На правах рукописи

Платонова Мария Владимировна

Аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана–Лиувилля математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов

Специальность 01.01.03 – Математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Работа выполнена на кафедре Высшей математики и математической физики ФГБОУ ВО Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук

Смородина Наталия Васильевна, ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ), ведущий научный сотрудник.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук

Белопольская Яна Исаевна, ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, профессор,

доктор физико-математических наук

Гликлих Юрий Евгеньевич, ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет, профессор.

Ведущая организация:

ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится «____» ____________ 2017 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ПОМИ по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ПОМИ http://www.pdmi.ras.ru/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д. ф.–м. н. Зайцев А. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Когда уравнения математической физики не могут быть решены явно, полезными оказываются интегральные представления решений, дающие возможность получить качественные свойства решения, а также оценить погрешность решений, полученных с помощью приближенных методов. В частности, в квантовой механике таким интегральным представлением является формула Фейнмана–Каца (см. [1], [3], [4], [7], [15]). Эта формула для широкого класса операторов $H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V$ (гамильтонианов) дает интегральное представление решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Hu, \; u(0, x) = \varphi(x) \tag{1}$$

в виде математического ожидания некоторого функционала от траекторий винеровского процесса (см. [1], стр. 60).

Аналогичный подход может быть использован не только для уравнения теплопроводности, но и для эволюционных уравнений, содержащих операторы дробного дифференцирования $\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha}$ порядка $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ (см. [11], [14], [16], [19]). Решение задачи Коши для таких уравнений может быть представлено в виде математического ожидания функционала от траектории однородного устойчивого процесса Леви (устойчивого процесса с независимыми однородными приращениями). Такие представления решения называются еще представлениями в виде функционального интеграла.

В литературе рассматривался вопрос построения аналогичных представлений решения задачи Коши для эволюционных уравнений, содержащих дифференциальный оператор порядка $\alpha > 2$ (см. [6], [8], [9], [12], [13], [18], [20] и другие). Эта задача не сводится к замене винеровского и устойчивых процессов на некоторый другой случайный процесс. Устойчивые процессы Леви существуют только для показателей $\alpha \in (0, 2)$. Случаю $\alpha = 2$ соответствует винеровский процесс. Заменить устойчивый процесс на какой-то другой однородный процесс с независимыми приращениями также невозможно. Действительно, нетрудно показать, что если для решения эволюционного уравнения справедливо представление в виде математического ожидания функционала от некоторого случайного процесса, то генератор $\mathcal{A}$ соответствующей полугруппы должен удовлетворять принципу максимума. То есть, если функция φ достигает в точке x_0 абсолютного максимума, то необходимо $\mathcal{A}\varphi(x_0) \leqslant 0$. Операторы дифференцирования (обычного и дробного) порядка больше двух этому условию очевидным образом не удовлетворяют.

Существуют два основных подхода к построению представления решения: первый подход основан на использовании теории псевдо-процессов (см. [8], [9], [12], [20]), второй – на построении комплекснозначных процессов (Фунаки [13], Маццукки [18], Маццукки и др. [10]). В частности, в работе Орсингера [20] строилось представление решения (в рамках теории псевдо-процессов) на основе так называемой "обобщенной" устойчивой случайной величины, введенной в работе Лашаля [17]. Такое обобщение является формальным, так как известно (Далецкий, Фомин [2]), что, в отличие от вероятностного процесса, псевдо-процесс не порождает меру в пространстве траекторий.

Далее, в работах Смородиной и Фаддеева [5], [21] был предложен другой, уже вероятностный, подход к определению понятия симметричного устойчивого распределения с показателем устойчивости $\alpha > 2$. Данный подход основан на использовании теории обобщенных функций.

Цель диссертационной работы. Целью настоящей диссертации является построение вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дробного дифференцирования $\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}$ порядка $\alpha > 2$, а также для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования порядка $m > 2$.

