Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Лишанский Андрей Александрович

Динамика линейных операторов в пространствах аналитических функций

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Баранов Антон Дмитриевич

г. Санкт-Петербург — 2016

Глава 1

Введение

Динамика линейных операторов в банаховых или топологических векторных пространствах — это интенсивно развивающаяся в последние 25 лет область теории операторов. Она тесно связана со многими направлениями современного анализа, например, спектральной теорией линейных операторов, эргодической теорией, пространствами аналитических функций и действующими в них операторами. Этой тематике посвящено значительное число работ.

Особую роль в линейной динамике играет понятие гиперциклического оператора — оператора, у которого существует вектор, имеющий всюду плотную орбиту. То есть гиперциклический оператор имеет в определенном смысле хаотическое поведение. Тем не менее, оказывается, что многие естественные операторы обладают свойством гиперцикличности.

Отметим, что гиперциклические операторы представляют интерес в связи с известной задачей функционального анализа: любой ли линейный оператор в нормированном пространстве из некоторого класса пространств имеет нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство? Известно, что в пространстве ℓ^1 существует ограниченный линейный оператор, для которого любой ненулевой вектор гиперциклический [29]. Из этого следует, в частности, что для банаховых пространств ответ отрицательный. Однако для гильбертовых пространств вопрос остается открытым.

1.1 Гиперциклические линейные операторы

Пусть X — сепарабельное банахово пространство (или пространство Фреше), а T — ограниченный линейный оператор в X. Если найдется такой вектор $x \in X$, что множество $\{T^n x, n \in \mathbb{N}_0\}$ всюду плотно в X, то говорят, что T — *гиперциклический оператор*, а x — его *гиперциклический вектор*. Здесь $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Расцвет теории гиперциклических операторов начался в 1980-х годах после появления работ Китаи, Годфруа–Шапиро, Гетнера, Бурдона и других. Однако первые примеры гиперциклических операторов были известны намного раньше.

В 1929 Биркгоф [4] показал, что оператор сдвига $T_a : f(z) \mapsto f(z + a), a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, гиперциклический в стандартном пространстве Фреше всех целых функций $Hol(\mathbb{C})$ с топологией равномерной сходимости на компактах. Позднее МакЛейн [23] доказал гиперцикличность оператора дифференцирования $D : f \mapsto f'$ на $Hol(\mathbb{C})$. Первый пример гиперциклического оператора в банаховом пространстве был дан в 1969 году Ролевичем [30], показавшим, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$, оператор λS^* будет гиперциклическим в пространстве $\ell^p(\mathbb{N}_0), 1 \leq p < \infty$. Здесь S^* — обратный сдвиг на $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, переводящий вектор $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{N}_0)$ в вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$.

В 1980-х — начале 1990-х были получены первые достаточные условия гиперцикличности, например, критерий Китаи [21], который формулируется так ([3, Theorem 1.6]):

Теорема. *Пусть T — линейный ограниченный оператор в пространстве Фреше, и существует возрастающая последовательность целых чисел n_k, два всюду плотных множества D_1 и $D_2 \subset X$ и последовательность отображений $S_{n_k} : D_2 \to X$, такие, что*

1) $T^{n_k}(x) \to 0$ для любого $x \in D_1$;

2) $S_{n_k}(y) \to 0$ для любого $y \in D_2$;

3) $T^{n_k} S_{n_k}(y) \to y$ для каждого $y \in D_2$;

Тогда оператор T — гиперциклический.

Из критерия Китаи следует одно из простейших достаточных условий гиперцикличности — так называемый критерий Годфруа–Шапиро (см. [13] или [3, 19]).

Теорема. *Предположим, что для линейного непрерывного оператора T в пространстве Фреше X подпространства*

$$X_0 = \mathrm{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < 1\},$$

$$Y_0 = \mathrm{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > 1\},$$

плотны в X. Тогда оператор T — гиперциклический.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг, а $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность. Обозначим через H^2 стандартное пространство Харди в $\mathbb{D}$. Напомним, что для функции $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ оператор Теплица T_ψ с символом ψ определяется как $T_\psi f = P_+(\psi f)$, где P_+ обозначает ортогональный проектор из $L^2(\mathbb{T})$ на H^2.

Спектральная теория операторов Теплица (и тесно связанная с ней теория операторов Винера–Хопфа) — классический, но далеко не завершенный раздел анализа. Она взаимодействует со множеством других областей, от проблемы моментов и граничной задачи Римана–Гильберта до прикладного численного анализа.

Отметим, что пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ — это пространство всех функций вида $f(z) = \sum_{n\ge 0} c_n z^n$, где $\{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, и поэтому может быть естественно отождествлено с $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Тогда оператор обратного сдвига S^* соответствует оператору Теплица $T_{\overline{z}}$. В работе [13] было показано, что антианалитический оператор Теплица $T_{\overline{\varphi}}$ (где φ — ограниченная аналитическая функция в круге $\mathbb{D}$) является гиперциклическим тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Диссертация посвящена трем вопросам теории гиперциклических операторов. Первый из них — существование замкнутых подпространств, в которых каждый ненулевой вектор является гиперциклическим для данного оператора. В работе доказано существование такого подпространства для одного класса операторов Теплица с антианалитическими символами. Во второй части работы получено новое теоретикофункциональное доказательство теоремы С. Гриво о существовании унитарного оператора с гиперциклическим одномерным возмущением. В третьей части диссертации найдены необходимые, а также достаточные условия гиперцикличности оператора Теплица с символом, имеющим полиномиальную аналитическую часть.

1.2 Существование гиперциклического подпространства

Что можно сказать о множестве гиперциклических векторов данного гиперциклического оператора T? Ясно, что если x — гиперциклический вектор для оператора T, то $Tx, T^2x, T^3x, \dots$ также являются гиперциклическими векторами для T. Поэтому множество гиперциклических векторов плотно в X, если оно непусто.

Следующий результат доказан Бурдоном [6] (специальный класс операторов, коммутирующих с обобщенным обратным сдвигом, был до этого рассмотрен Годфруа и Шапиро в статье [13]).

Теорема (Бурдон, [6]). *Пусть T — гиперциклический оператор, действующий на гильбертовом пространстве H. Тогда существует всюду плотное линейное подпространство, в котором каждый ненулевой вектор является гиперциклическим для T.*

Определение. Для гиперциклического оператора T замкнутое бесконечномерное подпространство, в котором каждый ненулевой вектор является гиперциклическим для T, называется *гиперциклическим подпространством.*

Общее достаточное условие существования гиперциклического подпространства было дано Гонзалесом, Леон-Сааведрой и Монтес-Родригесом в статье [15]. Чтобы сформулировать его, нужна более сильная версия гиперцикличности:

Определение. Оператор T, действующий на сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{B}$, является *наследственно гиперциклическим*, если существует последовательность неотрицательных целых чисел $\{n_k\}$, такая, что для каждой подпоследовательности $\{n_{k_i}\}$ существует вектор x, такой, что последовательность $\{T^{n_{k_i}}x\}$ всюду плотна в $\mathcal{B}$.

Напомним также определение существенного спектра.

Определение. Оператор U называется *фредгольмовым*, если $\operatorname{Ran} U$ замкнут и имеет конечную коразмерность, а $\operatorname{Ker} U$ конечномерно. *Существенный спектр* оператора T определяется как

$$\sigma_e(T) = \{\lambda : T - \lambda I \text{ не фредгольмов}\}.$$

Теорема ([15, теорема 3.2]). *Пусть T — наследственно гиперциклический ограниченный линейный оператор, действующий на сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{B}$. Пусть также существенный спектр оператора T пересекает замкнутый единичный круг. Тогда оператор T обладает гиперциклическим подпространством.*

Монтес-Родригес [25, Теорема 3.4] доказал, что оператор λS^*, $|\lambda| > 1$, действующий на $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, не имеет гиперциклического подпространства. Тем не менее, для некоторого класса функций от обратного сдвига S^* на $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ существует гиперциклическое подпространство. Это основной результат главы 2.

Напомним, что *диск-алгебра* $A(\mathbb{D})$ — это пространство всех функций φ, непрерывных в замкнутом единичном круге $\overline{\mathbb{D}}$ и аналитических в $\mathbb{D}$ (с нормой $\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |\varphi(z)|$).

Любая функция из $A(\mathbb{D})$ равномерно приближается в замкнутом круге многочленом, и $\varphi(S^*)$ определяется как $\lim_{n\to\infty} p_n(S^*)$ для последовательности $p_n \rightrightarrows \varphi$ в $\overline{\mathbb{D}}$.

Теорема 1.2.1. *Для любой функции $\varphi \in A(\mathbb{D})$, такой, что $\varphi(\mathbb{T}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ и $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, оператор $\varphi(S^*)$, действующий на $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, имеет гиперциклическое подпространство.*

Используя отождествление H^2 и $l^2(\mathbb{N}_0)$, теорему 1.2.1 можно переформулировать в терминах операторов Теплица.

Следствие 1.2.2. *В условиях теоремы 1.2.1 антианалитический оператор Теплица $T_{\bar{\varphi}}$ имеет гиперциклическое подпространство.*

Заметим, что $\varphi(z) = \lambda z$, $|\lambda| > 1$, не удовлетворяет условиям теоремы.

В доказательстве этого результата используется вышеупомянутое достаточное условие Гонзалеса, Леон-Сааведры и Монтес-Родригеса.

Упомянем несколько других недавних результатов о существовании гиперциклических подпространств. С. Шкарин [33] доказал, что оператор дифференцирования в стандартном пространстве Фреше $Hol(\mathbb{C})$ имеет гиперциклическое подпространство. К. Мене [24, следствие 5.5] обобщил этот результат: он доказал, что для каждого полинома P, не равного константе, оператор $P(D)$ обладает гиперциклическим подпространством. Он также получил некоторые результаты, касающиеся весовых сдвигов в ℓ^p.

1.3 Гиперциклические одномерные возмущения унитарных операторов

Ясно, что тождественный оператор — один из «наименее гиперциклических». Тем не менее, уже в 1991 году К. Чан и Дж. Шапиро [9] доказали существование гиперциклического оператора в гильбертовом пространстве вида $I + K$, где компактный оператор K может лежать в любом классе Шаттена. Легко видеть, что оператор вида $I + R$ не может быть гиперциклическим, если R — оператор конечного ранга. Тем не менее, если мы заменим I на унитарный оператор, гиперцикличность возможна. В 2010 году С. Шкарин [32] построил пример унитарного оператора U, такого что $U + R$ гиперциклический для некоторого оператора R ранга два. Шкарин поставил вопрос о существовании аналогичного примера с оператором R ранга один. Положительный ответ был дан С. Гриво [17]:

Теорема 1.3.1 (С. Гриво, [17]). *Существует унитарный оператор U в пространстве ℓ^2 и оператор R ранга один, такие, что $U + R$ гиперциклический.*

Доказательство этой теоремы основывается на довольно элементарной конструкции, использующей некоторый индуктивный процесс сходимости, так же как в следующем достаточном условии для гиперцикличности, также полученном Гриво [16]. Это условие говорит, что оператор гиперциклический, если у него есть некоторое «непрерывное» семейство собственных векторов с унимодулярными собственными значениями.

Теорема 1.3.2 (С. Гриво, [16]). *Пусть X — комплексное сепарабельное бесконечномерное банахово пространство, и пусть T — ограниченный оператор на X. Предположим, что существует последовательность $\{u_n\}_{n\geq 1}$ векторов на X со следующими свойствами*:

(i) u_n *— собственный вектор оператора T, соответствующий собственному значению λ_n оператора T, где $|\lambda_n| = 1$ и все λ_n различны*;

(ii) *линейная оболочка векторов $\{u_n : n \geq 1\}$ плотна в X*;

(iii) *для каждого $n \geq 1$ и для любого $\varepsilon > 0$, существует номер $m \neq n$ такой, что $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$.*

Тогда оператор T — гиперциклический.

Более того, оператор T в этой теореме будет даже *часто гиперциклическим*, что значит, что орбита некоторого вектора пересекает каждое непустое открытое множество с положительной плотностью (детальное рассмотрение часто гиперциклических операторов см. в [2]).

