{B}(B_m)$ в пространство $\mathrm{BMOA}(B_n)$. Так как $\mathrm{BMOA}(B_n)$ является Мёбиус-инвариантным аналогом пространства $H^2(B_n)$, то задача Ахерна–Рудина тесно связана с рассматриваемым вопросом об операторах, действующих из $\mathcal{B}(B_m)$ в пространства Харди.

Естественным продолжением главы 3 является заключительная глава 4, в которой рассматривается смежный вопрос об операторах композиции, действующих из пространств роста в пространства Харди или Бергмана.

0.3 Организация работы

Диссертация разделена на четыре главы; результаты первой главы используются в последующих главах. Главы состоят из разделов и подразделов. Для нумерации утверждений и формул используются номера главы и раздела, а также номер по порядку.

Глава 1

Обратные оценки в пространствах Блоха

1.1 Предсказание обратных оценок

Как отмечалось во введении, поиск обратных оценок в пространствах голоморфных функций во многом мотивирован приложениями, связанными с исследованием конкретных линейных операторов на соответствующих пространствах. В случае операторов композиции данный подход был использован, например, в работах [6, 20, 22, 24, 27]. Рассуждения в настоящем разделе будут проведены в противоположном направлении: изучение подходящих операторов композиции позволяет предсказать точный вид обратных оценок в пространствах $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $\alpha \leqslant 1/2$. А именно, ниже рассматриваются операторы композиции со значениями в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.

1.1.1 Пространства Харди и g-функции Литтлвуда–Пэли

Пусть σ_1 обозначает меру Лебега на единичной окружности

$$\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\},$$

нормированную условием $\sigma_1(\mathbb{T}) = 1$.

При $0 < p < \infty$ пространство Харди $H^p(\mathbb{D})$ по определению состоит из тех функций $f \in H(\mathbb{D})$, для которых

$$\|f\|^p_{H^p(\mathbb{D})} = \sup_{0 \leqslant r < 1} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma_1(\zeta) < \infty.$$

Для функции $f \in H(\mathbb{D})$ g-функция Литтлвуда–Пэли задаётся равенством

$$g(f)(\zeta) = \left(\int\limits_0^1 |f'(r\zeta)|^2 (1-r)\, dr \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Теорема 1.1.1. *Пусть $0 < p < \infty$, $f \in H(\mathbb{D})$. Тогда $f \in H^p(\mathbb{D})$ в том и только в том случае, когда $g(f) \in L^p(\mathbb{T})$.*

При $p > 1$ сформулированный результат приведён, например, в теоремах 3.5 и 3.19 главы XIV монографии [3]. Для $p > 0$ теорема 1.1.1 и её обобщения доказаны в работе [7].

1.1.2 Ограниченные операторы $C_\varphi : L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$

Если $f \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ для некоторого $\alpha > \frac{1}{2}$, то

$$g(f)(\zeta) \leqslant C \int\limits_0^1 \left(\log \frac{e}{1-r^2} \right)^{-2\alpha} \frac{dr}{1-r^2} \leqslant C(\alpha) < \infty$$

для всех $\zeta \in \mathbb{T}$. В частности, $g(f) \in L^2(\mathbb{T})$, поэтому $f \in H^2(\mathbb{D})$. Иными словами, $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$ при $\alpha > \frac{1}{2}$.

В силу принципа подчинения Литтлвуда оператор C_φ ограничен на пространстве $H^2(\mathbb{D})$ для любого символа φ (см. [25] или [28]). Следовательно, при $\alpha > \frac{1}{2}$ оператор $C_\varphi : L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ ограничен для всех φ. Поэтому обратимся к случаю $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

Теорема 1 из работы [20] даёт описание ограниченных операторов $C_\varphi : L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ при $\alpha = 0$. Следующий результат решает рассматриваемую задачу при $\alpha < \frac{1}{2}$.

Предложение 1.1.2. *Пусть $\alpha < \frac{1}{2}$ и отображение $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является голоморфным. Тогда следующие свойства равносильны:*

(1.1.1) *оператор C_φ действует из $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ в $H^2(\mathbb{D})$;*

$$\int_0^1 \frac{|\varphi'(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^2} \left(\log \frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^{-2\alpha} (1-r)\,dr \in L^1(\mathbb{T}); \tag{1.1.2}$$

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}} \left(\log \frac{1}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^{1-2\alpha} d\sigma_1(\zeta) < \infty. \tag{1.1.3}$$

Доказательство. Предположим, что выполнено условие (1.1.2). Для $f \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ и $\zeta \in \mathbb{T}$ имеем

$$g^2(C_\varphi f)(\zeta) \leqslant \|f\|^2_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})} \int_0^1 \frac{|\varphi'(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^2} \left(\log \frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^{-2\alpha} (1-r)\,dr.$$

Таким образом, $g(C_\varphi f) \in L^2(\mathbb{T})$ в силу свойства (1.1.2). Следовательно, $C_\varphi f \in H^2(\mathbb{D})$. Итак, (1.1.2) влечёт (1.1.1).

Для доказательства обратной импликации предположим, что имеет место свойство (1.1.1). Применяя теорему 0.1.1, выберем функции f_1, $f_2 \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, такие что

$$|f_1'(z)|^2 + |f_2'(z)|^2 \geqslant (1-|z|^2)^{-2} \left(\log \frac{e}{1-|z|^2}\right)^{-2\alpha}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

В силу свойства (1.1.1) имеем $C_\varphi f_j \in H^2(\mathbb{D})$, $j = 1, 2$. Поэтому,

$$\begin{aligned}
\infty &> \|g(C_\varphi f_1)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|g(C_\varphi f_2)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \\
&= \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 \left(|f_1'(\varphi(r\zeta))|^2 + |f_2'(\varphi(r\zeta))|^2|\right) |\varphi'(r\zeta)|^2 (1-r)\,dr\,d\sigma_1(\zeta) \\
&\geqslant \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 \frac{|\varphi'(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^2} \left(\log \frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^{-2\alpha} (1-r)\,dr\,d\sigma_1(\zeta).
\end{aligned}$$

Таким образом, (1.1.1) влечёт (1.1.2).

Для завершения доказательства отметим, что в теореме 3.6 из работы [21] показана равносильность свойств (1.1.2) и (1.1.3). □

При $\alpha = \frac{1}{2}$ имеет место аналогичный результат.

Предложение 1.1.3. *Пусть $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является голоморфным отображением. Тогда следующие свойства равносильны:*

(1.1.4) *оператор C_φ действует из $L^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}(\mathbb{D})$ в $H^2(\mathbb{D})$;*

$$\int\limits_0^1 \frac{|\varphi'(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^2}\left(\log\frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^{-1}(1-r)\,dr \in L^1(\mathbb{T}); \tag{1.1.5}$$

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int\limits_{\mathbb{T}} \log\log\frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\,d\sigma_1(\zeta) < \infty. \tag{1.1.6}$$

Доказательство. С одной стороны, для проверки равносильности условий (1.1.4) и (1.1.5) достаточно повторить рассуждение, использованное в доказательстве предложения 1.1.2. С другой стороны, в статье [13] доказано, что свойства (1.1.5) и (1.1.6) равносильны. □

Теперь обратимся к возможным обратным оценкам, на которые указывают предложения 1.1.2 и 1.1.3. Заметим, что для доказательства импликации (1.1.4)⇒(1.1.6) можно использовать функции $F_x \in L^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, такие что $\|F_x\|_{L^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$ и

$$\int\limits_0^1 |F_x(w)|^2\,dx \geqslant \tau \log\log\frac{e}{1-|w|^2}, \quad w \in \mathbb{D}, \tag{1.1.7}$$

для некоторой константы $\tau > 0$. Действительно, если выполнено свойство (1.1.4), то с помощью оценки (1.1.7) получаем

$$\begin{aligned}\|C_\varphi\|^2_{L^{\frac12}\mathcal{B}(\mathbb{D})\to H^2(\mathbb{D})} &\geqslant \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{T}} |F_x(\varphi(r\zeta)|^2 d\sigma_1(\zeta)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} \int\limits_0^1 |F_x(\varphi(r\zeta)|^2 dx d\sigma_1(\zeta) \\ &\geqslant \tau \int\limits_{\mathbb{T}} \log\log \frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\, d\sigma_1(\zeta)\end{aligned}$$

для всех $r \in [0,1)$. Следовательно, имеет место свойство (1.1.6).

Для доказательства импликации (1.1.1)⇒(1.1.3) можно аналогичным образом использовать функции $F_x \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha < \frac12$, такие что $\|F_x\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$ и

$$\int\limits_0^1 |F_x(w)|^2\, dx \geqslant \tau_\alpha \left(\log \frac{1}{1-|w|^2}\right)^{1-2\alpha}, \quad w \in \mathbb{D}, \tag{1.1.8}$$

для некоторой константы $\tau_\alpha > 0$.

Объединяя возможные оценки (1.1.7) и (1.1.8) для $\alpha \leqslant \frac12$, приходим к следующим функциям от переменной $t \in [0,1)$:

$$\Psi_\alpha(t) = \begin{cases} \left(\log \dfrac{1}{1-t}\right)^{\frac12-\alpha}, & \alpha < \dfrac12, \\ \left(\log\log \dfrac{e}{1-t}\right)^{\frac12}, & \alpha = \dfrac12. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

1.2 Обратные оценки в пространствах $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$

В данном разделе для пространств $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $\alpha \leqslant \frac12$, будут доказаны интегральные обратные оценки, соответствующие функциям из определения (1.1.9). А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $0 < p < \infty$ *и* $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. *Тогда существуют константа* $\tau_{p,\alpha} > 0$ *и функции* $F_x \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, *такие что* $\|F_x\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$ *и*

$$\left(\int_0^1 |F_x(w)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \tau_{p,\alpha}\Psi_\alpha(|w|^2), \quad w \in \mathbb{D}. \tag{1.2.1}$$

Для доказательства теоремы 1.2.1 нам понадобятся две технические леммы.

Лемма 1.2.2. *Пусть* $\beta \geqslant 0$, $t \in [0,1)$. *Тогда существует константа* $C_\beta > 0$, *такая что*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\beta-1}t^{2^k-1} \geqslant C_\beta \Psi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(t). \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Удобно отдельно рассмотреть случаи $\beta > 0$ и $\beta = 0$.

1. Пусть $\beta > 0$. Если $t \in [0, \frac{1}{2}]$, то имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\beta-1}t^{2^k-1} &\geqslant 1 \\ &\geqslant \left(\log_2\frac{1}{1-t}\right)^\beta = (\log 2)^{-\beta}\left(\log\frac{1}{1-t}\right)^\beta.\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Теперь предположим, что $t \in [\frac{1}{2}, 1)$. Выберем число $n \in \mathbb{N}$, такое что $1 - \frac{1}{2^n} \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\beta-1}t^{2^k-1} &\geqslant \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\beta-1}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^k-1} \\ &\geqslant \left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n-1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\beta-1} \\ &\geqslant \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\beta-1}.\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Положим $S_n = \dfrac{1}{e}\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)^{\beta-1}$. Продолжение оценки (1.2.4) зависит от величины β и использует неравенство $t \leqslant 1-\frac{1}{2^{n+1}}$, которое эквивалентно оценке

$$\left(\log_2\frac{1}{1-t}\right)^{\beta} \leqslant (n+1)^{\beta}. \tag{1.2.5}$$

Если $0<\beta\leqslant 1$, то в силу (1.2.5) получаем

$$S_n \geqslant \frac{(n+1)^{\beta}}{e} \geqslant \frac{1}{e}\left(\log_2\frac{1}{1-t}\right)^{\beta} = \frac{1}{e}(\log 2)^{-\beta}\left(\log\frac{1}{1-t}\right)^{\beta}. \tag{1.2.6}$$

Если $\beta\geqslant 1$, то в силу (1.2.5) имеем

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^{\beta-1}+(n+1-k)^{\beta-1}\right)\\ &\geqslant \frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+2)^{\beta-1}}{2^{\beta-1}}\\ &\geqslant \frac{(n+1)^{\beta}}{e2^{\beta}}\\ &\geqslant \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{1-t}\right)^{\beta}\\ &= \frac{1}{e}(2\log 2)^{-\beta}\left(\log\frac{1}{1-t}\right)^{\beta}. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Наконец, оценки (1.2.3), (1.2.6) и (1.2.7) влекут неравенство (1.2.2) с константой $C_\beta = \dfrac{1}{e}(2\log 2)^{-\beta}$.

2. Пусть $\beta=0$. Для $t\in[0,\frac{1}{2}]$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2^k-1}}{k+1} \geqslant 1 \geqslant \log_2\log_2\frac{2}{1-t} \geqslant \frac{1}{\log 2}\log\log\frac{e}{1-t}. \tag{1.2.8}$$

Если $t \in [\frac{1}{2}, 1)$, то возьмем $n \in \mathbb{N}$, такое что $1 - \frac{1}{2^n} \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2^k-1}}{k+1} &\geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{2^k-1} \\ &\geqslant \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{2^n-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &\geqslant \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \geqslant \frac{1}{e} \log(n+2) \geqslant \frac{1}{e} \log\log \frac{e}{1-t}. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Таким образом, из (1.2.8) и (1.2.9) получаем оценку (1.2.2) с константой $C_\beta = \dfrac{1}{e}$. □

Следующую лемму можно вывести из результатов работы [26]. Для удобства читателя ниже приведено независимое доказательство.

Лемма 1.2.3. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда существует константа $C_\alpha > 0$, такая что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{(k+1)^\alpha} t^{2^{k-1}-1} \leq C_\alpha (1-t)^{-1} \left(\log \frac{e}{1-t}\right)^{-\alpha}, \quad t \in [0, 1). \tag{1.2.10}$$

Доказательство. Положим

$$G_\alpha(t) = (1-t) \left(\log \frac{e}{1-t}\right)^{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{(k+1)^\alpha} t^{2^{k-1}-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1).$$

Для $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$ имеем

(1.2.11)

$$\begin{aligned} G_\alpha(t) &\leqslant C_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^\alpha 2^{k-n} t^{2^{k-1}-1} \\ &\leqslant C_\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^\alpha 2^{k-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^\alpha 2^{k-n} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^{2^{k-1}-1} \right) \\ &\leqslant C_\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^\alpha 2^{k-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^\alpha 2^{k-n} q^{2^{k-n}} \right), \end{aligned}$$

где $q = e^{-\frac{1}{8}} \in (0,1)$.