Методы исследований. В настоящей диссертации мы частично используем методы, предложенные в работах [5], [21], но будем рассматривать не одномерные случайные величины, а аналоги однородных устойчивых процессов с независимыми приращениями. При этом, если в случае $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$ мы будем пользоваться только методами работ [5], [21], то в случае $\alpha \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k)$ нами предложен новый метод, основанный на использовании аппарата комплексного анализа, в частности, на теории пространств Харди. Вместо одного вещественного процесса мы будем рассматривать два комплексных процесса. Использование методов теории обобщенных функций, а также теории точечных процессов позволило распространить оба подхода и на случай целых значений α.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах математической физики, в частности, в теории уравнений в частных производных. Результаты также могут быть использованы в различных вопросах теории вероятностей и стохастического анализа. Результаты и методы работы М. В. Платоновой будут востребованы в исследованиях, проводимых в Санкт-Петербургском государственном университете, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации РАН, Новосибирском государственном университете, Дальневосточном федеральном университете, Техническом университете им. Н. Э. Баумана.

Результаты и положения, выносимые на защиту.

1. Построены вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дробного дифференцирования $\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}$ порядка $\alpha > 2$, $\alpha \notin \mathbf{N}$.

2. Построены вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования порядка $m > 2$.

3. Построена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений, содержащих дифференциальный оператор порядка больше двух с постоянными коэффициентами.

4. Построены аналоги безгранично делимых распределений с "мерой Леви" Λ, удовлетворяющей условию $\int\limits_{\mathbf{R}}(x^2 \wedge 1)d\Lambda(x) = \infty$.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на международной конференции «XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (Батилиман, 17–29 сентября, 2015 г.), на семинаре отдела математической физики МИАН (Москва, январь 2017 г.), на Санкт-Петербургском Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистики под руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (Санкт-Петербург, октябрь 2015 г., май 2016 г.), на семинаре кафедры Высшей математики и математической физики СПбГУ (Санкт-Петербург, март 2016 г.), традиционной зимней сессии МИАН–ПОМИ (Санкт-Петербург, 13–15 декабря 2016 г.), на международной конференции "Yu. V. Linnik Centennial Conference, Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics" (Saint Petersburg, September 14–18, 2015), на международной конференции "2nd Russian–Indian Joint Conference in Statistics and Probability" (Saint Petersburg, May 30 – June 3, 2016), на летней школе "A trilateral German-Russian-Ukrainian summer school Spectral Theory, Differential Equations and Probability" (Mainz, September 4–15, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в четырех работах [П1]–[П4], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Общий объем диссертации составляет 132 страницы. Список литературы содержит 53 наименования.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований.

В первой главе диссертации строится вероятностная аппроксимация решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \Gamma(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha u,\ \ \alpha > 2,\ \ \alpha \notin \mathbf{N}, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{3}$$

где оператор $\mathcal{D}_+^\alpha$ – оператор дробного дифференцирования

$$(\mathcal{D}_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x-t) - \sum\limits_{j=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(-t)^j}{t^{1+\alpha}} dt, \tag{4}$$

константа $c_\alpha = (-1)^{[\frac{\alpha}{2}]}$, а функция φ принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R})$.

Пусть $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0, T] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\nu(dt, dx) = dt\, \Lambda(dx) = \frac{dt\, dx}{|x|^{1+\alpha}},\ \alpha > 2. \tag{5}$$

Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon^+(t)$, $t \in [0, T]$ мы обозначаем случайный процесс, определенный формулой

$$\xi_\varepsilon^+(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,+\infty)} x\nu(ds, dx). \tag{6}$$

Сначала, мы рассмотрим случай, когда

$$\alpha \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2). \tag{7}$$

Определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t, x)$

$$u_\varepsilon(t, x) = \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon^+(t))], \tag{8}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(-t \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \Big(\sum_{j=1}^{[\alpha]} \frac{(ipy)^j}{j!}\Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big). \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u(t, x)$ – решение задачи Коши* (2), (3)*, а число α удовлетворяет условию* (7)*. Тогда существует положительная константа $C = C(\alpha)$, такая что*

$$\|u_\varepsilon(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ct \|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})} \varepsilon^{1-\{\alpha\}},$$

где $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$.

Далее, мы покажем, что процесс $\xi^+_\varepsilon(t)$ в формуле (8) может быть заменен на процесс, построенный по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин со степенной асимптотикой хвостового распределения. Это утверждение можно рассматривать как невероятностный аналог предельной теоремы о сходимости к устойчивым распределениям.