В главе 3 диссертации дано новое доказательство теоремы 1.3.1 методами теории функций. Наш подход основывается на функциональной модели для одномерных возмущений сингулярных унитарных операторов. Эта модель, в сущности, восходит к статье В. В. Капустина [20]. В той форме, в которой мы будем ее использовать, она появилась в [1] в контексте одномерных возмущений самосопряженных операторов. Эта модель переводит каждое одномерное возмущение унитарного оператора в некоторый конкретный оператор в пространстве аналитических функций на единичном диске, известном как $*$-инвариантное или модельное подпространство (ввиду его роли в другой модели — Секефальви-Надя и Фойаша для операторов сжатия).

Пусть H^2 — стандартное пространство Харди на единичном круге, и пусть θ — внутренняя функция в круге. *Модельное* (или *$*$-инвариантное*) *подпространство* K_θ пространства H^2 определяется как

$$K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2.$$

Согласно знаменитой теореме Берлинга, любое замкнутое подпространство H^2, инвариантное относительно обратного сдвига $S^* : f \mapsto \frac{f(z)-f(0)}{z}$, имеет вид K_θ. Эти подпространства играют значительную роль в теории операторов (см., например, [26, 27]) и в комплексном анализе.

Функциональная модель позволяет свести задачу к построению гиперциклического оператора очень специального вида, действующего в пространстве аналитических функций. Основное преимущество такой редукции состоит в том, что в указанной модели семейство собственных векторов одномерного возмущения имеет очень ясный аналитический смысл: это семейства воспроизводящих ядер K_θ или биортогональные к ним.

Сформулируем теперь наш главный результат, в котором утверждается, что существуют модельные пространства с некоторым непрерывным семейством векторов со свойствами, аналогичными свойствам векторов в теореме 1.3.2. Ввиду функциональной модели (см. теорему 3.1.1) и теоремы 1.3.2 отсюда немедленно следует, что существует унитарный оператор с (часто) гиперциклическим одномерным возмущением.

Теорема 1.3.3. *Существует внутренняя функция θ в круге, такая, что $\theta(0) \neq 0$ и θ аналитически продолжима через некоторую открытую дугу на $\mathbb{T}$, функция $\varphi \in H^2 \setminus K_\theta$ и последовательность $\lambda_n \in \mathbb{T}$ такие, что функции*

$$f_n(z) = \frac{\varphi(z)}{z - \lambda_n} \in K_\theta, \tag{1.1}$$

семейство $\{f_n\}$ полно в K_θ и для каждого $n \geq 1$ и для любого $\varepsilon > 0$, существует $m \neq n$ такой, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

В отличие от элементарных, но технически трудных и громоздких построений из статьи Гриво, применение функциональной модели проясняет конструкцию собственных векторов, так как в модельном пространстве они имеют специальную аналитическую структуру: они обязательно имеют форму (1.1) для некоторого $\varphi \in H^2$, где λ_n — это нули функции φ (понимаемой в смысле некасательных граничных значений при $\lambda_n \in \mathbb{T}$).

Как в оригинальном доказательстве [17], наша конструкция индуктивна. Тем не менее, переменные выбираются различными путями. В частности, собственные числа оператора $U + R$ будут выбраны нулями некоторой функции Герглотца (перемежающимися со спектром U). Свойства функций Герглотца сыграют важную роль в нашей конструкции.

1.4 Гиперцикличность операторов Теплица

Как было отмечено выше, одним из основных примеров гиперциклических операторов являются теплицевы операторы с антианалитическими символами. С другой стороны, понятно, что не существует гиперциклических операторов Теплица с аналитическими символами (т. е. операторов умножения на аналитическую функцию).

Тем не менее, феномен гиперцикличности для операторов Теплица общего вида является гораздо менее изученным, и здесь критерии гиперцикличности не известны. Эта задача была явно сформулирована С. Шкариным [34], описавшим гиперциклические теплицевы операторы с символами вида $\Phi(z) = a\overline{z} + b + cz$ (т. е. операторы Теплица с трехдиагональной матрицей в стандартном базисе пространства H^2).

Цель главы 4 диссертации — исследовать гиперцикличность операторов Теплица достаточно общего вида. Мы дадим необходимые, а также достаточные условия гиперцикличности оператора T_Φ в случае

$$\Phi(z) = p\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi(z), \tag{1.2}$$

где p — полином, а функция φ лежит в H^∞ (иногда мы будем предполагать, что φ лежит в диск-алгебре $A(\mathbb{D})$). В случае $p(z) = \gamma z$ (т. е.

$\Phi \in \overline{z}H^\infty$) зазор между необходимыми и достаточными условиями становится особенно малым.

Новой в этих условиях является роль однолистности или N-листности (где N — степень полинома p) символа. Кажется, что такие условия ранее не появлялись в линейной динамике, за одним значимым исключением: в [7] Бурдон и Шапиро изучали теплицевы операторы на пространстве Бергмана с *антианалитическими* символами, и в некоторых их результатах однолистность символа играла роль.

Сформулируем основные результаты главы 4. В дальнейшем будем обозначать $\overline{\mathbb{D}}$ за замкнутый единичный круг, и положим $\widehat{\mathbb{D}} = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Наш первый результат применим к случаю, когда антианалитическая часть символа имеет степень 1.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi \in H^\infty$ *и* $\Phi(z) = \frac{\gamma}{z} + \varphi(z)$.

1. *Если оператор* T_Φ *— гиперциклический, то*

   (*a*) *функция* Φ *однолистна в* $\mathbb{D} \setminus \{0\}$;

   (*b*) $\overline{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ *и* $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$.

2. *Предположим, что* $\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}})$ *и*

   (a') *функция* Φ *однолистна в* $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$;

   (b') $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ *и* $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$.

   Тогда оператор T_Φ *— гиперциклический.*

Зазор между необходимыми и достаточными условиями относится только к граничному поведению Φ. В то время как необходимо, чтобы отображение Φ было однолистно в $\mathbb{D}$, в достаточном условии мы требуем однолистности вплоть до границы. Также, в то время как необходимое условие требует, чтобы спектр $\sigma(T_\Phi) = \mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})$ пересекал единичную окружность, в достаточном условии нам нужно более сильное предположение о том, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(\mathbb{D})}$ (которое, в сущности, является точечным спектром оператора T_Φ) пересекает единичный круг $\mathbb{D}$.

В нашем втором результате p будет полиномом степени N. Напомним, что аналитическая функция h в области D называется N-листной в D, если уравнение $h(z) = w$ имеет не более N решений в D с учетом кратности. Заметим, что $\Phi(z) \sim c_N z^{-N}$, $z \to 0$, и поэтому $\Phi(z) = w$ имеет ровно N решений при достаточно большом $|w|$. Положим

$$\Phi(\mathbb{D}, N) = \{w \in \mathbb{C} : \text{уравнение } \Phi(z) = w \text{ имеет ровно } N \text{ решений в } \mathbb{D}\},$$

где решения берутся с учетом кратности.

Теорема 1.4.2. *Пусть p — многочлен степени $N \geq 1$, $\varphi \in H^\infty$, а Φ определяется посредством* (4.1).

1. Если оператор T_Φ — гиперциклический, то

(a) функция Φ будет N-листна в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$;

(b) $\overline{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)) \neq \emptyset$ и $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)) \neq \emptyset$.

2. Предположим, что $\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}})$, и

(a′) для любого $w \in \Phi(\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\})$ уравнение $\Phi(z) = w$ имеет ровно N решений в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$;

(b′) $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}))$, и $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$.

Тогда оператор T_Φ *— гиперциклический.*

Заметим, что из условия (a') следует, в частности, что $\Phi(\mathbb{D}) = \Phi(\mathbb{D}, N)$.

Доказательства теорем 1.4.1 и 1.4.2 основаны на применении критерия Годфруа–Шапиро в сочетании с некоторыми результатами об аппроксимации в пространстве H^2 полиномами от однолистной функции.

Глава 2

Операторы Теплица, обладающие гиперциклическим подпространством

2.1 Существенный спектр линейных операторов

Следующая лемма хорошо известна. Приведем ее доказательство для удобства читателя.

Лемма 2.1.1. *Существенный спектр оператора S^* — единичная окружность.*

Доказательство: Рассмотрим три случая:

Случай 1: $|\lambda| > 1$. Оператор $S^* - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}S^*)$ обратим и поэтому фредгольмов.

Случай 2: $|\lambda| < 1$. Имеем $S^* - \lambda I = S^*(I - \lambda S)$. Так как оператор S^* фредгольмов (его ядро одномерно, а образ — все пространство ℓ^2), а $I - \lambda S$ обратим, их композиция — также фредгольмов оператор.

Случай 3: $|\lambda| = 1$. Тогда оператор $S^* - \lambda I$ не фредгольмов, так как его образ имеет бесконечную коразмерность.

Действительно, прообраз последовательности

$$(\lambda y_1, \lambda^2 y_2, \lambda^3 y_3, \lambda^4 y_4, \ldots) \in \ell^2$$

является последовательностью вида $(a, \lambda(y_1 + a), \lambda^2(y_1 + y_2 + a), \ldots)$, и равенство $a = -\sum\limits_{i=1}^{+\infty} y_i$ необходимо для вхождения этой последовательности в ℓ^2.

Тогда прообраз последовательности

$$\Big(1, \frac{1}{2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\geq 2^2-1 \text{ раза}}, \frac{1}{4}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\geq 2^4-1 \text{ раз}}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\geq 2^{2^n}-1 \text{ раз}}, \ldots\Big), \tag{2.1}$$

умноженной покомпонентно на $(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$, задается последовательностью

$$\Big(-2, -1, \underbrace{-\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}}_{\geq 2^2 \text{ раза}}, \underbrace{-\frac{1}{4}, \ldots, -\frac{1}{4}}_{\geq 2^4 \text{ раз}}, \ldots, \underbrace{-\frac{1}{2^n}, \ldots, -\frac{1}{2^n}}_{\geq 2^{2^n} \text{ раз}}, \ldots\Big),$$

умноженной покомпонентно на $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$, но эти последовательности не лежат в ℓ^2. Все последовательности вида (2.1), как легко заметить, формируют бесконечномерное подпространство в ℓ^2. □

Следующую важную теорему об отображении существенного спектра можно найти, например, в книге [14, стр. 107].

Теорема об отображении существенного спектра. *Для любого линейного ограниченного оператора T в гильбертовом пространстве H и для любого полинома P имеем $\sigma_e(P(T)) = P(\sigma_e(T))$.*

2.2 Усиленный критерий Годфруа–Шапиро

В доказательстве наследственной гиперцикличности оператора $\varphi(S^*)$ мы будем использовать усиленную версию критерия Годфруа–Шапиро:

Теорема (усиленный критерий Годфруа–Шапиро). *Пусть T — ограниченный линейный оператор в сепарабельном банаховом пространстве. Предположим, что подпространства*

$$X_0 = \mathrm{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < 1\},$$

$$Y_0 = \mathrm{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > 1\},$$

плотны в X. Тогда оператор T — наследственно гиперциклический.

Доказательство: Говорят, что оператор T в пространстве Фреше X *удовлетворяет критерию гиперцикличности*, если существуют всюду плотные подмножества X_0 и Y_0 пространства X, возрастающая последовательность $\{n_k\}$ положительных чисел и последовательность отображений $S_{n_k} : Y_0 \to X,\ k \geq 1$, такая, что для любых точек $x \in X_0$ и $y \in Y_0$ выполняются три условия:

(i) $T^{n_k} x \to 0$,

(ii) $S_{n_k} y \to 0$,

(iii) $T^{n_k} S_{n_k} y \to y$.

По теореме Беса–Периса (см. [19, теорема 3.15]) если оператор T удовлетворяет критерию гиперцикличности, то T — наследственно гиперциклический.

Остается проверить, что наш оператор удовлетворяет данному выше определению. Чтобы это сделать, возьмем в качестве X_0 и Y_0 подпространства из условия (они плотны в X по условию теоремы). Далее, возьмем просто последовательность $n_k = k$, а в качестве S_k берем T^{-k}, определенный на Y_0. Тогда все три условия критерия гиперцикличности выполняются автоматически. $\square$

2.3 Доказательство теоремы 1.2.1

Доказательство теоремы 1.2.1 Нам нужно проверить два условия теоремы Гонзалеса, Леон-Сааведры и Монтес-Родригеса.

