САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Гладкая Анна Владимировна

Экстремальные задачи теории приближения целыми функциями конечной степени и сплайнами

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
доцент О. Л. Виноградов

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Обозначения **4**

Введение **8**

Глава 1. Целые функции, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной и интегральной метриках с весом **19**

§1. Введение . . . 19

§2. Предварительные сведения об аналитических функциях . . 21

§3. Задача в равномерной метрике . . . 24

3.1. Постановка задачи в равномерной метрике с весом . . 24

3.2. Построение функций и подсчет плотности точек альтернанса . . . 26

3.3. Наименьшее уклонение функции f_σ от нуля в равномерной метрике с весом . . . 28

3.4. Наименьшее уклонение функции F_σ от нуля в равномерной метрике с весом . . . 30

§4. Задача в интегральной метрике . . . 31

4.1. Постановка задачи в интегральной метрике с весом . . 31

4.2. Ортогональность знака функции f_σ функциям меньшей степени . . . 33

4.3. Наименьшее уклонение функции f_σ от нуля в интегральной метрике с весом . . . 38

Глава 2. Непериодический сплайновый аналог операторов Ахиезера–Крейна–Фавара **43**

§1. История вопроса и постановки задач . . . 43

§2. Вспомогательные результаты . . . 48

2.1. Предварительные сведения . . . 48

2.2. Три леммы об интегралах . . . 50

§3. Основные результаты . . . 55

3.1. Построение ядра оператора и его свойства . . . 55

3.2. Сведение к периодической задаче . . . 59

3.3. Неравенство типа Ахиезера–Крейна–Фавара 66

Глава 3. Неравенства типа Джексона для приближений сплайнами 71

§1. Введение 71

§2. Неравенства для первого модуля непрерывности производных 73

§3. Неравенство для старших модулей непрерывности функции 85

Заключение 91

Литература 92

Обозначения

Следующие обозначения используются в тексте без пояснений:

$A_\sigma(f)_p$ — наилучшее приближение f множеством $\mathbf{E}_\sigma$, то есть

$$A_\sigma(f)_p = \inf_{g\in\mathbf{E}_\sigma} \|f-g\|_p;$$

$A_{\sigma-0}(f)_p$ — наилучшее приближение f множеством $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$;

$A_{\sigma,m}(f)_p$ — наилучшее приближение f множеством $\mathbf{S}_{\sigma,m}$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$;

$B_{\sigma,m}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma_{\sigma,m}(z)e^{itz}\,dz$ — непериодический B-сплайн порядка $m \in \mathbb{Z}_+$, где

$$\gamma_{\sigma,m}(z) = c(B_{\sigma,m}, z) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}z}-1}{i\frac{\pi}{\sigma}z}\right)^{m+1};$$

$\mathcal{B}_{n,m}(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_{n,m}(k)e^{ikt}$ — периодический B-сплайн порядка $m \in \mathbb{Z}_+$. Нормировка B-сплайнов выбрана так, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} B_{\sigma,m} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathcal{B}_{n,m} = 1;$$

$\mathsf{B}_r(\cdot)$ — многочлены Бернулли, определяемые равенством

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathsf{B}_r(x)}{r!}, \quad |z| < 2\pi;$$

$\mathsf{B}_r^*(\cdot)$ — 1-периодические функции, совпадающие на $[0,1)$ с многочленами Бернулли (за исключением значения B_1^* в точках разрыва: $\mathsf{B}_1^*(0) = 0$);

C — пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$\mathbb{C}_-$ — открытая нижняя комплексная полуплоскость;

$\mathbb{C}_+$ — открытая верхняя комплексная полуплоскость;

$c_k(f) = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)e^{-i\frac{\pi}{\ell}kt}\,dt$ — коэффициенты Фурье 2ℓ-периодической функции f, суммируемой на периоде;

$c(f,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-izt}\,dt$, — преобразование Фурье заданной на $\mathbb{R}$ функции f, если интеграл существует хотя бы в смысле главного значения;

$d_r(t) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ikt}}{(ik)^r}$ — ядро Бернулли порядка $r \in \mathbb{N}$;

$\mathbf{E}_\sigma$ — пространство целых функций степени не выше σ;

$\mathbf{E}_{\sigma-0}$ — пространство целых функций степени меньше σ;

$E_n(f)_p$ — наилучшее приближение функции f множеством $\mathcal{T}_{2n-1}$ в пространстве L_p;

$E_{n,m}(f)_p$ — наилучшее приближение функции f множеством $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ в пространстве L_p;

$H^1(\mathbb{C}_+)$ — класс Харди, то есть множество всех функций, аналитических в $\mathbb{C}_+$, таких что

$$\sup_{y>0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|dx < \infty;$$

Класс $H^1(\mathbb{C}_-)$ определяется аналогично;

$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ — константы Фавара. Напомним, что

$$\mathcal{K}_0 = 1 < \mathcal{K}_2 = \frac{\pi^2}{8} < ... < \frac{4}{\pi} < ... < \mathcal{K}_3 = \frac{\pi^3}{24} < \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2};$$

$L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство измеримых, суммируемых на оси с p-й степенью, с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{1/p};$$

L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство измеримых, 2π-периодических, суммируемых на периоде с p-й степенью функций f, с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^p \right)^{1/p};$$

$L_\infty(\mathbb{R})$ — пространство измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|;$$

L_∞ — подпространство 2π-периодических функций из $L_\infty(\mathbb{R})$;

$L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ — множество функций, принадлежащих $L_p(E)$ для каждого отрезка E;

$\log^+$ — положительная часть логарифма;

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$S_{h,r}(f)$ — функция Стеклова порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции f:

$$S_{h,0}(f) = f, \quad S_{h,1}(f,x) = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)dt, \quad S_{h,r}(f) = S_{h,1}(S_{h,r-1}(f));$$

$\mathbf{S}_{\sigma,m}$ $(m \in \mathbb{Z}_+,\ \sigma > 0)$ — пространство сплайнов порядка m минимального дефекта с узлами $\frac{j\pi}{\sigma}$ $(j \in \mathbb{Z})$. При $m \in \mathbb{N}$ это множество $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, сужение которых на каждый интервал $\left(\frac{j\pi}{\sigma}, \frac{(j+1)\pi}{\sigma}\right)$ есть многочлен степени не выше m. $\mathbf{S}_{\sigma,0}$ — есть множество функций, постоянных на каждом таком интервале (значения в точках разрыва несущественны);

$\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ $(n \in \mathbb{N})$ — пространство 2π-периодических сплайнов из $\mathbf{S}_{n,m}$;

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — пространство тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$;

$W_p^{(r)}(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{N})$ — множество функций, принадлежащих $L_p(\mathbb{R})$ и являющихся r-кратными интегралами от функций из $L_p(\mathbb{R})$;

$W_p^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N})$ — множество функций, принадлежащих L_p и являющихся r-кратными интегралами от функций из L_p;

$W_{p,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$ — множество r-кратных интегралов от функций из $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел;

$[a\!:\!b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$;

$\delta_t^r(f, x) = \sum\limits_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f(x + \frac{rt}{2} - kt)$ — центральная разность порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции f с шагом t в точке x. В частности, $\delta_t(f, x) = f\left(x + \frac{t}{2}\right) - f\left(x - \frac{t}{2}\right)$, $\delta_t^2(f, x) = f(x + t) - 2f(x) + f(x - t)$;

χ_A — характеристическая функция множества A: $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$;

$\omega_r(f, h)_P = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant h} P(\delta_t^r(f))$ — модуль непрерывности порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции f с шагом h относительно полунормы P;

$\lfloor t \rfloor$ — целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t;

Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0.

Сумма по $\mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N}.$$

Введение

Диссертация посвящена установлению ряда классических неравенств теории приближения целыми функциями конечной степени и непериодическими сплайнами.

Диссертация состоит из трех глав, разделенных на параграфы. Нумерация утверждений отдельная для каждого типа утверждений в каждой главе. При ссылках внутри главы указывается только номер соответствующего утверждения. При ссылках на утверждение другой главы первым указывается номер главы, например: теорема 2.1. Нумерация формул двойная и указывает номер главы и номер формулы в главе, например: формула (2.1).

1. Первая глава посвящена приближениям целыми функциями конечной степени из класса Картрайт. Результаты этой главы опубликованы в [11] и [5].

Сначала напомним классические результаты для тригонометрических полиномов. П. Л. Чебышевым была решена задача о нахождении полинома степени n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля в равномерной метрике, в том числе, в некоторых весовых пространствах.

Возьмем весовую функцию $\omega(x) = 1/\rho_m(x)$, где ρ_m — алгебраический полином степени m, положительный на $[-1, 1]$, с единичным старшим коэффициентом. Пусть $n > m$. Положим $z = e^{i\varphi},\ x = \cos\varphi$,

$$T_n(x) = \operatorname{Re}\left\{z^{-n} g_m^2(z)\right\},$$

где g_m — полином степени m с корнями вне круга $|z| \leqslant 1$, такой что $|g_m(e^{i\varphi})|^2 = \rho_m(\cos\varphi)$ при $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда T_n является экстремальным в задаче нахождения

$$\min_{a_i} \max_{x\in[-1,1]} |(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)\omega(x)|.$$

В случае $\omega(x) \equiv 1$ решением поставленной задачи будут многочлены Чебышева первого рода $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$. Этот результат и его аналоги в интегральной метрике вошли в книгу [1, прил. I, пункт 14]; см. там же историю вопроса. Форма записи ответа взята из [41].

В первой главе получены аналоги этих результатов для целых функций экспоненциального типа. Построены функции, наименее уклоняющиеся от нуля в весовых пространствах на вещественной оси. Эти функции обобщают многочлены Чебышева первого и второго рода.

В §3 рассмотрена задача в равномерной метрике.

Определение. Целыми функциями класса $\mathcal{C}$, согласно [42, лекция 16], будем называть целые функции экспоненциального типа, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(t)|}{1+t^2} dt < \infty.$$

Пусть даны функция ρ_m класса $\mathcal{C}$, степени m ($m \in \mathbb{N}$), положительная на вещественной оси, и число $\sigma \geqslant m$. Найдем целые функции степени σ, строго наименее уклоняющиеся от нуля в классе $\mathcal{C}$ с весами $1/\rho_m$ и $|\cdot|/\rho_m$ в равномерной метрике. Наименьшее уклонение понимается в следующем смысле.

Определение. Пусть f — целая функция степени $\sigma > 0$. Будем говорить, что функция f строго наименее уклоняется от нуля в классе $\mathcal{C}$ с весом ω в равномерной метрике, если не существует целой функции Q класса $\mathcal{C}$ степени меньше σ, не равной нулю тождественно, такой что

$$\sup_{\mathbb{R}} |(f-Q)\,\omega| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f\omega|\,.$$

Другими словами, это значит, что для функции f элементом наилучшего приближения среди функций степени меньше σ, принадлежащих классу $\mathcal{C}$, является тождественный ноль:

$$\inf_{Q \in \mathcal{C} \cap \mathbf{E}_{\sigma-0}} \sup_{\mathbb{R}} \big|(f-Q)\,\omega\big| = \sup_{\mathbb{R}} |f\omega|\,.$$

Более того, элемент наилучшего приближения единственнен.

