На правах рукописи

ПЕСТОВ Андрей Леонидович

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДАННЫХ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

01.01.03 – математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2016

Работа выполнена в лаборатории математических проблем геофизики ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (ПОМИ РАН).

Научный руководитель:
БЕЛИШЕВ Михаил Игоревич
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математических проблем геофизики ФГБУН ПОМИ РАН

Официальные оппоненты:
БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики физического факультета ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

ПЯТКОВ Сергей Григорьевич
доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Югорский Государственный Университет»

Ведущая организация:
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»

Защита состоится «____» ______________ 2016 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН ПОМИ РАН: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru

Автореферат разослан «____» ______________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В работе изучается обратная задача для одномерной двухскоростной динамической системы, и дается характеристическое описание ее данных. Особенность двухскоростных систем состоит в том, что в них имеются волны двух типов, распространяющиеся с различными скоростями и взаимодействующие между собой. Это взаимодействие приводит к интересным физическим эффектам и, в то же время, осложняет исследование системы.

Многоскоростные системы встречаются в важных приложениях: геофизике, акустике, механике, теории упругости. Примерами из последней области служат балка Тимошенко (см. [9], [11]), стержень с остаточными напряжениями (см. [14], [15]), слоистые анизотропные среды (см. [10], [19]), композитная балка (см. [16], [17]). В качестве примера из электротехники упомянем систему взаимодействующих кабельных линий. В оптике двухскоростной системой является двулучепреломляющее оптическое волокно (см. [18]). Соответствующие обратные задачи состоят в определении параметров таких систем по той или иной информации о решении, извлекаемой из внешних наблюдений (например, по измерениям на конце балки или оптического волокна).

Цель и результаты работы. Рассматривается начально-краевая задача

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + A u_x + B u = 0\,, \qquad x > 0,\ 0 < t < T\,, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0\,, \qquad x \geqslant 0\,, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = f\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,, \tag{3}$$

($0 < T < \infty$). Ее решение $u = u^f(x,t) = \begin{pmatrix} u_1^f(x,t) \\ u_2^f(x,t) \end{pmatrix}$ описывает *волну*, инициированную *граничным управлением* f и распространяющуюся вдоль полуоси $x \geqslant 0$. Здесь ρ, γ, A, B суть гладкие вещественные 2×2 матрицы-функции от $x \geqslant 0$; $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$, $\gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ — матрицы с положительными элементами. Матрицы A и B удовлетворяют соотношениям $A^{\mathrm{tr}} = -A$, $\frac{dA}{dx} = B - B^{\mathrm{tr}}$, (tr — транспонирование). Кроме того выполнены условия $0 < \sqrt{\frac{\gamma_2}{\rho_2}} < \sqrt{\frac{\gamma_1}{\rho_1}}$.

Обратная задача состоит в восстановлении параметров (матричных коэффициентов) ρ, γ, A, B системы по ее оператору реакции

$$R^{2T} : f \mapsto \gamma(0) u_x^f|_{x=0},$$

который описывает реакцию системы на действие граничных управлений.

Главная цель работы — дать характеристическое описание оператора R^{2T}, т. е. привести необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

В рассматриваемой обратной задаче неизвестные матричные коэффициенты описываются *восемью* независимыми скалярными функциями, в то время как оператор R^{2T} задается набором, содержащим *три* функции и шесть чисел. В этой ситуации ожидать однозначного определения всех коэффициентов не приходится, и встает вопрос о ее разрешимости: при каких условиях на R^{2T} существует хотя бы одна система с таким оператором реакции?

Ответ дает теорема, которая устанавливает необходимые и достаточные условия на оператор R^{2T}, гарантирующие существование системы с таким оператором реакции.

Методы исследования. В работе используется метод граничного управления (boundary control method или BC-метод). Он основан на связях обратных задач с теорией управления. BC-метод был предложен М. И. Белишевым в 1986 году для решения многомерной обратной задачи о восстановлении плотности (см. [5]). Это подход комплексного характера, использующий результаты теории управления и теории систем, асимптотические методы для уравнений в частных производных (геометрическую оптику), функциональный анализ и др.

