Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Лишанский Андрей Александрович

Динамика линейных операторов в пространствах аналитических функций

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2016

Работа выполнена на кафедре математического анализа математико-механического факультета ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель:

БАРАНОВ Антон Дмитриевич
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Официальные оппоненты:

КАПУСТИН Владимир Владимирович
доктор физико-математических наук, заместитель директора отдела «Международный математический институт им. Л. Эйлера» ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук»

КОТОЧИГОВ Александр Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики №2 ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского»

Защита состоится «16» января 2017 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (ПОМИ РАН): 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru

Автореферат разослан «_____» ____________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Динамика линейных операторов в банаховых или топологических векторных пространствах — это интенсивно развивающаяся в последние 25 лет область функционального анализа. Она тесно связана с рядом направлений современного анализа, такими, как спектральная теория линейных операторов, эргодическая теория, пространства аналитических функций и действующие в них операторы. Этой тематике посвящено значительное число работ.

Особую роль в линейной динамике играет понятие гиперциклического оператора, то есть оператора, у которого существует вектор, имеющий всюду плотную орбиту. Таким образом, гиперциклический оператор — это оператор, имеющий в определенном смысле хаотическое поведение. Тем не менее, оказывается, что многие естественные операторы обладают свойством гиперцикличности. Среди них — дифференциальные операторы в пространстве Фреше всех целых функций, операторы взвешенного сдвига, операторы Теплица и операторы композиции в пространстве Харди. Первые примеры гиперциклических операторов восходят к Дж. Биркгофу (1929), С. МакЛейну (1952) и С. Ролевичу (1968), однако настоящий расцвет теории гиперциклических операторов начался в конце 1980-х — начале 1990-х годов. Важные результаты по этой тематике были получены К. Китаи, Ж. Годфруа, Дж. Шапиро, П. Бурдоном, Г. Саласом, А. Монтес-Родригесом, Е. Абакумовым, С. Гриво, А. Перисом, Ч. Ридом, Ф. Баяртом, Э. Матероном.

Современное состояние теории изложено в двух недавних монографиях Ф. Баярта и Э. Матерона[1], а также К.-Г. Гросс-Эрдманна

[1] F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge University Press. 2009. 352 p.

и А. Периса[2].

Следует отметить, что гиперциклические операторы представляют интерес в связи с известным вопросом функционального анализа: любой ли линейный оператор в нормированном пространстве из некоторого класса пространств имеет нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство? Ч. Рид построил пример ограниченного линейного оператора в пространстве ℓ^1, для которого любой ненулевой вектор гиперциклический[3]. Для гильбертовых пространств вопрос остается открытым.

Цель работы. Данная работа посвящена трем актуальным вопросам теории гиперциклических операторов. Первый из них — существование замкнутых подпространств, в которых каждый ненулевой вектор является гиперциклическим для данного оператора. Второе направление работы — существование гиперциклических операторов, в определенном смысле близких к тождественному. Третья часть посвящена гиперцикличности операторов Теплица с полиномиальной аналитической частью.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Доказано существование гиперциклического подпространства для одного класса операторов Теплица с антианалитическими символами.

2. Получено новое теоретико-функциональное доказательство теоремы С. Гриво о существовании унитарного оператора с гиперциклическим одномерным возмущением.

3. Найдены необходимые, а также достаточные условия гиперцикличности оператора Теплица с символом, имеющим полиноми-

[2] K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Springer. Berlin. 2011. 388 p.

[3] C. Read, *A short proof concerning the Invariant Subspace Problem* // J. London Math. Soc., **34**. 1986. P. 335–348.

альную аналитическую часть.

