ОТЗЫВ

официального оппонента, кандидата физико-математических наук В. Г. Лысова на диссертацию Алексея Николаевича Медведева на тему «Локальная гладкость аналитической функций в сравнении с гладкостью ее модуля», представленную в диссертационный совет Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация посвящена исследованию вопроса о связи между гладкостью функции, аналитической в круге или верхней полуплоскости, и гладкостью ее модуля. При этом изучается локальная постановка: как по гёльдеровой гладкости модуля аналитической функции в граничной точке оценить гладкость самой функции в этой точке? В диссертации решаются следующие задачи:

1. Доказано, что если функция φ на единичной окружности имеет гладкость порядка не выше двух в точке, то интегральная гладкость внешней функции с модулем φ может упасть в этой точке не более чем в два раза.

2. Для каждого $b \in [1,2]$ на функцию φ на единичной окружности, имеющую гладкость меньше 1 в точке, получены достаточные условия, обеспечивающие для внешней функции с модулем φ падение интегральной гладкости в этой точке не более чем в b раз. Эти достаточные условия точны по b.

3. Доказано, что для внешних функций в верхней полуплоскости для случая гладкости меньше 1 результат о падении интегральной гладкости в точке не более чем в два раза справедлив для интегралов по отрезкам ограниченной длины.

Первый результат о сравнении гладкости внешней функции F в единичном круге с гладкостью ее модуля φ был доказан, но не опубликован, Л. Карлесоном и С. Якобсом в 50-е годы прошлого столетия. В 1970 году этот результат был переоткрыт и усилен в работе В. П. Хавина и Ф. А. Шамояна, где доказано, что если $\alpha \in (0,1]$ и $\varphi \in \mathrm{Lip}_\alpha$ на окружности, то $F \in \mathrm{Lip}_{\alpha/2}$. В 1977 году этот результат распространен на случай $\alpha \in (1,2)$ Дж. Бреннаном , а в 1988 году — на случай $\alpha > 0$ Н. А. Широковым. В 2013 году им же доказано, что если помимо $\varphi \in \mathrm{Lip}_\alpha$ выполнено $\ln \varphi \in \mathrm{L}^p$, при $p \in (1,\infty)$, то для F можно гарантировать не в два, а в $\frac{p+1}{p}$ раз меньшую гладкость.

Перечисленные выше результаты являются глобальными. Локальные постановки, которые рассматриваются в диссертации, являются новыми, но естественными и очень интересными. Метод исследования основан на технике из теории сингулярных интегральных операторов типа Кальдерона–Зигмунда. Ключевую роль играет выбор определения гладкости функции в точке. В диссертации гладкость в точке x для функции F измеряется в терминах средних разностей $\varkappa_r(F,h)$ (для гладкости порядка [1,2]) или средних осцилляций $\Omega_r(F,I)$ (для гладкости порядка меньше 1) по дугам I, содержащим x, где $r > 1$ и

$$\varkappa_r(f,h) := \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\Delta^2 f(x,t)|^r dt\right)^{1/r}, \quad \Omega_r(f,I) := \inf_c \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(t)-c|^r dt\right)^{1/r}.$$