Доказательство основного результата следует схеме работы [7]. Однако оно проводится в более сложной ситуации: при наличии большего числа свободных параметров, задающих динамическую систему. В частности, в отличие от [7] скорости двух типов волн не предполагаются постоянными. Доказательство достаточности конструктивно: предложена процедура, восстанавливающая систему по оператору реакции R^{2T}. В процедуре предусмотрен выбор свободных параметров, за счет чего восстанавливаются *все* системы этого вида, обладающие заданным оператором реакции. Основная проблема (и трудность) состояла в их непротиворечивом выборе. Процедура использует красивый физический эффект — существование медленных волн. Эти волны суть смеси быстрой и медленной мод, распространяющиеся (несмотря на взаимодействие мод) со скоростью медленной моды. Главный фрагмент процедуры — т. н. *амплитудная формула*, основной инструмент решения обратных задач методом граничного управления (см. [7], [12]).

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в дальнейшем при изучении систем более частного вида, определяемых меньшим количеством параметров. Например, балки Тимошенко. Возможны приложения, например, в дефектоскопии композитных систем.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались на семинаре по теории дифракции (руководитель Бабич В. М.) в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, на семинаре лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, а также на 4 международных конференциях: «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2009), «Days on Diffraction» (Санкт-Петербург, 2009, 2011, 2012), «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 2012), «Обратные задачи и интегральная геометрия» (Калининград, 2014).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 3 статьи опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК: [1], [2], [3], 3 — в тезисах докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 135 страниц с 10 рисунками. Список литературы содержит 33 наименования.

Основное содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, изложены известные результаты по рассматриваемой задаче, сформулирован основной результат. Также введение содержит описание BC-метода, используемого для доказательства основного результата.

Глава 1. Начально-краевая задача. В первой главе рассматривается начально-краевая задача

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + A u_x + B u = 0\,, \qquad x > 0,\ 0 < t < T, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0\,, \qquad x \geqslant 0, \tag{5}$$

$$u|_{x=0} = f\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,, \tag{6}$$

в которой ρ, γ, A, B суть вещественные 2×2 матрицы-функции от $x \geqslant 0$; $T < \infty$ — финальный момент; $\rho = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$, $\gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ — матрицы с положительными элементами; $f = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ — *граничное управление*. Решение $u = u^f(x,t) = \begin{pmatrix} u_1^f(x,t) \\ u_2^f(x,t) \end{pmatrix}$ описывает *волну*, инициированную управлением f и распространяющуюся вдоль полуоси $x \geqslant 0$. Функции $c_i := \sqrt{\frac{\gamma_i(x)}{\rho_i(x)}}$ называются *скоростями*. На скорости накладывается условие разделенности:

$$0 < c_2(x) < c_1(x)\,,\ \ x \geqslant 0.$$

Расходимость интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{c_1(x)} = \infty$$

обеспечивает корректность задачи при любом $T > 0$.

Соотношения

$$A^{\mathrm{tr}}(x) = -A(x), \quad \frac{dA}{dx} = B(x) - B^{\mathrm{tr}}(x), \quad x \geqslant 0,$$

(tr — транспонирование) обеспечивают самосопряженность оператора

$$y \mapsto (\gamma y_x)_x - A y_x - B y$$

по Лагранжу, то есть его симметричность в $L_2\left((0,\infty);\mathbb{R}^2\right)$ на функциях с компактным носителем.

Функции

$$\tau_i(x) := \int\limits_0^x \sqrt{\frac{\rho_i(s)}{\gamma_i(s)}}ds = \int\limits_0^x \frac{ds}{c_i(s)}, \quad x \geqslant 0, \quad i = 1, 2,$$

называются *эйконалами*. Это монотонные, строго возрастающие неотрицательные функции. С физической точки зрения $\tau_i(x_0)$ — это время, за которое волна, инициированная на конце $x = 0$ и распространяющаяся вдоль полуоси $x \geqslant 0$ со скоростью c_i, заполняет отрезок $[0, x_0]$. Эйконалы определяют *характеристики* системы — кривые $\{(x,t) \,|\, t \pm \tau_i(x) = \mathrm{const}\}$. Характеристики $t = \tau_1(x)$ и $t = \tau_2(x)$ мы называем быстрой и медленной соответственно. Функции $x_i(\tau)$, *обратные к эйконалам*, можно представить в виде

$$x_i(\tau) = \int\limits_0^\tau \sqrt{\frac{\gamma_i(x_i(s))}{\rho_i(x_i(s))}}ds = \int\limits_0^\tau c_i(x_i(s))ds, \quad \tau \geqslant 0;$$

они также суть строго возрастающие, и $x_1(\tau) > x_2(\tau)$ при $\tau > 0$.