Любую функцию φ из диск-алгебры можно равномерно приблизить в $\overline{\mathbb{D}}$ последовательностью полиномов P_n. Поэтому $P_n(S^*)$ стремится к $\varphi(S^*)$ в операторной норме.

Нам нужно показать, что $\sigma_e(\varphi(S^*))$ пересекает замкнутый единичный круг. Так как $\varphi(\mathbb{T}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, существуют λ, $\mu \in \mathbb{T}$, такие, что $\varphi(\lambda) = \mu$. Тогда $\mu_n = P_n(\lambda)$ стремится к μ. По теореме об отображении существенного спектра для любого полинома P имеем $\sigma_e(P(S^*)) = P(\sigma_e(S^*)) = P(\mathbb{T})$. В частности, $\mu_n = P_n(\lambda) \in \sigma_e(P_n(S^*))$ для любого n, и поэтому $P_n(S^*) - \mu_n I$ не фредгольмов.

Так как множество фредгольмовых операторов открыто в операторной норме (см., например, [11, теорема 4.3.11]), множество нефредгольмовых операторов замкнуто, откуда получаем, что предел $P_n(S^*) - \mu_n I$, равный $\varphi(S^*) - \mu I$, не фредгольмов, и μ лежит в существенном спектре $\varphi(S^*)$. Первое условие теоремы Гонзалеса, Леон-Сааведры и Монтес-

Родригеса проверено.

Хорошо известно, что условие $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ влечет, что $\varphi(S^*)$ удовлетворяет критерию Годфруа–Шапиро. Вкратце воспроизведем это рассуждение.

Напомним, что точечный спектр S^* равен $\sigma_p(S^*) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$, и собственные вектора равняются $(1, \lambda, \lambda^2, \cdots) \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, или, если мы перейдем к пространству Харди $H^2(\mathbb{D})$, используя естественное отождествление H^2 с $\ell^2(\mathbb{N}_0)$,

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z} = \sum_{n \geq 0} \lambda^n z^n.$$

Это ядра Коши, являющиеся воспроизводящими ядрами в пространстве H^2. Ясно, что k_λ, $\lambda \in \mathbb{D}$, также являются собственными векторами $\varphi(S^*)$ с собственными числами $\varphi(\lambda)$.

По условию $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ мы знаем, что $\varphi(\mathbb{D})$ — открытое множество, пересекающее $\mathbb{D}$ и $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Тогда понятно, что $X_0 = \{k_\lambda, \lambda \in \mathbb{D} : |\varphi(\lambda)| > 1\}$ и $Y_0 = \{k_\lambda, \lambda \in \mathbb{D} : |\varphi(\lambda)| < 1\}$ плотны в H^2. В самом деле, функция $f \in H^2$ ортогональна k_λ в том и только в том случае, когда $f(\lambda) = 0$, а оба множества $\{\lambda \in \mathbb{D} : |\varphi(\lambda)| > 1\}$ и $\{\lambda \in \mathbb{D} : |\varphi(\lambda)| < 1\}$ открыты. Поэтому выполнены условия критерия Годфруа–Шапиро, откуда следует наследственная гиперцикличность оператора $\varphi(S^*)$.

Следовательно, по теореме Гонзалеса, Леон-Сааведры и Монтес-Родригеса у оператора $\varphi(S^*)$ есть гиперциклическое подпространство. $\square$

Можно попробовать обобщить утверждение Монтес-Родригеса о том, что оператор λS^*, $|\lambda| > 1$, действующий на $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, не имеет гиперциклического подпространства. Мы предполагаем, что верно следующее утверждение:

Гипотеза. Пусть $B = p(S^*)$, где p — полином, такой, что $|p(\lambda)| > 1$ при $|\lambda| = 1$. Тогда оператор B не имеет гиперциклического подпространства.

Глава 3

Гиперциклическое одномерное возмущение унитарного оператора

3.1 Предварительные сведения о функциональной модели одномерных возмущений унитарных операторов

3.1.1 Внутренние функции и меры Кларка

Напомним, что функция θ называется *внутренней,* если она аналитическая и ограниченная в $\mathbb{D}$, и ее некасательные граничные значения удовлетворяют условию $|\theta| = 1$ п.в. относительно нормированной меры Лебега m на единичной окружности $\mathbb{T}$.

Пусть $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ обозначает *пространство Харди* на единичном круге $\mathbb{D}$, оснащенное стандартной нормой $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(m)}$. Каждой внутренней функции θ мы сопоставляем модельное подпространство $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Оно так называется в связи с его ролью в модели

Секефальви-Надя и Фойаша для операторов сжатия. Как уже упоминалось, модельные подпространства играют большую роль в теории операторов и в комплексном анализе.

Приведем некоторые примеры модельных пространств. Пусть B – произведение Бляшке с различными нулями z_n кратности m_n,

$$B(z) = \prod_n \left(\frac{|z_n|}{z_n} \cdot \frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z} \right)^{m_n}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Тогда пространство K_B имеет простое геометрическое описание:

$$K_B = \overline{\mathrm{Span}}_{L^2(\mathbb{T})} \left\{ \frac{1}{(1 - \overline{z}_n \zeta)^k} : 1 \le k \le m_n \right\},$$

то есть подпространство K_B совпадает с замыканием в H^2 (или, что равносильно, в $L^2(\mathbb{T}, m)$) линейной оболочки простых дробей с полюсами соответствующих кратностей в точках $\overline{z}_n^{-1}$. В частности, если B – конечное произведение Бляшке, то K_B будет пространством рациональных функций с фиксированными полюсами вне замкнутого круга. Если $B(z) = z^{n+1}$, то $K_B = \mathcal{P}_n$ – пространство всех полиномов степени не выше n с L^2-нормой.

В случае $\theta(z) = \exp\left(a\frac{z+1}{z-1}\right)$, $a > 0$, модельное пространство оказывается тесно связанным с пространством Пэли–Винера целых функций экспоненциального типа посредством конформного отображения, описанного в разделе 3.1.3.

Воспроизводящее ядро для K_θ, соответствующее точке $\lambda \in \mathbb{D}$, задается формулой

$$k_\lambda(z) = \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{1 - \overline{\lambda} z}.$$

Так как функции из K_θ «более аналитические», чем просто функции из H^2, воспроизводящие ядра могут существовать и в граничных точках. В частности, если θ (и, значит, любая функция из K_θ) аналитически продолжима через некоторую дугу I, можно рассматривать ядра k_λ, $\lambda \in I$. В общем случае, согласно результату Ахерна и Кларка имеем $k_\lambda \in K_\theta$ для $\lambda \in \mathbb{T}$ тогда и только тогда, когда $|\theta'(\lambda)| < \infty$, то есть модуль угловой производной конечен.

Напомним конструкцию Кларка ортогональных базисов воспроизводящих ядер [10]. Для каждого $\alpha \in \mathbb{T}$ функция $\frac{\alpha+\theta}{\alpha-\theta}$ имеет положительную вещественную часть $\mathbb{D}$, поэтому существует конечная положительная мера μ^α на $\mathbb{T}$ (сингулярная относительно меры Лебега), такая что

$$\operatorname{Re}\frac{\alpha+\theta(z)}{\alpha-\theta(z)} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\tau-z|^2}\, d\mu^\alpha(\tau), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Теорема Кларка утверждает, что если для некоторого α, мера μ^α чисто точечная, т.е. если $\mu^\alpha = \sum_n \mu_n \delta_{\tau_n}$, $\tau_n \in \mathbb{T}$, то $k_{\tau_n} \in K_\theta$ и система $\{k_{\tau_n}\}$ — ортогональный базис в K_θ. Заметим также, что $\{\tau_n\} = \theta^{-1}(\{\alpha\})$, и $\|k_{\tau_n}\|_2^2 = |\theta'(t_n)| = 2\mu_n^{-1}$.

Пусть $\mu = \mu^1$ — мера Кларка, соответствующая $\alpha = 1$. Для $c \in L^2(\mu)$ положим

$$(Vc)(z) = \big(1-\theta(z)\big)\int_{\mathbb{T}} \frac{c(\tau)d\mu(\tau)}{1-\bar{\tau}z}, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{3.1}$$

Как показал Кларк [10], V — унитарный оператор, действующий из $L^2(\mu)$ на K_θ. Более того, некасательные граничные значения функции Vc существуют и совпадают μ-п.в. с функцией c [28], и, поэтому, V^{-1} можно понимать как оператор вложения K_θ в $L^2(\mu)$. В частности, если $\{k_{\tau_n}\}$ —

это ортогональный базис из воспроизводящих ядер в K_θ, то любая функция $f \in K_\theta$ имеет вид $f(z) = \big(1-\theta(z)\big)\sum_n \frac{c_n\mu_n}{1-\bar{\tau}_n z}$, где $\sum_n |c_n|^2\mu_n < \infty$.

3.1.2 Функциональная модель

Изложим детали функциональной модели одномерных возмущений унитарных операторов. Пусть θ — внутренняя функция в круге, такая, что $\theta(0) \neq 0$. Пространство K_θ инвариантно относительно оператора обратного сдвига S^*, однако оно не инвариантно относительно оператора сдвига $Sf = zf$ (напомним, что проекция $S_\theta = P_{K_\theta}(Sf)$ оператора сдвига S — это простейший (скалярный) случай модельного оператора Секефальви-Надя–Фойяша). Поэтому для функции $f \in K_\theta$ функция zf не обязательно лежит в K_θ, но легко видеть, что существует единственное разложение $zf = \gamma + h$, где $\gamma \in \mathbb{C}$ — константа и $h \in K_\theta$. Более того, $\gamma = (\overline{\theta(0)})^{-1}(zf, \theta)$ — это непрерывный функционал по f.

Теперь пусть $\varphi \in H^2$ — функция, такая что

$$\varphi \notin K_\theta, \qquad \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z} \in K_\theta, \tag{3.2}$$

то есть $\varphi = \varphi(0) + zg$ для некоторой функции $g \in K_\theta$. Теперь мы можем определить оператор $T = T_{\theta,\varphi}$ на K_θ по формуле

$$Tf := zf - \gamma_f \varphi, \tag{3.3}$$

где γ_f — единственное комплексное число, такое что $zf - \gamma_f\varphi \in K_\theta$.

Теперь мы готовы представить функциональную модель одномерных возмущений, аналогичную [1, теорема 0.6] (хотя основные идеи восходят к

[20]). Напомним, что унитарный оператор называется *сингулярным*, если его спектральная мера сингулярна относительно меры Лебега на $\mathbb{T}$. Мы также предположим ниже, что U циклический, и поэтому с точностью до унитарной эквивалентности это оператор умножения на z в некотором пространстве $L^2(\nu)$, где ν — конечная борелевская мера на $\mathbb{T}$. За $\sigma(U)$ мы обозначим спектр U. Наконец, мы обозначим за $\rho(\theta)$ *граничный спектр* внутренней функции θ, то есть дополнение объединения всех открытых дуг I, таких, что θ допускает аналитическое продолжение через I.

Теорема 3.1.1 (функциональная модель)**.** *Пусть U — циклический сингулярный унитарный оператор, такой, что $\sigma(U) \neq \mathbb{T}$. Тогда для любого одномерного возмущения $U + R$ оператора U существует внутренняя функция θ в круге, такая, что $\theta(0) \neq 0$ и $\rho(\theta) \neq \mathbb{T}$, и функция $\varphi \in H^2$, удовлетворяющая* (3.2) *и такая, что оператор $U + R$ унитарно эквивалентен оператору T, определенному в* (3.3)*.*

Обратно, любая внутренняя функция θ, такая, что $\theta(0) \neq 0$ и $\rho(\theta) \neq \mathbb{T}$, и любая функция $\varphi \in H^2$, удовлетворяющая условию (3.2)*, соответствует некоторому одномерному возмущению $U + R$ циклического сингулярного унитарного оператора U, такого, что $\sigma(U) \neq \mathbb{T}$.*

Заметим, что для наших целей (т.е. построения гиперциклического одномерного возмущения унитарного оператора) нам нужна простая часть теоремы 3.1.1, а именно, что любой оператор T вида (3.3) — это одномерное возмущение унитарного оператора. Это становится ясно, когда мы переходим к оператору $V^{-1}TV$ в $L^2(\mu)$, где V — унитарный оператор Кларка. Легко видеть, что $V^{-1}TV$ — это одномерное возмущение оператора умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$.

