На правах рукописи

Воротов Алексей Александрович

Свойства времен пребывания для дискретных марковских процессов

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2014

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель:

Валландер Сергей Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики
математико-механического факультета
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Официальные оппоненты:

Харламов Борис Павлович
доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией методов анализа надежности ФГБУН
Института проблем машиноведения Российской академии наук

Лифшиц Борис Анатольевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент факультета экономики НОУ ВПО
«Европейский университет в Санкт-Петербурге»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова»

Защита состоится “_____” ____________ 2014 года в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу:
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук: www.pdmi.ras.ru

Автореферат разослан “_____” ____________ 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В 1939 г. П. Леви в [11] было введено понятие локального времени для броуновского движения. Эта и две последующих его работы [9], [10] положили начало теории локальных времен случайных процессов, интенсивное развитие которой началось с середины 60-х годов. Достаточно подробный и всесторонний обзор важнейших результатов, связанных с броуновским локальным временем, можно найти в [1].

Приведем наиболее удобное и интуитивно понятное представление для локального времени $\mathfrak{t}(t,x)$ процесса броуновского движения $w(s)$ в точке x за время t:

$$\mathfrak{t}(t,x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{I}_{[x,x+\varepsilon)}(w(s))ds$$

с вероятностью единица для всех $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$.

Как видно, $\mathfrak{t}(t,x)$ можно рассматривать как случайный процесс по параметру x. Д. Рэй в [12] показал, что если в качестве t взять независимый от $w(s)$ случайный экспоненциальный момент времени, процесс $\mathfrak{t}(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, при условии $w(t) = z$ будет марковским.

В 1982 г. С.С. Валландером в серии работ [3]–[6] была предпринята попытка перенести результат Д. Рэя с броуновского движения на однородные марковские цепи. Аналогом локального времени в данном случае служит время пребывания $\tau(v)$ цепи $X(t)$ в состоянии v до не зависящего от цепи экспоненциального момента θ, а марковское свойство рассматривается относительно условных мер $\mathbf{P}_{ab}$, фиксирующих начало и конец траектории ($X(0) = a, X(\theta) = b$). Время пребывания $\tau(\cdot)$ представляет собой случайное поле, определенное на пространстве состояний цепи. Тем не менее, говоря о марковости, мы не имеем в виду марковские случайные поля, а понимаем марковское свойство по-другому. Марковским случайным полем в его классическом понимании время пребывания не является.

Трудность обобщения результата Д. Рэя заключается в том, что пространство состояний $\mathbb{A}$ цепи $X(t)$, вообще говоря, может не иметь каких-либо дополнительных структур, а потому само понятие марковского свойства для τ, равно как и понятия «прошлого», «настоящего» и «будущего», определить не всегда возможно. Тем не менеее, в относительно простых случаях, таких как блуждание по целым числам или вообще по дереву, никаких проблем с определением не возникает.

Оказывается, что в случае дискретного времени ($t = 0, 1, 2, \dots$) даже для простейшего симметричного случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ процесс $\tau(v)$ не является марковским. В случае же непрерывного времени ($t \geq 0$) удается проверить марковское свойство $\tau(v)$ для блуждания по дереву.

В тезисах [7] С.С. Валландера 1985 г. высказывается предположение, что последний результат можно обобщить на случай блуждания по графу, который при удалении одной из вершин, называемой «необходимой» (и понимаемой как «настоящее»), распадается на компоненты связности (понимаемые как «прошлое» и «будущее»). Под марковостью времени пребывания в данном случае понимается независимость относительно условных мер $\mathbf{P}_{ab}$ значений τ на этих компонентах при фиксированном значении $\tau(v)$. Доказательство этого утверждения приводится в диссертации.

Кроме того, в [7] рассматривается пример, когда «настоящее» сосредоточено не в одной вершине, а в нескольких. В [2] для неоднородных цепей с дискретным временем приводятся формулы для описания конечномерных распределений поля времени пребывания. Различные обобщения полученных в этих работах результатов также являются важной частью диссертации.