Пусть $\{\xi^+_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых, одинаково распределенных, неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}^+$ распределение случайной величины ξ^+_1. Предположим, что распределение случайной величины ξ^+_1 при $x > 1$ удовлетворяет условию

$$P(\xi^+_1 > x) = \frac{1}{\alpha x^\alpha}(1 + h(x)), \tag{10}$$

причем функция $|h(x)| \leqslant \frac{C}{x^\beta}$, где

$$\beta > 1 - \{\alpha\}. \tag{11}$$

Для $k < \alpha$ через $\mu^+_k = \mathbf{E}(\xi^+_1)^k$ обозначим момент порядка k случайной величины ξ^+_1.

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0, \infty)$ – независимый от последовательности $\{\xi^+_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta^+_n(t)$, $t \in [0, T]$, полагая

$$\zeta^+_n(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi^+_j. \tag{12}$$

Для любого $M > 0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций, таких что носитель функции $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M, M]$. Именно, для $\psi \in L_2(\mathbf{R})$ имеем

$$P_M\psi(x) = \psi * D_M(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M} \widehat{\psi}(p) e^{-ipx} dp, \tag{13}$$

где $\widehat{\psi}$ – прямое преобразование Фурье функции ψ, а D_M – это ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin Mx}{x}.$$

Далее число M будем выбирать в зависимости от n, то есть $M = M(n)$. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M\varphi$.

Для натуральных n определим функцию двух переменных

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}[(\varphi_M * \varkappa_n^t)(x - \zeta_n^+(t))],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \exp\Big(-nt\Big(\frac{\mu_1^+ ip}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2^+(ip)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \frac{\mu_{[\alpha]}^+(ip)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Big)\Big).$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(n) = n^{1/\alpha}$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (2), (3), *а число* α *удовлетворяет условию* (7). *Тогда существует* $C = C(\alpha) > 0$, *такое что*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\Big(t + \frac{1}{n}\Big)\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Случай

$$\alpha \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k-1) \cup (4k-1, 4k) \tag{14}$$

является технически более сложным. В отличие от предыдущего случая, будем рассматривать $\sigma\xi_\varepsilon^+(t)$, где σ – уже комплексная константа.

Рассмотрим проекторы Рисса $P_\pm$, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H_\pm^2$. Любую функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ можно представить в виде

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где носитель преобразования Фурье функции φ_+ сосредоточен на отрицательной полуоси, а носитель преобразования Фурье φ_- – на положительной полуоси.

Напомним, что для любого $M > 0$ через P_M мы обозначаем проектор в $L_2(\mathbf{R})$, действующий по формуле (13). Далее число M будем выбирать в зависимости от ε, то есть $M = M(\varepsilon)$, поэтому в обозначениях не будем указывать зависимость от M. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M\varphi$.

Положим $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{\alpha})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{\alpha})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- – в нижней, и верно

$$\sigma_+^\alpha = \sigma_-^\alpha = -1.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t,x)$

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^+(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^+(t))\Big], \tag{15}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_+ py)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big), & p \geqslant 0,\\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{[\alpha]}\frac{(i\sigma_- py)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big), & p < 0.\end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, *число* α *удовлетворяет условию* (14), $M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{[\alpha]+1}$. *Пусть* $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (2), (3), *а функция* $u_\varepsilon(t,x)$ *определяется* (15). *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\big(t + \varepsilon^{\alpha-\delta(1+[\alpha])}\big)\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Как и выше, вместо интеграла по пуассоновской случайной мере можно в вероятностной аппроксимации использовать случайное блуждание, со степенной асимптотикой хвостового распределения.

Именно, для натуральных n определим функцию $u_n(t,x)$

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}[(\varphi_M^- * \varkappa_n^t)(x - \sigma_+\zeta_n^+(t)) + (\varphi_M^+ * \varkappa_n^t)(x - \sigma_-\zeta_n^+(t))],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-nt\Big(\frac{\mu_1^+ ip\sigma_+}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2^+(ip\sigma_+)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \frac{\mu_{[\alpha]}^+(ip\sigma_+)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Big)\Big), & p \geqslant 0,\\ \exp\Big(-nt\Big(\frac{\mu_1^+ ip\sigma_-}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2^+(ip\sigma_-)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \frac{\mu_{[\alpha]}^+(ip\sigma_-)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Big)\Big), & p < 0.\end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, *число* α *удовлетворяет условию* (14), $M(n) = n^{\frac{1-\delta}{\alpha}}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{[\alpha]+1}$. *Пусть* $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (2), (3). *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\Big(t + \frac{1}{n^{1-\delta([\alpha]+1)/\alpha}}\Big)\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Во втором параграфе первой главы рассмотрен уже симметричный случай. Показано, что если использовать подход, основанный на идеях комплексного анализа, для построения одномерных симметричных распределений (как в [5], [21]), то построенный объект будет иметь "правильный" (то есть, как в случае $\alpha \in (0,2)$) вид преобразования Фурье.