Из определения оператора T очевидно, что если $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение T, то ему соответствует собственный вектор $\frac{\varphi(z)}{z-\lambda}$. Теперь, применяя теоремы 3.1.1 и 1.3.2, мы видим, что существование одномерного возмущения следует из теоремы 1.3.3. А именно, функции f_n из теоремы 1.3.3 являются собственными векторами оператора T и удовлетворяют условию теоремы 1.3.2, поэтому оператор T гиперциклический. По теореме 3.1.1 он унитарно эквивалентен некоторому одномерному возмущению унитарного оператора $U + R$.

3.1.3 Модельные пространства в верхней полуплоскости

Работать с модельными пространствами в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ часто оказывается удобнее, чем с пространствами в круге. Мы можем перенести нашу задачу в полуплоскость, так как отображение $f \mapsto \tilde{f}(z) = \frac{1}{z+i} \cdot f\big(\frac{z-i}{z+i}\big)$ переводит $H^2(\mathbb{D})$ унитарно на $H^2(\mathbb{C}_+)$, а модельное пространство K_θ в круге в модельное пространство $K_{\tilde{\theta}} = H^2(\mathbb{C}_+) \ominus \tilde{\theta} H^2(\mathbb{C}_+)$ в $\mathbb{C}_+$, где $\tilde{\theta}(z) = \theta\big(\frac{z-i}{z+i}\big)$.

Определение и свойства мер Кларка для модельных пространств в верхней полуплоскости аналогичны таковым в круге. Действительно, если θ — внутренняя функция в $\mathbb{C}_+$, то функция $\frac{\alpha+\theta}{\alpha-\theta}$ имеет положительную вещественную часть в $\mathbb{C}_+$, мера μ на $\mathbb{R}$ из ее представления Герглотца является мерой Кларка для K_θ и, опять же, вложение K_θ в $L^2(\mu)$ является унитарным оператором (с одним возможным исключением, когда в представлении Герглотца появляется линейный член; мы исключим этот случай в своей конструкции).

В частности, если мера Кларка, соответствующая $\alpha = 1$, является чисто точечной, $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$, то любая функция $f \in K_\theta$ имеет вид

$$f(z) = \big(1 - \theta(z)\big) \sum_n \frac{c_n \mu_n}{z - t_n}, \qquad \sum_n |c_n|^2 \mu_n < \infty, \tag{3.4}$$

и

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 4\pi \sum_n |c_n|^2 \mu_n = \pi \sum_n |f(t_n)|^2 \mu_n. \tag{3.5}$$

В дальнейшем мы будем часто использовать эти формулы.

3.2 Доказательство теоремы 1.3.3

3.2.1 План доказательства

Согласно вышеизложенной функциональной модели, задача сводится к построению функций θ и φ как в теореме 1.3.3. Как объясняется в разделе 3.1.3, мы можем работать на вещественной прямой и в верхней полуплоскости. Поэтому в дальнейшем $\|\cdot\|_2$ будет обозначать обычную L^2-норму на $\mathbb{R}$.

Мы построим:

- счетное множество $T = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ на некотором интервале (скажем, на $[0, 1]$);
- конечную положительную меру $\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n \delta_{t_n}$;

• внутреннюю функцию θ, определенную уравнением

$$i\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{t_n - z}; \tag{3.6}$$

• функцию φ вида

$$\varphi(z) := \big(1-\theta(z)\big)\Bigg[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n\mu_n}{t_n - z} + 1\Bigg], \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\mu_n < \infty, \tag{3.7}$$

такие, что для некоторой последовательности $\{\lambda_j\} \subset [0,1]$, имеем $\frac{\varphi}{z-\lambda_j} \in L^2(\mathbb{R})$ и для любых $j \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ существует номер $k \neq j$, такой, что

$$\Big\|\frac{\varphi(z)}{z-\lambda_j} - \frac{\varphi(z)}{z-\lambda_k}\Big\|_2 < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Заметим, что в этой конструкции μ — мера Кларка для функции θ. Заметим также, что $\varphi = 1-\theta+g$ для некоторого $g \in K_\theta$. Так как $1-\theta \notin H^2$ (из формулы (3.6) следует, что $\theta(iy) \to -1$ при $y \to +\infty$), мы заключаем, что $\varphi \notin K_\theta$. Тем не менее, $\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z} \in K_\theta$, так как функции $\frac{\theta(z)-\theta(0)}{z}$ и $\frac{g(z)-g(0)}{z}$ лежат в K_θ.

Как в статье Гриво [17], мы проведем построение индуктивно. А именно, на N-м шаге мы строим $t_1, \dots, t_N \in [0,1]$, $\mu_1, \dots, \mu_N > 0$ и функции θ_N и φ_N, определенные уравнениями

$$i\frac{1+\theta_N(z)}{1-\theta_N(z)} := \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{t_n - z}, \tag{3.9}$$

и,

$$\varphi_N(z) := (1-\theta_N(z))\Bigg[1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n\mu_n}{t_n - z}\Bigg], \tag{3.10}$$

где $c_n > 0$. Последовательности μ_n и c_n будут предполагаться очень быстро стремящимися к нулю.

Ключевая идея конструкции состоит в том, что c_n берутся *положительными*. В этом случае функция $1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n \mu_n}{t_n - z}$ (которая появляется в определении φ_N) является *функцией Герглотца* (т.е. функцией с положительной мнимой частью на $\mathbb{C}_+$) и поэтому она имеет ровно N нулей $\lambda_1^N, \lambda_2^N, \dots \lambda_N^N$, перемежающихся с точками $t_1, \dots, t_N$ (следует отметить, что точки λ_j^N не будут пронумерованы в возрастающем порядке). Выбирая c_n достаточно малыми, мы можем контролировать положение точек λ_j^N.

Заметим, что, по построению, θ_N — рациональная функция степени N; отсюда θ_N — это конечное произведение Бляшке, и модельное пространство K_{θ_N} N-мерно. Мера $\sum_{n=1}^{N} \mu_n \delta_{t_n}$ будет мерой Кларка для K_{θ_N}. Также $\varphi_N \notin K_{\theta_N}$, так как $1 - \theta_N \notin K_{\theta_N}$, в то время как

$$f_j^N(z) := \frac{\varphi_N(z)}{z - \lambda_j^N} \in K_{\theta_N}.$$

Действительно, мы имеем представление вида (3.4),

$$f_j^N(z) = \frac{\varphi_N(z) - \varphi_N(\lambda_j^N)}{z - \lambda_j^N} = \big(1 - \theta_N(z)\big) \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n \mu_n}{(\lambda_j^N - t_n)(z - t_n)}. \qquad (3.11)$$

Предположим, что t_n, μ_n и c_n, $1 \le n \le N-1$, уже выбраны. На N-м шаге мы добавляем точку $t_N \in (0,1)$, ее вес μ_N и коэффициент c_N в следующем порядке. Во-первых, мы возьмем точку t_N очень близкой к некоторому нулю функции φ_{N-1}. Затем мы выберем массу (нагрузку) μ_N настолько малой, что θ_N не отличается сильно от θ_{N-1} вне малой окрестности точки t_N. Наконец, выберем коэффициент c_N еще сильно меньше μ_N, так, что все нули $\lambda_1^N, \dots \lambda_{N-1}^N$ поколения N почти совпадают с соответствующими нулями $\lambda_1^{N-1}, \dots \lambda_{N-1}^{N-1}$ поколения $N-1$, в то время как ноль λ_N^N очень близок к t_N.

Теперь формально установим, что нам нужно для сходимости последовательностей $\{\varphi_N\}$ и $\{f_j^N\}$ (поточечно и по L^2-норме) при N стремящемся к бесконечности.

(I) Выберем $\mu_n > 0$ и $c_n > 0$ так, что $\mu_n < 2^{-n-2}$ и $c_n < 2^{-n-2}$. Эти условия уже дают нам сходимость функций (3.9) и (3.10) к (3.6) и (3.7) соответственно. Также мы будем требовать $|\lambda_j^{N-1} - \lambda_j^N| < 2^{-N}$, $j = 1, \dots, N-1$ (на самом деле нам нужно более сильное условие, см. (3.18) ниже).

(II) Ясно, что для каждого N функции f_j^N, $j = 1, \dots, N$, будут линейно независимыми, поэтому они образуют базис в K_{θ_N}. На N-мерном пространстве K_{θ_N} норма $\|\cdot\|_2$ и норма

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f_j^N \Big\|_1 := \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|$$

эквивалентны, поэтому существует константа A_N, такая, что для любой последовательности $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{j=1}^{N} |\alpha_j| \le A_N \Big\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f_j^N \Big\|_2.$$

Без потери общности мы предполагаем, что $A_N \ge 1$ и последовательность

A_N возрастает. Наше второе условие можно переформулировать так:

$$\|f_j^N - f_j^{N-1}\|_2 < \frac{1}{2^{N+2}A_{N-1}}, \qquad j = 1, \dots, N-1. \tag{3.12}$$

(III) Пусть $l(n)$ — последовательность целых чисел, таких, что $l(n) < n$ и $l(n)$ принимает каждое целое значение бесконечно много раз (напр., $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$). Чтобы получить свойство (3.8), нам нужно третье условие:

$$\|f_{l(N)}^N - f_N^N\|_2 < 2^{-N-1}, \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

3.2.2 Выбор параметров

Предположим, что t_n, μ_n и c_n, $n = 1, \dots, N-1$ уже выбраны. Сначала выберем точку t_N. Пусть ε_N — некоторое маленькое положительное число (а именно, пусть $\varepsilon_N \le 4^{-N-2}A_{N-1}^{-1}$, где A_{N-1} — константа из условия (II) выше), и рассмотрим уравнение

$$1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c_n \mu_n}{t_n - x} = \varepsilon_N. \tag{3.14}$$

Ясно, что уравнение (3.14) имеет $N-1$ вещественных решений, непрерывно зависящих от ε_N. Значит, они могут быть пронумерованы как $x_1, \dots x_{N-1}$ таким образом, что $x_j \to \lambda_j^{N-1}$ при $\varepsilon_N \to 0$.

Возьмем ε_N столь малым, что если мы в качестве t_N возьмем корень уравнения (3.14), ближайший к точке $\lambda_{l(N)}^{N-1}$, то

$$|t_N - \lambda_{l(N)}^{N-1}| < 4^{-3N}\delta_{N-1}^3, \tag{3.15}$$

где

$$\delta_{N-1} = \inf_{1 \le j, n \le N-1} |\lambda_j^{N-1} - t_n|.$$

Теперь положим $\mu_N = \sqrt{\varepsilon_N}$ и определим внутреннюю функцию θ_N уравнением (3.9). Введем дополнительное ограничение на малость ε_N:

$$\left\| \frac{\theta_N(z) - \theta_{N-1}(z)}{z - t_n} \right\|_2 < \frac{\delta_{N-1}}{4^N A_{N-1}}, \qquad n = 1, \dots, N-1. \tag{3.16}$$

Это также возможно из-за непрерывной зависимости этих норм от ε_N. Более точно, по построению t_N мы имеем $t_N \to \lambda_{l(N)}^{N-1}$ при $\varepsilon_N \to 0$, и поэтому t_N отделено от t_n, $1 \le n \le N-1$. Поэтому можно выбрать небольшую окрестность I точки $\lambda_{l(N)}^{N-1}$, такую, что интеграл функции $\left|\frac{\theta_N(t)-\theta_{N-1}(t)}{t-t_n}\right|^2$ по I мал. Как только интервал I фиксирован, мы можем сделать интеграл по $\mathbb{R} \setminus I$ сколь угодно маленьким, так как $\theta_N - \theta_{N-1}$ (так же как $\theta'_N - \theta'_{N-1}$) стремится к нулю равномерно по $\mathbb{R} \setminus I$ при $\varepsilon_N \to 0$.

