

Отзыв научного руководителя о диссертации

Д. И. ЧИЧЕРИНА

"О квантовых интегрируемых спиновых цепочках
с бесконечномерным пространством состояний"

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03 – математическая физика

Рецензируемая диссертация относится к теории квантовых интегрируемых систем и посвящена изучению интегрируемых спиновых цепочек. В работе в рамках квантового метода обратной задачи и метода Q -оператора Бакстера изучаются периодические спиновые цепочки конечной длины с бесконечномерным пространством состояний. Задача состоит в нахождении и исследовании новых решений уравнений Янга–Бакстера и конструкции Q -операторов.

Современным подходом к теории квантовых интегрируемых систем является квантовый метод обратной задачи. Он связывает с каждым решением уравнения Янга–Бакстера интегрируемую модель и обеспечивает метод построения собственных состояний гамильтониана модели при помощи алгебраического анзаца Бете. В приложениях часто возникают интегрируемые модели, где псевдо-вакуум отсутствует и, как следствие, алгебраический анзац Бете неприменим. В таких случаях альтернативным является метод Q -оператора Бакстера. Основным источником подобных моделей является современная квантовая теория поля.

Существует широкий круг работ, посвященных операторам Бакстера в случае спиновых цепочек с различными алгебрами симметрии. Систематический метод построения Q -оператора был предложен в работах В.Бажанова, С.Лукьянова и А.Замолодчикова для модели с тригонометрической деформацией алгебры симметрии sl_2 . В рамках этого метода Q -оператор строится как след специальной матрицы монодромии по вспомогательному пространству бесконечномерного представления q -осцилляторной алгебры. При этом используется универсальная R -матрица (С.Хорошкин, В.Толстой). Абстрактное представление через генераторы для универсальной R -матрицы является достаточно сложным, что приводит к большим техническим трудностям и не позволяет получить явных формул для Q -операторов, удобных для использования в приложениях. Кроме того, случай недеформированной алгебры симметрии должен получаться при рассмотрении предела $q \rightarrow 1$, что само по себе является нетривиальной технической задачей. Существенный недостаток этого метода состоит в том, что его невозможно применить для моделей с эллиптической деформацией алгебры симметрии. Для преодоления перечисленных трудностей в совместных работах С.Деркачева, А.Манашова, Г.Корчемского, Р.Киршнера и Д.Караханяна был

предложен метод, который применим как для всех типов деформаций алгебры sl_2 , так и для алгебр старшего ранга. В каждом конкретном случае этот метод позволяет получить явные формулы.

Оператор Бакстера строится из R-оператора, действующего в тензорном произведении двух бесконечномерных представлений алгебры симметрии. Нахождение R-оператора – решения уравнения Янга–Бакстера, основано на методе факторизации: R-оператор строится в виде произведения простых строительных блоков – операторов, являющихся аналогами элементарных транспозиций в группе перестановок.

Работа Д.И. Чичерина посвящена дальнейшему развитию этих методов и их применению к разным моделям. Стоит отметить, что изначально метод был разработан для случая бесконечномерных представлений алгебры симметрии: модулей Верма и непрерывных серий. В работе показано, что его с успехом можно применять и в случае конечномерных представлений, которые обычно возникают в дискретных точках как подпредставления бесконечномерных. Более того, такая точка зрения на конечномерные операторы Бакстера и решения уравнения Янга–Бакстера оказалась продуктивной и позволила получить множество явных формул, которые трудно получить другими методами.

Представленная работа включает Введение, 5 глав и список литературы по теме диссертации, насчитывающий 143 наименования. Во Введении должным образом сформулированы цели и основные методы исследования, сформулированы базовые положения квантового метода обратной задачи и метода оператора Бакстера в форме, удобной для настоящей работы и приведён обзор содержания и основных результатов последующих глав.