Продолжение оценки (1.2.11) зависит от величины α. Если $\alpha \leqslant 0$, то $\left(\frac{n}{k}\right)^\alpha \leqslant e^{-\alpha\frac{k-n}{n}} \leqslant e^{-\alpha(k-n)}$, поэтому

$$
\begin{aligned}
G_\alpha(t) &\leqslant C_\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(2e^{-\alpha}\right)^{k-n} q^{2^{k-n}} \right) \\
&\leqslant C_\alpha \left(2 + \sum_{s=1}^{\infty} \left(2e^{-\alpha}\right)^{s} q^{2^s} \right) = C'_\alpha.
\end{aligned}
\tag{1.2.12}
$$

Если $\alpha \geqslant 0$, то

$$
\begin{aligned}
G_\alpha(t) &\leqslant C_\alpha \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} n^\alpha 2^{-\frac{n}{2}} + 2^\alpha \sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n} 2^{k-n} + \sum_{s=1}^{\infty} 2^s q^{2^s} \right) \\
&\leqslant C_\alpha \left(n^{\alpha+1} 2^{-\frac{n}{2}-1} + 2^{\alpha+1} + \sum_{s=1}^{\infty} 2^s q^{2^s} \right) = C''_\alpha.
\end{aligned}
\tag{1.2.13}
$$

Остаётся отметить, что неравенство (1.2.10) следует из оценок (1.2.12) и (1.2.13). $\square$

Также напомним классический результат о рядах из функций Радемахера $R_k(x) = \operatorname{sign}\sin(2^{k+1}\pi x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $k = 0, 1, \dots$.

Теорема 1.2.4 (см. [3, глава V, теорема 8.4]). *Пусть $p > 0$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. Положим*

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k R_k(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.
$$

Тогда

$$
A_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant B_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
$$

для некоторых констант A_p, $B_p > 0$.

Теперь всё готово для доказательства обратных оценок в логарифмических пространствах Блоха $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

Доказательство теоремы 1.2.1. Пусть $C_\alpha > 0$ – это константа, существование которой гарантирует лемма 1.2.3. Для $x \in [0,1]$ рассмотрим следующие функции:

$$F_x(w) = \frac{1}{1+C_\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_k(x)}{(k+1)^\alpha}w^{2^k-1}, \quad w \in \mathbb{D},$$

где $R_k(x)$ — это функции Радемахера.

Во-первых, имеем $F_x \in H(\mathbb{D})$ и

$$\|F_x\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+C_\alpha}\left(1+\sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|w|^2)\left(\log\frac{e}{1-|w|^2}\right)^\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k-1}{(k+1)^\alpha}|w|^{2^k-2}\right) \leqslant 1$$

в силу леммы 1.2.3 с $t = |w|^2$.

Во-вторых,

$$\int\limits_0^1 |F_x(w)|^p\,dx \geqslant A_{p,\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|w|^{2(2^k-1)}}{(k+1)^{2\alpha}}\right)^{\frac{p}{2}}$$

в силу теоремы 1.2.4. Применяя лемму 1.2.2 с $\beta = 1-2\alpha$ и $t = |w|^2$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|w|^{2(2^k-1)}}{(k+1)^{2\alpha}} \geqslant C_{1-2\alpha}\Psi_\alpha^2(|w|^2), \quad w \in \mathbb{D}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 |F_x(w)|^p\,dx \geqslant \tau_{p,\alpha}^p\Psi_\alpha^p(|w|^2), \quad w \in \mathbb{D},$$

что и требовалось доказать. $\square$

1.3 Обратные оценки в шаре

Следующая теорема показывает, что за обратные оценки в шаре B_m, $m \geqslant 2$, также отвечают функции Ψ_α. При $\alpha = 0$ соответствующее наблюдение было сделано в статье [15].

Теорема 1.3.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда существуют константа $\tau_{m,p,\alpha} > 0$ и функции $F_x \in L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, такие что $\|F_x\|_{L^\alpha\mathcal{B}(B_m)} \leqslant 1$ и*

$$\left(\int_0^1 |F_x(w)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \tau_{m,p,\alpha}\Psi_\alpha(|w|^2), \quad w \in B_m. \tag{1.3.1}$$

Основным рабочим инструментом доказательства теоремы 1.3.1 является следующая теорема о полиномах Александрова–Рыля–Войтащика.

Теорема 1.3.2 ([1, теорема 4])**.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда существуют константы $J = J(m) \in \mathbb{N}$, $\delta = \delta(m) \in (0,1)$ со следующими свойствами: для каждого $d \in \mathbb{N}$ найдутся голоморфные однородные полиномы $W_j[d]$ степени d, $1 \leqslant j \leqslant J$, такие что*

$$\|W_j[d]\|_{L^\infty(\partial B_m)} \leqslant 1, \tag{1.3.2}$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant J} |W_j[d](\xi)| \geqslant \delta, \quad \xi \in \partial B_m. \tag{1.3.3}$$

Доказательство теоремы 1.3.1. Зафиксируем константу $\delta \in (0,1)$ и полиномы $W_j[d]$, $1 \leqslant j \leqslant J$, $d \in \mathbb{N}$, существование которых гарантировано теоремой 1.3.2. Также положим $W_j[0] = 1$, $1 \leqslant j \leqslant J$.

Пусть C_α — положительная константа из леммы 1.2.3. Для $x \in [0,1]$ рассмотрим функции

$$F_{j,x}(w) = \frac{1}{1+C_\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_k(x)}{(k+1)^\alpha}W_j[2^k-1](w), \quad w \in B_m, \quad 1 \leqslant j \leqslant J,$$

где $R_k(x)$ — это функции Радемахера.

Отметим, что $F_{j,x} \in H(B_m)$. Используя оценки (1.3.2) и (1.2.10), получаем

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{R}F_{j,x}(w)| &\leqslant \frac{1}{1+C_\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-1}{(k+1)^\alpha} |w|^{2^k-1} \\
&\leqslant \frac{1}{1+C_\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-1}{(k+1)^\alpha} |w|^{2(2^{k-1}-1)} \\
&\leqslant \frac{C_\alpha}{1+C_\alpha} (1-|w|^2)^{-1} \left(\log \frac{e}{1-|w|^2} \right)^{-\alpha}, \quad w \in B_m.
\end{aligned}
$$

Таким образом, имеем $\|F_{j,x}\|_{L^\alpha \mathcal{B}(B_m)} \leqslant 1$.

Далее, применяя теорему 1.2.4, получаем

$$
\int_0^1 |F_{j,x}(w)|^p \, dx \geqslant A_{p,\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|W_j[2^k-1](w)|^2}{(k+1)^{2\alpha}} \right)^{\frac{p}{2}}, \quad w \in B_m, \quad 1 \leqslant j \leqslant J.
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} \int_0^1 |F_{j,x}(w)|^p \, dx &\geqslant A_{p,\alpha} \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|W_j[2^k-1](w)|^2}{(k+1)^{2\alpha}} \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\geqslant C_{m,p,\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{J} \frac{|W_j[2^k-1](w)|^2}{(k+1)^{2\alpha}} \right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}
\tag{1.3.4}
$$

Используя оценку (1.3.3) и лемму 1.2.2 при $\beta = 1-2\alpha$ и $t = |w|^2$, имеем

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{J} \frac{|W_j[2^k-1](w)|^2}{(k+1)^{2\alpha}} &\geqslant \delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|w|^{2(2^k-1)}}{(k+1)^{2\alpha}} \\
&\geqslant C_{1-2\alpha} \delta^2 \Psi_\alpha^2(|w|^2), \quad w \in B_m.
\end{aligned}
$$

Поэтому, оценка (1.3.4) продолжается следующим образом

$$
\sum_{j=1}^{J} \int_0^1 |F_{j,x}(w)|^p \, dx \geqslant C_{m,p,\alpha}^p \Psi_\alpha^p(|w|^2), \quad w \in B_m.
$$

Полученная конечная сумма интегралов по отрезку $[0, 1]$ сводится к единственному интегралу по отрезку $[0, 1]$ после подобающей замены индексов для функций $F_{j,x}$. А именно, полагая

$$F_x = J^{\frac{1}{p}} F_{j,Jx-j+1}, \quad \frac{j-1}{J} \leqslant x \leqslant \frac{j}{J}, \quad 1 \leqslant j \leqslant J,$$

имеем

$$\sum_{j=1}^{J} \int_0^1 |F_{j,x}(w)|^p \, dx = \int_0^1 |F_x(w)|^p \, dx.$$

Таким образом, обратная оценка (1.3.1) доказана. $\square$

1.4 Обсуждение точности обратных оценок

Прежде всего отметим, что предложение 1.1.2 указывает на точность теоремы 1.2.1 при $\alpha < \frac{1}{2}$. Для соответствующих пояснений удобно использовать понятие гиперболического класса Харди $H_h^p(\mathbb{D})$ (см., например, [32]). При $0 < p < \infty$ класс $H_h^p(\mathbb{D})$ состоит из голоморфных отображений $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{\mathbb{T}} \left(\log \frac{1}{1 - |\varphi(r\zeta)|^2} \right)^p d\sigma_1(\zeta) < \infty.$$

Отметим, что $H_h^{p_2}(\mathbb{D}) \subsetneq H_h^{p_1}(\mathbb{D})$ для $0 < p_1 < p_2 < \infty$.

Итак, предположим, что существуют функции $F_x \in L^\alpha \mathcal{B}(\mathbb{D})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, такие что при $p = 2$ и $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ условие (1.2.1) выполнено для

$$\left(\log \frac{1}{1 - |w|^2} \right)^\beta, \quad \beta \geqslant \frac{1}{2} - \alpha,$$

вместо

$$\left(\log \frac{1}{1 - |w|^2} \right)^{\frac{1}{2} - \alpha}.$$

Рассмотрим произвольное отображение $\varphi \in H_h^{1-2\alpha}(\mathbb{D})$. В силу предложения 1.1.2 оператор композиции $C_\varphi : L^\alpha \mathcal{B}(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ ограничен.

Следовательно,

$$\|C_\varphi\|^2_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})\to H^2(\mathbb{D})} \geqslant \int_0^1 \int_{\mathbb{T}} |F_x(\varphi(r\zeta)|^2 d\sigma_1(\zeta)dx$$
$$= \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 |F_x(\varphi(r\zeta)|^2 dx d\sigma_1(\zeta)$$
$$\geqslant C_\beta \int_{\mathbb{T}} \left(\log\frac{1}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^{2\beta} d\sigma_1(\zeta)$$

для всех $r \in [0,1)$. Иными словами, получаем $\varphi \in H_h^\beta(\mathbb{D})$. Таким образом, $H_h^{1-2\alpha}(\mathbb{D}) = H_h^{2\beta}(\mathbb{D})$ и $2\beta = 1-2\alpha$.

Импликация (1.1.6)$\Rightarrow$(1.1.4) из предложения 1.1.3 аналогичным образом указывает на точность оценки (1.2.1) при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $p = 2$.

Строгое обоснование точности обратной оценки (1.3.1) при всех $p > 0$ дано в следующем подразделе.

1.5 Точность обратных оценок

Для проверки точности обратной оценки (1.3.1) нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1.5.1. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, *функция* $f \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $\|f\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$. *Тогда*

$$\|f_\rho\|^p_{H^p(\mathbb{D})} \leqslant C(|f(0)|^p + \Psi^p_\alpha(\rho^2)), \quad 0<\rho<1.$$

Доказательство. По теореме 1.1.1 имеем

(1.5.1)
$$\|f_\rho\|^p_{H^p(\mathbb{D})} \leqslant C\left(|f(0)|^p + \int_{\mathbb{T}}\left(\int_0^1 |f'(\rho r\zeta)|^2\rho^2(1-r)dr\right)^{\frac{p}{2}} d\sigma_1(\zeta)\right).$$

Учитывая, что функция $f \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $\|f\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$, оценка (1.5.1) продолжается следующим образом

$$\|f_\rho\|^p_{H^p(\mathbb{D})} \leqslant C\left(|f(0)|^p + \int\limits_{\mathbb{T}}\left(\int\limits_0^1 |f'(\rho r\zeta)|^2\rho^2(1-r)dr\right)^{\frac{p}{2}} d\sigma_1(\zeta)\right)$$

$$\leqslant C\left(|f(0)|^p + \left(\int\limits_0^1 \frac{\rho^2(1-r)}{(1-\rho^2r^2)^2}\left(\log\frac{e}{1-\rho^2r^2}\right)^{-2\alpha} dr\right)^{\frac{p}{2}}\right)$$

$$\leqslant C\left(|f(0)|^p + \left(\int\limits_0^1 \frac{\rho^2}{1-\rho r}\left(\log\frac{e}{1-\rho r}\right)^{-2\alpha} dr\right)^{\frac{p}{2}}\right).$$

Непосредственно вычисляя последний интеграл, заключаем, что

$$\|f_\rho\|^p_{H^p(\mathbb{D})} \leqslant C(|f(0)|^p + \Psi^p_\alpha(\rho)) \leqslant C(|f(0)|^p + \Psi^p_\alpha(\rho^2)).$$

Таким образом, лемма доказана. □

В следующем предложении устанавливается точность интегральной обратной оценки (1.3.1).

Предложение 1.5.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда интегральная обратная оценка* (1.3.1) *точна.*

Доказательство. Пусть выполнена оценка (1.3.1) для $m = 1$, тогда

$$\int\limits_0^1 |F_x(\rho\zeta)|^p\, dx \geqslant \tau^p_{1,p,\alpha}\Psi^p_\alpha(\rho^2), \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_0^1 |F_x(\rho\zeta)|^p\, dx\, d\sigma_1(\zeta) \geqslant \tau^p_{1,p,\alpha}\Psi^p_\alpha(\rho^2), \quad 0 < \rho < 1.$$

С другой стороны, в силу теоремы Фубини, определения пространства Харди и леммы 1.5.1, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_0^1 |F_x(\rho\zeta)|^p\,dx\,d\sigma_1(\zeta) \leqslant \int\limits_0^1 \|(F_x)_\rho\|^p_{H^p(\mathbb{D})}\,dx \leqslant C(|F_x(0)|^p + \Psi^p_\alpha(\rho^2)).$$

Таким образом, оценка (1.3.1) для $m=1$ точна.

Наконец, точность оценки (1.3.1) при $m>1$ следует из соответствующего утверждения при $m=1$. В самом деле, пусть $m>1$, $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ и оценка вида (1.3.1) выполнена для функций $F_x\in L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$. Напомним, что срез-функция $(F_x)_\zeta$, $\zeta\in\partial B_m$, задается равенством $(F_x)_\zeta(\lambda)=F_x(\lambda\zeta)$, $\lambda\in\mathbb{D}$. Отметим, что $\mathcal{R}F_x(\lambda\zeta)=\lambda(F_x)'_\zeta(\lambda)$. Таким образом, такая же обратная оценка выполнена для срез-функций $(F_x)_\zeta\in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$. $\square$

Итак, интегральная обратная оценка (1.3.1) точна. С другой стороны, если $\alpha<1$, $f\in L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$ и $\|f\|_{L^\alpha\mathcal{B}(B_m)}\leqslant 1$, то хорошо известна следующая точная оценка сверху:

$$|f(w)|\leqslant C_\alpha\left(\log\frac{e}{1-|w|^2}\right)^{1-\alpha},\quad w\in B_m, \tag{1.5.2}$$

для некоторой константы $C_\alpha>0$. Таким образом, для пространств $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$, $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, имеет место аналог явления, отмеченного во введении для классического пространства Блоха $\mathcal{B}(\mathbb{D})$: нижняя оценка (1.3.1) отличается от верхней оценки (1.5.2), однако обе оценки (1.3.1) и (1.5.2) являются точными.