Для четного веса $1/\rho_m$ эта задача решена в [11]. Остальные результаты были получены в [5].

Для решения задачи построены две целые функции f_σ и F_σ

$$f_\sigma(z) = \frac{1}{2}\left(G^*(z) + G(z)\right), \qquad F_\sigma(z) = \frac{1}{2iz}\left(G^*(z) - G(z)\right),$$

где функция $g_m(z)$ такая, что $\rho_m(x) = |g_m(x)|^2$, $G(z) = e^{-i\sigma z} g_m^2(z)$, а операция * определяется равенством $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

Основными результатами в §3 являются следующие теоремы.

Теорема 1.2. *Для любой целой функции Q класса $\mathcal{C}$, отличной от тождественного нуля, степени меньшей σ выполняется неравенство*

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_\sigma - Q}{\rho_m} \right| > \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_\sigma}{\rho_m} \right|.$$

Таким образом, построенная функция f_σ строго наименее уклоняется от нуля в равномерной метрике с весом $1/\rho_m$.

Теорема 1.3. *Для любой целой функции Q класса $\mathcal{C}$, отличной от тождественного нуля, степени меньшей σ выполняется неравенство*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \left(F_\sigma(x) - Q(x)\right) \frac{x}{\rho_m(x)} \right| > \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| F_\sigma(x) \frac{x}{\rho_m(x)} \right|.$$

Следовательно, построенная функция F_σ строго наименее уклоняется от нуля в равномерной метрике с весом $|\cdot|/\rho_m$.

В §4 рассмотрена задача в интегральной метрике. Наименьшее уклонение понимается в следующем смысле.

Определение. Пусть f — целая функция степени $\sigma > 0$. Говорят, что функция f наименее уклоняется от нуля с весом ω в интегральной метрике, если не существует целой функции Q степени меньше σ, суммируемой на оси с весом ω, такой что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|f - Q| - |f|)\, \omega < 0.$$

Замечание 1.6. Суммируемость функции f с весом ω при этом не обязательна в силу очевидного неравенства

$$\big||f - Q| - |f|\big| \leqslant |Q|,$$

однако в случае суммируемости это определение совпадает с классическим.

Основными результатами в §4 являются следующие теоремы.

Теорема 1.6. *Для любой целой функции k_α степени $\alpha \leqslant \sigma$, суммируемой на оси с весом $1/\rho_m$, выполняется неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\sigma - k_\alpha| - |f_\sigma|}{\rho_m} \geqslant 0.$$

Если $m < \sigma$ или $\alpha < \sigma$, то для ненулевой функции k_α неравенство строгое.

Таким образом, функция f_σ наименее уклоняется от нуля в интегральной метрике с весом $1/\rho_m$.

Теорема 1.7. *Для любой целой функции l_α степени $\alpha \leqslant \sigma$, суммируемой на вещественной оси с весом $|\cdot|/\rho_m$, выполнено равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} F_\sigma(x) l_\alpha(x) \frac{|x|\, dx}{\rho_m(x)} = 0.$$

Таким образом, функция F_σ наименее уклоняется от нуля в интегральной метрике с весом $|\cdot|/\rho_m$.

2. Вторая глава посвящена приближениям непериодическими сплайнами и содержит результаты, опубликованные в [6]. Всюду далее $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$.

В §1 приведены известные результаты о полиномах, целых функциях и периодических и непериодических сплайнах.

В 1937 году Ж. Фавар [37] и Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [2] построили линейный метод приближения $\mathcal{X}_{n,r}$ со значениями в пространстве тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$, такой что для любой $f \in W_\infty^{(r)}$

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_\infty, \tag{1}$$

и доказали, что константу $\mathcal{K}_r$ уменьшить нельзя, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение, то есть

$$\sup_{f \in W_\infty^{(r)}} \frac{E_n(f)_\infty}{\|f^{(r)}\|_\infty} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{2}$$

Операторы $\mathcal{X}_{n,r}$ называют операторами или суммами Ахиезера–Крейна–Фавара, а неравенства, в которых приближение функции оценивается через норму (полунорму) производной, производной сопряженной функции и т.п., будем называть неравенствами типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Впоследствии аналоги соотношений (1) и (2) были установлены для многих классов сверток периодических и непериодических функций. С. М. Никольский [28] распространил (1) и (2) на случай нормы в пространстве L_1.

М. Г. Крейн [21] получил аналоги соотношения (2) для приближения целыми функциями конечной степени классов функций из $W_\infty^{(r)}(\mathbb{R})$, определяемых дифференциальными операторами, а Б. Надь [44] построил линейный оператор $\mathcal{X}_{\sigma,r}$ со значениями в $\mathbf{E}_\sigma$, для отклонения которого справедлива такая же оценка

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_\infty. \tag{3}$$

При $\sigma = n \in \mathbb{N}$ операторы из формул (1) и (3) совпадают на 2π-периодических функциях и потому обозначаются одинаково. Эти результаты вошли в книгу [1], где оценки сверху распространены на пространства $L_p(\mathbb{R})$ и L_p.

Для приближения периодических функций сплайнами минимального дефекта известны следующие точные соотношения типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Пусть $m \geqslant r-1$, $p \in \{1, \infty\}$. Тогда

$$\sup_{f \in W_p^{(r)}} \frac{E_{n,m}(f)_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{4}$$

Полагаем

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 0, & m \text{ нечетно}, \\ \frac{\pi}{2\sigma}, & m \text{ четно}. \end{cases}$$

Пусть $\gamma \geqslant 0$, функция f задана на $\mathbb{R}$ и $f(x) = O(|x|^\gamma)$ при $x \to \infty$. Обозначим через $\xi_{\sigma,m}(f)$ сплайн из $\mathbf{S}_{\sigma,m}$, интерполирующий f в точках $\frac{k\pi}{\sigma} + \varepsilon_m$ $(k \in \mathbb{Z})$ и такой, что $\xi_{\sigma,m}(f,x) = O(|x|^\gamma)$ при $x \to \infty$. При $m = r-1$ константа в (4) реализуется линейным проектором, а именно, с помощью интерполяционного сплайна:

$$\sup_{f \in W_p^{(r)}} \frac{\|f - \xi_{n,r-1}(f)\|_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{5}$$

Доказательства соотношений (4) и (5) можно найти в [32, 43, 40, 18, 20].

А. А. Лигун [43] доказал существование линейного оператора из C в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$, реализующего константу в соотношении (4) при $m \geqslant r$, $p = \infty$ (явный вид этого оператора в [43] отсутствует). О. Л. Виноградов [3] построил при $m \geqslant r$ линейные операторы $\mathcal{X}_{n,r,m}$ со значениями в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ (аналоги сумм Ахиезера–Крейна–Фавара), реализующие константу в соотношении (4) для всех $p \in [1, \infty]$ и $f \in W_p^{(r)}$.

Для приближений непериодическими сплайнами функций из $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$ Сунь Юншен и Ли Чунь [30] и независимо Г. Г. Магарил-Ильяев [25, 26] установили аналог соотношения (4) в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при $m \geqslant r-1$, $p \in \{1, \infty\}$

$$\sup_{f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_{\sigma,m}(f)_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}. \tag{6}$$

Как и в периодическом случае, при $m = r - 1$ соотношение (6) реализуется интерполяционными сплайнами. Эти результаты можно найти в [46, 35]. В этих работах получена точная поточечная оценка погрешности интерполирования, из которой сразу следует точная оценка нормы сверху для всех p. Другое доказательство вместе с обобщением на все $p \in (1, \infty)$ (разумеется, с меньшей правой частью) и еще несколькими ссылками содержится в [26].

В §3 при $m \geqslant r$ строятся линейные операторы $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ со значениями в $\mathbf{S}_{\sigma,m}$, такие что для всех $p \in [1, \infty]$ и $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} \|f^{(r)}\|_p. \tag{7}$$

(При $\sigma = n \in \mathbb{N}$ построенный оператор совпадает на 2π-периодических функциях с периодическим предшественником, и потому их можно обозначить одинаково.) Тем самым устанавливается возможность реализации верхних граней в (6) линейными методами приближения, ранее остававшаяся неизвестной.

Главным результатом этой главы является неравенство типа Ахиезера–Крейна–Фавара.

Теорема 2.1. *Пусть $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $p \in [1, \infty]$, $f \in W_{1,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$, $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} \|f^{(r)}\|_p.$$

При $p = 1, \infty$ неравенство точное, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 2.1*

$$A_{\sigma,m}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} A_{\sigma,m-r}(f^{(r)})_p.$$

В периодическом случае аналог следствия 2.1 для приближений тригонометрическими многочленами установил Сунь Юншен, для приближений сплайнами — Корнейчук; см. [20, теорема 4.1.4 и предложение 5.4.9].

3. В третьей главе получены неравенства типа Джексона. Неравенствами типа Джексона в теории приближений принято называть неравенства, в которых приближение функции оценивается посредством модуля непрерывности (самой функции, ее производной и т.п.). Первым такое неравенство

$$E_n(f) \leqslant C(\gamma)\omega_1\left(f, \frac{\gamma}{n}\right)$$

для приближений непрерывных периодических функций тригонометрическими многочленами и модуля непрерывности первого порядка получил Д. Джексон в 1911 году.

Первое точное неравенство типа Джексона установил Н. П. Корнейчук [19], который доказал, что для любых вещественнозначных функций f из C и $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f) \leqslant 1 \cdot \omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

причем константа 1 точная при всех n в совокупности, то есть

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in C} \frac{E_n(f)}{\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right)} = 1.$$

Для нечетных r В. В. Жуком [13] ($r = 1$) и А. А. Лигуном [24] ($r > 1$) было установлено неравенство типа Джексона с точной константой

$$\|f - X_{n,r}(f)\| \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)$$

для любой $f \in C^{(r)}$. А. Ю. Громов [12] доказал для нечетных r точное неравенство

$$\|f - X_{\sigma,r}(f)\| \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)$$

для приближений целыми функциями конечной степени и их аналог в интегральной метрике.

В §2 по схеме В. В. Жука и А. А. Лигуна (см. [16]) получено усиление неравенства Ахиезера–Крейна–Фавара. Здесь и далее $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ при $m \geqslant r$ суть построенные во второй главе операторы, а при $m = r - 1$ интерполяционный сплайн, интерполирующий f в точках $\frac{k\pi}{\sigma} + \varepsilon_m$, где

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ нечетно}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m \text{ четно}. \end{cases}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\sigma > 0$, $m, r \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $h > 0$, $f \in W_p^{(r)}$, $p \in [1, \infty]$. Построим оператор*

$$U_{\sigma,r,h} f = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!} \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \mathcal{X}_{\sigma,r+1-2l,m} S_h f^{(2l)}.$$

Тогда

$$\|f - U_{\sigma,r,h} f\|_p \leqslant \left(\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{h^{2l-1}}{(2l)!} \left| \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \cdot \frac{\mathcal{K}_{r+1-2l}}{\sigma^{r+1-2l}} \right) \omega_1\left(f^{(r)}, h\right)_p +$$
$$+ \frac{2h^r}{r!} \int_0^{1/2} \left| \mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2) \right| d\tau \cdot \|f^{(r)}\|_p.$$

Кроме того, при нечетном r верно

$$\|f - U_{\sigma,r,h} f\|_p \leqslant h^r \left(\frac{A_{r,0}}{2} + \sum_{l=0}^{r-1} |\gamma_l| \frac{\mathcal{K}_{r+1-l}}{(\sigma h)^{r+1-l}} \right) \omega_1\left(f^{(r)}, h\right)_p,$$

где

$$A_{r,0} = \frac{2}{r!} \int_0^{1/2} \left| \mathsf{B}_r(t) - \mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right) \right| dt, \qquad \gamma_k = \frac{\mathsf{B}_k\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}.$$

При $h = \frac{\pi}{\sigma}$, $p = 1, \infty$ неравенство точное, а при $m \geqslant r+1$ операторы $U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}}$ и $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ совпадают.