Методы исследования. В работе используются как классические (Китаи, Годфруа–Шапиро), так и новые критерии гиперцикличности. Новым для этой тематики является применение функциональных моделей для различных классов линейных операторов и техники модельных подпространств пространства Харди.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании динамики линейных операторов в пространствах аналитических функций, в частности, операторов Теплица.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях: "International Workshop in Operator Theory and Applications" IWOTA-2014 (Амстердам), "St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis" (Санкт-Петербург, 2013 и 2014), "Complex analysis and related topics" (Санкт-Петербург, 2014), "Conference on Harmonic and Functional Analysis, Operator Theory and Applications" (Бордо, 2015), а также на семинаре в Санкт-Петербургском отделении Математического института РАН.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приведен в конце автореферата. Все статьи опубликованы в журналах из списка ВАК (1 статья в российском журнале и 2 статьи в ведущих зарубежных журналах).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и 3 глав. Общий объем работы — 61 страница, библиография включает 34 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Введение содержит основные определения и начальные сведения из теории гиперциклических операторов, а также формулировки основных результатов диссертации.

Пусть X — сепарабельное банахово пространство (или пространство Фреше), а T — ограниченный линейный оператор в X. Если найдется такой вектор $x \in X$, что множество $\{T^n x, n \geq 0\}$ плотно в X, то говорят, что T — *гиперциклический оператор*, а x — его *гиперциклический вектор.*

Первые примеры гиперциклических операторов появились намного раньше диссертации К. Китаи и работ Р. Гетнера, Ж. Годфруа и Дж. Шапиро, с которых началась разработка теории. В 1929 Дж. Биркгоф показал, что оператор сдвига $T_a : f(z) \mapsto f(z+a), a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, гиперциклический в стандартном пространстве Фреше всех целых функций $Hol(\mathbb{C})$ с топологией равномерной сходимости на компактах. Позднее С. МакЛейн доказал гиперцикличность оператора дифференцирования $D : f \mapsto f'$ на $Hol(\mathbb{C})$. Первый пример гиперциклического оператора в банаховом пространстве был дан в 1969 году С. Ролевичем, показавшим, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$, оператор λS^* гиперциклический в пространстве $\ell^p(\mathbb{N}_0), 1 \leq p < \infty$, где S^* — обратный сдвиг на $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, переводящий вектор $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{N}_0)$ в вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$.

Одним из основных достаточных условий гиперцикличности является так называемый критерий Годфруа–Шапиро[4]: *Предположим, что для линейного непрерывного оператора T подпространства*

$$X_0 = \operatorname{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ \textit{для некоторого} } \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < 1\},$$
$$Y_0 = \operatorname{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ \textit{для некоторого} } \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > 1\},$$

плотны в X. Тогда T гиперциклический.

[4]G. Godefroy, J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* // J. Funct. Anal., **98**. 1991. P. 229–269.

Далее, пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг, а $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность.

Пусть $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ — это пространство всех функций вида $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, где $\{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ — стандартное пространство Харди в $\mathbb{D}$, естественно отождествляемое с $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Для функции $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ оператор Теплица T_ψ с символом ψ определяется как $T_\psi f = P_+(\psi f)$, где P_+ обозначает ортогональную проекцию из $L^2(\mathbb{T})$ на H^2. Тогда оператор обратного сдвига S^* соответствует теплицеву оператору $T_{\overline{z}}$.

Спектральная теория операторов Теплица (и тесно связанная с ней теория операторов Винера-Хопфа) — классический, но далеко не завершенный раздел анализа. Она также взаимодействует со множеством других областей, от проблемы моментов и граничной задачи Римана–Гильберта до прикладного численного анализа.

Глава 2. Операторы Теплица, обладающие гиперциклическим подпространством

В работе Ж. Годфруа и Дж. Шапиро[5] было показано, что любой антианалитический оператор Теплица $T_{\overline{\varphi}}$ (где φ — ограниченная аналитическая функция в круге $\mathbb{D}$) является гиперциклическим всякий раз, когда $\varphi(\mathbb{D})$ пересекает $\mathbb{T}$.