Результаты первой главы опубликованы в работах [П1], [П2].

Во второй главе диссертации построена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{16}$$

где

$$c_m = \begin{cases} \pm 1, & m = 2k+1, \\ (-1)^{k+1}, & m = 2k. \end{cases}$$

Пусть теперь $\alpha = m > 2$ – натуральное число. Как и в случае нецелого показателя α, есть два существенно различных случая: случай $m = 4k+1$, $m = 4k+2$ и случай $m = 4k-1$, $m = 4k$.

Приведем основные формулировки результатов в случаях $m = 4k+2$ и $m = 4k$.

Как и раньше, $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,T] \times \mathbf{R}$ с интенсивностью (5). Для $\varepsilon{>}0$ через $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$, $t \in [0,T]$ мы обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по мере ν формулой

$$\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,e\varepsilon]} x\nu(ds, dx), \tag{17}$$

где e – основание натурального логарифма.

Покажем, как построить вероятностную аппроксимацию решения при $m = 4k+2$. Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t,x)$

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big], \tag{18}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(ipy)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}\Big). \tag{19}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (16)*, а функция* $u_\varepsilon(t,x)$ *определяется* (18)*. Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$*, такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ct\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}\varepsilon.$$

Случай $m = 4k+1$ рассматривается аналогично, а для случаев $m = 4k$ и $m = 4k-1$, так же как и для нецелых α, приходится привлекать идеи из комплексного анализа. Построим вероятностное представление решения задачи Коши (16) для $m = 4k$. Выберем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{m})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{m})$. Заметим, что, как и раньше, σ_+ лежит в верхней полуплоскости, σ_- лежит в нижней полуплоскости и, кроме того, $\sigma_+^m = \sigma_-^m = -1$. Вместо одного случайного процесса $\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ мы теперь рассмотрим два комплексных процесса $\sigma_+\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$ и $\sigma_-\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)$. Далее, сначала мы по начальному данному φ построим новую функцию φ_M, полагая $\varphi_M = P_M\varphi$. Функция φ_M уже будет целой аналитической функцией экспоненциального типа. Число M мы будем выбирать в зависимости от ε, именно $M = M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$. Далее, используя проекторы Рисса, представим функцию φ_M в виде суммы двух функций – одна имеет ограниченное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а вторая в нижнюю. Соответственно, для одной из них будем пользоваться одним комплексным процессом, для другой – другим.

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t,x)$

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon^{e\varepsilon}(t))\Big], \qquad (20)$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+ y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{(ip\sigma_- y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big), & p < 0. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (16), *а функция* $u_\varepsilon(t,x)$ *определяется* (20). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C(t + \varepsilon^m)\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}\varepsilon.$$

Процесс $\xi_\varepsilon(t)$ может быть заменен на процесс, построенный по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными моментами до порядка $m+1$. Эти утверждения можно рассматривать как невероятностные аналоги центральной предельной теоремы.

Результаты второй главы опубликованы в работе [П3].

В третьей главе диссертации построены вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для некоторых уравнений, содержащих дифференциальный оператор порядка больше двух с постоянными коэффициентами.

В четвертой главе диссертации построен аналог безгранично делимых распределений с "мерой Леви" Λ, удовлетворяющей условию $\int\limits_{\mathbf{R}}(x^2 \wedge 1)d\Lambda(x) = \infty$. Соответствующее распределение (аналог безгранично делимого распределения) является знакопеременным и, соответственно, невероятностным. Тем не менее, в последней части работы показано, что предельная теорема о сходимости к такому распределению имеет простой вероятностный смысл, а именно, из него следует утверждение об асимптотике больших уклонений для сумм независимых случайных величин при некоторых предположениях об асимптотике хвостового распределения отдельного слагаемого.