Глава 2

Непосредственные приложения обратных оценок

2.1 Операторы композиции $C_\varphi : L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \to \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$

2.1.1 Основные свойства пространства $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$

Напомним, что для функции $f \in H^2(\mathbb{D})$ радиальные пределы

$$f^*(\zeta) = \lim_{r\to 1-} f(r\zeta)$$

определены для σ_1-почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$.

По определению пространство $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ состоит из функций $f \in H^2(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2_{\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})} = |f(0)|^2 + \sup_{a\in\mathbb{D}} \int\limits_{\mathbb{T}} |f^*(\zeta) - f(a)|^2 \frac{1-|a|^2}{|\zeta - a|^2}\, d\sigma_1(\zeta) < \infty.$$

Хорошо известно описание пространства $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ в терминах мер Карлесона. Напомним, что положительная борелевская мера μ в круге $\mathbb{D}$ называется мерой Карлесона, если существует константа $C > 0$ такая, что $\mu(Q(I)) \leqslant C\sigma_1(I)$ для всех дуг $I \subset \mathbb{T}$, где

$$Q(I) = \{z \in \mathbb{D} : z/|z| \in I, |z| \geqslant 1 - \sigma_1(I)\}.$$

Пусть ν_2 — двумерная мера Лебега на круге $\mathbb{D}$. Функция $f \in H(\mathbb{D})$ принадлежит пространству $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ тогда и только тогда, когда мера

$|f'(z)|^2(1-|z|^2)\,d\nu_2(z)$ является мерой Карлесона (см., например, [2], где приведены и другие эквивалентные описания пространства $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$).

Также напомним, что в силу теоремы Джона–Ниренберга существуют такие положительные константы A и C, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \exp(|f^*(\zeta)|)\,d\sigma_1(\zeta) \leqslant C, \tag{2.1.1}$$

для всех функций $f \in \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})} \leqslant A.$$

2.1.2 Ограниченные операторы $C_\varphi : L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \to \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$

Если $\alpha > \frac{1}{2}$, то, как отмечалось ранее, $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$. На самом деле, верно более сильное утверждение: $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \subset \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ (см., например, [18]). Действительно, если $f \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ при $\alpha > \frac{1}{2}$, то непосредственно из определения $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ следует, что мера $|f'(z)|^2(1-|z|^2)\,d\nu_2(z)$ является мерой Карлесона. Известно, что оператор композиции C_φ ограничен на пространстве $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ для любого символа φ (см. [28]). Таким образом, при $\alpha > \frac{1}{2}$ оператор композиции C_φ действует из $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ в $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ для произвольного голоморфного отображения $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Для $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ известно следующее теоретическое описание ограниченных операторов композиции $C_\varphi : L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \to \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$.

Теорема 2.1.1 ([24, теорема 1.4])**.** *Пусть $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ и отображение $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является голоморфным. Тогда следующие свойства равносильны:*

(2.1.2) *оператор C_φ действует из $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ в $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$;*

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|a|^2}{|a-\zeta|^2} \Psi_\alpha^2(|\varphi^*(\zeta)|^2)\,d\sigma_1(\zeta) - \Psi_\alpha^2(|\varphi(a)|^2) \right) < \infty, \tag{2.1.3}$$

где функция Ψ_α задана равенством (1.1.9).

Теорема 1.2.1 позволяет получить явное условие на символ φ, которое необходимо для ограниченности рассматриваемого оператора композиции $C_\varphi : L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \to \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

Предложение 2.1.2 (ср. с предложением 4.1 из [15]). *Пусть* $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ *и отображение* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *является голоморфным. Предположим, что оператор* $C_\varphi : L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \to \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ *ограничен. Тогда существуют константы* $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \|C_\varphi\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})\to\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})}) > 0$ *и* $C > 0$, *такие что*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \exp\left(\varepsilon\Psi_\alpha(|\varphi^*(\zeta)|^2)\right) d\sigma_1(\zeta) \leqslant C,$$

где функция Ψ_α *задана равенством* (1.1.9).

Доказательство. Так как $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ и оператор $C_\varphi : L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D}) \to \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ ограничен, то $|\varphi^*(\zeta)| < 1$ для σ_1-п.в. точек $\zeta \in \mathbb{T}$ (см. [24, следствие 1.1]). Следовательно, для каждой функции $f \in H(\mathbb{D})$ имеем

$$f(\varphi^*(\zeta)) = \lim_{r\to 1-} f(\varphi(r\zeta)) = (f\circ\varphi)^*(\zeta) \text{ для } \sigma_1\text{-п.в. } \zeta \in \mathbb{T}. \tag{2.1.4}$$

Пусть $F_x \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, — это функции, существование которых гарантировано теоремой 1.2.1 при $p = 1$. Тогда имеем

$$\|F_x \circ \varphi\|_{\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})} \leqslant \|C_\varphi\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})\to\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})}.$$

Положим $\delta = A\|C_\varphi\|^{-1}_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})\to\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})}$, где A — это константа из теоремы Джона–Ниренберга. В силу (2.1.4) и (2.1.1) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{T}} \exp(\delta|F_x(\varphi^*(\zeta))|)\, d\sigma_1(\zeta) &= \int\limits_{\mathbb{T}} \exp(\delta|(F_x\circ\varphi)^*(\zeta)|)\, d\sigma_1(\zeta) \\ &\leqslant C, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.\end{aligned}$$

Наконец, применяя теорему Фубини, неравенство Йенсена и теорему 1.2.1, получаем

$$\begin{aligned} C &\geqslant \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 \exp(\delta |(F_x(\varphi^*(\zeta))|)\, dx\, d\sigma_1(\zeta) \\ &\geqslant \int_{\mathbb{T}} \exp\left(\delta \int_0^1 |F_x(\varphi^*(\zeta))|\, dx\right) d\sigma_1(\zeta) \\ &\geqslant \int_{\mathbb{T}} \exp\left(\delta \tau_{1,\alpha} \Psi_\alpha(|\varphi^*(\zeta)|^2)\right) d\sigma_1(\zeta), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

2.2 Гиперболические градиенты и внутренние отображения

Пусть σ_n обозначает меру Лебега на единичной сфере ∂B_n, нормированную условием $\sigma_n(\partial B_n) = 1$. Напомним, что для голоморфного отображения $\varphi : B_n \to B_m$ радиальный предел $\varphi^*(\zeta)$ определён для σ_n-почти всех точек $\zeta \in \partial B_n$. Если $|\varphi^*| = 1$ σ_n-п.в., то отображение φ называется *внутренним.* Отношение

$$\frac{|\nabla \varphi(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2}, \quad z \in B_n,$$

где $|\nabla \varphi(z)|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z) \right|^2$, называется гиперболическим градиентом отображения φ.

Данный раздел мотивирован следующим эвристическим принципом: *если гиперболический градиент отображения φ не растет достаточно быстро, то отображение φ не является внутренним.*

Несколько точных реализаций этого принципа сформулированы в статьях [9, 17, 19, 30]. В частности, для $n = m = 1$ справедлив следующий результат.

Теорема 2.2.1 ([17, следствие 5.2]). *Пусть голоморфное отображение* $\varphi : B_1 \to B_1$ *таково, что*

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\Omega(1-|\varphi(z)|^2) \leqslant \frac{\omega(1-|z|^2)}{1-|z|^2}, \quad z \in B_1, \tag{2.2.1}$$

где Ω, $\omega : (0,1] \to (0,+\infty)$ *— ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие условиям*

$$\int\limits_0 \frac{\Omega^2(t)}{t}\,dt = \infty, \tag{2.2.2}$$

$$\int\limits_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\,dt < \infty. \tag{2.2.3}$$

Тогда отображение φ *не является внутренним.*

Различные количественные уточнения, в том числе и многомерные, теоремы 2.2.1 можно получить рассматривая конкретные функции Ω, удовлетворяющие условию (2.2.2). Например, если $\Omega \equiv 1$, функция ω не убывает и выполнены условия (2.2.1) и (2.2.3), то $|\varphi^*| < 1$ σ_1-п.в. (см. [19, с. 687]); более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.2 ([17, теорема 1.4]). *Пусть* n, $m \in \mathbb{N}$, *голоморфное отображение* $\varphi : B_n \to B_m$ *таково, что*

$$\frac{|\nabla\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} \leqslant \frac{\omega(1-|z|^2)}{1-|z|^2}, \quad z \in B_n,$$

где ω *— неубывающая функция на* $[0,1]$, $\omega(0) = 0$, $\int\limits_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\,dt < \infty.$

Тогда

$$\int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi^*(\zeta)|^2}\right)^K d\sigma_n(\zeta) < \infty$$

для любого $K > 0$. *В частности,* $|\varphi^*| < 1$ σ_n*-п.в.*

Следующий результат, в духе теоремы 2.2.2, даёт количественное уточнение теоремы 2.2.1 для $\Omega_\alpha(t) = (\log \frac{e}{t})^{-\alpha}$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Отметим, что условие (2.2.2) справедливо для $\Omega = \Omega_\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

Теорема 2.2.3. *Пусть n, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ таково, что*

$$\frac{|\nabla\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\left(\log\frac{e}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{-\alpha} \leqslant \frac{\omega(1-|z|^2)}{1-|z|^2}, \quad z \in B_n, \tag{2.2.4}$$

где функция ω удовлетворяет условиям теоремы 2.2.2. Пусть функция Ψ_α определена формулой (1.1.9). *Тогда*

$$\int\limits_{\partial B_n} \exp\left(K\Psi_\alpha^2(|\varphi^*(\zeta)|^2)\right) d\sigma_n(\zeta) < \infty \tag{2.2.5}$$

для любого $K > 0$. В частности, $|\varphi^*| < 1$ σ_n-п.в.

Отметим, что аналог сформулированной теоремы при $m = 1$ можно получить с помощью предложения 2.1.2. Однако, предложение 2.1.2 позволяет доказать оценку (2.2.5) с Ψ_α вместо Ψ_α^2, т.е. более слабый результат. Для доказательства теоремы 2.2.3 в полном объёме будет использована следующая лемма.

Лемма 2.2.4 ([17, лемма 3.3])**.** *Пусть функция $g \in H(B_1)$ обладает свойством $|g'(z)|(1-|z|^2) \leqslant \omega(1-|z|^2)$, $\quad z \in B_1$, где функция ω удовлетворяет условиям теоремы 2.2.2.*

Пусть $A > 0$. Тогда существует постоянная $C = C(A, \omega, |g(0)|) < \infty$ такая, что

$$\int\limits_{\partial B_1} \exp(A|g(r\zeta)|^2)\, d\sigma_1(\zeta) \leqslant C$$

для всех $0 \leqslant r < 1$.

Также нам потребуется следующий технический результат, который является частным случаем теоремы 2.1 из статьи [31].

Теорема 2.2.5. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда эквивалентной нормой на пространстве $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$ является величина*

$$|f(0)| + \sup_{w \in B_m} |\nabla f(w)|(1-|w|^2) \left(\log \frac{e}{1-|w|^2}\right)^\alpha,$$

где $\nabla f(w) = \left(\frac{\partial f}{\partial w_1}(w), \ldots, \frac{\partial f}{\partial w_m}(w)\right)$ обозначает комплексный градиент функции f.

Пусть функция $f \in H(B_n)$. Для каждой точки $\zeta \in \partial B_n$ рассмотрим срез-функцию $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta), \quad \lambda \in B_1$. Ниже используется следующая теорема об интегрировании по срезам.

Теорема 2.2.6 ([4, предложение 1.4.7]). *Пусть функция $f \in L^1(\partial B_n)$. Тогда справедливо тождество:*

$$\int\limits_{\partial B_n} f(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) = \int\limits_{\partial B_n} d\sigma_n(\zeta) \int\limits_{\partial B_1} f(\xi\zeta)\, d\sigma_1(\xi).$$

Доказательство теоремы 2.2.3. Пусть константа $\tau = \tau_{m,2,\alpha} > 0$ и функции $F_x \in L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, — это константа и функции, существование которых гарантировано теоремой 1.3.1 для $p = 2$. В силу теоремы 2.2.5 имеем

$$|\nabla F_x(w)|(1-|w|^2)\left(\log\frac{e}{1-|w|^2}\right)^\alpha \leqslant C \tag{2.2.6}$$

для $w \in B_m$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Зафиксируем точку $\zeta \in \partial B_n$. Рассмотрим срез-отображение $\varphi_\zeta(\lambda) = \varphi(\lambda\zeta)$, $\lambda \in B_1$. Отметим, что

$$(F_x \circ \varphi_\zeta)'(\lambda) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_x}{\partial w_k}(\varphi_\zeta(\lambda)) \cdot (\varphi_\zeta)'_k(\lambda), \quad \lambda(\varphi_\zeta)'_k(\lambda) = (\mathcal{R}\varphi_k)(\lambda\zeta).$$

Следовательно, используя оценки (2.2.6) и (2.2.4), имеем

$$\begin{aligned}
&|\lambda||(F_x \circ \varphi_\zeta)'(\lambda)|(1-|\lambda|^2) \leqslant |\nabla F_x(\varphi_\zeta(\lambda))||\mathcal{R}\varphi(\lambda\zeta)||(1-|\lambda|^2) \\
&\leqslant \frac{C}{1-|\varphi(\lambda\zeta)|^2}\left(\log\frac{e}{1-|\varphi(\lambda\zeta)|^2}\right)^{-\alpha} |\mathcal{R}\varphi(\lambda\zeta)|(1-|\lambda|^2) \\
&\leqslant C\frac{|\nabla\varphi(\lambda\zeta)|}{1-|\varphi(\lambda\zeta)|^2}\left(\log\frac{e}{1-|\varphi(\lambda\zeta)|^2}\right)^{-\alpha}(1-|\lambda|^2) \leqslant C\omega(1-|\lambda|^2).
\end{aligned}$$

Значит, можно применить лемму 2.2.4 к функции $F_x \circ \varphi_\zeta \in H(B_1)$. Напомним, что $\|F_x\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$, поэтому, $|(F_x \circ \varphi_\zeta)(0)|$ оценивается сверху константой $C = C(\varphi(0))$. Таким образом, для данного числа $A > 0$, выбор которого будет уточнен ниже, лемма 2.2.4 гарантирует, что

$$C = C(A, \omega, \varphi(0)) \geqslant \int\limits_{\partial B_1} \exp(A|F_x \circ \varphi_\zeta(r\xi)|^2)\, d\sigma_1(\xi)$$

для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant r < 1$. Следовательно,

$$C \geqslant \int\limits_0^1 \int\limits_{\partial B_1} \exp(A|F_x \circ \varphi_\zeta(r\xi)|^2)\, d\sigma_1(\xi)\, dx$$