Замечание 3.2. Таким образом, при $h = \frac{\pi}{\sigma}$ и $p = 1, \infty$ получается точное неравенство

$$\|f - U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}} f\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r} \omega_1 \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma} \right)_p .$$

§3 посвящен неравенствам для старших модулей непрерывности. Задача о константах в неравенствах типа Джексона для старших модулей непрерывности труднее, чем для первого модуля непрерывности. Обзор известных результатов на эту тему можно найти в статье О. Л. Виноградова и В. В. Жука [9]. В работе [38] был предложен новый способ получения неравенств типа Джексона, позволяющий улучшить константы. Этот способ был развит и улучшен в работе [9], где исследовав свойства линейных комбинаций функций Стеклова, авторы устанавливают оценки функционалов с конечными моментами через модули непрерывности с помощью приближения периодическими сплайнами. В этом параграфе, следуя методике из работы [9], получены некоторые оценки через старшие модули непрерывности.

Рассмотрим линейные комбинации средних Стеклова

$$U_{h,k} = \frac{2}{C_{2k}^k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} C_{2k}^{k-j} S_{jh}^2,$$

отметим, что $U_{h,1} = S_h^2$.

Теорема 3.2. *Пусть $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2r-1$, $p \in [1, \infty]$,*

$$Y_{\sigma,r,m,h} = \sum_{k=1}^{r-1} \mathcal{X}_{\sigma,2k,m} U_{h,r}^k (I - U_{h,r}) + \mathcal{X}_{\sigma,2r,m} U_{h,r}^r.$$

Тогда для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$

$$\|f - Y_{\sigma,r,m,h} f\|_p \leqslant \left\{ \frac{1}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\mathcal{K}_{2k}}{(\sigma h)^{2k}} \nu_r^k + \frac{\mathcal{K}_{2r}}{(\sigma h)^{2r}} \frac{\nu_r^r}{2^{2r}} \right\} \omega_{2r}(f, h)_p.$$

Здесь

$$\nu_r = \frac{8}{C_{2m}^m} \sum_{l=0}^{\lfloor (r-1)/2 \rfloor} \frac{C_{2r}^{r-2l-1}}{(2l+1)^2}.$$

Отметим, что ν_k не зависит от h, что и отражено в обозначении.

Тем самым, получены явные константы в неравенствах типа Джексона для сплайнового приближения на прямой. Константы совпали с константами в периодическом случае этой задачи, которая была была исследована О. Л. Виноградовым и В. В. Жуком.

Глава 1. Целые функции, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной и интегральной метриках с весом

§1. Введение

П. Л. Чебышевым была решена задача о нахождении полинома степени n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля в равномерной метрике, в том числе, в некоторых весовых пространствах.

Возьмем весовую функцию $\omega(x) = 1/\rho_m(x)$, где ρ_m — алгебраический полином степени m, положительный на $[-1, 1]$, с единичным старшим коэффициентом. Пусть $n > m$. Положим $z = e^{i\varphi},\ x = \cos\varphi$,

$$T_n(x) = \operatorname{Re}\left\{z^{-n} g_m^2(z)\right\},$$

где g_m — полином степени m с корнями вне круга $|z| \leqslant 1$, такой что $|g_m(e^{i\varphi})|^2 = \rho_m(\cos\varphi)$ при $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда T_n является экстремальным в задаче нахождения

$$\min_{a_i} \max_{x \in [-1,1]} |(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)\omega(x)|.$$

В случае $\omega(x) \equiv 1$ решением поставленной задачи будут многочлены Чебышева первого рода $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$. Этот результат и его аналоги в интегральной метрике вошли в книгу [1, прил. I, пункт 14]; см. там же историю вопроса. Форма записи ответа взята из [41].

В данной главе получены аналоги этих результатов для целых функций экспоненциального типа. Построены функции, наименее уклоняющиеся от нуля в весовых пространствах на вещественной оси. Эти функции обобщают многочлены Чебышева первого и второго рода. Результаты главы опубликованы в [5].

§2. Предварительные сведения об аналитических функциях

Определение. Целыми функциями экспоненциального типа или конечной степени называют целые функции f, для которых существуют такие числа A и B, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)| \leqslant Ae^{B|z|}.$$

Типом или степенью функции f называется точная нижняя грань множества значений B, для которых выполняется это неравенство (с какой-нибудь константой A). Тип σ находится по формуле

$$\sigma = \varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|}.$$

Определение. Целыми функциями класса $\mathcal{A}$, согласно [23, гл. V], будем называть целые функции, ненулевые корни которых a_k удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_k}\right| < \infty.$$

Тождественный ноль также принадлежит классу $\mathcal{A}$.

Этот класс является естественным обобщением класса функций, все корни которых вещественны, т.е. "почти все" корни лежат в "окрестности" вещественной оси.

Определение. Целыми функциями класса $\mathcal{C}$, согласно [42, лекция 16], будем называть целые функции экспоненциального типа, для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|f(t)|}{1+t^2}dt < \infty.$$

Будем говорить, что функция принадлежит классу $\mathcal{C}^+$, если она аналитична в открытой и непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости, и интеграл в определении класса $\mathcal{C}$ сходится.

Замечание 1. Класс $\mathcal{A}$ содержит класс $\mathcal{C}$ (см., например, [42, лекция 17.2, теорема 1]).

Теорема A (Представление Неванлинны). *Пусть функция f принадлежит классу $\mathcal{C}^+$, ее нули в верхней полуплоскости не имеют конечных предельных точек, и пусть*

$$\alpha = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} < \infty.$$

Тогда f допускает разложение Неванлинны

$$\log|f(z)| = \log\left|\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - z/z_n}{1 - z/\overline{z_n}}\right| + \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|f(t)|}{(t-x)^2 + y^2}dt + cy,$$

где z_n — корни функции f в верхней полуплоскости, $z = x + iy$,

$$c = \lim_{r\to\infty} \frac{2}{\pi r}\int\limits_{0}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta.$$

В частности,

$$c \leqslant \frac{4\alpha}{\pi} \quad \text{и} \quad \log|f(z)| \leqslant \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|f(t)|}{(t-x)^2 + y^2}dt + cy.$$

Сформулированный вариант теоремы A содержится в [34, теорема 6.5.4]; см. также [23, гл. 5, теорема 4] и [36, глава 1, теорема 9].

Определение. Индикатором функции f, аналитической внутри угла $\theta_1 < \arg z < \theta_2$, называется функция

$$\mathfrak{H}_f(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log\left|f(re^{i\theta})\right|}{r} \qquad (\theta_1 < \theta < \theta_2).$$

Она характеризует зависимость роста функции от направления, по которому точка z стремится к бесконечности.

Определение. Средним типом функции f, следуя [36], будем называть значение ее индикатора в точке $\pi/2$. В [36, теорема 10] показано, что число c из представления Неванлинны равно среднему типу функции:

$$c = \mathfrak{H}_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varlimsup_{y\to\infty} \frac{\log|f(iy)|}{y}.$$

Теорема B (Н. И. Ахиезер [23, прил. V, теорема 1]**).** *Для того, чтобы целая функция f конечной степени k представлялась в форме*

$$f(x) = |\varphi(x)|^2 \qquad \text{для всех } x \in \mathbb{R},$$

где φ — целая функция конечной степени $\frac{k}{2}$ с корнями в одной из полуплоскостей $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ или $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы f была класса $\mathcal{A}$ и неотрицательна на вещественной оси.

Определение. Пусть $\{x_\alpha\}$ — семейство точек на комплексной плоскости, $N(R)$ — количество точек семейства в круге радиуса R с центром в нуле. Будем называть конечный или бесконечный предел

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{R},$$

в случае его существования, плотностью точек $\{x_\alpha\}$.

Таким образом, при подсчете точек мы будем учитывать кратность элементов в $\{x_\alpha\}$.

Замечание 2. В [42, лекция 16] показано, что индикатор функции степени σ и класса $\mathcal{C}$ равен $\sigma_+ \sin\theta$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $\sigma_-|\sin\theta|$ при $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, где $\sigma_\pm \in [0,\sigma]$, $\max\{\sigma_+,\sigma_-\} = \sigma$. Если индикатор четен, то $\sigma_+ = \sigma_- = \sigma$. Корни целой функции степени σ и класса $\mathcal{C}$ имеют плотность $\frac{\sigma_+ + \sigma_-}{\pi} \leqslant \frac{2\sigma}{\pi}$; см. [42, лекция 17]. Таким образом, если индикатор четен, то плотность нулей равна $\frac{2\sigma}{\pi}$.

§3. Задача в равномерной метрике

3.1. Постановка задачи в равномерной метрике с весом.

Везде далее будем считать весовую функцию ω неотрицательной на вещественной оси.

Определение. Пусть f — целая функция степени $\sigma > 0$. Говорят, что функция f наименее уклоняется от нуля с весом ω в равномерной метрике, если не существует целой функции Q степени меньше σ, такой что

$$\sup_{\mathbb{R}} |(f - Q)\,\omega| < \sup_{\mathbb{R}} |f\omega|\,.$$

Определение. Пусть f — целая функция степени $\sigma > 0$. Будем говорить, что функция f строго наименее уклоняется от нуля с весом ω в равномерной метрике, если не существует целой функции Q степени меньше σ, не равной нулю тождественно, такой что

$$\sup_{\mathbb{R}} |(f - Q)\,\omega| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f\omega|\,.$$

Далее будем говорить о функциях, строго наименее уклоняющихся от нуля в классе $\mathcal{C}$.

Определение. Пусть f — целая функция степени $\sigma > 0$. Будем говорить, что функция f строго наименее уклоняется от нуля в классе $\mathcal{C}$ с весом ω в равномерной метрике, если не существует целой функции Q класса $\mathcal{C}$ степени меньше σ, не равной нулю тождественно, такой что

$$\sup_{\mathbb{R}} |(f - Q)\,\omega| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f\omega|\,.$$

Другими словами, это значит, что для функции f элементом наилучшего приближения среди функций степени меньше σ, принадлежащих классу $\mathcal{C}$, является тождественный ноль:

$$\inf_{Q \in \mathcal{C} \cap \mathbf{E}_{\sigma-0}} \sup_{\mathbb{R}} \big|(f - Q)\,\omega\big| = \sup_{\mathbb{R}} |f\omega|\,.$$

Более того, элемент наилучшего приближения единственнен.