Цель работы. Диссертация посвящена изучению свойств времен пребывания для дискретных марковских процессов. Основная цель — проверка марковости времени пребывания в различных ситуациях, в том числе когда «настоящее» сосредоточено в нескольких вершинах и в неоднородном случае.

Методы исследований. В диссертационной работе используется подход, позволяющий выражать конечномерные распределения времени пребывания через функцию Грина некоторого уравнения, применяемый к локальному времени еще в известной монографии К. Ито и Г. Маккина [8]. Для самих функций Грина используется возможность отслеживания их изменений при изменении графа переходов исходной марковской цепи.

Основные результаты.

1. Доказана марковость времени пребывания для случая, когда «настоящее» сосредоточено в одной вершине.

2. Доказано, что для «настоящего», состоящего из нескольких вершин, поле

времени пребывания будет обладать марковским свойством в том и только в том случае, когда одна из этих вершин необходима.
3. Показана равносильность марковости времени пребывания и экспоненциальности момента остановки.
4. Для простейшей неоднородной цепи, когда процесс до и после некоторого неслучайного момента T ведет себя как однородная цепь, но с разными интенсивностями переходов, обосновано отсутствие марковости времени пребывания.
Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В ней впервые доказана марковость времени пребывания в каждой необходимой вершине и показана невозможность нетривиального обобщения марковского свойства на случай, когда «настоящее» сосредоточено в нескольких вершинах. Также впервые приведены результаты, касающиеся марковости времени пребывания для неоднородных цепей.
Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Разработанные в ней методы и подходы могут использоваться для решения близких задач, связанных с временами пребывания случайных процессов. В перспективе полученные результаты могут быть использованы в других разделах теории вероятностей и математической статистики.
Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Четвертом Северном трехстороннем семинаре (6–8 марта 2013 г., Хельсинки, Финляндия), XX Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастичеким методам (12–18 мая 2013 г., Йошкар-Ола), на санкт-петербургском городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика РАН И.А. Ибрагимова (1 ноября 2013 г.) и на семинаре по теории вероятностей междисциплинарной исследовательской лаборатории им. П.Л. Чебышева при СПбГУ (июнь 2011 г., декабрь 2011 г., ноябрь 2012 г.).
Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [П1]–[П4]. Из них три работы [П1]–[П3] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК (работы [П1, П2] опубликованы в журнале, удовлетворяющем достаточному условию включения в перечень ВАК: его переводная версия «Journal of Mathematical Sciences» входит в систему цитирования SCOPUS). Работа [П4] — это тезисы докладов на международной

конференции.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 48 наименований. Общий объем диссертации составляет 100 страниц.

Содержание работы

Во **введении** излагается история вопроса, описывается структура и содержание диссертации.

Главы 1 и 2 являются вводными. В них кратко излагаются основные результаты о времени пребывания, на которые активно опираются последующие части работы.

В **главе 1** приводятся основные определения и факты, касающиеся времени пребывания для цепей Маркова с дискретным временем. Наиболее важными здесь являются формулы для конечномерных распределений поля τ.

Помимо переходного оператора P исходной марковской цепи $X(t)$ ($t = 0, 1, 2, \ldots$) рассматривается также функция k на (не более чем счетном) пространстве состояний $\mathbb{A}$, $0 \le k < 1$, имеющая смысл вероятности обрыва траектории в точке a. Далее вводится оператор $\mathcal{Y} = (1-k)P - 1$ (здесь $(1-k)$ рассматривается как оператор умножения, а под единицей подразумевается тождественный оператор).

Функция Грина G определяется как единственное ограниченное решение уравнения

$$(e^{\alpha} - 1 - \mathcal{Y})G(\cdot, b) = (1-k)\mathbb{I}_{\{b\}}$$

(операторы действуют на переменную a, b — параметр).