для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant r < 1$. Применяя теорему Фубини, неравенство Йенсена и теорему 1.3.1 для $p = 2$, получаем

$$\begin{aligned} C &\geqslant \int\limits_{\partial B_1} \int\limits_0^1 \exp(A|F_x \circ \varphi_\zeta(r\xi)|^2)\, dx\, d\sigma_1(\xi) \\ &\geqslant \int\limits_{\partial B_1} \exp\left(A \int\limits_0^1 |F_x \circ \varphi_\zeta(r\xi)|^2\, dx\right) d\sigma_1(\xi) \\ &\geqslant \int\limits_{\partial B_1} \exp\left(A\tau\Psi_\alpha^2(|\varphi_\zeta(r\xi)|^2)\right) d\sigma_1(\xi) \end{aligned}$$

для всех $0 \leqslant r < 1$. Полагая $A = \dfrac{K}{\tau}$ и интегрируя по срезам (см. теорему 2.2.6), получаем

$$C \geqslant \sup_{0 \leqslant r < 1} \int\limits_{\partial B_n} \exp\left(K\Psi_\alpha^2(|\varphi(r\zeta)|^2)\right) d\sigma_n(\zeta).$$

Наконец, применение леммы Фату завершает доказательство теоремы 2.2.3. □

Глава 3

Операторы композиции, заданные на пространстве Блоха

3.1 Постановка и обсуждение задач

3.1.1 Операторы между пространствами Харди и Блоха

Для $n \in \mathbb{N}$ и $0 < p < \infty$ пространство Харди $H^p(B_n)$ состоит из функций $f \in H(B_n)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^p_{H^p(B_n)} = \sup_{0 \leqslant r < 1} \int\limits_{\partial B_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta) < \infty,$$

где σ_n обозначает нормированную меру Лебега на единичной сфере ∂B_n. Отправной точкой для данной главы является следующая теорема:

Теорема 3.1.1 (Е. Г. Квон [20, 21]). *Пусть отображение $\varphi : B_1 \to B_1$ является голоморфным и $0 < p < \infty$. Тогда следующие свойства* *равносильны:*

(3.1.1) *оператор C_φ действует из $\mathcal{B}(B_1)$ в пространство $H^{2p}(B_1)$;*

(3.1.2) $$\sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_{\partial B_1} \left(\log \frac{1}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_1(\zeta) < \infty;$$

(3.1.3) $$\int\limits_0^1 \frac{|\varphi'(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^2}(1-r)\,dr \in L^p(\partial B_1).$$

Отметим, что интеграл, используемый в свойстве (3.1.3), является гиперболическим аналогом g-функции Литтлвуда–Пэли.

Основная цель данной главы — распространить теорему 3.1.1 на голоморфные отображения $\varphi : B_n \to B_m$ для произвольных чисел n, $m \in \mathbb{N}$. При $m = 1$ соответствующие результаты получены в работе [21]. Однако рассматриваемая задача об операторах композиции между пространствами Блоха и Харди существенно усложняется при $m \geqslant 2$. На самом деле, близким вопросом является задача об операторах композиции между пространствами Блоха и BMOA (см., например, [8]). Для решения этой задачи и описания ограниченных и компактных операторов $C_\varphi : \mathcal{B}(B_m) \to \mathrm{BMOA}(B_n)$, n, $m \in \mathbb{N}$, в терминах мер Карлесона в работе [11] было использовано весьма замысловатое техническое рассуждение. В статье [11] предполагается, что голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ обладает регулярностью следующего типа: существуют константы $s \in (0,1)$ и $\tau > 0$, такие что

$$|\langle \mathcal{R}\varphi(z), \varphi(z)\rangle| \geqslant \tau |\mathcal{R}\varphi(z)||\varphi(z)| \quad \text{при } s < |\varphi(z)| < 1.$$

В настоящей главе будет доказано, что для отображений φ, обладающих сформулированным выше свойством, аналоги свойств (3.1.1–3.1.3) равносильны при $0 < p \leqslant 1$ и n, $m \in \mathbb{N}$. Сходные утверждения будут получены для всех $p > 0$, а также для операторов композиции $C_\varphi : \mathcal{B}(B_m) \to A^{2p}_v(B_n)$, где $A^{2p}_v(B_n)$ — это достаточно малое весовое пространство Бергмана.

3.1.2 Сравнение операторов со значениями в пространствах Блоха и BMOA

Несколько решений задачи об описании операторов композиции между пространствами Блоха и BMOA было получено в недавних работах [15, 16] для произвольного голоморфного отображения $\varphi : B_n \to B_m$, n, $m \in \mathbb{N}$. Однако доказательства в статьях [15, 16] опираются на Мёбиус-инвариантность пространства $\mathrm{BMOA}(B_n)$. На самом деле, ключевым оказывается тот факт, что $\mathrm{BMOA}(B_n)$ — это Мёбиус-инвариантый аналог пространства Харди $H^p(B_n)$ для любого параметра $p > 0$ (см., например, [33]). Поэтому соответствующие рассуждения не находят прямых приложений при изучении операторов композиции между пространствами Блоха и Харди. Тем не менее, общим техническим средством в работах [15, 16] и в данной главе является теорема 1.3.1 при $\alpha = 0$, т.е. утверждение об интегральных обратных оценках в пространстве Блоха $\mathcal{B}(B_m)$.

Организация главы

Вспомогательные результаты собраны в разделе 3.2. Операторы композиции между пространствами Блоха и Харди изучаются в разделах 3.3–3.4. Описание регулярных операторов композиции между пространствами Блоха и Бергмана получено в разделе 3.5.

3.2 Предварительные результаты

3.2.1 Пространства Блоха

Для $f \in H(B_m)$ положим $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial w_m})$. Отметим, что в силу теоремы 2.2.5 величина

$$|f(0)| + \sup_{w \in B_m} |\nabla f(w)|(1 - |w|^2)$$

является эквивалентной нормой на пространстве $\mathcal{B}(B_m)$. Также напомним, что для функции $f \in \mathcal{B}(B_m)$ верна поточечная оценка

$$(3.2.1) \qquad |f(w)| \leqslant |f(0)| + C \log \frac{1}{1-|w|^2} \qquad \text{для всех } w \in B_m.$$

3.2.2 Пространства Харди

Пусть $g \in H(B_1)$ и $0 < q < \infty$. Напомним, что по теореме 1.1.1 норма $\|g\|^q_{H^q(B_1)}$ эквивалентна сумме

$$|g(0)|^q + \int\limits_{\partial B_1} \left(\int\limits_0^1 |g'(r\xi)|^2 (1-r) dr \right)^{\frac{q}{2}} d\sigma_1(\xi),$$

и, следовательно, сумме

$$|g(0)|^q + \int\limits_{\partial B_1} \left(\int\limits_0^1 |rg'(r\xi)|^2 (1-r) dr \right)^{\frac{q}{2}} d\sigma_1(\xi).$$

Теперь предположим, что $f \in H(B_n)$. Для $\zeta \in \partial B_n$ срез-функция $f_\zeta \in H(B_1)$ задаётся равенством $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta)$, $\lambda \in B_1$. Отметим, что $\mathcal{R}f(\lambda\zeta) = \lambda f'_\zeta(\lambda)$ для всех $f \in H(B_n)$, $\lambda \in B_1$, $\zeta \in \partial B_n$. Таким образом, интегрируя по срезам (см. теорему 2.2.6), получаем следующий результат:

Теорема 3.2.1 (ср. с теоремой 3.1 из [7]). *Пусть $q > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Существуют константы C_1, $C_2 > 0$ такие, что*

$$\begin{aligned} C_1 \|f\|^q_{H^q(B_n)} &\leqslant |f(0)|^q + \int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 |\mathcal{R}f(r\zeta)|^2 (1-r) dr \right)^{\frac{q}{2}} d\sigma_n(\zeta) \\ &\leqslant C_2 \|f\|^q_{H^q(B_n)} \end{aligned}$$

для всех $f \in H(B_n)$.

3.3 Импликации общего характера

Пусть n, $m \in \mathbb{N}$ и $p > 0$. По определению гиперболический класс Харди $H^p_h = H^p_h(B_n, B_m)$ состоит из голоморфных отображений $\varphi : B_n \to B_m$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_{\partial B_n} \beta^p_m(\varphi(r\zeta), 0)\, d\sigma_n(\zeta) < \infty,$$

где β_m обозначает метрику Бергмана на единичном шаре B_m. Безусловно, класс H^p_h не является линейным. Классы $H^p_h(B_n, B_m)$, $p > 0$, ввёл С. Ямашита [32]. Отметим, что

$$\beta_m(w, 0) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |w|}{1 - |w|}, \quad w \in B_m.$$

Поэтому $\varphi \in H^p_h(B_n, B_m)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{e}{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_n(\zeta) < \infty$$

или выполнено эквивалентное свойство

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{1}{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_n(\zeta) < \infty.$$

В следующем предложении на отображение φ дополнительные ограничения не накладываются.

Предложение 3.3.1. *Пусть $0 < p < \infty$ и отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Рассмотрим следующие свойства:*

$$\int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi(r\zeta)|^2}{(1 - |\varphi(r\zeta)|^2)^2} (1 - r)\, dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) < \infty; \tag{3.3.1}$$

(3.3.2) *оператор $C_\varphi : \mathcal{B}(B_m) \to H^{2p}(B_n)$ ограничен;*

(3.3.3) $\varphi \in H^p_h(B_n, B_m)$.

Тогда (3.3.1)$\Rightarrow$(3.3.2)$\Rightarrow$(3.3.3).

Доказательство. (3.3.1)⇒(3.3.2) Предположим, что $f \in \mathcal{B}(B_m)$, т.е.

$$|\nabla f(w)|(1-|w|^2) \leqslant C, \quad w \in B_m.$$

Тогда

$$|\mathcal{R}(f\circ\varphi)(z)| \leqslant |\nabla f(\varphi(z))||\mathcal{R}\varphi(z)| \leqslant \frac{C|\mathcal{R}\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}, \quad z \in B_n.$$

Поэтому $f\circ\varphi \in H^{2p}(B_n)$ в силу (3.3.1) и теоремы 3.2.1. Таким образом, свойство (3.3.2) имеет место по теореме о замкнутом графике.

(3.3.2)⇒(3.3.3) Пусть константа $\tau = \tau_{m,2p} > 0$ и функции F_x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, — это константа и функции, существование которых гарантирует теорема 1.3.1 для показателя $2p$. Имеем $\|F_x\|_{\mathcal{B}(B_m)} \leqslant C$, поэтому

$$\int\limits_{\partial B_n} |F_x\circ\varphi(r\zeta)|^{2p}\, d\sigma_n(\zeta) \leqslant C \text{ для всех } 0 \leqslant r < 1$$

в силу свойства (3.3.3). Таким образом, теорема Фубини и теорема 1.3.1 гарантируют, что

$$\begin{aligned} C &\geqslant \int\limits_0^1 \int\limits_{\partial B_n} |F_x\circ\varphi(r\zeta)|^{2p}\, d\sigma_n(\zeta)\, dx \\ &= \int\limits_{\partial B_n} \int\limits_0^1 |F_x(\varphi(r\zeta)|^{2p}\, dx\, d\sigma_n(\zeta) \\ &\geqslant \tau \int\limits_{\partial B_n} \left(\log\frac{1}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_n(\zeta) \end{aligned}$$

для всех $0 \leqslant r < 1$. Итак, свойство (3.3.3) выполнено. □

Предложение 3.3.2. *Пусть $0 < p < \infty$ и отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Предположим, что*

$$\varphi \in H^{2p}_h(B_n, B_m). \tag{3.3.4}$$

Тогда имеет место свойство (3.3.2).

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{B}(B_m)$. Тогда $f \circ \varphi \in H^{2p}(B_n)$ в силу (3.3.4) и (3.2.1). Таким образом, свойство (3.3.2) выполнено по теореме о замкнутом графике. □

Зазор между условиями (3.3.3) и (3.3.4) указывает на то, что стандартная оценка (3.2.1) не является эффективной при изучении операторов композиции между пространствами Блоха и Харди. Для произвольных чисел n, $m \in \mathbb{N}$ равносильность свойств (3.3.1)–(3.3.3) будет доказана иным способом и при дополнительных ограничениях на отображение φ.

3.4 Регулярные операторы со значениями в пространствах Харди

Напомним, что импликация (3.3.1)⇒(3.3.2) следует из оценки

$$|\mathcal{R}(f \circ \varphi)(z)| \leqslant |\nabla f(\varphi(z))||\mathcal{R}\varphi(z)|, \quad z \in B_n.$$

Если $m = 1$, то данная оценка превращается в равенство. Поэтому обратную импликацию можно получить с помощью следующего частного случая теоремы 0.1.1:

Лемма 3.4.1 ([27, предложение 5.4]). *Существуют функции f, $g \in \mathcal{B}(B_1)$ такие, что*

$$|f'(z)| + |g'(z)| \geqslant \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \text{для всех } z \in B_1.$$

Однако, при $m \geqslant 2$ аналоги леммы 3.4.1 не имеют очевидных приложений к доказательству импликации (3.3.2)⇒(3.3.3). Чтобы преодолеть сходную проблему, возникающую при решении задачи об операторах композиции между пространствами Блоха и BMOA, более замысловатые тестовые функции были построены в работе [11], где предполагается, что рассматриваемое голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ обладает регулярностью следующего типа:

$$\text{(3.4.1)} \qquad \begin{array}{l} \text{существуют константы } s \in (0,1) \text{ и } \tau > 0, \text{ такие что} \\ |\langle \mathcal{R}\varphi(z), \varphi(z)\rangle| \geqslant \tau |\mathcal{R}\varphi(z)||\varphi(z)| \quad \text{при } s < |\varphi(z)| < 1. \end{array}$$

На самом деле, в статье [11] использовано формально несколько менее ограничительное условие. Если имеет место свойство (3.4.1), то будем говорить по определению, что голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является *регулярным.* Безусловно, все голоморфные отображения $\varphi : B_n \to B_1$ регулярны.

Можно пытаться модифицировать метод из статьи [11] и таким способом доказывать, что (3.3.2) влечёт (3.3.1) для регулярного отображения φ. Однако такой подход заведомо не даст никакой связи с (3.3.3) — существенно более явным свойством, чем условие (3.3.1). Используя в качестве мотивировки результаты Е. Г. Квона [21, 22], ниже мы напрямую покажем, что (3.3.3) влечёт (3.3.1), если отображение φ регулярно и $0 < p \leqslant 1$. Таким образом, некоторые рассуждения в настоящем разделе схожи с доказательствами, приведёнными в статьях [21, 22]. Для произвольного $p > 0$ будет использовано изменённое условие (3.4.1), в котором градиент ∇ заменяет радиальную производную $\mathcal{R}$.