Что можно сказать о множестве гиперциклических векторов данного гиперциклического оператора T? Ясно, что если x — гиперциклический вектор для оператора T, то $Tx, T^2x, T^3x, \dots$ также являются гиперциклическими векторами для T, значит, множество гиперциклических векторов плотно в X, если оно непусто.

Следующий результат доказан П. Бурдоном[6] (специальный класс операторов, коммутирующих с обобщенным обратным сдвигом, был

[5] G. Godefroy, J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* // J. Funct. Anal., **98**. 1991. P. 229–269.

[6] P.S. Bourdon, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors* // Proc. Amer. Math. Soc., **118** (3). 1993. P. 845–847.

до этого рассмотрен в вышеупомянутой статье Годфруа и Шапиро): *Пусть T — гиперциклический оператор, действующий на гильбертовом пространстве H. Тогда существует всюду плотное линейное подпространство, в котором каждый ненулевой вектор является гиперциклическим для T.*

Определение. Для гиперциклического оператора T замкнутое бесконечномерное подпространство, в котором каждый ненулевой вектор гиперциклический для T, называется *гиперциклическим подпространством.*

А. Монтес-Родригес[7] доказал, что оператор λS^*, $|\lambda| > 1$, действующий на $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, не имеет гиперциклического подпространства.

Основной результат главы состоит в том, что у некоторого класса гиперциклических операторов Теплица есть гиперциклическое подпространство.

Напомним, что *диск-алгебра* $A(\mathbb{D})$ — это пространство всех функций, непрерывных в замкнутом единичном круге $\overline{\mathbb{D}}$ и аналитических в $\mathbb{D}$ (с нормой $\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |\varphi(z)|$). Любая функция из $A(\mathbb{D})$ равномерно приближается в замкнутом круге многочленами, и $\varphi(S^*)$ здесь определяется как $\lim_{n\to\infty} p_n(S^*)$ для последовательности $p_n \rightrightarrows \varphi$ в $\overline{\mathbb{D}}$.

Теорема 1. *Для любой функции $\varphi \in A(\mathbb{D})$, такой, что $\varphi(\mathbb{T}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ и $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, оператор $\varphi(S^*)$, действующий на $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, имеет гиперциклическое подпространство.* Заметим, что $\varphi(z) = \lambda z$, $|\lambda| > 1$, не удовлетворяет условиям этой теоремы.

Оператор T на сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{B}$ является *наследственно гиперциклическим*, если существует последовательность неотрицательных целых $\{n_k\}$, такая, что для каждой под-

[7] A. Montes-Rodriguez, *Banach spaces of hypercyclic vectors* // Michigan Math. J., **43**. 1996. P. 419–436.

последовательности $\{n_{k_i}\}$ существует вектор x, такой, что последовательность $\{T^{n_{k_i}} x\}$ всюду плотна в $\mathcal{B}$.

В доказательстве Теоремы 1 используется следующее достаточное условие существования гиперциклического подпространства, данное Гонзалесом, Леон-Сааведрой и Монтес-Родригесом[8]:

Пусть T — наследственно гиперциклический ограниченный линейный оператор, действующий на сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{B}$. Пусть также существенный спектр оператора T пересекает замкнутый единичный круг. Тогда оператор T обладает гиперциклическим подпространством.

Глава 3. Гиперциклические одномерные возмущения унитарных операторов

Ясно, что тождественный оператор — один из «наименее гиперциклических». Тем не менее, уже в 1991 году К. Чан и Дж. Шапиро[9] доказали существование гиперциклического оператора в гильбертовом пространстве вида $I + K$, где компактный оператор K может лежать в любом классе Шаттена. Ясно, что оператор вида $I + R$ не может быть гиперциклическим, если оператор R конечного ранга. Тем не менее, если мы заменим I на унитарный оператор, гиперцикличность становится возможной. В 2010 году С. Шкарин построил пример унитарного оператора U, такого что оператор $U + R$ гиперциклический для некоторого оператора R ранга два. Шкарин поставил вопрос о существовании гиперциклического оператора вида $U + R$, где U — унитарный оператор, а R — оператор ранга один.