Выражения, используемые для формулировки марковского свойства в случае, когда «настоящее» сосредоточено в одном состоянии, могут быть переписаны достаточно несложным образом через функцию Грина:

$$\mathbf{E}_{ab}\Big[\prod_{s=0}^{\theta}[1-k(X(s))]\Big|\,\tau(v)=0\Big]=$$
$$=\frac{H_0(v,v)}{H(v,v)}\,\frac{G(a,b)H(v,v)-G(a,v)H(v,b)}{G_0(a,b)H_0(v,v)-G_0(a,v)H_0(v,b)},$$
$$\mathbf{E}_{ab}\Big[\prod_{s=0}^{\theta}[1-k(X(s))]\Big|\,\tau(v)=t\Big]=$$
$$=\frac{G(a,v)H(v,b)H_0(v,v)^2}{G_0(a,v)H_0(v,b)H(v,v)^2}\left[\frac{1-\dfrac{1}{H(v,v)}}{1-\dfrac{1}{H_0(v,v)}}\right]^{t-1}\qquad(t\geq 1).$$

Здесь $\mathbf{E}_{ab}$ — математическое ожидание относительно условных мер $\mathbf{P}_{ab}$, а

$$H(v,b)=\frac{e^{\alpha}G(v,b)}{1-k(v)}.$$

В **главе 1** также приводится формула для функции Грина случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ через решения соответствующего однородного уравнения. Для этого строятся линейно независимые решения однородного уравнения g_1 и g_2 со свойствами: $g_1>0$, $g_1(0)=1$, g_1 возрастает; $g_2>0$, $g_2(0)=1$, g_2 убывает. Функцию Грина $G(a,b)$ можно «склеить» из двух однородных решений:

$$G(a,b)=\begin{cases}C_b g_1(a)g_2(b), & \text{если } a\leq b,\\ C_b g_2(a)g_1(b), & \text{если } a\geq b,\end{cases}$$

где C_b — некоторая константа, не зависящая от a.

С помощью такого представления функции Грина для случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ опровергается марковость τ.

В **главе 2** приводятся результаты для цепей с непрерывным временем. Вместо оператора P рассматривается оператор Q, соответствующий интенсивностям переходов. Функция k предполагается неотрицательной. Рассматривается оператор $\mathcal{Y}=Q-k$, и функция Грина определяется как единственное ограниченное решение уравнения

$$(\alpha-\mathcal{Y})G(\cdot,b)=\mathbb{I}_{\{b\}}(\cdot).$$

Аналогичные случаю дискретного времени формулы имеют вид

$$\mathbf{E}_{ab}\Big[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))ds}\Big|\,\tau(v)=0\Big]=$$
$$=\frac{G_0(v,v)}{G(v,v)}\;\frac{G(a,b)G(v,v)-G(a,v)G(v,b)}{G_0(a,b)G_0(v,v)-G_0(a,v)G_0(v,b)},$$
$$\mathbf{E}_{ab}\Big[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))ds}\Big|\,\tau(v)=t\Big]=$$
$$=\frac{G(a,v)G(v,b)G_0(v,v)^2}{G_0(a,v)G_0(v,b)G(v,v)^2}e^{-t\left[\frac{1}{G(v,v)}-\frac{1}{G_0(v,v)}\right]}\quad(t>0).$$

Тем же способом, что и в главе 1, марковское свойство τ для блуждания с непрерывным временем по $\mathbb{Z}$ уже не опровергается, а доказывается. Подобный метод доказательства может быть применен с незначительными изменениями и к блужданиям на произвольном дереве, однако перенести его на более сложно устроенные графы не удается.

Главы 3–5 представляют собой основную часть диссертации. В них отражены полученные автором результаты, во многом обобщающие приведенные в первых двух главах.

Основной целью **главы 3** является доказательство марковости τ во всех необходимых вершинах.

Марковское свойство поля времени пребывания в необходимой вершине v относительно мер $\mathbf{P}_{ab}$ означает, что для любой функции $k\geq 0$ с $k(v)=0$ и любого $t\geq 0$ выполнено

$$\mathbf{E}_{ab}\Big[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))ds}\Big|\,\tau(v)=t\Big]=\prod_{i=1}^N\mathbf{E}_{ab}\Big[e^{-\int\limits_0^\theta k_i(X(s))ds}\Big|\,\tau(v)=t\Big].$$

Его можно переписать через соотношения на функцию Грина:

а) $\displaystyle\frac{1}{G(v,v)}-\frac{1}{G_0(v,v)}=\sum_1^N\Big[\frac{1}{G_i(v,v)}-\frac{1}{G_0(v,v)}\Big],$