3.4.1 Одно геометрическое условие, достаточное для регулярности

Для данного $s \in (0,1)$ и голоморфного отображения $\varphi : B_n \to B_m$ положим

$$\Omega_s(\varphi) = \{z \in B_n : |\varphi(z)| > s\}.$$

Для $z \in B_n$ и $0 < r < 1$ положим $I_r(z) = \{tz : r \leqslant t \leqslant 1\}$; иными словами, $I_r(z)$ — это отрезок, соединяющий точки rz и z.

Для $z \in B_n$ и $0 < h < 1$ некасательный конус $J_h(z) \subset B_n$ задаётся равенством

$$J_h(z) = \{w \in B_n : |\langle z, z - w\rangle| \geqslant h|z||z - w|\}.$$

Следующая лемма частично объясняет геометрическую природу свойства (3.4.1).

Лемма 3.4.2 (ср. с леммой 2 из [11])**.** *Пусть отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным, причём $\varphi(0) = 0$. Предположим, что для некоторых параметров s, $h \in (0,1)$ выполнено следующее свойство: для любой точки $z \in \Omega_s(\varphi)$ существует такое число $r \in (0,1)$, что $\varphi(I_r(z)) \subset J_h(\varphi(z))$. Тогда*

$$|\langle \varphi(z), \mathcal{R}\varphi(z)\rangle| \geqslant \frac{h}{2}|\varphi(z)||\mathcal{R}\varphi(z)| \quad \text{\textit{для всех} } z \in \Omega_s(\varphi).$$

Иными словами, φ — регулярное отображение.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что для некоторого $z \in \Omega_s(\varphi)$ справедливо неравенство

$$|\langle \varphi(z), \mathcal{R}\varphi(z)\rangle| < \frac{h}{2}|\varphi(z)||\mathcal{R}\varphi(z)|. \tag{3.4.2}$$

Отметим, что неравенство (3.4.2) влечёт условие $|\mathcal{R}\varphi(z)| > 0$. Уменьшая при необходимости r, с учётом непрерывности отображения $\mathcal{R}\varphi$, имеем

$$\left| \frac{(\mathcal{R}\varphi_1(\zeta_1), \dots, \mathcal{R}\varphi_m(\zeta_m))}{|(\mathcal{R}\varphi_1(\zeta_1), \dots, \mathcal{R}\varphi_m(\zeta_m))|} - \frac{\mathcal{R}\varphi(z)}{|\mathcal{R}\varphi(z)|} \right| \leqslant \frac{h}{4}, \tag{3.4.3}$$

для всех $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in I_r(z)$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.

Формула для радиальной производной

$$\mathcal{R}\varphi(w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(w) - \varphi((1-\varepsilon)w)}{\varepsilon}$$

и теорема о среднем, применённая к функции $\psi : s \mapsto \psi(s) = \varphi(sz)$, $s \in [r, 1]$, гарантируют, что для $w \in I_r(z)$ справедливо следующее равенство

$$\varphi(w) = \varphi(z) + (\mathcal{R}\varphi_1(\zeta_1), \dots, \mathcal{R}\varphi_m(\zeta_m))\frac{|w - z|}{|z|}, \tag{3.4.4}$$

с некоторыми точками $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in I_r(z)$.

Осталось заметить, что в виду равенства (3.4.4), точка $\varphi(w)$ не может принадлежать конусу $J_h(\varphi(z))$. В самом деле, учитывая оценки (3.4.2), (3.4.3) и соотношение (3.4.4) получаем

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \frac{\varphi(z)}{|\varphi(z)|}, \frac{\varphi(z)-\varphi(w)}{|\varphi(z)-\varphi(w)|}\right\rangle\right| &= \left|\left\langle \frac{\varphi(z)}{|\varphi(z)|}, \frac{(\mathcal{R}\varphi_1(\zeta_1), \ldots, \mathcal{R}\varphi_m(\zeta_m))}{|(\mathcal{R}\varphi_1(\zeta_1), \ldots, \mathcal{R}\varphi_m(\zeta_m))|}\right\rangle\right| \\ &\leqslant \left|\left\langle \frac{\varphi(z)}{|\varphi(z)|}, \frac{\mathcal{R}\varphi(z)}{|\mathcal{R}\varphi(z)|}\right\rangle\right| + \frac{h}{4} \leqslant \frac{3}{4}h.\end{aligned}$$

Получено противоречие: отображение φ не отображает отрезок $I_r(z)$ в конус $J_h(\varphi(z))$. Следовательно, предположение (3.4.2) не верно, т.е. отображение φ регулярно. □

Отметим, что лемма 3.4.2 далее не используется, но даёт геометрическое условие, достаточное для регулярности.

3.4.2 Модель: отображение φ регулярно и $p = 1$

Лемма 3.4.3. *Пусть $\varphi : B_n \to B_m$ является регулярным голоморфным отображением. Тогда*

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_n} \log \frac{1}{1-|\varphi(\rho\zeta)|^2}\, d\sigma_n(\zeta) - \log \frac{1}{1-|\varphi(0)|^2} \\ \geqslant C \int_{\partial B_n} \int_0^1 \frac{\rho^2 |\mathcal{R}\varphi(\rho r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(\rho r\zeta)|^2)^2}(1-r) r\, dr\, d\sigma_n(\zeta)\end{aligned}$$

для всех $0 < \rho < 1$.

Доказательство. Для $u \in C^2(B_n)$ положим $u_\rho(z) = u(\rho z)$, $0 < \rho < 1$. Формула Грина гарантирует, что

$$\int_{\partial B_n} u(\rho\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) - u(0) = C \int_{B_n} G(z) \Delta u_\rho(z)\, d\nu_n(z), \quad 0 < \rho < 1, \tag{3.4.5}$$

где ν_n обозначает нормированную меру Лебега на единичном шаре B_n,

$$\Delta = 4\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\overline{z}_k}$$

— вещественный лапласиан и $G(z)$ — функция Грина для единичного шара B_n, т.е.

$$G(z) = \log\frac{1}{|z|}, \quad n = 1;$$
$$G(z) = |z|^{2-2n} - 1, \quad n \geqslant 2.$$

Отметим, что $\Delta u_\rho(z) = \rho^2\Delta u(\rho z)$. Ниже равенство (3.4.5) используется для $u = \log\dfrac{1}{1-\langle\varphi,\varphi\rangle}$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\overline{z}_k}\log\frac{1}{1-\langle\varphi,\varphi\rangle} = \frac{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\right|^2(1-|\varphi|^2) + \left|\langle\frac{\partial\varphi}{\partial z_k},\varphi\rangle\right|^2}{(1-|\varphi|^2)^2}$$

для $k = 1,\dots,n$. Отметим, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\right|^2 \geqslant |\mathcal{R}\varphi|^2; \tag{3.4.6}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left|\langle\frac{\partial\varphi}{\partial z_k},\varphi\rangle\right|^2 &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\langle z_k\frac{\partial\varphi}{\partial z_k},\varphi\rangle\right|^2\\ &\geqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\langle z_k\frac{\partial\varphi}{\partial z_k},\varphi\rangle\right|^2\\ &= \frac{|\langle\mathcal{R}\varphi,\varphi\rangle|^2}{n}.\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Пусть $s\in(0,1)$ и $\tau > 0$ — это константы, существующие в силу свойства (3.4.1). Если $|\varphi(z)| \leqslant s$, то имеем

$$\Delta\log\frac{1}{1-|\varphi(z)|^2} \geqslant C_s\frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^2}.$$

Если $s < |\varphi(z)| < 1$, то свойства (3.4.1), (3.4.6) и (3.4.7) гарантируют, что

$$\Delta \log \frac{1}{1-|\varphi(z)|^2} \geqslant 4\frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|^2(1-|\varphi(z)|^2)+\frac{\tau^2}{n}|\mathcal{R}\varphi(z)|^2|\varphi(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^2}$$
$$\geqslant C_{s,\tau}\frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta \log \frac{1}{1-|\varphi_\rho(z)|^2} \geqslant C\frac{\rho^2|\mathcal{R}\varphi(\rho z)|^2}{(1-|\varphi(\rho z)|^2)^2}. \tag{3.4.8}$$

Отметим, что $G(z) \geqslant (1-|z|)|z|^{2-2n}$ для всех $z \in B_n$. Объединяя свойства (3.4.5) и (3.4.8), а также интегрируя в полярных координатах, получаем утверждение леммы. $\square$

Предложение 3.4.4. *Пусть* $p = 1$ *и голоморфное отображение* $\varphi : B_n \to B_m$ *является регулярным. Тогда* (3.3.1)$\Leftrightarrow$(3.3.2)$\Leftrightarrow$(3.3.3).

Доказательство. Пусть выполнено условие (3.3.3). Тогда

$$\int\limits_{\partial B_n}\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^2}(1-r)r\,dr\,d\sigma_n(\zeta) < \infty,$$

в силу леммы 3.4.3 и леммы Фату. Итак, (3.3.3) влечёт (3.3.1). Остаётся применить предложение 3.3.1. $\square$

3.4.3 Свойство (3.3.3) и граничные значения

Для голоморфного отображения $\varphi : B_n \to B_m$ положим

$$\Phi(z) = \log\frac{e}{1-|\varphi(z)|^2}, \quad z \in B_n.$$

Напомним, что радиальные пределы $\varphi^*(\zeta) = \lim_{r\to 1-}\varphi(r\zeta)$ существуют в σ_n-почти каждой точке сферы ∂B_n. По лемме Фату

$$\int\limits_{\partial B_n}(\Phi^*(\zeta))^p\,d\sigma_n(\zeta) \leqslant \sup_{0\leqslant r<1}\int\limits_{\partial B_n}\Phi^p(r\zeta)\,d\sigma_n(\zeta) \tag{3.4.9}$$

для всех $p > 0$. Итак, если выполнено условие (3.3.3), то

$$\int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{e}{1 - |\varphi^*(\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_n(\zeta) < \infty. \tag{3.4.10}$$

Сформулированное ниже предложение 3.4.6 показывает, что оценка (3.4.9) превращается в равенство при $p \geqslant 1$. В частности, условие (3.4.10) эквивалентно свойствам (3.3.1–3.3.3), если отображение φ регулярно и $p = 1$.

Для функции $f \in L^1(\partial B_n)$ интеграл Пуассона $P[f]$ задаётся равенством

$$\begin{aligned} P[f](z) &= \int\limits_{\partial B_n} P(z,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) \\ &= \int\limits_{\partial B_n} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^{2n}} f(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta), \quad z \in B_n. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Лемма 3.4.5. *Пусть отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Предположим, что $\Phi^* \in L^1(\partial B_n)$. Тогда*

$$\Phi(z) \leqslant P[\Phi^*](z) \quad \textit{для всех } z \in B_n.$$

Доказательство. Так как $\Phi^* \in L^1(\partial B_n)$, то $|\varphi^*(\zeta)| < 1$ для σ_n-почти всех точек $\zeta \in \partial B_n$. Для $0 \leqslant x < 1$ имеем

$$\log \frac{e}{1 - x^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{2k},$$

где $a_k = \frac{1}{k} > 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} P[\Phi^*](z) &= 1 + \int\limits_{\partial B_n} P(z,\zeta) \left(\lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} a_k |\varphi^*(\zeta)|^{2k} \right) d\sigma_n(\zeta) \\ &= 1 + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} a_k \int\limits_{\partial B_n} P(z,\zeta) |\varphi^*(\zeta)|^{2k}\, d\sigma_n(\zeta), \quad z \in B_n, \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

в силу теоремы о монотонной сходимости.

При $k \in \mathbb{N}$ функция $|\varphi(z)|^{2k}$ является субгармонической и ограниченной. Следовательно,

$$P[|\varphi^*|^{2k}](z) \geqslant |\varphi(z)|^{2k}, \quad z \in B_n. \tag{3.4.13}$$

Объединяя свойства (3.4.12) и (3.4.13), получаем

$$P[\Phi^*](z) \geqslant 1 + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} a_k |\varphi(z)|^{2k} = \log \frac{e}{1-|\varphi(z)|^2}, \quad z \in B_n,$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 3.4.6. *Пусть $p \geqslant 1$ и отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Тогда*

$$\int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{e}{1-|\varphi^*(\zeta)|^2} \right)^p d\sigma_n(\zeta) = \sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2} \right)^p d\sigma_n(\zeta).$$

Доказательство. Пусть $p \geqslant 1$. В силу свойства (3.4.9), не умаляя общности, можно предположить, что $\Phi^* \in L^p(\partial B_n) \subset L^1(\partial B_n)$. Лемма 3.4.5 гарантирует, что

$$\|\Phi_r\|_{L^p(\partial B_n)} \leqslant \|(P[\Phi^*])_r\|_{L^p(\partial B_n)}, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Также имеем

$$\|(P[\Phi^*])_r\|_{L^p(\partial B_n)} \leqslant \|\Phi^*\|_{L^p(\partial B_n)}, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

так как $p \geqslant 1$. Следовательно,

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2} \right)^p d\sigma_n(\zeta) \leqslant \int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{e}{1-|\varphi^*(\zeta)|^2} \right)^p d\sigma_n(\zeta).$$

В силу неравенства (3.4.9) доказательство предложения завершено. □

3.4.4 Отображение φ регулярно и $0 < p \leqslant 1$

Вычисления, использованные при доказательстве леммы 3.4.3, гарантируют, что Φ — это субгармоническая функция. Следовательно, функция Φ^p также является субгармонической при $p \geqslant 1$. На самом деле, Φ^p — это субгармоническая функция для всех $p > 0$. Действительно, пусть $0 < p < 1$. Для $k = 1, \dots, n$ непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{1}{p}\frac{\partial^2 \Phi^p}{\partial \overline{z}_k \partial z_k} = (p-1)\left(\log \frac{e}{1-|\varphi|^2}\right)^{p-2} \frac{\left|\langle \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}, \varphi\rangle\right|^2}{(1-|\varphi|^2)^2}$$
$$+\left(\log \frac{e}{1-|\varphi|^2}\right)^{p-1} \frac{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}\right|^2 (1-|\varphi|^2) + \left|\langle \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}, \varphi\rangle\right|^2}{(1-|\varphi|^2)^2}.$$

Чтобы оценить снизу полученную сумму, заменим первое слагаемое на

$$(p-1)\left(\log \frac{e}{1-|\varphi|^2}\right)^{p-1} \frac{\left|\langle \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}, \varphi\rangle\right|^2}{(1-|\varphi|^2)^2}.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial^2 \Phi^p}{\partial \overline{z}_k \partial z_k} \geqslant p\left(\log \frac{e}{1-|\varphi|^2}\right)^{p-1} \frac{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}\right|^2 (1-|\varphi|^2) + p\left|\langle \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}, \varphi\rangle\right|^2}{(1-|\varphi|^2)^2}. \tag{3.4.14}$$

Поэтому функция Φ^p является субгармонической для любого параметра $p > 0$.