[8] M. Gonzalez, F. Leon-Saavedra, A. Montes-Rodriguez, *Semi-Fredholm Theory: Hypercyclic and supercyclic subspaces* // Proc. London Math. Soc., **81** (3). 2000. P. 169–189.

[9] K. C. Chan, J. H. Shapiro, *The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions* // Indiana Univ. Math. J., **40** (4). 1991. P. 1421–1449.

Положительный ответ был дан С. Гриво[10]:

Теорема 2. *Существует унитарный оператор U в пространстве ℓ^2 и оператор R ранга один, такие, что оператор $U+R$ гиперциклический.*

Доказательство этой теоремы основывается на элементарной, но технически сложной конструкции, использующей некоторый индуктивный процесс сходимости, и на следующем достаточном условии для гиперцикличности, также полученном Гриво[11]. Это условие говорит, что оператор будет гиперциклическим, если у него есть некоторое «непрерывное» семейство собственных векторов с унимодулярными собственными значениями:

Теорема. *Пусть X — комплексное сепарабельное бесконечномерное банахово пространство, и пусть T — ограниченный оператор на X. Предположим, что существует последовательность $\{u_n\}_{n\geq 1}$ векторов на X со следующими свойствами:*

(i) *u_n — собственный вектор оператора T, соответствующий собственному значению λ_n оператора T, где $|\lambda_n| = 1$ и все λ_n различны;*

(ii) *линейная оболочка векторов $\{u_n : n \geq 1\}$ плотна в X;*

(iii) *для каждого $n \geq 1$ и для любого $\varepsilon > 0$, существует номер $m \neq n$ такой, что $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$.*

Тогда оператор T — гиперциклический.

Более того, оператор T в этой теореме оказывается даже *часто гиперциклическим*. Это означает, что орбита некоторого вектора пересекает каждое непустое открытое множество с положительной плотностью.

[10] S. Grivaux, *A hypercyclic rank one perturbation of a unitary operator* // Math. Nachr., **285** (5–6). 2012. P. 533–544.

[11] S. Grivaux, *A new class of frequently hypercyclic operators* // Indiana Univ. Math. J., **60**. 2011. P. 1177–1201.

В главе 3 диссертации дано новое доказательство теоремы 2 методами теории функций. Наш подход основывается на функциональной модели для одномерных возмущений сингулярных унитарных операторов. Эта модель, по существу, восходит к статье В. В. Капустина[12]. В той форме, в которой мы будем ее использовать, она появилась в контексте одномерных возмущений самосопряженных операторов[13]. Эта модель переводит каждое одномерное возмущение унитарного оператора в некоторый конкретный оператор в пространстве аналитических функций на единичном диске.

Пусть H^2 — стандартное пространство Харди на единичном круге, и пусть θ — внутренняя функция в круге. *Модельное* (или $*$-*инвариантное*) *подпространство* K_θ пространства H^2 определяется как

$$K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2.$$

Согласно знаменитой теореме Берлинга, любое замкнутое подпространство H^2, инвариантное относительно обратного сдвига $S^* : f \mapsto \frac{f(z)-f(0)}{z}$, имеет вид K_θ для некоторой внутренней функции θ. Пространства K_θ известны как $*$-инвариантные или модельные подпространства ввиду их роли в другой функциональной модели — модели Секефальви-Надя и Фойаша для операторов сжатия. Эти подпространства играют значительную роль в теории операторов[14,15] и в комплексном анализе.

Функциональная модель позволяет свести задачу к построению гиперциклического оператора очень специального вида, действующего в пространстве аналитических функций. Основное преимуще-

[12] В. В. Капустин, *Одномерные возмущения сингулярных унитарных операторов* // Зап. научн. семин. ПОМИ, **232**. 1996. С. 118–122.