б) $\displaystyle\frac{G(a,b)-\dfrac{G(a,v)G(v,b)}{G(v,v)}}{G_0(a,b)-\dfrac{G_0(a,v)G_0(v,b)}{G_0(v,v)}}=\prod_1^N\frac{G_i(a,b)-\dfrac{G_i(a,v)G_i(v,b)}{G_i(v,v)}}{G_0(a,b)-\dfrac{G_0(a,v)G_0(v,b)}{G_0(v,v)}},$

в) $\displaystyle\frac{G(a,v)G(v,b)G_0(v,v)^2}{G_0(a,v)G_0(v,b)G(v,v)^2}=\prod_1^N\frac{G_i(a,v)G_i(v,b)G_0(v,v)^2}{G_0(a,v)G_0(v,b)G_i(v,v)^2}.$

Для упрощения этих соотношений сначала изучается изменение функции Грина при изменении графа переходов исходной марковской цепи $X(t)$. Полученные в этом направлении результаты будут активно использоваться и в последующих разделах диссертации.

После проделанной предварительной работы может быть доказана основная теорема главы 3:

Теорема 2. *В любой необходимой вершине v графа переходов исходного марковского процесса имеет место марковское свойство поля времени пребывания.*

В **главе 4** проверяются различные варианты обобщения марковского свойства времени пребывания на случай, когда «настоящее» сосредоточено не в одном состоянии, а в нескольких.

Сначала, однако, изучается возможность перенесения формулы для функции Грина через решения однородного уравнения на более сложно устроенные, нежели дерево, графы. Оказывается, что такие обобщения получаются далеко не всегда. Так, например, для блуждания по графу, представляющему из себя бесконечную «лестницу», возможность подобных обобщений зависит от интенсивностей переходов. Для некоторых графов привести аналогичные дереву формулы и вовсе невозможно.

Поэтому в данной главе используются методы, схожие с применяемыми в главе 3. Для простоты полагаем, что при удалении вершин v_1 и v_2, граф переходов распадается на две компоненты связности.

В [7] говорится, что если граф переходов представляет из себя многоугольник, то для «настоящего», состоящего из двух его (не соседних) вершин, поле τ обладать марковским свойством не будет. С другой стороны, очевидно, что если одна из вершин «настоящего» необходима, марковость есть. Ответ на вопрос, существуют ли какие-то промежуточные ситуации, когда поле времени пребывания является марковским, дает следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть поле времени пребывания τ обладает марковским свойством относительно вершин $\{v_1, v_2\}$, в совокупности являющихся необходимыми. Тогда одна из этих вершин сама является необходимой.*

Аналогичный результат для большего количества вершин в «настоящем» является простым следствием из теоремы.

Естественное понимание марковости времени пребывания для «лестницы», когда рассматривается время пребывания на «уровне», то есть в множестве из двух вершин, соответствующих одной «ступеньке», к сожалению, не приводит к положительному результату.

Утверждение 2. *Случайный процесс времени пребывания на уровнях «лестницы» не марковский.*

На первый взгляд, данное утверждение противоречит тому, что блуждания по некоторым «лестницам» можно свести к целочисленным цепям, «склеив» вершины одного уровня. Это объясняется тем, что меры $\mathbf{P}_{ab}$ при «склейке» теряют смысл. Поэтому более естественно рассматривать меры $\mathbf{P}_{aB}$, где B — уровень «лестницы». Такие меры рассматриваются в следующем утверждении.

Утверждение 3. *Если время пребывания на уровнях «лестницы» марковское относительно условных мер $\mathbf{P}_{aB}$, то блуждание по этой «лестнице» может быть сведено к целочисленной цепи.*

Таким образом, марковость времени пребывания, даже при различных подходах к ее пониманию, определяется тем, сосредоточено «настоящее» в одной вершине или в нескольких.

Также в **главе 4** изучается марковость другого весьма интересного связанного с цепью объекта — поля переходов.

В **главе 5** рассматриваются неоднородные цепи Маркова. Оказывается также, что рассмотрение не зависящих от цепи неэкспоненциальных моментов остановки во многом аналогично введению неоднородности.