Наконец, выберем c_N. Рассмотрим уравнение $\varphi_N(x) = 0$, которое эквивалентно равенству

$$1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c_n \mu_n}{t_n - x} + \frac{c_N \mu_N}{t_N - x} = 0.$$

И снова аргумент непрерывности показывает, что мы можем занумеровать N корней λ_j^N этого уравнения (о которых нужно думать как о функциях от c_N) так, чтобы $\lambda_j^N \to \lambda_j^{N-1}$, $j = 1, \dots, N-1$, и $\lambda_N^N \to t_N$ при $c_N \to 0$. Более того, по выбору t_N как решения уравнения (3.14), мы имеем

$$1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c_n \mu_n}{t_n - \lambda_N^N} \to \varepsilon_N$$

Поэтому

$$\lambda_N^N - t_N \sim \frac{c_N \mu_N}{\varepsilon_N} = \frac{c_N}{\sqrt{\varepsilon_N}}, \qquad c_N \to 0. \tag{3.17}$$

Теперь выберем $c_N > 0$ столь малым, что

$$|\lambda_j^N - \lambda_j^{N-1}| < \frac{1}{4^{3N} A_{N-1}} \delta_{N-1}^3, \qquad j = 1, \dots, N-1, \tag{3.18}$$

$$\frac{c_N}{2\sqrt{\varepsilon_N}} \le |\lambda_N^N - t_N| < |\lambda_j^N - t_N|, \qquad j = 1, \dots, N-1, \tag{3.19}$$

и

$$|\lambda_N^N - \lambda_{l(N)}^{N-1}| < 2^{-N-4} \delta_{N-1}^3. \tag{3.20}$$

Последняя оценка возможна из-за (3.15) и (3.17).

3.2.3 Доказательство неравенства (3.12)

Чтобы оценить норму $\|f_j^N - f_j^{N-1}\|_2$, $1 \le j \le N-1$, напишем, используя равенство (3.11),

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{N-1}(z)}{z - \lambda_j^{N-1}} - \frac{\varphi_N(z)}{z - \lambda_j^N} &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c_n \mu_n (1 - \theta_{N-1}(z))}{(t_n - \lambda_j^{N-1})(z - t_n)} \\ &- \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c_n \mu_n (1 - \theta_N(z))}{(t_n - \lambda_j^N)(z - t_n)} - \frac{c_N \mu_N (1 - \theta_N(z))}{(t_N - \lambda_j^N)(z - t_N)}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Обозначим последнее слагаемое в формуле (3.21) за h. Тогда $h \in K_{\theta_N}$ (это воспроизводящее ядро с точностью до коэффициента), и, значит, согласно оценке (3.19),

$$\|h\|_2^2 = \frac{|c_N|^2 \mu_N^2}{|t_N - \lambda_j^N|^2} |\theta_N'(t_N)| = \frac{|c_N|^2 \mu_N}{|t_N - \lambda_j^N|^2} \le \frac{|c_N|^2 \mu_N}{|t_N - \lambda_N^N|^2} \le 4 \mu_N \varepsilon_N.$$

Первые два слагаемых в правой части формулы (3.21) могут быть переписаны как сумма функций

$$g_1(z) = \big(1-\theta_N(z)\big)\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{c_n\mu_n}{(t_n-\lambda_j^{N-1})(z-t_n)} - \frac{c_n\mu_n}{(t_n-\lambda_j^{N})(z-t_n)}\right)$$

и

$$g_2(z) = \sum_{n=1}^{N-1} c_n\mu_n\frac{\theta_N(z)-\theta_{N-1}(z)}{(t_n-\lambda_j^{N-1})(z-t_n)}.$$

Мы можем вычислить норму функции $g_1 \in K_{\theta_N}$, используя теорему Кларка (см. формулу (3.5)):

$$\|g_1\|_2^2 = \pi\sum_{m=1}^{N-1}|g_1(t_m)|^2\mu_m = 4\pi\sum_{m=1}^{N-1}\frac{|\lambda_j^N-\lambda_j^{N-1}|^2|c_m|^2\mu_m}{|t_m-\lambda_j^{N-1}|^2|t_m-\lambda_j^N|^2}.$$

По неравенству (3.18)

$$\|g_1\|_2^2 \le \frac{4\pi\delta_{N-1}^6}{4^{6N}A_{N-1}^2}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{|c_m|^2\mu_m}{|t_m-\lambda_j^{N-1}|^2|t_m-\lambda_j^N|^2}.$$

Заметим, что по определению числа δ_{N-1} мы имеем $|t_m-\lambda_j^{N-1}| \ge \delta_{N-1}$, $1 \le j, m \le N-1$, и из оценки (3.18) следует, что

$$|t_m-\lambda_j^N| \ge |t_m-\lambda_j^{N-1}| - |\lambda_j^N-\lambda_j^{N-1}| > \frac{\delta_{N-1}}{2} \tag{3.22}$$

при $m = 1,\dots,N-1$ и $j = 1,\dots,N$ (чтобы получить (3.22) с $j = N$, применим (3.18) и (3.20)). Так как $\sum_{m=1}^{\infty}|c_m|^2\mu_m < 1$, мы можем заключить, что

$$\|g_1\|_2^2 \le \frac{16\pi\delta_{N-1}^2}{4^{6N}A_{N-1}^2}\sum_{m=1}^{N-1}|c_m|^2\mu_m \le \frac{16\pi\delta_{N-1}^2}{4^{6N}A_{N-1}^2}.$$

Значит, норма $\|g_1\|_2$ не превосходит $4^{-N}A_{N-1}^{-1}$. Наконец, по неравенству (3.16), $\|g_2\|_2 \le 4^{-N}A_{N-1}^{-1}$, и складывая полученные выше оценки, мы получаем (3.12).

3.2.4 Доказательство неравенства (3.13)

Чтобы оценить норму $\|f^N_{l(N)} - f^N_N\|_2$ мы опять используем теорему Кларка:

$$\left\| \frac{\varphi_N}{z-\lambda^N_{l(N)}} - \frac{\varphi_N}{z-\lambda^N_N} \right\|_2^2 = \sum_{m=1}^{N} \left| \frac{\varphi_N(t_m)}{t_m-\lambda^N_{l(N)}} - \frac{\varphi_N(t_m)}{t_m-\lambda^N_N} \right|^2 \mu_m. \qquad (3.23)$$

По неравенствам (3.18) и (3.20), $|\lambda^N_{l(N)} - \lambda^N_N| \le 2^{-N-3}\delta^3_{N-1}$. Теперь первые $N-1$ слагаемых в сумме в (3.23) могут быть оценены, используя неравенства (3.22), как

$$\sum_{m=1}^{N-1} \frac{|\lambda^N_{l(N)} - \lambda^N_N|^2}{|t_m-\lambda^N_{l(N)}|^2|t_m-\lambda^N_N|^2} |\varphi_N(t_m)|^2\mu_m \le 2^{-2N-2}\delta^2_{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} |\varphi_N(t_m)|^2\mu_m.$$

Так как $|\varphi_N(t_m)| = |\theta'_N(t_m)|c_m\mu_m = 2c_m < 2^{-m-1}$, мы можем заключить, что последняя сумма не превосходит 2^{-2N-3}.

Остается рассмотреть слагаемое с номером N. Имеем

$$\left| \frac{\varphi_N(t_N)}{t_N-\lambda^N_N} \right| = \frac{2c_N}{|t_N-\lambda^N_N|} \le 4\sqrt{\varepsilon_N} \le 2^{-N}.$$

Здесь мы использовали левое неравенство из (3.19). Член $\left|\frac{\varphi_N(t_N)}{t_N-\lambda^N_{l(N)}}\right|$ оценивается аналогично. Так как $\mu_N < 2^{-N-2}$, оценка (3.13) доказана.

3.2.5 Сходимость и полнота

Чтобы убедиться в поточечной сходимости $\theta_N(z) \to \theta(z)$ и $\varphi_N(z) \to \varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$, достаточно предположить лишь, что $\sum_n \mu_n < \infty$ и $c_n \to 0$.

По выбору параметров в разделе 3.2.2 последовательность λ^N_j сходится к некоторому λ_j, и отсюда следует, что f^N_j сходится к $\frac{\varphi(z)}{z-\lambda_j}$ поточечно в $\mathbb{C}_+$. С другой стороны, в силу оценки (3.12) последовательность функций

$f_j^N \in H^2$ сходится к некоторой функции f_j в H^2. Так как сходимость в H^2 влечет поточечную сходимость в $\mathbb{C}_+$, мы заключаем, что $f_j(z) = \frac{\varphi(z)}{z-\lambda_j}$.

Теперь мы докажем, что семейство $\{f_j\}$ полно в K_θ. Сначала заметим, что если $g \in K_\theta$,

$$g(z) = \big(1-\theta(z)\big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n\mu_n}{z-t_n}, \qquad g_N(z) := \big(1-\theta_N(z)\big)\sum_{n=1}^{N}\frac{d_n\mu_n}{z-t_n},$$

то $\|g-g_N\|_2 \to 0$, $N \to \infty$. Действительно,

$$g(z)-g_N(z) = \big(\theta_N(z)-\theta(z)\big)\sum_{n=1}^{N}\frac{d_n\mu_n}{z-t_n} - \big(1-\theta(z)\big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n\mu_n}{z-t_n}.$$

По теореме Кларка (см. (3.5)) норма второй суммы равна $\sum_{m=N+1}^{\infty}|d_m|^2\mu_m$, что, очевидно, стремится к нулю при $N \to \infty$, тогда как норма первой суммы мала по предположению (3.16).

Итак, мы построили последовательность $g_N \in K_{\theta_N}$, такую, что $g_N \to g$ в $L^2(\mathbb{R})$. Остается приблизить функции g_N линейными комбинациями функций f_j. Применим рассуждение из статьи [17]. Так как $\{f_j^N\}$ — базис в K_{θ_N}, мы можем записать $g_N = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j f_j^N$. Теперь, используя (3.12), мы получаем

$$\begin{aligned}\|g_N - \sum_{j=1}^{N}\alpha_j f_j\|_2 &\le \sum_{j=1}^{N}|\alpha_j|\sum_{k=N}^{\infty}\|f_j^k - f_j^{k+1}\|_2 \\ &\le \frac{1}{2^N A_N}\sum_{j=1}^{N}|\alpha_j| \le 2^{-N}\|g_N\|_2,\end{aligned}$$

что стремится к 0 при $N \to \infty$. Полнота семейства $\{f_j\}$ доказана.

3.2.6 Конец доказательства теоремы 1.3.3.

Завершим доказательство теоремы 1.3.3. Мы построили последовательность $\{f_j\} = \{\frac{\varphi}{z-\lambda_j}\}$, полную в K_θ. Остается проверить, что $\{f_j\}$ обладает свойством (3.8). Пусть $j \geq 1$ и ε даны. Выберем N таким, что $l(N) = j$ и $2^{-N} < \varepsilon$, что возможно по определению последовательности $l(n)$. Тогда, в силу (3.13), $\|f_j^N - f_N^N\|_2 < 2^{-N-1}$. Также, из оценки (3.12) вытекает, что

$$\|f_N^N - f_N\|_2 \leq \sum_{k=N}^{\infty} \|f_N^k - f_N^{k+1}\|_2 \leq 2^{-N-2}$$

и, аналогично, $\|f_j^N - f_j\|_2 \leq 2^{-N-2}$. Комбинируя эти оценки, получаем $\|f_j - f_N\|_2 \leq 2^{-N}$. $\square$

3.3 Заключительные замечания

Унитарный оператор U в нашей конструкции (так же как в конструкции в статье [17]) имеет очень специальный вид. Заметим, что если $t_n \in \mathbb{R}$ — последовательность, построенная в секции 3.2, то спектр U совпадает с $\{\tau_n\}$, $\tau_n = \frac{t_n - i}{t_n + i}$. Точки t_n выбраны по индукции так, чтобы t_N было близко к некоторым точкам t_n, $1 \leq n \leq N-1$, и поэтому множество $\{t_n\}$ имеет некоторое самоподобие. Естественным будет вопрос о том, какие унитарные операторы имеют гиперциклические одномерные возмущения.