В первой и второй главах изучаются спиновые цепочки с алгеброй симметрии ранга 1. В первой главе строятся бесконечномерные операторы Бакстера для тригонометрической и эллиптической деформации алгебры sl_2 . Для наглядности изложения в начале главы сформулирована общая схема, применимая как в случае деформированной, так и в случае недеформированной алгебры симметрии sl_2 . Вычислено действие операторов Бакстера на производящие функции соответствующих представлений. Изучены ограничения R-операторов на конечномерные инвариантные подпространства и получены новые формулы для конечномерных R-операторов.

Глава 2 посвящена более детальному изучению недеформированной спиновой цепочки в случае конечномерных представлений. Предложено несколько альтернативных конструкций набора конечномерных операторов Бакстера. Для них получено множество явных формул в форме, удобной для приложений. Обсуждается связь построенных операторов Бакстера с решениями уравнений анзатца Бете.

В главе 3 строится общее решение уравнения Янга–Бакстера имеющее симметрию модулярного дубля Фаддеева. Решение строится явным образом в виде интегрального оператора. Предложено две конструкции и продемонстрирована их эквивалентность. Ранее R-оператор для модулярного дубля был построен в работе А.Быцко и И.Тешнера, где было найдено решение уравнения Янга–Бакстера в виде квантового дилогарифма от оператора Казимира. В такой форме R-оператор неудобен для приложений, поскольку требует разложения тензорного представления на неприводимые и вычислений с использованием коэффициентов Клебша–Гордана. Следует отметить, что интегральные операторы гораздо более удобны с технической точки зрения и позволяют кардинально упростить вычисления.

Глава 4 является подготовительной перед главой 5. В ней обсуждаются конечномерные решения уравнения Янга–Бакстера с (псевдо)ортогональной группой симметрии. Предложен новый способ вычислений со спинорной R-матрицей Виттена и найдено локальное уравнение Янга–Бакстера для алгебры Клиффорда. В главе 5 показано, как перенести методы, обсуждавшиеся в главе 1 на случай алгебры симметрии старшего ранга, а именно для конформной алгебры симметрии n -мерного Евклидова пространства. Найден R-оператор для представлений на произвольных тензорных полях в 4-мерии и на скалярных полях в n -мерии.

Оценивая диссертацию в целом, можно сказать, что автором получены оригинальные и интересные результаты о решениях уравнения Бакстера и Янга–Бакстера, как для бесконечномерных, так и для конечномерных представлений алгебр симметрии в моделях, возникших в современных исследованиях по теоретической и математической физике. Полученные результаты уже нашли важные применения в исследованиях скрытых симметрий амплитуд рассеяния в супер-симметричных калибровочных теориях. Д. Чичерин неоднократно приглашался для выступлений на семинарах и конференциях в ведущих научных центрах в России и за рубежом, что доказывает его высокую научную зрелость и самостоятельность.

Диссертация грамотно написана и тщательно выверена, содержание работы продуманно распределено по главам. В каждой главе есть вводная часть, в которой чётко формулируется изучаемая проблема. Работа содержит достаточно подробные разъяснения и обоснования проведённых вычислений. Хочется также отметить значительный объём диссертации, который практически полностью занимает изложение оригинальных результатов автора. Многие постановки задач и методы их решения предложены самим диссертантом.

По мнению научного руководителя, тема диссертации актуальна, научные положения и выводы работы достоверны, новы и обоснованы. Результаты должным образом опубликованы в шести работах в ведущих иностранных журналах по тематике исследования, которые входят в список изданий, рекомендованных ВАК. Они докладывались на российских и международных конференциях и семинарах. Содержание работы правильно и полно отражено в автореферате диссертации. Представленная работа является серьёзным научным исследованием, удовлетворяющим всем требованиям ВАК. В ней развиваются оригинальные методы исследования и с их помощью получены нетривиальные результаты.

Представленная на рассмотрение диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, а Д.И. Чичерин безусловно заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель

С. Э. Деркачёв
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник ПОМИ РАН

Санкт-Петербург,
22 мая 2014 г.

Подпись С. Э. Деркачева заверяю