В неоднородной ситуации удобно считать, что процесс начинается в момент времени s и сопровождать основные обозначения индексом «s» сверху.

Основная трудность в исследовании неоднородных цепей заключается в том, что в общей ситуации не удается в полной мере перенести формулы для конечномерных распределений времени пребывания с однородного случая на неоднородный. Тем не менее, для наиболее простой неоднородной цепи, когда процесс до момента T ведет себя как однородная цепь с переходной интенсивностью Q_1, а после — с интенсивностью Q_2, возможно получить формулы через функции Грина соответствующих однородных цепей. Формулы для конечномерных распределений поля τ^s для неэкспоненциальных моментов остановки также выводятся в данной главе.

Марковость поля времени пребывания для неэкспоненциальных моментов остановки в полной мере описывается следующей теоремой.

Теорема 6. *Для однородной цепи Маркова с не зависящим от цепи моментом остановки θ^s поле времени пребывания τ^s будет марковским в необходимой вершине v относительно меры $\mathbf{P}^s_{ab}$ тогда и только тогда, когда момент θ^s экспоненциальный.*

О марковости описанной выше неоднородной цепи говорит следующее утверждение.

Утверждение 4. *Если при некотором $s < T$ поле времени пребывания τ^s является марковским в необходимой вершине v относительно $\mathbf{P}^s_{vv}$, то $Q_1(v,a) = Q_2(v,a)$, $Q_1(b,v) = Q_2(b,v)$ для всех $a, b \in \mathbb{A}$.*

Это означает, например, что для блуждания по дереву марковость поля τ^s может иметь место только в тривиальном случае: когда $Q_1 \equiv Q_2$.

В **заключении** кратко описаны основные результаты проведенного исследования.

Список литературы

[1] Бородин А.Н. Броуновское локальное время. // УМН, 1989, т. 44, вып. 2(266), с. 7–48.

[2] Валландер С.С. Времена пребывания для неоднородных цепей Маркова с дискретным временем. // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1989, т. 177, с. 37–45.

[3] Валландер С.С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. I. Цепи с дискретным временем. // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1982, т. 119, с. 39–61.

[4] Валландер С.С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. II. Цепи с непрерывным временем. // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1983, т. 130, с. 56–64.

[5] Валландер С.С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. III. Цепи на дереве с одной точкой ветвления. // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1985, т. 142, с. 25–38.

[6] Валландер С.С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. IV. Цепи на произвольном дереве. // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1987, т. 158, с. 39–45.

[7] Валландер С.С. Некоторые свойства времен пребывания и переходов для счетных цепей Маркова. // Тезисы докладов Четвертой Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, 1985, т. 1, с. 116–118.

[8] Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. — М.: Мир, 1968, 394 с.

[9] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972, 375 с.

[10] Lévy P. Construction du processus de W. Feller et H.P. McKean en partant du mouvement Brownian // Probability and Statistics: The Harald Cramér volume, 1959, p. 162–174.

[11] Lévy P. Sur certains processus stochastiques homogenes. // Compositio Mathematica, 1939, Vol. 7, No. 2, p. 283–339.

[12] Ray D.B. Sojurn times of a diffusion process. // Illinois J. Math., 1963, Vol. 7, No. 4, p. 615–630.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[П1] Воротов А.А. Марковское свойство времени пребывания для дискретных марковских процессов. // Зап. научн. семин. ПОМИ, 2013, т. 412, с. 88–108.

[П2] Воротов А.А. О марковском свойстве поля времени пребывания для неоднородных цепей Маркова с непрерывным временем. // Зап. научн. семин. ПОМИ, 2013, т. 420, с. 23–49.

[П3] Воротов А.А. О марковском свойстве поля времени пребывания для цепей Маркова с непрерывным временем относительно нескольких состояний. // Вестн. С.-Петерб. ун-та, сер. 1, 2013, вып. 4, с. 30-40.

Другие публикации:

[П4] Vorotov A. Occupation time Markov property for countable Markov chains. // 4th Nordic Triangular Seminar in Applied Stochastics, 2013, Programme and Abstracts, p. 5.