Вопрос 1. Описать циклические унитарные операторы U, такие, что $U + R$ гиперцикличен для некоторого оператора R ранга один.

В частности, неясно, когда спектр $\sigma(U)$ может иметь непустую внутренность или положительную меру.

Вопрос 2. Существует ли циклический унитарный оператор U, такой, что $U + R$ гиперцикличен для некоторого оператора R ранга один и $\sigma(U) = \mathbb{T}$?

Как и в [17], в настоящей работе спектральная мера U — чисто точечная.

Вопрос 3. Построить унитарный оператор U с абсолютно непрерывной или сингулярно непрерывной (т.е. без точечных нагрузок) спектральной мерой на $\mathbb{T}$, такой, что $U+R$ гиперциклический для некоторого оператора R ранга один.

Заметим, что функциональная модель применима к одномерным возмущениям произвольного циклического унитарного оператора с сингулярной спектральной мерой. Поэтому можно надеяться на получение дальнейшей информации о гиперциклических одномерных возмущениях унитарных операторов с использованием этой модели.

Глава 4

Гиперцикличность операторов Теплица

4.1 Вспомогательные утверждения

В этой части мы будем всегда предполагать, что T_Φ — оператор Теплица с символом вида

$$\Phi(z) = p\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi(z), \tag{4.1}$$

где p — полином степени $N \geq 1$ и $\varphi \in H^\infty$. Без потери общности мы предположим также, что $p(0) = 0$.

Сначала покажем, что N-листность Φ в $\mathbb{D}$ необходима для гиперцикличности.

Лемма 4.1.1. *Предположим, что для некоторого $\mu \in \mathbb{C}$ уравнение $\Phi(z) = \mu$ имеет как минимум $N+1$ решение с учетом кратности. Тогда у оператора $(T_\Phi)^* = T_{\overline{\Phi}}$ есть собственный вектор и, в частности, T_Φ не гиперцикличен.*

Доказательство. Обозначим через k_λ ядро Коши (воспроизводящее ядро пространства H^2): $k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}$. Хорошо известно, что для любого антианалитического оператора Теплица мы имеем $T_{\overline{\varphi}} k_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda$.

Предположим для простоты, что уравнение $\Phi(z) = \mu$ имеет $N+1$ различное решение $z_1, z_2, \ldots z_{N+1}$ in $\mathbb{D}$. Построим собственный вектор $(T_\Phi)^*$ в виде $f = \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j k_{z_j}$, где α_j — некоторые комплексные коэффициенты. Если $p(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k z^k$, то $T_{\overline{\Phi}} = T_{\bar{p}(z)+\overline{\varphi(z)}}$, где $\bar{p}(z) = \sum_{k=1}^{N} \bar{c}_k z^k$. Поэтому, используя тот факт, что $p(1/z_j) + \varphi(z_j) = \mu$, мы получаем

$$T_{\overline{\Phi}} f(z) = \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j \left(\frac{\bar{p}(z)}{1-\overline{z_j}z} + \frac{\overline{\varphi(z_j)}}{1-\overline{z_j}z} \right) = \bar{\mu} f(z) + \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j \frac{\bar{p}(z) - \overline{p(1/z_j)}}{1-\overline{z_j}z}. \tag{4.2}$$

Функции

$$\frac{\bar{p}(z) - \overline{p(1/z_j)}}{1-\overline{z_j}z} = \frac{\bar{p}(z) - \bar{p}(1/\overline{z_j})}{1-\overline{z_j}z}, \qquad j = 1, \ldots, N+1,$$

являются многочленами степени $N-1$. Поэтому существуют нетривиальные коэффициенты α_j, такие, что последняя сумма в (4.2) тождественно равна нулю, и поэтому $T_{\overline{\Phi}} f = \bar{\mu} f$.

В случае нулей z_j кратности l_j рассмотрим линейную комбинацию функций $(1-\bar{z}_j z)^{-i}$, $1 \le i \le l_j$.

Пусть $\varphi(z) + p(1/z) - \mu$ имеет в $\mathbb{D}$ корни $z_1, \ldots, z_k$ кратности $l_1, \ldots, l_k$ соответственно, так что $\sum_{j=1}^{k} l_j = l > N$. Тогда $z^n\varphi(z) + z^n p(1/z) - z^n \mu$ — аналитическая функция, равная $\prod\limits_{j=1}^{k} (z-z_j)^{l_j} \psi(z)$, где $\psi(z) \in H^\infty$, и

$$\varphi(z) + p(1/z) - \mu = \frac{\prod\limits_{j=1}^{k} (z-z_j)^{l_j}}{z^n} \psi(z).$$

Ищем собственный вектор для $T_{\overline{\Phi}}$ в виде $f = \sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{i=1}^{l_j} \alpha_{ji}(1-\bar{z}_j z)^{-i}$, то есть такие μ, что

$$P_+\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l_j}\alpha_{ji}\frac{\overline{\varphi(z)}}{(1-\bar{z}_j z)^i}\right)+\bar{p}(z)f(z)=\bar{\mu}f(z),$$

или

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l_i}\alpha_{ji}P_+\left(\frac{\overline{\varphi(z)}+\bar{p}(z)-\bar{\mu}}{(1-\bar{z}_j z)^i}\right)=0. \tag{4.3}$$

На единичной окружности

$$\frac{\overline{\varphi(z)}+\bar{p}(z)-\bar{\mu}}{(1-\bar{z}_j z)^i}=\frac{\overline{\varphi(z)}+\overline{p(1/z)}-\bar{\mu}}{(1-\bar{z}_j z)^i}=\frac{\bar{z}^i\prod\limits_{m=1}^{k}(\bar{z}-\bar{z}_m)^{l_m}\overline{\psi(z)}}{(\bar{z}-\bar{z}_j)^i\bar{z}^n}=$$

$$=z^{n-i}\ \overline{\psi(z)}(\bar{z}-\bar{z}_j)^{l_j-i}\prod_{m=1,\ m\neq j}^{k}(\bar{z}-\bar{z}_m)^{l_m}.$$

Последнее выражение представляет собой z^{n-i}, умноженное на функцию, принадлежащую $\overline{H^2}$, и, значит, проекция этого выражения на пространство Харди — многочлен степени $n-i \leq n-1$. Поэтому, опять же, существуют нетривиальные коэффициенты α_{ji}, такие, что выполняется (4.3), и $T_{\overline{\Phi}}f = \bar{\mu}f$.

□

Далее мы будем изучать спектр $\sigma(T_\Phi)$, точечный спектр $\sigma_p(T_\Phi)$ и собственные векторы оператора T_Φ.

Заметим, что $T_{\bar{z}} = T_{1/z}$ — это оператор обратного сдвига S^* на H^2, то есть

$$T_{\bar{z}} f = \frac{f(z) - f(0)}{z} \qquad \text{и} \qquad T_{\bar{z}^k} f = \frac{1}{z^k}\left(f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j\right).$$

При доказательстве следующего утверждения нам потребуются основные результаты внешне-внутренней факторизации (Неванлинны) функций в пространстве Харди (см., напр., [12, Chapter 2] или [22, Глава IV]).

Лемма 4.1.2. *Предположим, что функция Φ является N-листной в $\mathbb{D}$. Тогда*

$$\sigma(T_\Phi) = \mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N), \qquad \sigma_p(T_\Phi) \supset \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(\mathbb{D})}.$$

Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(\mathbb{D})}$, то соответствующее подпространство собственных векторов имеет размерность N, а собственные векторы вычисляются по формуле

$$f_\lambda(z) = \frac{q(z)}{z^N \Phi(z) - \lambda z^N},$$

где q — произвольный полином степени не больше $N - 1$.

Доказательство. Сначала мы проверим включение $\sigma(T_\Phi) \subset \mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)$. А именно, покажем, что любая $\lambda \in \Phi(\mathbb{D}, N)$ — регулярная точка оператора T_Φ, т. е. уравнение $T_\Phi f - \lambda f = g$ имеет единственное решение $f \in H^2$ для любой функции $g \in H^2$.

Пусть $p(z) = \sum_{k=1}^N c_k z^k$. Тогда уравнение $T_\Phi f - \lambda f = g$ может быть переписано как

$$\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{z^k}\left(f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j\right) + \varphi(z) f(z) - \lambda f(z) = g(z),$$

или, что эквивалентно,

$$f(z)\biggl(\sum_{k=1}^{N} c_k z^{N-k} + z^N\varphi(z) - \lambda z^N\biggr) = z^N g(z) + \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^{N-k+j}.$$

Если $\lambda \in \Phi(\mathbb{D}, N)$, то выражение в скобках (равное $z^N\Phi(z) - \lambda z^N$) имеет ровно N нулей в $\mathbb{D}$ с учетом кратности, скажем, $z_1, z_2, \dots, z_N$. Легко видеть, что $|\Phi(z)-\lambda| \ge \delta > 0$ для некоторого $\delta > 0$ и почти всех $z \in \mathbb{T}$. В самом деле, для достаточно малого числа $\delta > 0$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что круги $B(z_n, \varepsilon)$ лежат внутри $\mathbb{D}$, попарно не пересекаются при различных z_n, и образ $(\Phi - \lambda)\bigl(B(z_n, \varepsilon)\bigr)$ круга $B(z_n, \varepsilon)$ накрывает круг $B(0, \delta)$ с соответствующей кратностью. Таким образом, для $|w| < \delta$ уравнение $\Phi(z)-\lambda = w$ имеет N решений с учетом кратности в $\cup_n B(z_n, \varepsilon)$. Поскольку функция Φ является N-листной, мы заключаем, что $|\Phi(z) - \lambda| \ge \delta$ при $z \in \mathbb{D} \setminus \cup_n B(z_n, \varepsilon)$.

Рассмотрим (единственный) многочлен q степени $N-1$, такой, что $z_j^N g(z_j) + q(z_j) = 0$, $j = 1, \dots N$ (с очевидной модификацией для кратных нулей). При таком выборе q функция

$$f(z) = \frac{z^N g(z) + q(z)}{z^N\Phi(z) - \lambda z^N} \tag{4.4}$$

лежит в H^2. Имеем

$$q(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^{N-k+j} \tag{4.5}$$

(достаточно сравнить коэффициенты Тейлора в правой и левой части равенства (4.4)), и, поэтому, f действительно является единственным решением уравнения $T_\Phi f - \lambda f = g$. Итак, мы показали, что $\sigma(T_\Phi) \subset \mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)$.

Для доказательства обратного включения $\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N) \subset \sigma(T_\Phi)$ нам нужно следующее наблюдение:

Предложение 4.1.3. *Если λ — регулярная точка оператора T_Φ, то $(\Phi - \lambda)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T})$ и факторизация Неванлинны функции $\Psi(z) = z^N\Phi(z) - \lambda z^N \in H^\infty$ не содержит нетривиального сингулярного внутреннего фактора.*

Доказательство предложения. Предположим, что уравнение $T_\Phi f - \lambda f = g$ имеет единственное решение для каждого $g \in H^2$. Тогда f имеет вид (4.4), где q — многочлен вида (4.5).

Пусть $\gamma = \frac{1}{z^N\Phi(z) - \lambda z^N}$.

По теореме Банаха $\|\gamma(z^N g + q)\| \le M\|g\|$ для некоторой константы M. Также из (4.5) следует, что $\|q\|_\infty \le C\|f\|_2 \le C_1\|g\|_2$ для некоторых констант C и C_1, не зависящих от g.