Лемма 3.4.7. *Пусть $0 < p < \infty$ и отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Для $0 < \rho < 1$ рассмотрим радиальную максимальную функцию*

$$M_{\Phi_\rho}(\zeta) = \sup_{0 \leqslant r < 1} \Phi_\rho(r\zeta) = \sup_{0 \leqslant r < 1} \log \frac{e}{1-|\varphi(\rho r \zeta)|^2}, \quad \zeta \in \partial B_n.$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial B_n} M^p_{\Phi_\rho}(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) \leqslant C \int\limits_{\partial B_n} \Phi^p_\rho(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta), \quad 0 < \rho < 1.$$

Доказательство. Зафиксируем параметр $\rho \in (0,1)$. Положим $u_\rho(z) = \Phi^{\frac{p}{2}}(\rho z)$. Тогда $u_\rho \in C(\overline{B}_n)$ и u_ρ — субгармоническая функция в шаре B_n. Следовательно, функция $u_\rho(z)$ оценивается интегралом Пуассона $P[u_\rho](z)$, $z \in B_n$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial B_n} M^2_{u_\rho}(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) &\leqslant \int\limits_{\partial B_n} M^2_{P[u_\rho]}(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta)\\ &\leqslant C \int\limits_{\partial B_n} u^2_\rho(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta)\\ &= C \int\limits_{\partial B_n} \Phi^p(\rho\zeta)\, d\sigma_n(\zeta)\end{aligned}$$

по теореме о максимальной функции. □

Следствие 3.4.8 (ср. с предложением 3.4.6)**.** *Предположим, что* $n, m \in \mathbb{N}$*,* $p > 0$ *и* $\varphi \in H^p_h(B_n, B_m)$*. Тогда*

$$\int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{e}{1 - |\varphi^*(\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_n(\zeta) = \sup_{0 \leqslant r < 1} \int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{e}{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_n(\zeta).$$

Доказательство. Положим

$$M_\Phi(\zeta) = \sup_{0 \leqslant r < 1} \log \frac{e}{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}, \quad \zeta \in \partial B_n.$$

Имеем $M^p_\Phi(\zeta) = \lim_{\rho \to 1-} M^p_{\Phi_\rho}(\zeta)$ и $\varphi \in H^p_h(B_n, B_m)$. Следовательно, $M^p_\Phi \in L^1(\partial B_n)$ в силу леммы 3.4.7 и леммы Фату. Для завершения доказательства следствия применим теорему Лебега о мажорированной сходимости. □

Лемма 3.4.9. *Пусть* $0 < p \leqslant 1$ *и голоморфное отображение* $\varphi : B_n \to B_m$ *является регулярным. Тогда*

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)|^2}{(1 - |\varphi_\rho(r\zeta)|^2)^2}(1-r) r\, dr\right)^p d\sigma_n(\zeta)\\ &\qquad \leqslant C \int\limits_{\partial B_n} \left(\log \frac{e}{1 - |\varphi_\rho(\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_n(\zeta)\end{aligned}$$

для всех $0 < \rho < 1$.

Доказательство. Если $p = 1$, то применима лемма 3.4.3. Поэтому предположим, что $0 < p < 1$. Используя свойства (3.4.14), (3.4.1), (3.4.6) и (3.4.7), получаем

$$\Delta\Phi^p \geqslant C_{s,\tau,p}\left(\log\frac{e}{1-|\varphi|^2}\right)^{p-1}\frac{|\mathcal{R}\varphi|^2}{(1-|\varphi|^2)^2},$$

где $s \in (0,1)$ и $\tau > 0$ — это константы, фигурирующие в свойстве (3.4.1).

Пусть $0 < \rho < 1$. Тогда полученная оценка гарантирует, что

$$\Phi_\rho^{1-p}(z)\Delta\Phi_\rho^p(z) \geqslant C\frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(z)|^2}{(1-|\varphi_\rho(z)|^2)^2}, \quad z \in B_n. \tag{3.4.15}$$

Далее, применяя формулу Грина (3.4.5), имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial B_n}\Phi_\rho^p(\zeta)\,d\sigma_n(\zeta) &\geqslant C\int\limits_{B_n}G(z)\Delta\Phi_\rho^p(z)\,d\nu_n(z)\\ &\geqslant C\int\limits_{B_n}\frac{1-|z|}{|z|^{2n-2}}\Delta\Phi_\rho^p(z)\,d\nu_n(z).\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Последовательно применяя оценку (3.4.15), определение функции M_{Φ_ρ}, неравенство Гёльдера, лемму 3.4.7 и неравенство (3.4.16), получаем следующую цепочку неравенств:

$$
\begin{aligned}
C \int\limits_{\partial B_n} & \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi_\rho(r\zeta)|^2)^2}(1-r)r\,dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) \\
& \leqslant \int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \Phi_\rho^{1-p}(r\zeta)\Delta\Phi_\rho^p(r\zeta)(1-r)r\,dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) \\
& \leqslant \int\limits_{\partial B_n} M_{\Phi_\rho}^{(1-p)p}(\zeta) \left(\int\limits_0^1 \Delta\Phi_\rho^p(r\zeta)(1-r)r\,dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) \\
& \leqslant \left(\int\limits_{\partial B_n} M_{\Phi_\rho}^p(\zeta)\,d\sigma_n(\zeta) \right)^{1-p} \left(\int\limits_{\partial B_n} \int\limits_0^1 \Delta\Phi_\rho^p(r\zeta)(1-r)r\,dr\,d\sigma_n(\zeta) \right)^p \\
& \leqslant C \left(\int\limits_{\partial B_n} \Phi_\rho^p(\zeta)\,d\sigma_n(\zeta) \right)^{1-p} \left(\int\limits_{B_n} \frac{1-|z|}{|z|^{2n-2}}\Delta\Phi_\rho^p(z)\,d\nu_n(\zeta) \right)^p \\
& \leqslant C \int\limits_{\partial B_n} \left(\log\frac{e}{1-|\varphi(\rho\zeta)|^2} \right)^p d\sigma_n(\zeta),
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 3.4.10. *Пусть* $0 < p \leqslant 1$ *и голоморфное отображение* $\varphi : B_n \to B_m$ *является регулярным. Тогда* (3.3.1)⇔(3.3.2)⇔(3.3.3).

Доказательство. В силу предложения 3.3.1 достаточно доказать, что (3.3.3) влечёт (3.3.1). Итак, пусть выполнено условие (3.3.3). Тогда лемма 3.4.9 и лемма Фату гарантируют, что

$$
\int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^2}(1-r)r\,dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) < \infty.
$$

Иными словами, выполнено условие (3.3.1). □

3.4.5 ∇-регулярные отображения

Для произвольного параметра $p > 0$ понятие регулярности будет модифицировано следующим образом:

голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ называется ∇-*регулярным*, если существуют константы $s \in (0,1)$ и $\tau > 0$, такие что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left|\langle \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z), \varphi(z)\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \tau |\nabla \varphi(z)||\varphi(z)| \quad \text{при} \;\; s < |\varphi(z)| < 1.$$

Безусловно, все голоморфные отображения $\varphi : B_n \to B_1$ являются ∇-регулярными. Также отметим, что голоморфное отображение $\varphi : B_1 \to B_m$ является ∇-регулярным тогда и только тогда, когда оно регулярно.

В данном разделе нам потребуется L^p-оценка, $p > 1$, для классической g-функции Литтлвуда–Пэли.

Для функции $f \in L^1(\partial B_n)$ g-функция Литтлвуда–Пэли задаётся равенством

$$g(f)(\zeta) = \left(\int_0^1 (1-r)|\nabla_{\mathbb{R}} P[f](r\zeta)|^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta \in \partial B_n,$$

где $\nabla_{\mathbb{R}}$ обозначает вещественный градиент, $P[f]$ — интеграл Пуассона, определяемый равенством (3.4.11).

Теорема 3.4.11 (см., например, [5, глава IV, теорема 1])**.** *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $f \in L^p(\partial B_n)$*. Тогда* $g(f) \in L^p(\partial B_n)$ *и*

$$\|g(f)\|_{L^p(\partial B_n)} \leqslant A_p \|f\|_{L^p(\partial B_n)}$$

для некоторой константы $A_p > 0$.

Далее, напомним что

$$\Delta \Phi = \Delta \log \frac{e}{1-|\varphi|^2} = 4\frac{|\nabla \varphi|^2(1-|\varphi|^2) + \sum_{j=1}^{n} \left|\langle \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}, \varphi\rangle\right|^2}{(1-|\varphi|^2)^2}.$$

Если φ — это ∇-регулярное отображение, то получаем

$$\Delta\Phi \geqslant C_{s,\tau}\frac{|\nabla\varphi|^2}{(1-|\varphi|^2)^2},$$

следовательно,

$$\Delta\Phi_\rho(z) \geqslant C\frac{\rho^2|\nabla\varphi(\rho z)|^2}{(1-|\varphi(\rho z)|^2)^2} = C\frac{|\nabla\varphi_\rho(z)|^2}{(1-|\varphi_\rho(z)|^2)^2}, \quad 0<\rho<1. \tag{3.4.17}$$

Лемма 3.4.12. *Пусть* $0 < p < \infty$ *и голоморфное отображение* $\varphi : B_n \to B_m$ *является* ∇*-регулярным. Тогда*

$$\int\limits_{\partial B_n}\left(\int\limits_0^1 \frac{|\nabla\varphi_\rho(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi_\rho(r\zeta)|^2)^2}(1-r)r\,dr\right)^p d\sigma_n(\zeta)$$
$$\leqslant C\int\limits_{\partial B_n}\left(\log\frac{e}{1-|\varphi_\rho(\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_n(\zeta)$$

для всех $0<\rho<1$.

Доказательство. Если $0 < p \leqslant 1$, то достаточно повторить рассуждения из доказательства леммы 3.4.9, применяя следующий аналог оценки (3.4.15):

$$\Phi_\rho^{1-p}(z)\Delta\Phi_\rho^p(z) \geqslant C\frac{|\nabla\varphi_\rho(z)|^2}{(1-|\varphi_\rho(z)|^2)^2}, \quad z\in B_n.$$

Теперь предположим, что $p > 1$. Зафиксируем $\rho \in (0,1)$ и положим $\phi = \varphi_\rho$. Рассмотрим следующую гиперболическую g-функцию:

$$g_h[\phi](\zeta) = \int\limits_0^1 (1-r)\frac{|\nabla\phi(r\zeta)|^2}{(1-|\phi(r\zeta)|^2)^2}\,dr, \quad \zeta\in\partial B_n.$$

Безусловно, $g_h[\phi] \in L^p(\partial B_n)$. Ниже для оценки нормы функции $g_h[\phi]$ в пространстве $L^p(\partial B_n)$ используется следующее равенство:

$$\|g_h[\phi]\|_{L^p(\partial B_n)} = \sup_f \int\limits_{\partial B_n} f(\zeta)g_h[\phi](\zeta)\,d\sigma_n(\zeta),$$

где супремум вычисляется по множеству всех положительных полиномов f, удовлетворяющих условию $\|f\|_{L^q(\partial B_n)} \leqslant 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Зафиксируем такой полином f. Пусть F — это гармонический полином (в $\mathbb{C}^n$) такой, что $F(\zeta)=f(\zeta)$ для всех $\zeta \in \partial B_n$. Итак, для $z \in B_n$ полином F совпадает с интегралом Пуассона

$$\int\limits_{\partial B_n} P(z,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta).$$

Субгармонические функции

$$|\nabla \phi(z)|^2 \sum_{k=1}^{K} k \left(\sum_{j=1}^{m} |\phi_j(z)|^2 \right)^{k-1}$$

сходятся к

$$\frac{|\nabla \phi(z)|^2}{(1-|\phi(z)|^2)^2}$$

равномерно на компактных подмножествах шара B_n. Следовательно, для всех $0<r\leqslant 1$

$$\frac{|\nabla \phi(rz)|^2}{(1-|\phi(rz)|^2)^2}$$

является субгармонической функцией от переменной z при $r|z|<1$. Таким образом,

(3.4.18)
$$\frac{|\nabla \phi(r^2\zeta)|^2}{(1-|\phi(r^2\zeta)|^2)^2} \leqslant \int\limits_{\partial B_n} P(r\zeta,\xi) \frac{|\nabla \phi(r\xi)|^2}{(1-|\phi(r\xi)|^2)^2}\, d\sigma_n(\xi), \quad 0<r<1.$$

Отметим, что $P(r\zeta,\xi) = P(r\xi,\zeta)$. Поэтому, заменяя r на r^2, изменяя порядок интегрирования и используя оценку (3.4.18), получаем

$$\int\limits_{\partial B_n} f(\zeta) g_h[\phi](\zeta)\, d\sigma_n(\zeta)$$

$$= \int\limits_{\partial B_n} f(\zeta) \int\limits_0^1 \frac{|\nabla \phi(r^2\zeta)|^2}{(1-|\phi(r^2\zeta)|^2)^2}(1-r^2)\, dr^2\, d\sigma_n(\zeta)$$

$$\leqslant 4 \int\limits_{\partial B_n} \int\limits_0^1 \int\limits_{\partial B_n} P(r\xi,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) \frac{|\nabla\phi(r\xi)|^2}{(1-|\phi(r\xi)|^2)^2}(1-r) r\, dr\, d\sigma_n(\xi)$$

$$= \frac{2}{n} \int\limits_{B_n} \frac{1-|z|}{|z|^{2n-2}} F(z) \frac{|\nabla\phi(z)|^2}{(1-|\phi(z)|^2)^2}\, d\nu_n(z).$$

Таким образом, в силу оценки (3.4.17) имеем

$$\int\limits_{\partial B_n} f(\zeta) g_h[\phi](\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) \leqslant C \int\limits_{B_n} G(z) F(z) \Delta\Phi_\rho(z)\, d\nu_n(z), \tag{3.4.19}$$

где $G(z)$ — функция Грина для единичного шара B_n. Так как $\Delta F = 0$ в шаре B_n, то

$$F\Delta\Phi_\rho(z) = \Delta(F\Phi_\rho)(z) + R(z), \quad z \in B_n, \tag{3.4.20}$$

где

$$R = -4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial z_k} \frac{\partial \Phi_\rho}{\partial \overline{z}_k} + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_k} \frac{\partial \Phi_\rho}{\partial z_k} \right).$$

Во-первых, применяя формулу Грина к функции $F\Phi_\rho \in C^2(\overline{B}_n)$, получаем

$$C \int\limits_{B_n} G(z) \Delta(F\Phi_\rho)(z)\, d\nu_n(z) = \int\limits_{\partial B_n} f(\zeta)\Phi_\rho(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) - F(0)\Phi(0).$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\int\limits_{\partial B_n} f(\zeta)\Phi_\rho(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) \leqslant \|f\|_{L^q(\partial B_n)} \|\Phi_\rho\|_{L^p(\partial B_n)}.$$