В разделе 1.2 рассматривается прямая задача. Для управлений класса $L_2\left((0,T);\mathbb{R}^2\right)$ определяется обобщенное L_2-решение задачи и дается точное описание пространств, в которых она оказывается корректной. Метод исследования вполне традиционный: задача сводится к системе интегральных уравнений вольтерровского типа, затем устанавливается разрешимость последней в подходящем пространстве вектор-функций.

Последующие разделы главы подготавливают исследование динамической обратной задачи.

В разделе 1.3 вводится фундаментальное решение исходной системы как решение матричной начально-краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\rho U_{tt} - (\gamma U_x)_x + AU_x + BU = 0, && x > 0,\ 0 < t < T,\\
&U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, && x \geqslant 0,\\
&U|_{x=0} = \delta(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, && 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{aligned}$$

где δ — дельта-функция Дирака. Представление фундаментального решения дается в подразделе 1.3.3 в виде суммы анзаца и невязки, определенных при помощи стандартной схемы лучевого метода (см., например, [4]). В том же подразделе детально исследуются главные особенности фундаментального решения и выводятся соотношения, связывающие матрицы A и B с (матричными) амплитудами членов первого и второго порядков в разложении лучевого анзаца.

В разделе 1.4 вводится оператор реакции

$$\left(R^T f\right)(t) := \gamma(0)\, u_x^f(0,t)\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,,$$

который в дальнейшем играет роль данных обратной задачи.

Изучение прямой задачи завершает раздел 1.5, где описывается физический эффект, свойственный двухскоростным системам и состоящий в следующем. При определенной связи между компонентами управления $f_1(t)$ и $f_2(t)$ волна (смесь мод) распространяется со скоростью медленной моды c_2. Возможно, впервые этот эффект был обнаружен в [13]; там же и в более поздних работах [7], [8] он был использован для решения обратных задач. Эти работы относились к системам с постоянными скоростями; здесь рассматривается более общий случай переменных разделенных c_1 и c_2.

Глава 2. Динамическая система. В этой главе изучаемая начально-краевая задача рассматривается как динамическая система $\mathfrak{s}^T$. Она наделяется стандартными атрибутами теории управления.

В разделе 2.1 вводятся связанные с системой пространства и операторы. Гильбертово пространство управлений $\mathcal{F}^T := L_2\left([0,T];\mathbb{R}^2\right)$ называется *внешним пространством* системы $\mathfrak{s}^T$. Пространство $\mathcal{H}^{x_1(T)} := L_{2,\rho}\left([0,x_1(T)];\mathbb{R}^2\right)$ называется *внутренним*.

Соответствие «вход$\mapsto$состояние» реализуется *оператором управления* $W^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^{x_1(T)}$, $W^T f := u^f(\cdot,T)$. Помимо оператора *реакции* $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, описывающего соответствие «вход$\mapsto$выход» в системе $\mathfrak{s}^T$, определяется так называемый *расширенный* оператор реакции $R^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$\left(R^{2T} f\right)(t) := \gamma(0) u_x^f(0,t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T,$$

который определяется матричными коэффициентами $\rho, \gamma, A, B\big|_{0\leqslant x\leqslant x_1(T)}$ и имеет представление

$$\left(R^{2T} f\right)(t) = -\nu f'(t) + \omega f(t) + \int\limits_0^t r(t-s)\, f(s)\, ds\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T,$$

с постоянными матрицами ν, ω и гладкой симметрической матрицей-функцией $r(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2T$.

Оператор $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $C^T := \left(W^T\right)^* W^T$ называется *связывающим*. Определяющее его соотношение

$$\left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(W^T f, W^T g\right)_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} = \left(u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T)\right)_{\mathcal{H}^{x_1(T)}}$$

связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. Оператор C^T ограничен (по ограниченности W^T), самосопряжен и неотрицателен.

Ключевым для BC-метода фактом является простая и явная связь оператора C^T с расширенным оператором реакции (см. [6], [7], [12]). Эта связь приводит к представлению

$$C^T f(t) := \nu f(t) + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{2} \int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)\, d\eta\right] f(s)\, ds.$$

В разделе 2.2 обсуждается свойство *управляемости* системы (4)–(6). Множества (подпространства) вида

$$\mathcal{U}^\xi := \left\{u^f(\cdot, \xi) \mid f \in \mathcal{F}^T\right\} \subset \mathcal{H}^{x_1(\xi)}\,, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant T,$$

называются *достижимыми* (в момент $t = \xi$). С ростом ξ множества $\mathcal{U}^\xi$ расширяются. Их структура и свойства составляют предмет теории граничного управления. Достижимые множества образованы всеми состояниями системы (здесь — волнами), которые можно создать, оперируя данным классом управлений. В ситуации, когда эти состояния исчерпывают содержащее их пространство, говорят об управляемости системы.