В полиномиальном случае для доказательства наименьшего уклонения от нуля используется теорема Валле Пуссена и подсчет количества точек альтернанса. В случае функций класса $\mathcal{C}$ можно говорить лишь о плотности точек.

Вместо точек альтернанса будем говорить о точках весового альтернанса функции f — точках, в которых $f\omega = \pm 1$. Далее будем использовать следующий аналог теоремы Валле Пуссена.

Теорема 1. *Пусть* $\omega : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $\{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность точек вещественной оси, имеющая плотность* $\frac{2\sigma}{\pi}$, $\omega(x_n) > 0$. *Рассмотрим функцию* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *принимающую в точках* x_n *отличные от нуля значения с чередующимися знаками, и пусть* $\lambda_n = |f(x_n)|$. *Тогда для каждой целой функции* Q *класса* $\mathcal{C}$, *отличной от тождественного нуля, степени меньше* σ *имеет место неравенство*

$$\sup_{\mathbb{R}} \bigl|(f - Q)\omega\bigr| > \inf_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \omega(x_n).$$

Доказательство. Если $\inf\limits_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \omega(x_n) = 0$, то неравенство выполнено, так как функция $f - Q$ отлична от тождественного нуля в силу замечания 2.

Пусть $\inf\limits_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \omega(x_n) > 0$. Допустим, что некоторая функция Q описанного вида удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\mathbb{R}} \bigl|(f - Q)\omega\bigr| \leqslant \inf_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \omega(x_n).$$

Рассмотрим разность

$$\Delta(x) = f(x)\omega(x) - (f(x) - Q(x))\omega(x) = Q(x)\omega(x).$$

Очевидно, $\Delta(x_n) \cdot f(x_n) \geqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Пусть в точках x_{n_0} и x_{n_0+2} выполняется неравенство $\Delta > 0$. Если между этими точками существует точка, в которой $\Delta < 0$, то функция Q имеет на промежутке (x_{n_0}, x_{n_0+2}) две перемены знака и, следовательно, два корня. Если такой точки не существует, то на этом промежутке у функции Q имеется корень второй кратности. В случае, если в точках x_{n_0} или x_{n_0+2} функция Δ обращается в ноль, то, рассматривая знаки Δ в соседних точках последовательности, аналогичным образом будем получать либо две перемены знака, либо корни второй кратности.

Таким образом, функция Q имеет на промежутке $(-R,\, R)$ в среднем $\frac{2R\sigma}{\pi}$ нулей, что невозможно, так как степень функции Q меньше σ.

□

Для единичного веса близкое к теореме утверждение установлено С. Н. Бернштейном (см., например, [17, гл. VI, §1, теорема 6.1.11]).

Пусть даны функция ρ_m класса $\mathcal{C}$, степени m, положительная на вещественной оси, и число $\sigma \geqslant m$. Найдем целые функции степени σ, строго наименее уклоняющиеся от нуля в классе $\mathcal{C}$ с весами $1/\rho_m$ и $|\cdot|/\rho_m$ в равномерной метрике.

Решение задачи для четного веса $1/\rho_m$ содержится в работе [11]. В формулировке теоремы 3 в статье [11] вместо класса $\mathcal{A}$ должен участвовать класс $\mathcal{C}$.

3.2. Построение функций и подсчет плотности точек альтернанса.

В [41] для представления весового полинома использовалась теорема Фейера–Рисса. Здесь для представления весовой функции воспользуемся теоремой Ахиезера — обобщением теоремы Фейера–Рисса для целых функций.

Так как весовая функция ρ_m удовлетворяет условиям теоремы Ахиезера, то существует целая функция h_m степени $\frac{m}{2}$ с корнями в нижней полуплоскости, такая что

$$\rho_m(x) = |h_m(x)|^2 \qquad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Замечание 3. Последнее равенство можно записать как равенство целых функций $\rho_m = h_m h_m^*$, где операция * определяется равенством

$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Следовательно, индикатор функции ρ_m четен и равен $m|\sin\theta|$ (см. [42, лекция 17]). Из доказательства теоремы Ахиезера в [23] видно, что $h_m \in \mathcal{C}$ и

$$\mathfrak{H}_{h_m}(\theta) = \frac{1}{2}\mathfrak{H}_{\rho_m}(\theta) = \frac{m}{2}|\sin\theta|.$$

Умножив h_m на подходящую константу, по модулю равную единице, будем считать, что $h_m(0) \in (0, \infty)$. Обозначим

$$g_m(z) = e^{\frac{imz}{2}} h_m(z), \qquad G(z) = e^{-i\sigma z} g_m^2(z).$$

Тогда $\rho_m(x) = |g_m(x)|^2$. Определим целые функции f_σ и F_σ равенствами

$$f_\sigma(z) = \frac{1}{2}\left(G^*(z) + G(z)\right), \qquad F_\sigma(z) = \frac{1}{2iz}\left(G^*(z) - G(z)\right)$$

и покажем, что они решают нашу задачу. Корректность определения F_σ следует из вещественности значения $G(0) = h_m(0)$.

Замечание 4. Ясно, что $G \in \mathcal{C}$ как произведение функций класса $\mathcal{C}$, а потому $f_\sigma \in \mathcal{C}$ и $F_\sigma \in \mathcal{C}$, поскольку сложение не выводит из класса $\mathcal{C}$. Так как степень суммы (произведения) не превосходит суммы степеней слагаемых (сомножителей), степени функций G, f_σ и F_σ не больше σ. С другой стороны,

$$\mathfrak{H}_G(\pi/2) = \sigma - m + \mathfrak{H}_{h_m^2}(\pi/2) = \sigma - m + m = \sigma,$$

откуда степень G не меньше σ. То, что степени f_σ и F_σ в точности равны σ, будет установлено далее. Кроме того, симметрия f_σ и F_σ влечет четность их индикаторов.

Отметим, что в случае единичного веса $f_\sigma(z) = \cos\sigma z$, $F_\sigma(z) = \dfrac{\sin\sigma z}{z}$.

3.3. Наименьшее уклонение функции f_σ от нуля в равномерной метрике с весом.

Теорема 2. *Для любой целой функции Q класса $\mathcal{C}$, отличной от тождественного нуля, степени меньшей σ выполняется неравенство*

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_\sigma - Q}{\rho_m} \right| > \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_\sigma}{\rho_m} \right|.$$

Таким образом, построенная функция f_σ строго наименее уклоняется от нуля в равномерной метрике с весом $1/\rho_m$.

Доказательство. Для того, чтобы воспользоваться теоремой 1, исследуем плотность точек весового альтернанса функции f_σ. На вещественной оси $f_\sigma(x) = \operatorname{Re}\left(e^{-i\sigma x} g_m^2(x)\right)$ вещественна. Заметим, что

$$e^{-i\sigma z} g_m^2(z) = e^{-i\sigma z} \frac{g_m(z)}{g_m^*(z)} \rho_m(z).$$

Положим

$$\Phi(z) = e^{-i\sigma z} \frac{g_m(z)}{g_m^*(z)}.$$

Тогда Φ мероморфна и на вещественной оси $|\Phi| = 1$.

Далее заметим, что $f_\sigma(x) = \rho_m(x) \operatorname{Re} \Phi(x)$ на $\mathbb{R}$, откуда следует, что $|f_\sigma| \leqslant \rho_m$ на $\mathbb{R}$, а соотношения $f_\sigma(x) = \rho_m(x)$ и $f_\sigma(x) = -\rho_m(x)$ равносильны, соответственно, соотношениям $\Phi(x) = 1$ и $\Phi(x) = -1$. Аналогично

$$\begin{aligned} F_\sigma(x) &= \frac{\rho_m(x)}{2ix} \left(e^{i\sigma x} \frac{g_m^*(x)}{g_m(x)} - e^{-i\sigma x} \frac{g_m(x)}{g_m^*(x)} \right) = \\ &= -\frac{\rho_m(x)}{x} \operatorname{Im} \left(e^{-i\sigma x} \frac{g_m(x)}{g_m^*(x)} \right) = -\frac{\rho_m(x)}{x} \operatorname{Im} \Phi(x). \end{aligned}$$

Поскольку $|\Phi(x)| = 1$, отсюда следует, что $|F_\sigma(x)| \leqslant \dfrac{\rho_m(x)}{|x|}$ на $\mathbb{R}$, а соотношения $xF_\sigma(x) = \rho_m(x)$ и $xF_\sigma(x) = -\rho_m(x)$ равносильны соотношениям $\Phi(x) = -i$ и $\Phi(x) = i$ соответственно.

Из [23, прил. V] мы знаем, что целая функция h_m представляется в виде бесконечного произведения

$$h_m(z) = e^{b-iz\gamma} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}},$$

где a_k – корни функции h_m, $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{1}{a_k}$, $b \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\Phi(z) = e^{i(m-\sigma)z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{z}{\overline{a_k}}}{1 - \dfrac{z}{a_k}}.$$

Если x проходит вещественную прямую, то каждая дробь $\frac{1-\frac{x}{\overline{a_k}}}{1-\frac{x}{a_k}}$ пробегает единичную окружность в отрицательном направлении, поэтому $\arg\Phi$ строго убывает на $\mathbb{R}$. Отсюда видно, что вещественные нули функций f_σ и zF_σ чередуются. Более того, нули одной из них являются точками весового альтернанса (с весом $1/\rho_m$) другой.

Рассмотрим отношение

$$\frac{G^*(z)}{G(z)} = \frac{e^{iz(\sigma-m)} e^{b+i\gamma z} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{\overline{a_k}}\right)^2 e^{\frac{2z}{\overline{a_k}}}}{e^{iz(m-\sigma)} e^{b-i\gamma z} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{a_k}\right)^2 e^{\frac{2z}{a_k}}} = e^{2iz(\sigma-m)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \dfrac{z}{\overline{a_k}}}{1 - \dfrac{z}{a_k}}\right)^2.$$

Заметим, что $\left|\frac{G^*}{G}\right| < 1$ в верхней полуплоскости и $\left|\frac{G^*}{G}\right| > 1$ в нижней полуплоскости, поэтому функции f_σ и zF_σ не могут иметь невещественных нулей. Поскольку G — функция типа σ и $G(z) = f_\sigma(z) - izF_\sigma(z)$, то хотя бы одна из функций f_σ или F_σ имеет тип ровно σ и, в силу четности индикатора, плотность ее нулей равна $\frac{2\sigma}{\pi}$. Тогда то же самое верно и для другой функции, так как их нули чередуются.

Таким образом, мы показали, что нули функции F_σ являются точками весового альтернанса функции f_σ и имеют плотность $\frac{2\sigma}{\pi}$. Применяя теорему 1, получаем требуемое неравенство.

$\square$

Замечание 5. Поскольку тригонометрический полином есть целая функция конечной степени, принадлежащая классу $\mathcal{C}$, результат, сформулированный во введении, является частным случаем теоремы 2.

В [11] для четного веса $1/\rho_m$ теорема 2 была доказана другим способом.

3.4. Наименьшее уклонение функции F_σ от нуля в равномерной метрике с весом.

Покажем, что построенная в п. 3.2 функция F_σ наименее уклоняется от нуля в равномерной метрике с весом $|\cdot|/\rho_m$.