[13] A. D. Baranov, D. V. Yakubovich, *Completeness and spectral synthesis of nonselfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators*, // Adv. Math. **302**. 2016. P. 740–798.

[14] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* М.: Наука. 1980. 383 с.

[15] N. K. Nikolski, *Operators, Functions, and Systems: an Easy Reading*, Math. Surveys Monogr., **92–93**, AMS, Providence, RI. 2002.

ство такой редукции состоит в том, что в указанной модели семейство собственных векторов одномерного возмущения имеет очень ясный аналитический смысл: это семейства воспроизводящих ядер K_θ или биортогональные к ним семейства.

Сформулируем теперь наш главный результат, в котором утверждается, что существуют модельные пространства с некоторым непрерывным семейством векторов со свойствами, аналогичными свойствам векторов в теореме Гриво. Ввиду функциональной модели отсюда немедленно следует, что существует унитарный оператор с (часто) гиперциклическим одномерным возмущением.

Теорема 3. *Существуют внутренняя функция θ в круге, такая, что $\theta(0) \neq 0$ и θ аналитически продолжима через некоторую открытую дугу на $\mathbb{T}$, функция $\varphi \in H^2 \setminus K_\theta$ и последовательность $\lambda_n \in \mathbb{T}$ такие, что функции*

$$f_n(z) = \frac{\varphi(z)}{z - \lambda_n} \tag{1}$$

принадлежат пространству K_θ, семейство $\{f_n\}$ полно в K_θ и для каждого $n \geq 1$ и для любого $\varepsilon > 0$, существует номер $m \neq n$ такой, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

В отличие от элементарных, но технически трудных и громоздких построений из статьи Гриво, применение функциональной модели проясняет конструкцию собственных векторов, так как в модельном пространстве они имеют специальную аналитическую структуру: они обязательно имеют форму (1) для некоторого $\varphi \in H^2$, где λ_n — это нули функции φ (понимаемой в смысле некасательных граничных значений при $\lambda_n \in \mathbb{T}$).

Как в оригинальном доказательстве Гриво, наша конструкция индуктивна. Тем не менее, параметры выбираются принципиально иным образом. В частности, собственные числа оператора $U + R$

будут выбраны нулями некоторой функции Герглотца (перемежающимися со спектром оператора U). Свойства функций Герглотца играют важную роль в нашей конструкции.

Глава 4. Гиперцикличность операторов Теплица

Напомним, что для функции $\varphi \in H^\infty$ антианалитический оператор Теплица $T_{\overline{\varphi}}$ является гиперциклическим тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$. С другой стороны, ясно что нет гиперциклических операторов среди операторов Теплица с аналитическими символами (т. е. среди операторов умножения на аналитическую функцию).

Тем не менее, феномен гиперцикличности для операторов Теплица общего вида является гораздо менее изученным, и здесь критерии гиперцикличности не известны. Эта задача была явно сформулирована С. Шкариным[16], описавшим гиперциклические операторы Теплица с символами вида $\Phi(z) = a\overline{z} + b + cz$ (т. е. операторы Теплица с трехдиагональной матрицей в стандартном базисе пространства H^2).

В Главе 4 впервые получены результаты о гиперцикличности операторов Теплица достаточно общего вида. Найдены отдельно необходимые и достаточные условия гиперцикличности оператора T_Φ в случае, когда

$$\Phi(z) = p\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi(z), \tag{2}$$

где p — полином, а функция φ лежит в H^∞ (иногда мы будем предполагать, что φ лежит в диск-алгебре $A(\mathbb{D})$). В случае $p(z) = \gamma z$ (т. е. $\Phi \in \overline{z}H^\infty$) зазор между необходимыми и достаточными условиями становится особенно малой.

Новой в этих условиях является роль однолистности или N-листности (где N — степень полинома p) символа. Такие условия

[16]S. Shkarin, *Orbits of coanalytic Toeplitz operators and weak hypercyclicity* // arXiv:1210.3191.