Результаты четвертой главы опубликованы в работе [П4].

В Заключении кратно изложены основные результаты диссертации.

Список литературы

[1] Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы в квантовой физике. // М.: Мир. — 1984.

[2] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах. // М.: Наука. — 1983.

[3] Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. // М.: Мир. — 1965.

[4] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. // М.: Мир. — 1978.

[5] Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Представление Леви–Хинчина одного класса знакопеременных устойчивых мер. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2008. — Т. 361. — С. 145–166.

[6] Смородина Н. В., Фаддеев М. М. Вероятностное представление решений некоторого класса эволюционных уравнений. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2010. — Т. 384. — С. 238–266.

[7] Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Mazzucchi S. Mathematical theory of Feynman Path Integrals – An introduction. // Lecture Notes in Mathematics. — 2008. — V. 523. — Berlin: Springer, 2nd edition.

[8] Beghin L., Hochberg K. J., Orsingher E. Conditional maximal distributions of processes related to higher–order heat–type equations. // Stochastic Processes and Their Applications. — 2000. — V. 85, No. 2. — P. 209–223.

[9] Beghin L. Pseudoprocesses governed by higher–order fractional differential equations. // Electronic Journal of Probability. — 2008. — V. 13, No. 16. — P. 467–485.

[10] Bonaccorsi S., D'Ovidio M., Mazzucchi S. Probabilistic representation formula for the solution of fractional high order heat–type equations. // ArXiv:1611.03364. — 2016.

[11] Chen Z. Q., Meerschaert M. M., Nane E. Space–time fractional diffusion on bounded domains. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2012. — V. 393, No. 2. — P. 479–488. — Doi:10.1016/j.jmaa.2012.04.032.

[12] Debbi L. Explicit solutions of some fractional partial differential equations via stable subordinators. // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. — 2006. — V. 2006. — Article ID 93502.

[13] Funaki T. Probabilistic construction of the solution of some higher order parabolic differential equation. // Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences. — 1979. — V. 55, No. 5. — P. 176–179.

[14] Hernández–Hernández M. E., Kolokoltsov V. N. On the probabilistic approach to the solution of generalized fractional differential equations of Caputo and Riemann–Liouville type. // ArXiv:1509.04139v2. — 2015.

[15] Kac M. Integration in function spaces and some its applications. // Pisa: Lezioni Fermiane, Accademia Nezionale dei Lincei. — 1980.

[16] Kolokoltsov V. N. On fully mixed and multidimensional extensions of the Caputo and Riemann–Liouville derivatives, related Markov processes and fractional differential equations. // ArXiv:1501.03925. — 2015.

[17] Lachal A. From pseudo–random walk to pseudo–Brownian motion: first exit time from a one–sided or a two–sided interval. // International Journal of Stochastic Analysis. — 2014. — V. 2014. — Article ID 520136.

[18] Mazzucchi S. Probabilistic representations for the solution of higher order differential equations. // International Journal of Partial Differential Equations. — 2013. — V. 2013. — Article ID 297857.

[19] Meerschaert M. M., Sikorskii A. Stochastic Models for Fractional Calculus. // Berlin, Boston: De Gruyter. — De Gruyter studies in mathematics. — V. 43. — 2012. — 291 p.

[20] Orsingher E., Toaldo B. Pseudoprocesses related to space–fractional higher–order heat–type equations. // Stochastic Analysis and Applications. — 2014. — V. 32, No. 4. — P. 619–641.

[21] Smorodina N. V., Faddeev M. M. The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications. // Acta applicandae mathematicae. — 2010. — V. 110. — P. 1289–1308.

Публикации автора по теме диссертации

[П1] Платонова М. В. Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана–Лиувилля. // Теория вероятностей и ее применения. — 2016. — Т. 61. — №. 3. — С. 417–438.

[П2] Платонова М. В. Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2015. — Т. 442. — С. 101–117.

[П3] Платонова М. В. Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2016. — Т. 454. — С. 92–106.

[П4] Платонова М. В. Невероятностные безгранично делимые распределения: представление Леви–Хинчина, предельные теоремы. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2014. — Т. 431. — С. 145–177.