Аналогично предыдущему пункту точки весового альтернанса функции F_σ имеют плотность $\frac{2\sigma}{\pi}$. Применяя теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любой целой функции Q класса $\mathcal{C}$, отличной от тождественного нуля, степени меньшей σ выполняется неравенство*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(F_\sigma(x)-Q(x))\,\frac{x}{\rho_m(x)}\right| > \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_\sigma(x)\frac{x}{\rho_m(x)}\right|.$$

Следовательно, построенная функция F_σ строго наименее уклоняется от нуля в равномерной метрике с весом $|\cdot|/\rho_m$.

§4. Задача в интегральной метрике

4.1. Постановка задачи в интегральной метрике с весом.

Определение. Пусть f — целая функция степени $\sigma > 0$. Говорят, что функция f наименее уклоняется от нуля с весом ω в интегральной метрике, если не существует целой функции Q степени меньше σ, суммируемой на оси с весом ω, такой что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|f - Q| - |f|)\, \omega < 0.$$

Замечание 6. Суммируемость функции f с весом ω при этом не обязательна в силу очевидного неравенства

$$\big||f - Q| - |f|\big| \leqslant |Q|,$$

однако в случае суммируемости это определение совпадает с классическим.

Теорема 4. *Пусть знак измеримой функции f ортогонален с весом ω функции Q, суммируемой на оси с весом ω, то есть*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sign} f)\, Q\omega = 0.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|f - Q| - |f|)\, \omega \geqslant 0.$$

Доказательство. Воспользовавшись условием ортогональности, запишем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (|f-Q|-|f|)\,\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f-Q)\,(\operatorname{sign}(f-Q)-\operatorname{sign} f)\,\omega.$$

Рассмотрим значения, которые может принимать выражение

$$(f-Q)(\operatorname{sign}(f-Q)-\operatorname{sign} f).$$

При $(f-Q)f > 0$ и при $f = Q$ оно равно нулю. В точках, в которых $f = 0$, принимается значение $|Q|$. Если выполнено $(f-Q)f < 0$, то значение равно $2|f-Q|$.

В силу неотрицательности весовой функции на оси под интегралом находится неотрицательная функция, а значит выполняется требуемое неравенство.

$\square$

Следствие. *Пусть f — целая функция степени σ, и для всех целых функций k степени меньше σ выполнено равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sign} f)\,k\omega = 0.$$

Тогда заключение теоремы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (|f-k|-|f|)\,\omega \geqslant 0$$

также выполняется для всех функций k из указанного класса, что означает, что функция f наименее уклоняется от нуля среди целых функций степени σ в интегральной метрике с весом ω.

Замечание 7. Если неравенство в теореме 4 обращается в равенство, то, как следует из ее доказательства, $(f-Q)f\omega \geqslant 0$ почти всюду.

Пусть по-прежнему даны функция ρ_m класса $\mathcal{C}$, степени m, четная, положительная на вещественной оси, и число $\sigma \geqslant m$. Докажем, что построенные в п. 3.2 функции f_σ и F_σ наименее уклоняются от нуля с весами $1/\rho_m$ и $|\cdot|/\rho_m$ в метрике L. Для этого нам достаточно проверить ортогональность их знаков всем функциям степени меньше σ, суммируемым на оси с соответствующим весом.

4.2. Ортогональность знака функции f_σ функциям меньшей степени.

Докажем лемму об оценке интеграла по прямой, параллельной вещественной оси.

Лемма. *Пусть функция F принадлежит классу $\mathcal{C}^+$, ее нули в верхней полуплоскости не имеют конечных предельных точек, и ее средний тип равен c. Тогда для всех $R \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$e^{-cR} \int\limits_{\mathbb{R}} |F(x+iR)|dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |F(x)|dx.$$

Доказательство. Будем считать, что F суммируема на $\mathbb{R}$, иначе утверждение тривиально. По теореме A в точке $z = x + iR$

$$\log|F(z)| \leqslant \frac{R}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|F(t)|}{(t-x)^2+R^2} dt + cR.$$

Следовательно,

$$\log\left(|F(x+iR)|e^{-cR}\right) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \log|F(t)| \frac{R}{(x-t)^2+R^2} dt.$$

По неравенству Йенсена

$$|F(x+iR)|e^{-cR} \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(t)| \frac{R}{(x-t)^2+R^2} dt.$$

Интегрируя по x, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x+iR)|e^{-cR}dx \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(t)|dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{(x-t)^2+R^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(t)|dt.$$

$\square$

Теперь покажем, что знак функции f_σ ортогонален функциям меньшей степени с весом.

Замечание 8. Если целая функция k конечной степени суммируема с весом $\frac{1}{\rho_m}$, то она принадлежит классу $\mathcal{C}$. В самом деле,

$$\log^+|k| \leqslant \log^+\rho_m + \log^+\frac{|k|}{\rho_m},$$

а $\log^+ t \leqslant t$ при $t \geqslant 0$. Аналогичное утверждение верно для веса $\frac{|\cdot|}{\rho_m}$.

Теорема 5. *Для любой целой функции k_α степени $\alpha \leqslant \sigma$, суммируемой на вещественной оси с весом $1/\rho_m$, выполнено равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} f_\sigma(x) k_\alpha(x)\frac{dx}{\rho_m(x)} = 0.$$

Доказательство. Положим $e^{-i\sigma x}\frac{g_m(x)}{g_m^*(x)} = e^{i\Psi(x)}$, тогда функция Ψ вещественна. Поскольку $\left(e^{i\Psi(x)}\right)^* = \frac{1}{e^{i\Psi(x)}}$, имеем

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{2}\left(e^{i\Psi(x)} + e^{-i\Psi(x)}\right)\rho_m(x) = \cos\Psi(x)\rho_m(x).$$

Так как функция ρ_m положительна на оси, то

$$\operatorname{sign} f_\sigma(x) = \operatorname{sign}\cos\Psi(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\cos(2\nu+1)\Psi(x)}{2\nu+1}.$$

Поскольку частичные суммы ряда ограничены, по теореме Лебега его можно интегрировать почленно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} f_\sigma(x) k_\alpha(x) \frac{dx}{\rho_m(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(2\nu+1)\Psi(x) \frac{k_\alpha(x)}{\rho_m(x)} dx.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\cos(2\nu+1)\Psi(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(2\nu+1)\Psi(x)} + e^{-i(2\nu+1)\Psi(x)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(e^{-i\sigma x}\frac{g_m(x)}{g_m^*(x)}\right)^{2\nu+1} + \left(e^{i\sigma x}\frac{g_m^*(x)}{g_m(x)}\right)^{2\nu+1}\right] = \\
&= \frac{1}{2\rho_m^{2\nu+1}(x)}\left(e^{-i\sigma(2\nu+1)x} g_m^{2(2\nu+1)}(x) + e^{i\sigma(2\nu+1)x}(g_m^*(x))^{2(2\nu+1)}\right) = \\
&= \frac{1}{\rho_m^{2\nu+1}(x)} f_{\sigma(2\nu+1)}\left(x,\, \rho_m^{2\nu+1}\right).
\end{aligned}$$

Здесь $f_{\sigma(2\nu+1)}\left(\cdot,\, \rho_m^{2\nu+1}\right)$ — функция, наименее уклоняющаяся от нуля в равномерной метрике с весом $\frac{1}{\rho_m^{2\nu+1}}$ среди функций степени $\sigma(2\nu+1)$. Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} f_\sigma(x) k_\alpha(x) \frac{dx}{\rho_m(x)} = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\sigma(2\nu+1)}\left(x,\, \rho_m^{2\nu+1}\right)}{\rho_m^{2\nu+1}(x)} \frac{k_\alpha(x)}{\rho_m(x)} dx.$$

Рассмотрим отдельно интеграл в каждом слагаемом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\sigma(2\nu+1)}\left(x,\, \rho_m^{2\nu+1}\right)}{\rho_m^{2\nu+1}(x)} \frac{k_\alpha(x)}{\rho_m(x)} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\sigma(2\nu+1)x} \left(\frac{g_m(x)}{g_m^*(x)}\right)^{2\nu+1} + \right.$$

$$\left. + e^{i\sigma(2\nu+1)x} \left(\frac{g_m^*(x)}{g_m(x)}\right)^{2\nu+1} \right) \frac{k_\alpha(x)}{g_m^*(x) g_m(x)} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (V_1 + V_2),$$

где

$$V_1(z) = e^{-i\sigma(2\nu+1)z} \left(\frac{g_m(z)}{g_m^*(z)}\right)^{2\nu} \frac{k_\alpha(z)}{g_m^{*2}(z)}, \quad V_2(z) = e^{i\sigma(2\nu+1)z} \left(\frac{g_m^*(z)}{g_m(z)}\right)^{2\nu} \frac{k_\alpha(z)}{g_m^2(z)}.$$

Докажем, что $V_2 \in H^1(\mathbb{C}_+)$. Отсюда будет вытекать равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} V_2 = 0$ (см., например, [22, глава VI, пункт D]).

Для этого покажем, что функция $U(z) = \left(\frac{g_m^*(z)}{g_m(z)}\right)^{2\nu} \frac{k_\alpha(z)}{g_m^2(z)}$ принадлежит классу $\mathcal{C}^+$, и ее средний тип не больше $2\nu m+\alpha$. Учитывая то, что $\left|\frac{g_m^*(t)}{g_m(t)}\right| = 1$ и $\log^+|U| \leqslant |U|$, запишем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|U(t)|}{1+t^2} dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+\left|\frac{k_\alpha(t)}{g_m^2(t)}\right|}{1+t^2} dt \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{k_\alpha(t)}{g_m^2(t)}\right| dt < \infty.$$

Так как g_m не имеет нулей в верхней полуплоскости, то U принадлежит классу $\mathcal{C}^+$. По замечанию 3 имеем $\mathfrak{H}_{h_m}(\theta) = \frac{m}{2}|\sin\theta|$, откуда

$$\varlimsup_{y\to\infty} \frac{\log|h_m(iy)|}{y} = \varlimsup_{y\to\infty} \frac{\log|\overline{h_m(-iy)}|}{y} = \frac{m}{2}.$$

Поскольку $g_m(z) = e^{i\frac{m}{2}z} h_m(z)$,

$$\varlimsup_{y\to\infty} \frac{\log|g_m(iy)|}{y} = 0, \qquad \varlimsup_{y\to\infty} \frac{\log|\overline{g_m(-iy)}|}{y} = m.$$

Так как g_m принадлежит классу $\mathcal{C}$ и не имеет нулей в верхней полуплоскости, в первом равенстве существует обычный предел (см., например, [34, §8.1]). Следовательно,

$$\mathfrak{H}_{\frac{1}{g_m}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{\log\left|\frac{1}{g_m(iy)}\right|}{y} = 0,$$

и то же верно для степени $\frac{1}{g_m^{2\nu+2}}$. Поскольку индикатор произведения не превосходит суммы индикаторов сомножителей,

$$\mathfrak{H}_U\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant 2\nu m + \alpha.$$

Учитывая оценку для среднего типа и применяя лемму, получим для всех $R \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\sigma(2\nu+1)(x+iR)} \left(\frac{g_m^*(x+iR)}{g_m(x+iR)}\right)^{2\nu} \frac{k_\alpha(x+iR)}{g_m^2(x+iR)} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant e^{(2\nu m+\alpha-\sigma(2\nu+1))R} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\sigma(2\nu+1)x} \left(\frac{g_m^*(x)}{g_m(x)}\right)^{2\nu} \frac{k_\alpha(x)}{g_m^2(x)} \right| dx.$$

Так как показатель экспоненты неположителен, $V_2 \in H^1(\mathbb{C}_+)$.

