Отзыв научного руководителя о диссертации И. М. Васильева

«Граничная гладкость, K-замкнутость и разложения Литлвуда-Пэли»,

представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01-вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации решается несколько важных задач из дисциплины, которую принято сейчас называть «гармонический анализ в евклидовых пространствах». Я скажу немного о каждой, придерживаясь (не очень твердо) порядка, в каком они решались, а не того порядка, в каком они изложены в диссертации.

Две задачи относятся к представлению классов Харди H_p в n-мерном евклидовом пространстве в виде классов гармонических векторных полей $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ в полупространстве размерности n+1. Как известно, такое представление возможно лишь при $p>(n-1)/n$. Граничные значения функций $f_1, \ldots, f_n$ связаны с граничными значениями функции f_0 преобразованиями Рисса.

В связи с одним результатом, относящимся к размерности n=1 и очень эффективно применявшимся в теории интерполяции одномерных классов Харди, возник вопрос о связи условия $\log f_0 \in$ BMO (для положительных функций f_0) с некоторыми поточечными оценками преобразований Рисса функции f_0 или ее положительных степеней. Достаточно полный ответ на этот вопрос получен И. М. Васильевым и изложен в главе 4 диссертации. Интересно, что и у этого результата уже нашлись применения в теории интерполяции (Д. В. Руцкий).

Граничные значения гармонического векторного поля из H_p представляют собой элемент прямой суммы n+1 копии пространства L_p, с равенством норм. Такое изометрическое вложение шкалы классов Харди в шкалу лебеговых пространств вызывает вопрос о том, имеет ли здесь место так называемая K-замкнутость – некое просто формулируемое свойство, очень полезное в теории интерполяции. Снова было хорошо известно, что это свойство имеет место в размерности 1, однако в больших размерностях вопрос был открыт для показателей, меньших единицы. Ответ оказался положительным, этот результат изложен в главе 3 диссертации.

В короткой пятой главе диссертации приведен интересный и, вероятно, полезный технический результат, гласящий, что для описания пространств Лизоркина-Трибеля на n-мерном евклидовом пространстве пригодны произвольные последовательности мультипликаторов, удовлетворяющие условиям наподобие условий теоремы Хёрмандера-Михлина. Не вдаваясь в подробности, отмечу, что, как и в двух предыдущих случаях, в качестве мотивировки здесь снова выступают некоторые оценки из размерности 1.

Все перечисленные результаты основаны на методах, характерных для теории классов Харди и теории сингулярных интегральных операторов. Их доказательства требуют тщательной и сложной работы. Все это относится и к главе 2, однако про нее следует