Предположим, что функция γ не ограничена. Тогда существует множество $e \subset \mathbb{T}$ положительной меры, такое, что $|\gamma| > 4M$ на e. Уменьшая, если нужно, множество e, мы можем считать, что $4C_1\sqrt{\mu(e)} < 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Построим внешнюю функцию $g \in H^2$, такую, что

$$|g(z)| = \begin{cases} 1, \ z \in e \\ \varepsilon, \ z \in \mathbb{T} \setminus e. \end{cases}$$

Тогда $\|g\|_2^2 = \mu(e) + \varepsilon^2\mu(\mathbb{T}\ e)$ и $\|q\|_\infty \leq C_1(\sqrt{\mu(e)+\varepsilon^2\mu(\mathbb{T}\ e)}) \leq 2C_1\sqrt{\mu(e)}$, если число ε достаточно мало. Следовательно, $|z^N g(z) + q(z)| \geq 1 - 2C_1\sqrt{\mu(e)} \geq \frac{1}{2}$ при $z \in e$. Имеем

$$\|\gamma(z^N g + q)\|_2^2 \geq \int\limits_e |\gamma(z^N g + q)|^2 \geq \frac{\mu(e)}{4} 16M^2 = 4\mu(e)M^2.$$

С другой стороны,

$$\|\gamma(z^N g + q)\|_2^2 \leq M^2(\mu(e) + \varepsilon^2\mu(\mathbb{T}\setminus e)).$$

Таким образом,

$$\mu(e) + \varepsilon^2\mu(\mathbb{T}\setminus e) \geq 4\mu(e),$$

что неверно при достаточно малом ε.

Поэтому $\frac{\|\gamma(z^N g+q)\|_{L^2}}{\|g\|_{L^2}} > M$ при малых ε. Отсюда мы делаем вывод, что $(z^N\Phi(z) - \lambda z^N)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Если Ψ имеет нетривиальный сингулярный внутренний фактор, то, взяв $g \equiv 1$, получаем функцию f вида $f = \frac{u_1 B_1}{u_2 B_2 I}$, где u_1, u_2 — внешние функции, B_1, B_2 — произведения Бляшке и I — нетривиальная сингулярная внутренняя функция. Поэтому $f \notin H^2$, противоречие. Предложение доказано.

Вернемся теперь к доказательству включения $\mathbb{C}\setminus\Phi(\mathbb{D},N) \subset \sigma(T_\Phi)$. Пусть $\lambda \notin \Phi(\mathbb{D},N)$. Покажем, что $\lambda \in \sigma(T_\Phi)$. Сейчас мы предположим, что $(\Phi-\lambda)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T})$ и что факторизация Неванлинны функции Ψ не содержит нетривиального сингулярного внутреннего фактора (иначе из доказанного выше предложения следует, что $\lambda \in \sigma(T_\Phi)$).

Сперва предположим, что $\lambda \notin \Phi(\mathbb{D})$. Тогда $\Psi \neq 0$ в $\mathbb{D}$, Ψ не содержит сингулярного внутреннего фактора, и, поэтому, Ψ является внешней функцией в H^∞. Так как $\Psi^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T})$, мы заключаем, что $\Psi^{-1} \in H^\infty(\mathbb{D})$. Поэтому функция

$$f_\lambda(z) = \frac{Q(z)}{\Psi(z)} = \frac{Q(z)}{z^N \Phi(z) - \lambda z^N} \tag{4.6}$$

лежит в H^2 и является собственным вектором оператора T_Φ при любом выборе многочлена Q степени не более $N-1$.

Наконец, если $\lambda \in \Phi(\mathbb{D}) \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)$, то Ψ имеет m нулей $z_1, z_2, \ldots, z_m$ в $\mathbb{D}$ с учетом кратности, где $m < N$ (напомним, что функция Φ N-листна в $\mathbb{D}$). Поэтому для любого полинома Q с нулями соответствующей кратности z_j функция (4.6) будет собственной функцией оператора T_Φ. Значит, $\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N) \subset \sigma(T_\Phi)$.

Включение $\mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(\mathbb{D})} \subset \sigma_p(T_\Phi)$ доказывается просто. Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(\mathbb{D})}$, то для некоторого $\delta > 0$ имеем $|\Psi(z)| \geq \delta$, $z \in \mathbb{D}$, откуда $\Psi^{-1} \in H^\infty(\mathbb{D})$, и, поэтому, любая функция f вида (4.6) является собственным вектором оператора T_Φ. □

Замечание 4.1.4. Заметим, что мы показали в доказательстве утверждения 4.1.2, что $\sigma_p(T_\Phi)$ содержит все точки $\lambda \in \Phi(\mathbb{D}) \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)$, такие, что $(\Phi - \lambda)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T})$ и Ψ не имеет сингулярного внутреннего фактора (например, если существует $r \in (0,1)$, $\delta > 0$, такая, что $|\Psi(z)| \geq \delta$, $r < |z| < 1$).

4.2 Доказательства основных результатов

Начнем с доказательства необходимости в теоремах 1.4.1 и 1.4.2.

Доказательство утверждения 1 в теоремах 1.4.1 и 1.4.2. По утверждению 4.1.1, если T_Φ гиперциклический, то функция Φ N-листна в $\mathbb{D}$. В частности, функция Φ однолистна в $\mathbb{D}$, когда $N = 1$. Свойство (a) доказано.

Ясно, что если $\widehat{\mathbb{D}} \subset \Phi(\mathbb{D}, N)$, то для любого $\zeta \in \mathbb{T}$, для которого существует некасательное граничное значение $\Phi(\zeta)$, мы имеем $|\Phi(\zeta)| \le 1$. Действительно, иначе существуют $z_1, \dots z_N \in \mathbb{D}$, такие, что $\Phi(z_j) = \Phi(\zeta)$ и уравнение $\Phi(z) = w$ будет иметь не менее $N+1$ решения для некоторого w, достаточно близкого к $\Phi(\zeta)$. Поэтому $|\Phi| \le 1$ почти всюду на $\mathbb{T}$, и значит, $\|T_\Phi\| \le 1$, что противоречит гиперцикличности.

Наконец, если оператор T_Φ гиперцикличен, то $\sigma(T_\Phi) \cap \mathbb{T} \ne \emptyset$. По утверждению 4.1.2, $\sigma(T_\Phi) = \mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}, N)$ и, в частности, $\sigma(T_\Phi) = \mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})$ при $N = 1$. Это завершает доказательство свойства (b). $\square$

Следующее утверждение играет ключевую роль в доказательстве достаточных условий в теоремах 1.4.1 и 1.4.2.

Теорема 4.2.1. *1. Пусть функция $h \in A(\mathbb{D})$ инъективна в $\overline{\mathbb{D}}$ (т. е. однолистна вплоть до границы). Тогда система $\{h^k\}_{k \ge 0}$ полна в H^2.*

2. Пусть $h \in A(\mathbb{D})$ N-листна в $\overline{\mathbb{D}}$ и, более того, предположим, что для любого $w \in h(\overline{\mathbb{D}})$ уравнение $h(z) = w$ имеет ровно N решений в $\overline{\mathbb{D}}$. Тогда система функций $\{z^j h^k : k \ge 0, j = 0, 1, \dots, N-1\}$ полна в H^2.

Доказательство. 1. Пусть $\Omega = h(\mathbb{D})$, $\Gamma = \partial\Omega$, $g = h^{-1} : \Omega \to \mathbb{D}$. Ясно, что g допускает продолжение до непрерывной функции на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Так как Γ — замкнутая жорданова кривая (без самопересечений), дополнение $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно и поэтому по теореме Мергеляна любая функция f в $H^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ может быть равномерно приближена аналитическими полиномами, $p_n(u) \to f(u)$ равномерно в $u \in \overline{\Omega}$. Поэтому $p_n(h(z)) \to f(h(z))$ равномерно по $z \in \overline{\mathbb{D}}$, откуда любая функция из $H^\infty \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ может быть приближена полиномами от h.

2. Нетрудно показать, что условия влекут, что для любой функции f, достаточно гладкой вплоть до границы (скажем, $f \in C^N(\overline{\mathbb{D}})$), существуют функции $f_j \in H^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, такие, что

$$f(z) = f_0(h(z)) + z f_1(h(z)) + \cdots + z^{N-1} f_{N-1}(h(z)). \tag{4.7}$$

Здесь, как выше, $\Omega = h(\mathbb{D})$. Действительно, для точки w с N различными прообразами $z_1, \ldots, z_N$ рассмотрим систему линейных уравнений $f(z_l) = \sum_{j=0}^{N-1} z_l^j f_j(w)$, $l = 1, 2, \ldots, N$, с неизвестными $f_j(w)$. Так как z_l — локально аналитические функции от w, мы заключаем, что f_j локально аналитические в таких точках w; легко показать, что функции f_j имеют устранимые особенности в w в случае кратных нулей и, значит, будут аналитическими во всем Ω и непрерывными вплоть до границы.

Теперь остается заметить, что «точная N-листность вплоть до границы» влечет, что Ω является жордановой областью, $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно и по теореме Мергеляна каждая функция f_j является равномерным пределом многочленов $p_{j,m}$, $m \to \infty$, в $\overline{\Omega}$. Поэтому сумма $\sum_{j=0}^{N-1} z^j p_{j,m}(h(z))$

сходится к f равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$. Следовательно, любая достаточно гладкая функция f принадлежит равномерному замыканию в $\overline{\mathbb{D}}$ линейной оболочки $\{z^j h^k : k \geq 0, j = 0, 1, \ldots, N-1\}$. Значит, эта система полна также в H^2. $\square$

Замечание 4.2.2. Задача полноты систем $\{h^k\}_{k\geq 0}$ в $H^2(\mathbb{D})$ или (по существу) эквивалентная задача плотности полиномов в пространстве Харди $H^2(\Omega)$, $\Omega = h(\mathbb{D})$, является в общем случае глубокой проблемой, для которой не существует точных ответов (см. [31, 8, 5]). Ясно, что однолистность функции h в $\mathbb{D}$ является необходимой. С другой стороны, Кохран [8] показал, что если полиномы плотны в $H^2(\Omega)$ и $h \in A(\mathbb{D})$, то Ω — жорданова область, и поэтому h однолистна в $\mathbb{D}$ вплоть до границы. В общем случае результат Бурдона [5] говорит о том, что из плотности полиномов в $H^2(\Omega)$ вытекает, что h однолистна почти везде на $\mathbb{T}$.

Доказательство утверждения 2 теорем 1.4.1 и 1.4.2. Сначала рассмотрим случай $N = 1$, $p(z) = \gamma z$. Так как по утверждению 4.1.2 $\sigma_p(T_\Phi) \supset \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(\mathbb{D})}$, из условия (b') следует то, что существуют открытые множества $U_1 \subset \mathbb{D}$ и $U_2 \subset \widehat{\mathbb{D}}$, состоящие из собственных чисел. По критерию Годфруа–Шапиро нам остается показать, что соответствующие собственные векторы полны в H^2. Зафиксируем некоторое число $\lambda_0 \in U_1$, и пусть

$$h(z) = \frac{z}{\gamma - \lambda_0 z + z\varphi(z)} = \frac{1}{\Phi(z) - \lambda_0}.$$

По условиям на Φ мы имеем, что $h \in A(\mathbb{D})$ и h инъективна в $\overline{\mathbb{D}}$. Теперь заметим, что для λ в небольшой окрестности $\{|\lambda-\lambda_0|<\delta\}$ точки λ_0

$$f_\lambda(z)=\frac{1}{\gamma-\lambda z+z\varphi(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_0)^k z^k}{(\gamma-\lambda_0 z+z\varphi(z))^{k+1}},$$

и ряд сходится равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$, так как функция $|\gamma-\lambda_0 z+z\varphi|$ ограничена в $\overline{\mathbb{D}}$. Поэтому, если $f\perp f_\lambda$, $|\lambda-\lambda_0|<\delta$, то

$$f\perp(\gamma-\lambda_0 z+z\varphi(z))^{-1}h^k,\qquad k\geq 0.$$

По первой части утверждения 4.2.1 система $\{h^k\}_{k\geq 0}$ полна в H^2. Дополнительный множитель $1/(\gamma-\lambda_0 z+z\varphi(z))$ является обратимым элементом в H^∞, поэтому система

$$\{(\gamma-\lambda_0 z+z\varphi(z))^{-1}h^k\}_{k\geq 0}$$

также полна. Мы заключаем, что собственные вектора, соответствующие $\lambda\in U_1$, полны. Доказательство для $\lambda\in U_2$ полностью аналогично.