Проведя аналогичные рассуждения, получим $V_1 \in H^1(\mathbb{C}_-)$, откуда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} V_1 = 0$.

Таким образом, мы показали, что равен нулю каждый член ряда в представлении

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} f_\sigma(x) k_\alpha(x) \frac{dx}{\rho_m(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\nu+1)\Psi(x) \frac{k_\alpha(x)}{\rho_m(x)} dx,$$

что и доказывает теорему.

$\square$

Замечание 9. Доказать включения $V_2 \in H^1(\mathbb{C}_+)$ и $V_1 \in H^1(\mathbb{C}_-)$ можно несколько короче, без использования леммы. Из представления Неванлинны и неположительности среднего типа функции V_2 следует, что она принадлежит классу В. И. Смирнова в $\mathbb{C}_+$ (см. [29, с.114] и [10, глава II, теорема 5.4]). Так как она еще и суммируема на $\mathbb{R}$, по теореме Смирнова [29, с.115] $V_2 \in H^1(\mathbb{C}_+)$. Аналогично проверяется второе включение.

Мы предпочли дать доказательство, не опирающееся на дополнительные факты.

4.3. Наименьшее уклонение функции f_σ от нуля в интегральной метрике с весом.

Теорема 6. *Для любой целой функции k_α степени $\alpha \leqslant \sigma$, суммируемой на оси с весом $1/\rho_m$, выполняется неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\sigma - k_\alpha| - |f_\sigma|}{\rho_m} \geqslant 0.$$

Если $m < \sigma$ или $\alpha < \sigma$, то для ненулевой функции k_α неравенство строгое.

Таким образом, функция f_σ наименее уклоняется от нуля в интегральной метрике с весом $1/\rho_m$.

Доказательство. В теореме 5 мы показали, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} f_\sigma(x) k_\alpha(x) \frac{dx}{\rho_m(x)} = 0.$$

Применяя теорему 4, получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\sigma - k_\alpha| - |f_\sigma|}{\rho_m} \geqslant 0.$$

Как отмечено в замечании 7, из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\sigma - k_\alpha| - |f_\sigma|}{\rho_m} = 0$$

следует, что все нули функции f_σ являются нулями и для функции k_α, что по замечанию 2 возможно лишь при $\alpha = \sigma$. Значит, функция $Y = \frac{k_\alpha}{f_\sigma}$ целая. Ясно, что Y экспоненциального типа (см., например, [23, § 9]) и, более того, принадлежит $\mathcal{C}$. Покажем, что тип τ функции Y равен нулю. Действительно, если $\tau > 0$, то по замечанию 2

$\tau = \max\left\{\mathfrak{H}_Y(\frac{\pi}{2}), \mathfrak{H}_Y(-\frac{\pi}{2})\right\} > 0$, что ведет к противоречию:

$$\alpha = \max\left\{\mathfrak{H}_{k_\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right), \mathfrak{H}_{k_\alpha}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \sigma + \tau > \sigma.$$

Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|k_\alpha|}{\rho_m} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |Y| \left|1 + \frac{G^*}{G}\right| < \infty.$$

По лемме $Y(1 + G^*/G) \in H^1(\mathbb{C}_+)$, так как в верхней полуплоскости $|1 + G^*/G| \leqslant 2$.

Пусть $m < \sigma$. Поскольку при $y > 0$

$$\left|1 + \frac{G^*(x+iy)}{G(x+iy)}\right| \geqslant 1 - \left|\frac{G^*(x+iy)}{G(x+iy)}\right| \geqslant 1 - e^{-2(\sigma-m)y} > 0,$$

функция Y суммируема на прямой $\operatorname{Im} z = y$. По неравенству Бернштейна $Y = 0$ тождественно, что невозможно.

$\square$

3.4. Наименьшее уклонение функции F_σ от нуля в интегральной метрике с весом.

Проверим ортогональность знака функции F_σ функциям степени меньше σ с весом $|\cdot|/\rho_m$.

Теорема 7. *Для любой целой функции l_α степени $\alpha \leqslant \sigma$, суммируемой на вещественной оси с весом $|\cdot|/\rho_m$, выполнено равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} F_\sigma(x) l_\alpha(x) \frac{|x|\,dx}{\rho_m(x)} = 0.$$

Доказательство. На вещественной оси $F_\sigma(x) = \dfrac{\rho_m(x)}{x}\sin\Psi(x)$, где функция Ψ вещественна. Так как функция ρ_m положительна на оси, то

$$\operatorname{sign} F_\sigma(x) = \operatorname{sign}\frac{\sin\Psi(x)}{x} = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\Psi(x)}{2\nu+1}\operatorname{sign}\frac{1}{x}.$$

Поскольку частичные суммы ряда ограничены, по теореме Лебега его можно интегрировать почленно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} F_\sigma(x) l_\alpha(x) \frac{|x|dx}{\rho_m(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(2\nu+1)\Psi(x) \frac{x\, l_\alpha(x)}{\rho_m(x)} dx.$$

Мы учли, что $|x| \operatorname{sign} \dfrac{1}{x} = x$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
\sin(2\nu+1)\Psi(x) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(2\nu+1)\Psi(x)} - e^{-i(2\nu+1)\Psi(x)}\right) = \\
&= \frac{1}{2i}\left[\left(e^{-i\sigma x}\frac{g_m(x)}{g_m^*(x)}\right)^{2\nu+1} - \left(e^{i\sigma x}\frac{g_m^*(x)}{g_m(x)}\right)^{2\nu+1}\right] = \\
&= \frac{1}{2i\rho_m^{2\nu+1}(x)}\left(e^{-i\sigma(2\nu+1)x} g_m^{2(2\nu+1)}(x) - e^{i\sigma(2\nu+1)x}(g_m^*(x))^{2(2\nu+1)}\right) = \\
&= \frac{x}{\rho_m^{2\nu+1}(x)} F_{\sigma(2\nu+1)}\left(x,\, \rho_m^{2\nu+1}\right).
\end{aligned}$$

Здесь $F_{\sigma(2\nu+1)}\left(\cdot,\, \rho_m^{2\nu+1}\right)$ — функция, наименее уклоняющаяся от нуля в равномерной метрике с весом $\frac{|\cdot|}{\rho_m^{2\nu+1}}$ среди функций степени $\sigma(2\nu+1)$. Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} F_\sigma(x) l_\alpha(x) \frac{|x|dx}{\rho_m(x)} = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\sigma(2\nu+1)}\left(x,\, \rho_m^{2\nu+1}\right)}{\rho_m^{2\nu+1}(x)} \frac{x^2 l_\alpha(x)}{\rho_m(x)} dx.$$

Рассмотрим отдельно интеграл в каждом слагаемом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\sigma(2\nu+1)}\left(x,\, \rho_m^{2\nu+1}\right)}{\rho_m^{2\nu+1}(x)} \frac{x^2 l_\alpha(x)}{\rho_m(x)} dx = \frac{1}{2i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\sigma(2\nu+1)x}\left(\frac{g_m(x)}{g_m^*(x)}\right)^{2\nu+1} - \right.$$

$$\left. - e^{i\sigma(2\nu+1)x}\left(\frac{g_m^*(x)}{g_m(x)}\right)^{2\nu+1}\right) \frac{x l_\alpha(x)}{g_m^*(x) g_m(x)} dx.$$

Далее, повторяя рассуждения доказательства теоремы 5 для функции $k_\alpha(x) = x l_\alpha(x)$, получим, что он равен нулю, то есть равен нулю каждый член ряда в представлении

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} F_\sigma(x) l_\alpha(x) \frac{|x| dx}{\rho_m(x)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(2\nu+1)\Psi(x) \frac{x\, l_\alpha(x)}{\rho_m(x)} dx.$$

что и доказывает теорему.

$\square$

Теорема 8. *Для любой целой функции l_α степени $\alpha \leqslant \sigma$, суммируемой на оси с весом $|\cdot|/\rho_m$, выполняется неравенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\sigma(x) - l_\alpha(x)| - |F_\sigma(x)|}{\rho_m(x)} |x|\, dx \geqslant 0.$$

Если $m < \sigma$ или $\alpha < \sigma$, то для ненулевой функции l_α неравенство строгое.

Таким образом, функция F_σ наименее уклоняется от нуля в интегральной метрике с весом $|\cdot|/\rho_m$.

Доказательство. В теореме 7 мы показали, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} F_\sigma(x)\, l_\alpha(x) \frac{|x|\, dx}{\rho_m(x)} = 0.$$

Применяя теорему 4, получаем требуемое неравенство. Строгость неравенства в случае $m < \sigma$ или $\alpha < \sigma$ проверяется аналогично доказательству теоремы 6.

$\square$

Замечание 10. Отметим, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\sigma(x)|}{\rho_m(x)} dx = \infty$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\sigma(x) x|}{\rho_m(x)} dx = \infty$. Действительно, если бы f_σ и F_σ были суммируемы с соответствующими весами, то поскольку их знаки ортогональны им самим,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\sigma(x)|}{\rho_m(x)} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\sigma(x) \operatorname{sign} f_\sigma(x)}{\rho_m(x)} dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\sigma(x)||x|}{\rho_m(x)}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F_\sigma(x)\operatorname{sign} F_\sigma(x)|x|}{\rho_m(x)}dx = 0,$$

что невозможно в силу положительности ρ_m.

Глава 2. Непериодический сплайновый аналог операторов Ахиезера–Крейна–Фавара

§1. История вопроса и постановки задач

Всюду в этом пункте $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$.

В 1937 году Ж. Фавар [37] и Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [2] построили линейный метод приближения $\mathcal{X}_{n,r}$ со значениями в пространстве тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$, такой что для любой $f \in W_\infty^{(r)}$

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_\infty, \tag{2.1}$$

и доказали, что константу

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

уменьшить нельзя, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение, то есть

$$\sup_{f \in W_\infty^{(r)}} \frac{E_n(f)_\infty}{\|f^{(r)}\|_\infty} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{2.2}$$

Операторы $\mathcal{X}_{n,r}$ называют операторами или суммами Ахиезера–Крейна–Фавара, а константы $\mathcal{K}_r$ — константами Фавара. Неравенства, в которых приближение функции оценивается через норму (полунорму) производной, производной сопряженной функции и т.п., будем называть неравенствами типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Впоследствии аналоги соотношений (2.1) и (2.2) были установлены для многих классов сверток периодических и непериодических функций. Мы перечислим лишь те, в которых оценка ведется через нормы производных.

С. М. Никольский [28] распространил (2.1) и (2.2) на случай нормы в пространстве L_1.