ранее не возникали при исследовании задач линейной динамики, за одним важным исключением: Бурдон и Шапиро[17] изучали теплицевы операторы на пространстве Бергмана с *антианалитическими* символами, и в некоторых их результатах играла роль однолистность символа.

Сформулируем основные результаты Главы 4. В дальнейшем будем обозначать символом $\overline{\mathbb{D}}$ замкнутый единичный круг, и положим $\widehat{\mathbb{D}} = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Наш первый результат применим к случаю, когда антианалитическая часть имеет степень 1.

Теорема 4. *Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi \in H^\infty$ и $\Phi(z) = \frac{\gamma}{z} + \varphi(z)$.*

1. Если оператор T_Φ — гиперциклический, то

(a) функция Φ однолистна в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$;

(b) $\overline{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ и $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$.

2. Предположим, что $\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}})$ и

(a′) функция Φ однолистна в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$;

(b′) $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ и $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$.

Тогда оператор T_Φ — гиперциклический.

Зазор между необходимыми и достаточными условиями связан только с граничным поведением функции Φ. В то время как необходимо, чтобы отображение Φ было однолистно в $\mathbb{D}$, в достаточном условии мы требуем однолистности вплоть до границы. Также, в то время как необходимое условие требует, чтобы спектр $\sigma(T_\Phi) = \mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})$ пересекал единичную окружность, в достаточном условии нам нужно более сильное предположение о том, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(\mathbb{D})}$ (которое, в сущности, является точечным спектром оператора T_Φ) пересекает единичный круг $\mathbb{D}$.

---

[17] P. S. Bourdon, J. H. Shapiro, *Hypercyclic operators that commute with the Bergman backward shift* // Trans. Amer. Math. Soc., **352**. 2000. P. 5293–5316.

В нашем втором результате p будет полиномом степени N. Напомним, что аналитическая функция h в области D называется N-листной в D, если уравнение $h(z) = w$ имеет не более N решений в D с учетом кратности. Заметим, что $\Phi(z) \sim c_N z^{-N}$, $z \to 0$, и поэтому уравнение $\Phi(z) = w$ имеет ровно N решений при достаточно большом $|w|$. Положим

$$\Phi(\mathbb{D}, N) = \{w \in \mathbb{C} : \text{уравнение } \Phi(z) = w \text{ имеет ровно } N \text{ решений в } \mathbb{D}\},$$

где решения берутся с учетом кратности.

Теорема 5. *Пусть p — многочлен степени $N \geq 1$, $\varphi \in H^\infty$, а функция Φ определена равенством* (2).

1. Если оператор T_Φ — гиперциклический, то

(a) функция Φ будет N-листна в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$;

(b) $\overline{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)) \neq \emptyset$ и $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)) \neq \emptyset$.

2. Предположим, что $\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}})$, и

(a') для любого $w \in \Phi(\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\})$ уравнение $\Phi(z) = w$ имеет ровно N решений в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$;

(b') $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}))$, и $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$.

Тогда оператор T_Φ — гиперциклический.

Заметим, что из условия (a') следует, в частности, что $\Phi(\mathbb{D}) = \Phi(\mathbb{D}, N)$.

Доказательства теорем 4 и 5 основаны на применении критерия Годфруа–Шапиро в сочетании с некоторыми результатами об аппроксимации в пространстве H^2 полиномами от однолистной функции.

Публикации автора по теме диссертации

1. A. Baranov, A. Lishanskii, *On S. Grivaux' example of a hypercyclic rank one perturbation of a unitary operator* // Arch. Math. **104** (3). 2015. P. 223–235.

2. А. А. Лишанский, *Существование гиперциклических подпространств у операторов Теплица* // Уфимский мат. журнал, **7** (2). 2015. С. 109–113.

3. A. Baranov, A. Lishanskii, *Hypercyclic Toeplitz operators* // Results Math. **70** (3). 2016. P. 337–347.