Особенностью двухскоростной системы является отсутствие управляемости: подпространство $\mathcal{U}^T$ имеет нетривиальное ортогональное дополнение в $\mathcal{H}^{x_1(T)}$ при любом $T > 0$.

Оказывается, что если компоненты управления f удовлетворяют соотношению

$$f_1(t) = \int\limits_0^t l(t-s)\, f_2(s)\, ds\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T - \tau_1(x_2(T)),$$

с некоторой гладкой функцией $l = l(t)$, то волна u^f, инициированная таким управлением, распространяется с медленной скоростью. Подпространство таких управлений мы обозначаем $\mathcal{F}_l^T$, а волны, инициированные такими управлениями, называем *медленными волнами*.

В системе $\mathfrak{s}^T$ медленным волнам отвечает подсистема $\mathfrak{s}_l^T$, описываемая начально-краевой задачей

$$\begin{aligned}
&\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0\,, && 0 < x < x_2(T),\ 0 < t < T,\\
&u|_{t<\tau_2(x)} = 0\,, &&\\
&u|_{x=0} = f\,, && 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{aligned}$$

которая *корректна при* $f \in \mathcal{F}_l^T$. Важной отличительной чертой подсистемы $\mathfrak{s}_l^T$ от самой системы является ее *управляемость*:

$$\mathcal{U}_l^T := \left\{ u^f(\cdot, T) \mid f \in \mathcal{F}_l^T \right\} = \mathcal{H}^{x_2(T)}\,.$$

В разделе 2.3 выводится представление волн, так называемая *амплитудная формула* — один из основных инструментов решения обратных задач методом граничного управления (см. [6], [7], [12]). Вывод использует особенности распространения разрывов в системе $\mathfrak{s}^T$, а само представление по существу является формулой геометрической оптики.

Глава 3. Характеризация оператора R^{2T}. В обратных задачах оператор реакции динамической системы играет роль данных, по которым требуется восстановить ее параметры. В рассматриваемой задаче оператор R^{2T} определяется коэффициентами ρ, γ, A, B, которые содержат *восемь* независимых скалярных функций ρ_1, ρ_2, γ_1, γ_2, A_{12}, B_{11}, B_{12}, B_{22}, в то время как оператор R^{2T} задается набором из двух постоянных матриц ν, ω, содержащих шесть *чисел*, и матричной функцией отклика r, содержащей *три* функции:

r_{11}, r_{12}, r_{22}. В этой ситуации ожидать единственности решения обратной задачи, т. е. однозначного определения всех коэффициентов, не приходится, и встает вопрос о ее разрешимости: при каких условиях на ν, ω, r существует хотя бы одна система с такими данными? Характеристическое описание данных доставляет необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Как показано, применительно к системе $\mathfrak{s}^T$ эти условия состоят в следующем.

Теорема. *Оператор* $\mathcal{R}^{2T} : L_2\left([0,2T];\mathbb{R}^2\right) \to L_2\left([0,2T];\mathbb{R}^2\right)$, *вида*

$$\left(\mathcal{R}^{2T} f\right)(t) = -\nu f'(t) + \omega f(t) + \int\limits_0^t r(t-s) f(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T,$$

с постоянными матрицами $\nu = \operatorname{diag}\{\nu_1, \nu_2\}$, ω *и гладкой матрицей-функцией* $r|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$ *является расширенным оператором реакции некоторой системы* $\mathfrak{s}^T$, *если и только если выполнены условия:*

1. $\nu_1, \nu_2 > 0$, $\omega_{12} = -\alpha\omega_{21}$ *с каким-либо* $\alpha > 1$;
2. $[r(t)]^{\mathrm{tr}} = r(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T$;
3. *оператор* $\mathcal{C}^T$, *действующий в* $L_2\left([0,T];\mathbb{R}^2\right)$ *по правилу*

$$(\mathcal{C}^T f)(t) := \nu f(t) + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{2}\int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)\, d\eta\right] f(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

является положительным изоморфизмом.