М. Г. Крейн [21] получил аналоги соотношения (2.2) для приближения целыми функциями конечной степени классов функций из $W_\infty^{(r)}(\mathbb{R})$, определяемых дифференциальными операторами. В частности, он установил, что

$$\sup_{f\in W_\infty^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_\sigma(f)_\infty}{\|f^{(r)}\|_\infty} = \sup_{f\in W_\infty^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_{\sigma-0}(f)_\infty}{\|f^{(r)}\|_\infty} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}. \tag{2.3}$$

Б. Надь [44] указал достаточные условия на ядро сверточного оператора, выраженные в терминах преобразования Фурье ядра свертки, при которых для приближения свертки справедлива точная оценка типа (2.3) и вывел из этих условий само соотношение (2.3). Кроме того, он построил линейный оператор $\mathcal{X}_{\sigma,r}$ со значениями в $\mathbf{E}_\sigma$, для отклонения которого справедлива такая же оценка

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_\infty. \tag{2.4}$$

При $\sigma = n \in \mathbb{N}$ операторы из формул (2.1) и (2.4) совпадают на 2π-периодических функциях и потому обозначаются одинаково. Эти результаты вошли в книгу [1], где оценки сверху распространены на пространства $L_p(\mathbb{R})$ и L_p. Из соотношений двойственности следует, что аналог (2.3) верен и в пространстве $L_1(\mathbb{R})$.

Для приближения периодических функций сплайнами минимального дефекта известны следующие точные соотношения типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Пусть $m \geqslant r-1$, $p \in \{1, \infty\}$. Тогда

$$\sup_{f\in W_p^{(r)}} \frac{E_{n,m}(f)_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{2.5}$$

Полагаем
$$\varepsilon_m = \begin{cases} 0, & m \text{ нечетно}, \\ \frac{\pi}{2\sigma}, & m \text{ четно}. \end{cases}$$
Пусть $\gamma \geqslant 0$, функция f задана на $\mathbb{R}$ и $f(x) = O(|x|^\gamma)$ при $x \to \infty$. Обозначим через $\xi_{\sigma,m}(f)$ сплайн из $\mathbf{S}_{\sigma,m}$, интерполирующий f в точках $\frac{k\pi}{\sigma} + \varepsilon_m$ $(k \in \mathbb{Z})$ и такой, что $\xi_{\sigma,m}(f,x) = O(|x|^\gamma)$ при $x \to \infty$. Такой сплайн существует и единствен [45, лекция 4, теорема 1]. Кроме того, если $\sigma = n \in \mathbb{N}$, то 2π-периодичность f влечет 2π-периодичность $\xi_{n,m}(f)$.

При $m = r - 1$ константа в (2.5) реализуется линейным проектором, а именно, с помощью интерполяционного сплайна:
$$\sup_{f \in W_p^{(r)}} \frac{\|f - \xi_{n,r-1}(f)\|_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{2.6}$$
Соотношения (2.5) при $m = r - 1$, $p = \infty$ и (2.6) при $p = \infty$ установил В. М. Тихомиров [32]; соотношения (2.5) в остальных случаях — А. А. Лигун [43]; соотношение (2.6) при $p = 1$ — Н. П. Корнейчук [40]. Интерполяционный оператор $\xi_{n,r-1}$ не является единственным линейным методом, реализующим константу при $p = \infty$; см. [18, теоремы 5.1.17 и 5.2.11] и [20, предложение 5.2.9].

Большинство перечисленных результатов о приближении периодических функций тригонометрическими многочленами можно найти в [1, 20, 31], сплайнами — в [18, 20], о приближении непериодических функций целыми функциями конечной степени — в [1, 31].

А. А. Лигун [43] доказал существование линейного оператора из C в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$, реализующего константу в соотношении (2.5) при $m \geqslant r$, $p = \infty$ (явный вид этого оператора в [43] отсутствует). О. Л. Виноградов [3] построил при $m \geqslant r$ линейные операторы $\mathcal{X}_{n,r,m}$ со значениями в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ (аналоги сумм Ахиезера–Крейна–Фавара), реализующие константу в соотношении (2.5), то есть такие что для всех $p \in [1, \infty]$ и $f \in W_p^{(r)}$
$$\|f - \mathcal{X}_{n,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_p. \tag{2.7}$$

Перейдем к обзору результатов о приближении сплайнами функций из $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. Сунь Юншен и Ли Чунь [30] и независимо Г. Г. Магарил-Ильяев [25, 26] установили аналог соотношения (2.5) для приближений функций в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ непериодическими сплайнами:

$$\sup_{f\in W_p^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_{\sigma,m}(f)_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}. \tag{2.8}$$

Здесь, как и в (2.5), $m \geqslant r-1$, $p \in \{1, \infty\}$.

Как и в периодическом случае, при $m = r-1$ соотношение (2.8) реализуется интерполяционными сплайнами:

$$\sup_{f\in W_p^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\|f - \xi_{\sigma,r-1}(f)\|_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}. \tag{2.9}$$

Этот факт сначала был установлен И. Шенбергом для четного r и $p = \infty$ в [46]. Ключевое утверждение (теорема 3), касающееся знака ядра в интегральном представлении погрешности интерполирования, сформулировано в [46] без доказательства. Доказательство появилось в работе К. де Бора и И. Шенберга [35]. Там же установлено (2.9) для нечетного r и $p = \infty$. Хотя соотношение (2.9) сформулировано в [46] и [35] лишь для $p = \infty$, в этих работах получена точная поточечная оценка погрешности интерполирования, из которой сразу следует точная оценка нормы сверху для всех p. Другое доказательство (2.9) вместе с обобщением на все $p \in (1, \infty)$ (разумеется, с меньшей правой частью) и еще несколькими ссылками содержится в [26].

Отметим еще, что обсуждаемые неравенства точны в более сильном смысле теории поперечников. Работа [26] как раз посвящена этим вопросам.

В данной главе при $m \geqslant r$ строятся линейные операторы $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ со значениями в $\mathbf{S}_{\sigma,m}$, такие что для всех $p \in [1, \infty]$ и $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} \|f^{(r)}\|_p. \tag{2.10}$$

(При $\sigma = n \in \mathbb{N}$ операторы из формул (2.7) и (2.10) совпадают на 2π-

периодических функциях, и потому их можно обозначить одинаково.) Тем самым устанавливается возможность реализации верхних граней в (2.8) линейными методами приближения, ранее остававшаяся неизвестной. Эти результаты опубликованы в [6].

§2. Вспомогательные результаты

2.1. Предварительные сведения.

Напомним [1, п.87] известные факты об операторе $\mathcal{X}_{\sigma,r}$. Это оператор свертки с суммируемым ядром:

$$\mathcal{X}_{\sigma,r}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)Q_r(x-t)\,dt, \tag{2.11}$$

где

$$Q_r(\tau) = Q_{\sigma,r}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} (iz)^r \lambda_r(z) e^{i\tau z}\,dz,$$

$$\lambda_r(z) = \lambda_{\sigma,r}(z) = \begin{cases} \sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \dfrac{(-1)^{q(r+1)}}{i^r(2q\sigma+z)^r}, & |z| \leqslant \sigma, \\ 0, & |z| > \sigma. \end{cases}$$

Отклонение оператора $\mathcal{X}_{\sigma,r}$ записывается как

$$f(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)\Delta_r(x-t)\,dt, \tag{2.12}$$

где

$$\Delta_r(\tau) = \Delta_{\sigma,r}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{(iz)^r} - \lambda_r(z)\right) e^{i\tau z}\,dz.$$

Положим

$$\varepsilon = \varepsilon_r = \begin{cases} 0, & r \text{ нечетно}, \\ \frac{\pi}{2\sigma}, & r \text{ четно}. \end{cases}$$

Если не оговорено противное, обозначение ε всегда будет связано с индексом r. Обозначим еще

$$\eta_r(z) = \frac{1}{(iz)^r}, \qquad \gamma_m(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}z}-1}{i\frac{\pi}{\sigma}z}\right)^{m+1},$$

$$h_{r,m}(z,t) = h_{\sigma,r,m}(z,t) = \frac{1}{(iz)^r} - \gamma_m(z)\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}}\eta_r(2\sigma s+z)e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m(2\sigma q+z)e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}},$$

$$H_{r,m}(z,t) = H_{\sigma,r,m}(z,t) = \gamma_m(z)\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}}\eta_r(2\sigma s+z)e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m(2\sigma q+z)e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}},$$

$$\varkappa_r(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}}\eta_r(2\sigma s+z)e^{i2s\sigma\varepsilon},$$

$$\mu_{r,m}(z,t) = e^{izt}\sum_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m(2\sigma q+z)e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}$$

(зависимость μ от r состоит в зависимости ε от r). С точностью до умножения на экспоненту функции $\mu_{r,m}$ совпадают с экспоненциальными сплайнами (см. [45, 39]). Если параметр σ фиксирован, его обозначение в индексах различных величин обычно будем опускать и писать, например, B_m и γ_m. Полагаем $x_j = \frac{j\pi}{\sigma}$.

Перечислим несколько свойств введенных функций. Те утверждения, которые приводятся без доказательства, можно найти в [39].

F1. *Функция $\mu_{r,m}$ не имеет вещественных нулей, отличных от (z^*,t^*), где*

$$z^* = (2k+1)\sigma, \quad t^* = \varepsilon_{m+1} - \varepsilon_r + \frac{j\pi}{\sigma}, \qquad k,j\in\mathbb{Z}.$$

Нули z^* функции $\mu_{r,m}(\cdot,t^*)$ простые.

F2. *Функция $\varkappa_r$ имеет вещественные нули в точках z^* и только в них, и эти нули простые.*

F3. *Если $m \geqslant r$, то при каждом $t\in\mathbb{R}$ функция $h_{r,m}(\cdot,t)$ аналитична в некоторой окрестности $\mathbb{R}$.*

Для доказательства надо учесть свойства F1 и F2 и еще заметить, что особенность в точке $z=0$ устранимая.

F4. $|\mu_{r,m}(z,t)| \geqslant |\mu_{r,m}(z,t^*)|, \quad |\mu_{r,m}(z,t)| \geqslant |\mu_{r,m}(z^*,t)|$.

F5. *Функция* $H_{r,m}$ *ограничена на* $\mathbb{R}^2$.

Это утверждение вытекает из F4, F1 и F2.

F6. *Существует такое* $a > 0$, *что в некоторой окрестности точки* (z^*, t^*) *верна оценка*

$$|\mu_{r,m}(z,t)|^2 \geqslant a\big((z-z^*)^2 + (t-t^*)^2\big).$$

Это вытекает из теоремы об обратном отображении и линейной независимости производных $(\mu_{r,m})'_z(z^*,t^*)$ и $(\mu_{r,m})'_t(z^*,t^*)$ над $\mathbb{R}$. Последнее легко проверить вычислением.

2.2. Три леммы об интегралах.

Лемма 1. *Пусть* $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, *функция* Q *задана на* $\mathbb{R}^2$, $Q(\cdot,t) \in \mathbf{S}_{\sigma,m}$ *при почти всех* $t \in \mathbb{R}$, $Q(x,\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$ *при всех* $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} Q(x,t)\,dt.$$

Тогда $S \in \mathbf{S}_{\sigma,m}$.