Теперь пусть $N>1$. Как раньше, (b') гарантирует нам существование открытых множеств $U_1\subset\mathbb{D}$ и $U_2\subset\widehat{\mathbb{D}}$, такие, что $U_1,U_2\subset\mathbb{C}\setminus\overline{\Phi(\mathbb{D})}=\mathbb{C}\setminus\overline{\Phi(\mathbb{D},N)}$ и, поэтому, состоящие из собственных векторов. Зафиксируем $\lambda_0\in U_1$. В этом случае имеем, по утверждению 4.1.2, N линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_0,

$$f_{\lambda_0,j}(z)=\frac{z^j}{z^N\Phi(z)-\lambda_0 z^N},\qquad j=0,1,\dots,N-1.$$

Используя, как ранее, разложение Тейлора для λ близких к λ_0, мы заключаем, что если функция f ортогональна собственным векторам, соответствующим λ из небольшой окрестности точки λ_0, то

$$f\perp\frac{z^j h^k(z)}{z^N\Phi(z)-\lambda_0 z^N},\qquad k\geq 0,\ 0\leq j\leq N-1,\tag{4.8}$$

где

$$h(z) = \frac{z^N}{z^N\Phi(z) - \lambda_0 z^N} = \frac{1}{\Phi(z) - \lambda_0}.$$

По предположениям на Φ, функция h является N-листной, и для каждого $w \in h(\overline{\mathbb{D}})$ уравнение $h(z) = w$ имеет ровно N решений в $\overline{\mathbb{D}}$ с учетом кратности. Поэтому по части 2 утверждения 4.2.1 система $\{z^j h^k : k \geq 0, j = 0, 1, \ldots, N-1\}$ полна в H^2. Мы заключаем, что любая функция f, удовлетворяющая (4.8), равна нулю. $\square$

4.3 Характеризация Шкарина трехдиагональных теплицевых операторов

В [34] Шкарин охарактеризовал гиперциклические операторы Теплица с символами вида $\Phi(z) = \frac{a}{z} + b + cz$:

Предложение 4.3.1. [34, Proposition 5.10] Оператор Теплица T_Φ с символом $\Phi(z) = \frac{a}{z} + b + cz$ гиперциклический тогда и только тогда, когда

(*a*) $|a| > |c|$;

(*b*) $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ и $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$.

На самом деле в статье [34] условие (*b*) записано как $\min_{z\in\mathbb{T}} |\Phi(z)| < 1 < \max_{z\in\mathbb{T}} |\Phi(z)|$, но это условие, очевидно, неверно. Если мы возьмем $a = 2$, $b = c = 0$, то оператор $T_\Phi = 2S^*$ гиперцикличен, но оценка $\min_{z\in\mathbb{T}} |\Phi(z)| < 1$ не выполняется. Тем не менее, из доказательства ясно, что автор имел в виду наше условие (*b*).

Мы покажем, как вывести этот результат из теоремы 1.4.1. Ясно, что Φ однолистна в $\mathbb{D}$ если и только если $|a| \geq |c|$, а в $\overline{\mathbb{D}}$ — тогда и только тогда, когда $|a| > |c|$. Поэтому достаточность (a) и (b) немедленно следует из утверждения 2 теоремы 1.4.1.

Теперь покажем необходимость условий (a) и (b). Однолистность функции Φ влечет, что $|a| \geq |c|$. Чтобы доказать строгое неравенство, применим рассуждение из [34]: если $|a| = |c|$, то T_Φ является нормальным оператором, а значит, не является гиперциклическим. В общем случае этот аргумент неприменим. С другой стороны, в [34] случай $|a| < |c|$ исключен путем обращения к теории гипонормальных операторов. Вероятно, такого рода рассуждения не могут быть использованы для операторов более общего вида $T_{\gamma\bar{z}+\varphi(z)}$.

Свойство $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ очевидно. Чтобы показать, что $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$, нужно опять использовать рассуждение из [34], использующее специальный вид символа. Предположим, напротив, что $\sigma(T_\Phi) = \mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D}) \subset \{z : |z| \geq 1\}$. Заметим, что в нашем случае спектр $\sigma(T_\Phi)$ является выпуклым множеством (некоторым эллипсом), и поэтому может быть отделен от единичного круга. Значит, существует $\theta \in \mathbb{R}$, такое, что $\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\Phi(z)) \geq 1$, $z \in \mathbb{T}$. Поэтому

$$\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}T_\Phi f, f) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\Phi)|f|^2 dm \geq \|f\|_2^2,$$

и, следовательно, T_Φ является расширяющим оператором. Однако в общем случае множество $\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})$ не обязано быть выпуклым.

4.4 Открытые вопросы

Завершим эту главу некоторыми открытыми вопросами.

Вопрос 1. Пусть $\Phi = \frac{\gamma}{z} + \varphi(z)$ и предположим, что T_Φ гиперцикличен. Следует ли отсюда, что

$$\mathbb{D} \cap \sigma(T_\Phi) = \mathbb{D} \cap \big(\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})\big) \neq \emptyset?$$

Это верно в случае теплицева оператора $T_{\overline{\psi}}$ с антианалитическим символом так как, если $\sigma(T_{\overline{\psi}}) \cap \mathbb{D} = \emptyset$, то $|\psi| > 1$ в $\mathbb{D}$, и поэтому его обратный $T_{1/\overline{\psi}}$ является сжатием, противоречие. В случае $\Phi(z) = \frac{a}{z} + b + cz$ другой аргумент был предложен Шкариным (см. предыдущий параграф). Тем не менее, эти методы не кажутся применимыми в общем случае.

С другой стороны, в общем случае нет препятствий для того, чтобы гиперциклический оператор T удовлетворял условию $\sigma(T) \cap \mathbb{D} = \emptyset$, а пересечение $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ может быть даже одноточечным множеством. Отвечая на вопрос А. Д. Баранова, С. Гриво построила пример гиперциклического оператора T, такого, что $\sigma(T) = \overline{B(2,1)}$ и $\sigma_p(T) = B(2,1)$ (под $B(z_0, r)$ мы понимаем круг радиуса r с центром в точке z_0).

Вопрос 2. Является ли однолистность Φ вплоть до границы необходимой в утверждении 2 теоремы 1.4.1 при предположении $\varphi \in A(\mathbb{D})$? По всей видимости, это необходимо для полноты функций вида $\{h^k\}_{k \geq 0}$ для каждой конкретной функции $h = \frac{1}{\Phi - \lambda_0}$. Тем не менее, кажется, что это не является необходимым для полноты всех собственных векторов с большими или малыми собственными значениями. А именно, верно следующее:

предположим, что Φ однолистно в $\mathbb{D}$ и $\mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(\mathbb{D})}$ состоит из конечного числа связных компонент U_j, $1 \le j \le m$. Если каждая компонента U_j пересекает $\mathbb{D}$ и $\widehat{\mathbb{D}}$, то T_Φ гиперцикличен. До какой степени эти условия необходимы?

Вопрос 3. Каковы достаточные условия гиперцикличности в случае, когда «листность» Φ меняется внутри $\mathbb{D}$? Можно показать, что представление (4.7) не должно быть больше верным. Поэтому неясно, какая задача аппроксимации соответствует применению критерия Годфруа–Шапиро в этом случае.

Публикации автора по теме диссертации

1. A. Baranov, A. Lishanskii, *On S. Grivaux' example of a hypercyclic rank one perturbation of a unitary operator* // Arch. Math. **104** (3). 2015. P. 223–235.

2. А. А. Лишанский, *Существование гиперциклических подпространств у операторов Теплица* // Уфимский мат. журнал, **7** (2). 2015. С. 109–113.

3. A. Baranov, A. Lishanskii, *Hypercyclic Toeplitz operators* // Results Math. **70** (3). 2016. P. 337–347.

Литература

[1] A. D. Baranov, D. V. Yakubovich, *Completeness and spectral synthesis of nonselfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators* // Adv. Math. **302**. 2016. P. 740–798.

[2] F. Bayart, S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators* // Trans. Amer. Math. Soc. **358** (11). 2006. P. 5083–5117.

[3] F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge University Press. 2009. 352 p.

[4] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théoreme elementaire sur les fonctions entiéres* // C.R. Acad. Sci. Paris, **189**. 1929. P. 473–475.

[5] P. S. Bourdon, *Density of the polynomials in Bergman spaces* // Pacific J. Math., **130** (2). 1987. P. 215–221.

[6] P. S. Bourdon, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors* // Proc. Amer. Math. Soc., **118** (3). 1993. P. 845–847.

[7] P. S. Bourdon, J. H. Shapiro, *Hypercyclic operators that commute with the Bergman backward shift* // Trans. Amer. Math. Soc., **352**. 2000. P. 5293–5316.

[8] J. G. Caughran, *Polynomial approximation and spectral properties of composition operators on* H^2 // Indiana Univ. Math. J., **21** (1). 1971. P. 81–84.

[9] K. C. Chan, J. H. Shapiro, *The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions* // Indiana Univ. Math. J., **40** (4). 1991. P. 1421–1449.

[10] D. N. Clark, *One-dimensional perturbations of restricted shifts* // J. Anal. Math. **25**. 1972. P. 169–191.

[11] E. B. Davies, *Linear Operators and Their Spectra*, Cambridge Stud. Adv. Math., **106**, Cambridge University Press. 2007. 451 p.

[12] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press. New York. 1970. 258 p.

[13] G. Godefroy, J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* // J. Funct. Anal., **98**. 1991. P. 229–269.

[14] S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators*, McGraw-Hill. New York. 1966. 199 p.

[15] M. Gonzalez, F. Leon-Saavedra, A. Montes-Rodriguez, *Semi-Fredholm Theory: Hypercyclic and supercyclic subspaces* // Proc. London Math. Soc., **81** (3). 2000. P. 169–189.

[16] S. Grivaux, *A new class of frequently hypercyclic operators* // Indiana Univ. Math. J., **60**. 2011. P. 1177–1201.

[17] S. Grivaux, *A hypercyclic rank one perturbation of a unitary operator* // Math. Nachr., **285** (5-6). 2012. P. 533–544.

[18] K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators* // Bull. of Amer. Math. Soc., **36** (3). 1999. P. 345–381.

[19] K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Springer. Berlin. 2011. 388 p.

[20] В. В. Капустин, *Одномерные возмущения сингулярных унитарных операторов* // Зап. научн. семин. ПОМИ, **232**. 1996. С. 118–122.

[21] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators* // PhD thesis, Univ. of Toronto. 1982.

[22] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p*, М.: Мир. 1984. 368 с.

[23] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families* // J. Anal. Math., **2**. 1952. P. 72–87.

[24] Q. Menet, *Hypercyclic subspaces and weighted shifts* // Adv. Math., **255**. 2014. P. 305–337.

[25] A. Montes-Rodriguez, *Banach spaces of hypercyclic vectors* // Mich. Math. J., **43**. 1996. P. 419–436.

[26] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, М.: Наука. 1980. 383 с.

[27] N. K. Nikolski, *Operators, Functions, and Systems: an Easy Reading*, Math. Surveys Monogr., **92–93**, AMS, Providence, RI. 2002.

[28] А. Г. Полторацкий, *Граничное поведение псевдопродолжимых функций* // Алгебра и анализ **5** (2). 1993. С. 189–210.

[29] C. Read, *A short proof concerning the Invariant Subspace Problem* // J. London Math. Soc., **34**. 1986. P. 335–348.

[30] S. Rolewicz, *On orbits of elements* // Studia Math **32**. 1969. P. 17–22.

[31] D. Sarason, *Weak-star generators of H^∞* // Pacific J. Math., **17** (3). 1966. P. 519–528.

[32] S. Shkarin, *A hypercyclic finite rank perturbation of a unitary operator* // Math. Ann., **348**. 2010. P. 379–393.

[33] S. Shkarin, *On the set of hypercyclic vectors for the differentiation operator* // Isr. J. Math., **180**. 2010. P. 271–283.

[34] S. Shkarin, *Orbits of coanalytic Toeplitz operators and weak hypercyclicity* // arXiv:1210.3191.

Оглавление