Также имеем $F(0)\Phi(0) \leqslant \|f\|_{L^1(\partial B_n)}\|\Phi_\rho\|_{L^1(\partial B_n)}$. Таким образом,

$$\left|\int\limits_{B_n} G(z)\Delta(F\Phi_\rho)(z)\,d\nu_n(z)\right| \leqslant C\|\Phi_\rho\|_{L^p(\partial B_n)}. \tag{3.4.21}$$

Во-вторых,

$$\left|\frac{\partial \Phi_\rho}{\partial \overline{z}_k}\right| = \left|\frac{\partial \Phi_\rho}{\partial z_k}\right| = \frac{\left|\langle \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(\rho z), \varphi(\rho z)\rangle\right|}{1-|\varphi(\rho z)|^2},$$

следовательно,

$$|R(z)| \leqslant C|\nabla_{\mathbb{R}} F(z)|\frac{|\nabla\phi(z)|}{1-|\phi(z)|^2}, \quad z \in B_n,$$

где $\nabla_{\mathbb{R}}$ обозначает вещественный градиент. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_n} G(z)|R(z)|\,d\nu_n(z)\\
&\qquad\leqslant C\int\limits_{\partial B_n}\int\limits_0^1 \sqrt{1-r}|\nabla_{\mathbb{R}}F(r\zeta)|\sqrt{1-r}\frac{|\nabla\phi(r\zeta)|}{1-|\phi(r\zeta)|^2}\,dr\,d\sigma_n(\zeta)\\
&\qquad\leqslant C\int\limits_{\partial B_n} 1\cdot\left(\int\limits_0^1 (1-r)|\nabla_{\mathbb{R}}F(r\zeta)|^2\,dr\right)^{\frac12}\sqrt{g_h[\phi]}\,d\sigma_n(\zeta).
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $2p$, q и $2p$, получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_n} G(z)|R(z)|d\nu_n(z)\\
&\leqslant C\left(\int\limits_{\partial B_n}\left(\int\limits_0^1 (1-r)|\nabla_{\mathbb{R}}F(r\zeta)|^2\,dr\right)^{\frac{q}{2}} d\sigma_n(\zeta)\right)^{\frac1q}\sqrt{\|g_h[\phi]\|_{L^p(\partial B_n)}}\\
&\leqslant C\|f\|_{L^q(\partial B_n)}\sqrt{\|g_h[\phi]\|_{L^p(\partial B_n)}}
\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

в силу L^q-оценки для классической g-функции (см. теорему 3.4.11).

Объединяя свойства (3.4.19), (3.4.20), (3.4.21) и (3.4.22), получаем следующее неравенство:

$$\|g_h[\phi]\|_{L^p(\partial B_n)} \leqslant \left(\|\Phi_\rho\|_{L^p(\partial B_n)} + \sqrt{\|g_h[\phi]\|_{L^p(\partial B_n)}}\right).$$

Отметим, что $\|\Phi_\rho\|_{L^p(\partial B_n)} \geqslant 1$. Следовательно, получаем

$$\|g_h[\phi]\|_{L^p(\partial B_n)} \leqslant C\|\Phi_\rho\|_{L^p(\partial B_n)},$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 3.4.13. *Пусть* $0 < p < \infty$ *и* $\varphi : B_n \to B_m$ *является* ∇*-регулярным голоморфным отображением. Тогда* (3.3.1)$\Leftrightarrow$(3.3.2)$\Leftrightarrow$ (3.3.3).

Доказательство. Лемма 3.4.12 и лемма Фату гарантируют, что условие (3.3.3) влечёт свойство (3.3.1). В силу предложения 3.3.1 доказательство теоремы завершено. □

3.5 Операторы со значениями в пространствах Бергмана

Пусть $v : [0, 1) \to [0, +\infty)$ является такой возрастающей функцией, что $\int_0^1 v(\rho)\, d\rho < \infty$. Весовое пространство Бергмана $A^q_v(B_n)$, $q > 0$, по определению состоит из функций $f \in H(B_n)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^q_{A^q_v(B_n)} = \int\limits_0^1 v(\rho) \int\limits_{\partial B_n} |f(\rho\zeta)|^q\, d\sigma_n(\zeta)\, d\rho < \infty.$$

В сформулированной ниже теореме 3.5.1 дополнительные ограничения на весовую функцию v не накладываются. Однако следует отметить, что пространство $A^q_v(B_n)$, $q > 0$, часто оказывается весьма большим, в силу чего оператор композиции C_φ действует из $\mathcal{B}(B_m)$ в $A^q_v(B_n)$ для любого голоморфного отображения $\varphi : B_n \to B_m$. Например, пусть $n = m$. Тогда оператор C_φ всегда действует из $\mathcal{B}(B_n)$ в $\mathcal{B}(B_n)$ (см. [29]). Следовательно, для любого символа φ оператор C_φ действует из $\mathcal{B}(B_n)$ в $A^q_w(B_n)$ при $w(\rho) = (1-\rho^2)^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$.

Следующий результат был доказан в статье [23] для $n = m = 1$ и

$$v(\rho) = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\log\frac{e}{1-\rho^2}\right)^{-\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Теорема 3.5.1. *Пусть отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Предположим, что либо $0 < p \leqslant 1$ и отображение φ регулярно, либо $0 < p < \infty$ и отображение φ является ∇-регулярным. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

$$\int\limits_0^1 v(\rho) \int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi_\rho(r\zeta)|^2)^2}(1-r)\,dr \right)^p d\sigma_n(\zeta)\,d\rho < \infty; \tag{3.5.1}$$

(3.5.2) *оператор $C_\varphi : \mathcal{B}(B_m) \to A^{2p}_v(B_n)$ ограничен*;

$$\int\limits_0^1 v(\rho) \int\limits_{\partial B_n} \left(\log\frac{e}{1-|\varphi_\rho(\zeta)|^2}\right)^p d\sigma_n(\zeta)\,d\rho < \infty. \tag{3.5.3}$$

Доказательство. (3.5.1)$\Rightarrow$(3.5.2) Предположим, что $f \in \mathcal{B}(B_m)$. Тогда имеем $|\nabla f(w)|(1-|w|^2) \leqslant C$ для всех $w \in B_m$, поэтому

$$|\mathcal{R}(f\circ\varphi_\rho)(r\zeta)| \leqslant |\nabla f(\varphi_\rho(r\zeta))||\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)| \leqslant \frac{C|\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)|}{1-|\varphi_\rho(r\zeta)|^2}$$

для всех $0 < r, \rho < 1$, $\zeta \in \partial B_n$.

Таким образом, применяя теорему 3.2.1 к функциям $f\circ\varphi_\rho$, $0 < \rho < 1$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial B_n} |f\circ\varphi_\rho(\zeta)|^{2p}\, d\sigma_n(\zeta)\\
&\qquad\leqslant C|f(\varphi_\rho(0))|^{2p} + C\int\limits_{\partial B_n}\left(\int\limits_0^1 |\mathcal{R}(f\circ\varphi_\rho)(r\zeta)|^2(1-r)\,dr\right)^p d\sigma_n(\zeta)\\
&\qquad\leqslant C|f(\varphi(0))|^{2p} + C\int\limits_{\partial B_n}\left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi_\rho(r\zeta)|^2)^2}(1-r)\,dr\right)^p d\sigma_n(\zeta).
\end{aligned}
$$

Интегрируя полученную оценку относительно меры $v(\rho)\,d\rho$, $0<\rho<1$, получаем $f\circ\varphi\in A^{2p}_v(B_n)$ в силу (3.5.1). Итак, свойство (3.5.2) выполнено по теореме о замкнутом графике.

(3.5.2)⇒(3.5.3) Для проверки этой импликации достаточно использовать тестовые функции F_x, $0\leqslant x\leqslant 1$, существующие в силу теоремы 1.3.1 для $\alpha=0$.

(3.5.3)⇒(3.5.1) Предположим, что $0<p\leqslant 1$ и отображение φ регулярно. Интегрируя относительно меры $v(\rho)\,d\rho$ оценку, полученную в лемме 3.4.9, получаем

$$
\int\limits_0^1 v(\rho)\int\limits_{\partial B_n}\left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi_\rho(r\zeta)|^2)^2}(1-r)r\,dr\right)^p d\sigma_n(\zeta)\,d\rho<\infty.
$$

Следовательно, свойство (3.5.1) выполнено в этом случае. Если $0<p<\infty$ и отображение φ является ∇-регулярным, то достаточно проинтегрировать оценку, полученную в лемме 3.4.12. □

Глава 4

Операторы композиции, заданные на пространствах роста

4.1 Операторы со значениями в пространствах Харди

Для $\beta > 0$ пространство роста $\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)$ состоит из функций $f \in H(B_m)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)} = \sup_{w \in B_m} |f(w)|(1 - |w|^2)^\beta < \infty.$$

В определённом смысле пространство Блоха $\mathcal{B}(B_m)$ можно считать продолжением шкалы $\{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)\}_{\beta>0}$ в крайнюю точку $\beta = 0$. С другой стороны, хорошо известно, что норма $\|f\|_{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)}$ эквивалентна следующей весовой норме Блоха:

$$\|f\|_{\mathcal{B}^{\beta+1}(B_m)} = |f(0)| + \sup_{z \in B_m} |\nabla f(z)|(1 - |z|^2)^{\beta+1}.$$

Следовательно, естественно сравнить результаты, полученные в главе 3 для пространства Блоха, и сходные утверждения для пространств роста. Итак, в данной главе изучаются операторы композиции, действующие из пространств роста в пространства Харди и Бергмана. Рассуждения будут основаны на следующей обратной оценке, которая является частным случаем леммы 1.2 из статьи [14].

Лемма 4.1.1. *Пусть* $\beta > 0$ *и* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют функции* $F_j \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_m)$, $1 \leqslant j \leqslant J = J(m)$, *такие что*

$$\sum_{j=1}^{J} |F_j(z) \geqslant \frac{1}{(1-|z|^2)^\beta}, \quad z \in B_m. \tag{4.1.1}$$

4.1.1 Стандартные импликации

Предложение 4.1.2. *Пусть* $\beta > 0$, $0 < p < \infty$ *и отображение* $\varphi : B_n \to B_m$ *является голоморфным. Рассмотрим следующие свойства:*

$$\int_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^{2\beta+2}}(1-r)\,dr \in L^p(\partial B_n); \tag{4.1.2}$$

$$\text{оператор } C_\varphi : \mathcal{A}^{-\beta}(B_m) \to H^{2p}(B_n) \text{ ограничен}; \tag{4.1.3}$$

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi(r\zeta)|^2} \right)^{2p\beta} d\sigma_n(\zeta) < \infty. \tag{4.1.4}$$

Тогда (4.1.2)$\Rightarrow$(4.1.3)$\Leftrightarrow$(4.1.4).

Доказательство. Пусть выполнено условие (4.1.2). Для $f \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_m)$ по определению имеем

$$|\nabla f(w)| \leqslant \frac{C\|f\|_{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)}}{(1-|w|^2)^{\beta+1}}$$

для всех $w \in B_m$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(f \circ \varphi)(z)| &\leqslant |\nabla f(\varphi(z))||\mathcal{R}\varphi(z)| \\ &\leqslant \frac{C\|f\|_{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\beta+1}}|\mathcal{R}\varphi(z)| \end{aligned}$$

для всех $z \in B_n$.

Таким образом,

$$\int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 |\mathcal{R}(f\circ\varphi)(r\zeta)|^2(1-r)\,dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) < \infty$$

в силу (4.1.2). Применяя теорему 3.2.1, получаем $f\circ\varphi \in H^{2p}(B_n)$. Итак, (4.1.2) влечёт (4.1.3).

Из определений пространств $\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)$ и $H^{2p}(B_n)$ следует, что (4.1.4) влечёт (4.1.3). Наконец, (4.1.3) влечёт (4.1.4) в силу леммы 4.1.1. $\square$

Следующее предложение показывает, что супремум из свойства (4.1.4) можно вычислить в терминах граничных значений.

Предложение 4.1.3. *Пусть $q > 0$ и отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Тогда*

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi(r\zeta)|^2} \right)^q d\sigma_n(\zeta) = \int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi^*(\zeta)|^2} \right)^q d\sigma_n(\zeta).$$

Доказательство. Положим $\Psi(z) = e(1-|\varphi(z)|^2)^{-1}$, $z\in B_n$. Не умаляя общности, предположим, что $\|\Psi^*\|_{L^q(\partial B_n)} < \infty$. Тогда $\|\Phi^*\|_{L^1(\partial B_n)} < \infty$, где $\Phi = \log\Psi$. В силу леммы 3.4.5 имеем $\Phi(z) \leqslant P[\Phi^*](z)$, $z\in B_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial B_n} \Psi^q(r\zeta)\,d\sigma_n(\zeta) &= \int\limits_{\partial B_n} \exp(q\Phi(r\zeta))\,d\sigma_n(\zeta) \\
&\leqslant \int\limits_{\partial B_n} \exp\left(q \int\limits_{\partial B_n} \Phi^*(\xi)P(r\zeta,\xi)\,d\sigma_n(\xi) \right) d\sigma_n(\zeta) \\
&\leqslant \int\limits_{\partial B_n}\int\limits_{\partial B_n} \exp(q\Phi^*(\xi))P(r\zeta,\xi)\,d\sigma_n(\xi)d\sigma_n(\zeta) \\
&= \int\limits_{\partial B_n} (\Psi^*(\xi))^q\,d\sigma_n(\zeta), \quad 0\leqslant r<1,
\end{aligned}$$

в силу неравенства Йенсена и теоремы Фубини. Итак,

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi(r\zeta)|^2} \right)^q d\sigma_n(\zeta) \leqslant \int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi^*(\zeta)|^2} \right)^q d\sigma_n(\zeta).$$

Обратное неравенство имеет место в силу леммы Фату. □

4.1.2 Голоморфные отображения в единичный круг

Предложение 4.1.4. *Пусть* $m = 1$ *в условиях предложения 4.1.2. Тогда свойства* (4.1.2), (4.1.3) *и* (4.1.4) *являются равносильными.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (4.1.3). В силу леммы 4.1.1 существуют функции $F_j \in \mathcal{A}^{-\beta-1}(B_1)$, $1 \leqslant j \leqslant J$, такие что

$$\sum_{j=1}^{J} |F_j(w)|^2 \geqslant \frac{1}{(1-|w|^2)^{2\beta+2}}, \quad w \in B_1. \tag{4.1.5}$$

Зафиксируем функцию $f_j \in H(B_1)$ такую, что $f_j' = F_j$, $1 \leqslant j \leqslant J$. Отметим, что $\|f_j\|_{\mathcal{A}^{-\beta}(B_1)} \leqslant C\|F_j\|_{\mathcal{A}^{-\beta-1}(B_1)} < \infty$. Таким образом, $f_j \circ \varphi \in H^{2p}(B_n)$ в силу (4.1.3). Следовательно,

$$\begin{aligned}
\infty &> \sum_{j=1}^{J} \|f_j \circ \varphi\|^{2p}_{H^{2p}(B_n)} \\
&\geqslant C \int\limits_{\partial B_n} \sum_{j=1}^{J} \left(\int\limits_0^1 |f_j'(\varphi(r\zeta))|^2 |\mathcal{R}\varphi(r\zeta)|^2 (1-r)\, dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) \\
&\geqslant C \int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^{2\beta+2}} (1-r)\, dr \right)^p d\sigma_n(\zeta)
\end{aligned}$$

в силу (4.1.5). Итак, (4.1.3) влечёт (4.1.2). Для завершения доказательства остаётся применить предложение 4.1.2. □

Следствие 4.1.5. *Пусть $K > 0$ и отображение $\varphi : B_n \to B_1$ является голоморфным. Тогда справедливость свойства*

$$(4.1.6) \qquad \int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^{2+\delta}}(1-r)\,dr \right)^{K/\delta} d\sigma_n(\zeta) < \infty$$

не зависит от параметра $\delta > 0$.