Доказательство достаточности конструктивно: предложена процедура, восстанавливающая систему по ν, ω, r. В процедуре предусмотрен выбор свободных параметров, а именно функций $c_1, c_2, \rho_1, \rho_2 \in C^\infty[0,h]$, а также функции l и продолжение функции отклика $r|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$ на больший интервал. Параметры выбираются согласованно, удовлетворяя определенным условиям. В последующих разделах определяются матрицы A и B и доказывается, что построенная система обладает оператором реакции R^{2T}, совпадающим с $\mathcal{R}^{2T}$.

Данный результат опубликован в работе [2].

В разделе 3.4 дается пошаговая процедура определения матриц A и B, пригодная для численной реализации. Кроме того, предлагается второй способ определения A и B по формулам полученным в работе [3].

В разделе 3.5 строится динамическая система вида (4)–(6) с *ненулевыми* матрицами A и B, обладающая оператором реакции вида

$$(R^{2T}f)(t) = -\frac{d}{dt}f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T. \tag{7}$$

Заметим, что таким же оператором реакции обладает система вида (4)–(6) с $A = B = 0$ при соответствующем выборе констант: $\rho_i(0)$, $\rho_i'(0)$, $\gamma_i(0)$, $\gamma_i'(0)$, $i = 1, 2$. В ней распространяются две не взаимодействующие между собой волны, эволюция которых описывается двумя независимыми уравнениями:

$$\rho_i(u_i)_{tt} - (\gamma_i(u_i)_x)_x = 0, \quad i = 1, 2.$$

Для внешнего наблюдателя системы с одним и тем же R^{2T} неразличимы. Наш пример показывает, что установить сам факт взаимодействия разных волновых мод по оператору реакции возможно не всегда.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [2] и [3].

Список публикаций

1. Белишев М. И., Пестов А. Л. Прямая динамическая задача для балки Тимошенко // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2009. Т. 369. С. 16–47.
2. Белишев М. И., Пестов А. Л. Характеризация данных обратной задачи для одномерной двухскоростной динамической системы // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 3. С. 89–130.
3. Пестов А. Л. Об обратной задаче для одномерной двухскоростной динамической системы // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 426. С. 150–188.

Цитированная литература

4. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн // Москва: Наука. 1972.
5. Белишев М. И. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // Докл. Акад. Наук СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 524–527.
6. Белишев М. И., Благовещенский А. С. Динамические обратные задачи теории волн // СПб: С.-Пб Государственный Университет. 1999.
7. Белишев М. И., Иванов С. А. Характеризация данных динамической обратной задачи для двухскоростной системы // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1999. Т. 259. С. 19–45.
8. Белишев М. И., Иванов С. А. Восстановление параметров системы связанных балок по динамическим граничным измерениям // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2005. Т. 324. С. 20–42.
9. Григолюк Э. И., Селезов И. Г. Неклассические модели теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Москва: Итоги Науки и Техники, сер. Механика твердых деформируемых тел. 1973. Т. 5.
10. Романов В. Г. О задаче определения параметров упругой слоистой среды и импульсного источника // Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49. № 5. С. 1157–1183.
11. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids // Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1987.
12. Belishev M. I. Boundary Control Method in Dynamical Inverse Problems – An Introductory Course // Dynamical Inverse Problems: Theory and Application. 2011. Vol. 529. P. 85–150.
13. Belishev M. I., Blagovestchenskii A. S., Ivanov S. A. Erratum to «The two-velocity dynamical system: boundary control of waves and inverse problems [Wave Motion. 1997. Vol. 25. P. 83–107]» // Wave Motion. 1997. Vol. 26. P 99.
14. Chadwick P. and Ogden R. W. On the definition of elastic moduli // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1971. Vol. 44. № 1. P. 41–53.

15. Chadwick P. and Ogden R. W. A theorem of tensor calculus and its application to isotropic elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1971. Vol 44. № 1. P. 54–68.
16. Morassi A., Nakamura G., Sini M., An inverse dynamical problem for connected beams // European Journal of Applied Mathematics. 2005. Vol. 16. № 1. P. 83–109.
17. Morassi A., Rocchetto L. A Damage Analysis of Steel-Concrete Composite Beams Via Dynamic Methods: Part 1. Experimental Results // Journal of Vibration and Control. 2003. Vol. 9. P. 507–527.
18. Rakesh, Tang J., Lacey A. Determining the twist in an optical fiber // arXiv:1512.02631v1 [math.AP], accepted for publishing in Inverse Problems. 2015.
19. Sacks P., Yakhno V. The inverse problem for a layered anisotropic half space // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1998. Vol. 228. № 2. P. 377–398.