Доказательство. В силу предложения 4.1.4 свойство

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi(r\zeta)|^2} \right)^K d\sigma_n(\zeta) < \infty$$

эквивалентно условию (4.1.6) для любого числа $\delta > 0$. □

4.1.3 Отображение φ регулярно

При $m \geqslant 2$ лемма 4.1.1 не имеет очевидных приложений к доказательству импликации (4.1.3) ⇒(4.1.2). Поэтому ниже рассуждения будут проведены по аналогии с пространством Блоха: будет показано, что (4.1.4) влечёт (4.1.2) для регулярного и ∇-регулярного отображения φ.

Положим

$$\Psi = (1 - \langle \varphi, \varphi \rangle)^{-1}.$$

Так как функция Ψ^α является субгармонической для любого числа $\alpha > 0$, то имеет место следующий аналог леммы 3.4.7:

Лемма 4.1.6. *Пусть $0 < p < \infty$ и отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Для $0 < \rho < 1$ рассмотрим радиальную максимальную функцию*

$$M_{\Psi_\rho}(\zeta) = \sup_{0\leqslant r<1} \Psi_\rho(r\zeta) = \sup_{0\leqslant r<1} \frac{1}{1-|\varphi(\rho r\zeta)|^2}, \quad \zeta \in \partial B_n.$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial B_n} M^p_{\Psi_\rho}(\zeta)\,d\sigma_n(\zeta) \leqslant C \int\limits_{\partial B_n} \Psi^p_\rho(\zeta)\,d\sigma_n(\zeta), \quad 0<\rho<1.$$

Лемма 4.1.7. *Пусть $\beta > 0$, $0 < p \leqslant 1$ и голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ регулярно. Тогда*

$$\int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi_\rho(r\zeta)|^2)^{2\beta+2}}(1-r)r\,dr \right)^p d\sigma_n(\zeta)$$
$$\leqslant C \int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi_\rho(\zeta)|^2} \right)^{2\beta p} d\sigma_n(\zeta)$$

для всех $0<\rho<1$.

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z}_k} \Psi^{2\beta p} = 2\beta p \frac{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\right|^2 (1-|\varphi|^2) + (2\beta p+1)\left|\langle \frac{\partial\varphi}{\partial z_k}, \varphi\rangle\right|^2}{(1-|\varphi|^2)^{2\beta p+2}}.$$

для $k = 1,\dots,n$. Следовательно, применяя свойства (3.4.6), (3.4.7) и (3.4.1), получаем

$$\Delta\Psi^{2\beta p} \geqslant C \frac{|\mathcal{R}\varphi|^2}{(1-|\varphi|^2)^{2\beta p+2}},$$

где $C = C_{s,\tau} > 0$.

Пусть $0<\rho<1$. Полученная оценка гарантирует, что

$$\Psi^{2\beta(1-p)}_\rho(z)\Delta\Phi^{2\beta p}_\rho(z) \geqslant C \frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(z)|^2}{(1-|\varphi_\rho(z)|^2)^{2\beta+2}} \tag{4.1.7}$$

для всех $z \in B_n$.

С другой стороны, в силу формулы Грина (3.4.5) имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B_n} \Psi^{2\beta p}_\rho(\zeta)\,d\sigma_n(\zeta) &\geqslant C \int\limits_{B_n} G(z)\Delta\Phi^{2\beta p}_\rho(z)\,d\nu_n(z) \\ &\geqslant C \int\limits_{B_n} \frac{1-|z|}{|z|^{2n-2}}\Delta\Phi^{2\beta p}_\rho(z)\,d\nu_n(z) \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

для всех $0 < \rho < 1$.

Последовательно применяя оценку (4.1.7), определение функции M_{Ψ_ρ}, неравенство Гёльдера, лемму 4.1.6 и неравенство (4.1.8), получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 (1-r) \frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi_\rho(r\zeta)|^2)^2} r\, dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) \\
&\leqslant \int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \Psi_\rho^{2\beta(1-p)}(r\zeta)(1-r)\Delta\Psi_\rho^{2\beta p}(r\zeta) r\, dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) \\
&\leqslant \int\limits_{\partial B_n} M_{\Psi_\rho}^{(1-p)2\beta p}(\zeta) \left(\int\limits_0^1 (1-r)\Delta\Psi_\rho^{2\beta p}(r\zeta) r\, dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) \\
&\leqslant \left(\int\limits_{\partial B_n} M_{\Psi_\rho}^{2\beta p}(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) \right)^{1-p} \left(\int\limits_{\partial B_n} \int\limits_0^1 (1-r)\Delta\Psi_\rho^{2\beta p}(r\zeta) r\, dr\, d\sigma_n(\zeta) \right)^p \\
&\leqslant C \int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi_\rho(r\zeta)|^2} \right)^{2\beta p} d\sigma_n(\zeta),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 4.1.8. *Пусть $\beta > 0$, $0 < p \leqslant 1$ и голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ регулярно. Тогда* (4.1.2)$\Leftrightarrow$(4.1.3)$\Leftrightarrow$(4.1.4).

Доказательство. Лемма 4.1.7 и лемма Фату гарантируют, что (4.1.4) влечёт (4.1.2). Для завершения доказательства применяем предложение 4.1.2. □

Доказательство следующего предложения будет опущено, так как для его проверки достаточно повторить рассуждения из доказательства теоремы 3.4.13.

Предложение 4.1.9. *Пусть $\beta > 0$, $0 < p < \infty$ и голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является ∇-регулярным. Тогда*

$$(4.1.2) \Leftrightarrow (4.1.3) \Leftrightarrow (4.1.4).$$

4.2 Операторы со значениями в пространствах Бергмана

Пусть возрастающая функция $v : [0, 1) \to [0, +\infty)$ удовлетворяет следующему условию

$$\int\limits_0^1 v(\rho)\, d\rho < \infty.$$

Доказательство следующего утверждения также будет опущено, так как оно весьма схоже с доказательством теоремы 3.5.1.

Предложение 4.2.1. *Пусть $\beta > 0$ и отображение $\varphi : B_n \to B_m$ голоморфно. Предположим, что либо $0 < p \leqslant 1$ и отображение φ регулярно, либо $0 < p < \infty$ и отображение φ является ∇-регулярным. Тогда следующие свойства равносильны:*

$$\int\limits_0^1 v(\rho) \int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi_\rho(r\zeta)|^2}{(1 - |\varphi_\rho(r\zeta)|^2)^{2+2\beta}} (1 - r)\, dr \right)^p d\sigma_n(\zeta)\, d\rho < \infty;$$

оператор $C_\varphi : \mathcal{A}^{-\beta}(B_m) \to A^{2p}_v(B_n)$ ограничен;

$$\int\limits_0^1 v(\rho) \int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1 - |\varphi(\rho\zeta)|^2} \right)^{2p\beta} d\sigma_n(\zeta)\, d\rho < \infty.$$

Подобно теореме 3.5.1, сформулированное предложение вырождается, если весовое пространство Бергмана $A^{2p}_v(B_n)$ оказывается слишком большим.

Теперь предположим, что $m = 1$. Если $v(\rho) = (1-\rho^2)^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0$, то $A^q_v(B_n)$ — это стандартное весовое пространство Бергмана $A^q_\alpha(B_n)$. Хорошо известно, что формула

$$\|f\|^q_{A^q_\alpha(B_n)} = |f(0)|^q + \int\limits_{B_n} |\mathcal{R}f(z)|^q (1-|z|^2)^{q+\alpha-1}\, d\nu_n(z)$$

задаёт норму (квазинорму при $0 < q < 1$) на пространстве $A^q_\alpha(B_n)$; см., например, [10]. Таким образом, применяя лемму 4.1.1 для $m = 1$, получаем следующее предложение:

Предложение 4.2.2. *Пусть α, $\beta > 0$, $0 < p < \infty$ и отображение $\varphi : B_n \to B_1$ является голоморфным. Тогда оператор C_φ действует из $\mathcal{A}^{-\beta}(B_1)$ в $A^{2p}_\alpha(B_n)$ в том и только в том случае, когда*

$$\int\limits_{B_n} \frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|^{2p}(1-|z|^2)^{2p+\alpha-1}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2p+2\beta p}}\, d\nu_n(z) < \infty.$$

Следствие 4.2.3. *Пусть K, $\alpha > 0$ и отображение $\varphi : B_n \to B_1$ голоморфно. Тогда справедливость свойства*

$$\int\limits_{B_n} \frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|^{\delta}(1-|z|^2)^{\delta+\alpha-1}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\delta+K}}\, d\nu_n(z) < \infty \tag{4.2.1}$$

не зависит от параметра $\delta \geqslant 0$.

Доказательство. В силу предложений 4.2.1 и 4.2.2 свойство

$$\int\limits_{B_n} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha-1}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{K}}\, d\nu_n(z) < \infty$$

эквивалентно условию (4.2.1) для любого числа $\delta \geqslant 0$. $\square$

Пусть отображение $\varphi : B_n \to B_1$ является голоморфным и $0 \leqslant \delta_1 < \delta_2$. Для $\zeta \in \partial B_n$ имеем

$$\frac{|\mathcal{R}\varphi(\lambda\zeta)|(1-|\lambda\zeta|^2)}{1-|\varphi(\lambda\zeta)|^2} = \frac{|\lambda||\varphi'_\zeta(\lambda)|(1-|\lambda|^2)}{1-|\varphi_\zeta(\lambda)|^2} \leqslant 1 \text{ для всех } \lambda \in B_1$$

по лемме Пика–Шварца. Следовательно, свойство (4.2.1) при $\delta = \delta_1$ влечёт свойство (4.2.1) при $\delta = \delta_2$. Поэтому интересно отметить обратную импликацию, имеющую место в силу следствия 4.2.3.

Литература

[1] А. Б. Александров, *Собственные голоморфные отображения из шара в полидиск,* ДАН СССР **286** (1986), № 1, 11–15.

[2] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции,* Мир, М., 1984.

[3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды,* Т. 1, 2, Мир, М., 1965.

[4] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$*,* Мир, М., 1984.

[5] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций,* Мир, М., 1973.

[6] E. Abakumov and E. Doubtsov, *Reverse estimates in growth spaces,* Math. Z. **271** (2012), no. 1-2, 399–413.

[7] P. Ahern and J. Bruna, *Maximal and area integral characterizations of Hardy-Sobolev spaces in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$*,* Rev. Mat. Iberoamericana **4** (1988), no. 1, 123–153.

[8] P. Ahern and W. Rudin, *Bloch functions, BMO, and boundary zeros,* Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), no. 1, 131–148.

[9] A. B. Aleksandrov, J. M. Anderson, and A. Nicolau, *Inner functions, Bloch spaces and symmetric measures,* Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), no. 2, 318–352.

[10] F. Beatrous and J. Burbea, *Holomorphic Sobolev spaces on the ball,* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **276** (1989), 60 pp.

[11] O. Blasco, M. Lindström, and J. Taskinen, *Bloch-to-BMOA compositions in several complex variables,* Complex Var. Theory Appl. **50** (2005), no. 14, 1061–1080.

[12] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions,* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[13] E. Doubtsov, *Characterizations of the hyperbolic Nevanlinna class in the ball,* Complex Var. Elliptic Equ. **54** (2009), no. 2, 119–124.

[14] E. Doubtsov, *Growth spaces on circular domains: composition operators and Carleson measures,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347** (2009), no. 11-12, 609–612.

[15] E. Doubtsov, *Bloch-to-BMOA compositions on complex balls,* Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), no. 12, 4217–4225.

[16] E. Doubtsov, *Hyperbolic BMOA classes,* J. Math. Anal. Appl. **391** (2012), no. 1, 57–66.

[17] E. Doubtsov, *Inner mappings, hyperbolic gradients and composition operators,* Integral Equations Operator Theory **73** (2012), no. 4, 537–551.

[18] K. M. Dyakonov, *Weighted Bloch spaces, H^p, and BMOA,* J. London Math. Soc. (2) **65** (2002), no. 2, 411–417.

[19] M. J. González and A. Nicolau, *Multiplicative square functions,* Rev. Mat. Iberoamericana **20** (2004), no. 3, 673–736.

[20] E. G. Kwon, *Composition of Blochs with bounded analytic functions,* Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), no. 5, 1473–1480.

[21] E. G. Kwon, *Hyperbolic mean growth of bounded holomorphic functions in the ball,* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 3, 1269–1294.

[22] E. G. Kwon, *Hyperbolic g-function and Bloch pullback operators,* J. Math. Anal. Appl. **309** (2005), no. 2, 626–637.

[23] E. G. Kwon, *Bloch-Bergman pullbacks with logarithmic weights,* Integral Equations Operator Theory **64** (2009), no. 2, 251–260.

[24] E. G. Kwon and M. Pavlović, *BiBloch mappings and composition operators from Bloch type spaces to BMOA,* J. Math. Anal. Appl. **382** (2011), no. 1, 303–313.

[25] J. E. Littlewood, *On inequalities in the theory of functions,* Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1925), 481–519.

[26] M. Pavlović, *Lacunary series in weighted spaces of analytic functions,* Arch. Math. (Basel) **97** (2011), no. 5, 467–473.

[27] W. Ramey and D. Ullrich, *Bounded mean oscillation of Bloch pull-backs,* Math. Ann. **291** (1991), no. 4, 591–606.

[28] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory,* Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.

[29] J. H. Shi and L. Luo, *Composition operators on the Bloch space of several complex variables,* Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **16** (2000), no. 1, 85–98.

[30] W. Smith, *Inner functions in the hyperbolic little Bloch class,* Michigan Math. J. **45** (1998), no. 1, 103–114.

[31] X. Tang, *Extended Cesàro operators between Bloch-type spaces in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$*,* J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), no. 2, 1199–1211.

[32] S. Yamashita, *Hyperbolic Hardy class* H^1*,* Math. Scand. **45** (1979), no. 2, 261–266.

[33] K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball,* Graduate Texts in Mathematics, vol. 226, Springer-Verlag, New York, 2005.