Доказательство. При $m = 0$ утверждение очевидно. Пусть $m \geqslant 1$. На каждом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ функция $Q(\cdot,t)$ есть многочлен степени не выше m. Выберем узлы интерполяции $u_0, \ldots, u_m$ и запишем

$$Q(x,t) = \sum_{k=0}^{m} Q(u_k,t)\ell_k(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \tag{2.13}$$

где ℓ_k — фундаментальные многочлены интерполяции. Ввиду суммируемости $Q(u_k,\cdot)$ имеем

$$S(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} Q(u_k,t)\,dt \right) \ell_k(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}],$$

откуда S есть многочлен степени не выше m на $[x_j, x_{j+1}]$. Записывая равенства (2.13) на соседних отрезках, почленно дифференцируя по x и интегрируя по t, убеждаемся в совпадении односторонних производных S до порядка $m-1$ включительно в узлах x_j.

$\square$

Лемма 2. *Пусть $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $k \in [0 : r]$. Тогда интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda_r(z) - H_{r,m}(z,t))(iz)^k e^{i(x-t)z}\, dz \qquad (2.14)$$

равномерно сходится относительно совокупности переменных x и t.

Здесь и далее, говоря о равномерной сходимости или ограниченности относительно переменной x, будем понимать под этим равномерную сходимость или ограниченность в некоторой окрестности каждой точки x', за исключением случая $k = r = m$, $x' = x_j$.

Доказательство. Так как функция λ_r финитна, достаточно рассмотреть вычитаемое. При $k < r$ или $k = r < m$ равномерная сходимость очевидна, поскольку подынтегральная функция есть $= O(z^{-2})$ равномерно относительно x и t. При $k = r = m$ применим признак Дирихле. Действительно, функция $z \mapsto \frac{1}{z}$ монотонно стремится к нулю. Убедимся в равномерной ограниченности частичных интегралов $\int\limits_a^b g(z,t)e^{ixz}\, dz$, где

$$g(z,t) = \left(e^{i\frac{\pi}{\sigma}z} - 1\right)^{m+1} \frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} \eta_r(2\sigma s + z)e^{i2s\sigma\varepsilon}}{e^{itz} \sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \gamma_m(2\sigma q + z)e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}}.$$

Ясно, что функция $g(\cdot, t)$ имеет период 2σ. Раскладывая $g(\cdot, t)$ в ряд Фурье, интегрируя его почленно и применяя неравенство Коши–Буняковского–

Шварца и равенство Парсеваля, получаем

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b g(z,t)e^{ixz}\,dz\right| &= \left|\int_a^b \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu(g(\cdot,t))e^{i(\frac{\nu\pi}{\sigma}+x)z}\,dz\right| = \\
&= \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu(g(\cdot,t))\int_a^b e^{i(\frac{\nu\pi}{\sigma}+x)z}\,dz\right| \leqslant \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{2|c_\nu(g(\cdot,t))|}{|\frac{\nu\pi}{\sigma}+x|} \leqslant \\
&\leqslant 2\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_\nu(g(\cdot,t))|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\frac{\nu\pi}{\sigma}+x|^2}\right)^{1/2} = \\
&= 2\left(\frac{1}{2\sigma}\int_{-\sigma}^{\sigma} |g(z,t)|^2\,dz\right)^{1/2}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\frac{\nu\pi}{\sigma}+x|^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Остается учесть ограниченность функции g (свойство F5).

$\square$

Лемма 3. *Пусть $\sigma > 0$, функция ψ измерима на $\mathbb{R}^2$, при почти всех z и t верно равенство $\psi\left(z, t+\frac{\pi}{\sigma}\right) = \psi(z,t)$,*

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \psi(z,t)e^{-itz}\,dz, \\
\Psi(z,t) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi(z+2l\sigma,t)e^{-i(z+2l\sigma)t},
\end{aligned}
$$

причем интеграл и ряд сходятся в смысле главного значения, а частичные суммы ряда существенно ограничены по z при почти всех t. Пусть еще $\Psi(\cdot,t) \in W_{2,loc}^{(1)}(\mathbb{R})$ при почти всех t и

$$
\int_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} |\Psi'_z(z,t)|^2\,dz\right)^{1/2} dt < \infty. \tag{2.15}
$$

Тогда $F \in L_1(\mathbb{R})$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(t)|\, dt \leqslant \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \Psi(z,t)\, dz \right| dt + \\ + \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left(\frac{\sigma}{6} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\Psi'_z(z,t)|^2\, dz \right)^{1/2} dt$$

и при всех $N \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{(2N+1)\pi}{2\sigma}, \frac{(2N+1)\pi}{2\sigma}\right]} |F(t)|\, dt \leqslant \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left(\frac{\sigma}{N\pi^2} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\Psi'_z(z,t)|^2\, dz \right)^{1/2} dt. \quad (2.16)$$

Доказательство. Интегрируя ряд почленно по теореме Лебега, получаем

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int\limits_{(2l-1)\sigma}^{(2l+1)\sigma} \psi(z,t) e^{-itz}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \Psi(z,t)\, dz.$$

Пользуясь периодичностью Ψ по второму аргументу, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(t)|\, dt = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left| F\left(t + \frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| dt = \\ = \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \Psi(z,t) e^{-i\frac{\nu\pi}{\sigma}z}\, dz \right| dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma}{\pi} |c_\nu(\Psi(\cdot,t))|\, dt.$$

Аналогично

$$\int\limits_{\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{(2N+1)\pi}{2\sigma}, \frac{(2N+1)\pi}{2\sigma}\right]} |F(t)|\, dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \sum_{|\nu| > N} \frac{\sigma}{\pi} |c_\nu(\Psi(\cdot,t))|\, dt.$$

Напомним, что функция $\Psi(\cdot, t)$ имеет период 2σ.

Для оценки суммы модулей коэффициентов Фурье используем следующий хорошо известный прием. Пусть функция f имеет период 2π, $f \in W_2^{(1)}$, $c_\nu = c_\nu(f)$. Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца и равенство Парсеваля, получаем

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_\nu| = |c_0| + \sum_{\nu\neq 0} \frac{1}{\nu}\, \nu|c_\nu| \leqslant |c_0| + \left(\sum_{\nu\neq 0} \frac{1}{\nu^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{\nu\neq 0} |\nu c_\nu|^2\right)^{1/2} =$$

$$= |c_0| + \left(\frac{\pi}{6} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'|^2\right)^{1/2},$$

$$\sum_{|\nu|>N} |c_\nu| \leqslant \left(\sum_{|\nu|>N} \frac{1}{\nu^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{|\nu|>N} |\nu c_\nu|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{1}{N\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'|^2\right)^{1/2}.$$

Мы воспользовались еще соотношениями

$$\sum_{\nu\neq 0} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \sum_{|\nu|>N} \frac{1}{\nu^2} < \frac{2}{N}.$$

Если g имеет период 2σ, $f(y) = g(\frac{\sigma}{\pi} y)$, то f имеет период 2π, $c_\nu(g) = c_\nu(f)$,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 = \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |g'|^2.$$

Поэтому

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_\nu(g)| \leqslant |c_0(g)| + \left(\frac{\sigma}{6} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |g'|^2\right)^{1/2},$$

$$\sum_{|\nu|>N} |c_\nu(g)| \leqslant \left(\frac{\sigma}{N\pi^2} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |g'|^2\right)^{1/2}.$$

Применяя эти оценки к функции $g = \Psi(\cdot, t)$, получаем требуемое.

$\square$

§3. Основные результаты

3.1. Построение ядра оператора и его свойства.

При $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $x, t \in \mathbb{R}$ положим

$$F_{r,m}(x,t) = F_{\sigma,r,m}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} h_{\sigma,r,m}(z,t) e^{i(x-t)z}\, dz.$$

Лемма 4. *При любом $x \in \mathbb{R}$ функция $F_{\sigma,r,m}(x,\cdot)$ имеет нули в точках $x - \varepsilon - \frac{k\pi}{\sigma}$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Положим $h = h_{\sigma,r,m}$. Разобьем интеграл по оси на интегралы по промежуткам длины 2σ, сделаем замену переменных $z = y + 2l\sigma$ и поменяем порядок операций:

$$2\pi F_{\sigma,r,m}\left(x, x - \varepsilon - \frac{k\pi}{\sigma}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\left(\varepsilon + \frac{k\pi}{\sigma}\right)z} h\left(z, x - \varepsilon - \frac{k\pi}{\sigma}\right) dz =$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int\limits_{(2l-1)\sigma}^{(2l+1)\sigma} e^{i\left(\varepsilon + \frac{k\pi}{\sigma}\right)z} h\left(z, x - \varepsilon - \frac{k\pi}{\sigma}\right) dz =$$

$$= \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{i\left(\varepsilon + \frac{k\pi}{\sigma}\right)(y+2l\sigma)} h\left(y + 2l\sigma, x - \varepsilon - \frac{k\pi}{\sigma}\right) dy.$$

Делая сдвиг индексов суммирования, находим

$$h\left(y + 2l\sigma,\ x - \varepsilon - \frac{k\pi}{\sigma}\right) =$$

$$= \eta_r(y + 2l\sigma) - \gamma_m(y + 2l\sigma) \frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} \eta_r(y + 2\sigma(s+l)) e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \gamma_m(y + 2\sigma(q+l)) e^{i2q\sigma x}} =$$

$$= \eta_r(y + 2l\sigma) - e^{i2l\sigma(x-\varepsilon)} \gamma_m(y + 2l\sigma) \frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} \eta_r(y + 2\sigma s) e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \gamma_m(y + 2\sigma q) e^{i2q\sigma x}}.$$

Поэтому подынтегральная функция равна

$$e^{iy\left(\varepsilon+\frac{k\pi}{\sigma}\right)}\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{i2l\sigma\varepsilon}\left(\eta_r(y+2l\sigma)-\right.$$

$$\left.-e^{i2l\sigma(x-\varepsilon)}\gamma_m(y+2l\sigma)\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}}\eta_r(y+2\sigma s)e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m(y+2\sigma q)e^{i2q\sigma x}}\right)=0,$$

в чем легко убедиться, просуммировав уменьшаемые и вычитаемые по отдельности.

$\square$

Лемма 5. *Пусть* $\sigma>0$, $r,m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant r$, $f\in W_{1,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$, $p\in[1,\infty]$, $f^{(r)}\in L_p(\mathbb{R})$,

$$A(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Тогда $A=f-S$, *где* $S\in\mathbf{S}_{\sigma,m}$.

Доказательство. Проверим, что интеграл в определении $A(x)$ существует, $A^{(r-1)}\in W_{1,\mathrm{loc}}^{(1)}(\mathbb{R})$ и почти всюду

$$A^{(r)}=f^{(r)}-S,\tag{2.17}$$

где

$$S(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i(x-t)z}(iz)^rH_{r,m}(z,t)\,dz\,dt.$$

Запишем $A=A_1+A_2$, где

$$A_1(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)\Delta_r(x-t)\,dt,$$

$$A_2(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)\left(F_{r,m}(x,t)-\Delta_r(x-t)\right)\,dt,$$

и рассмотрим слагаемые по отдельности. По формулам (2.11) и (2.12)

$$A_1^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r}^{(r)}(f,x) = f^{(r)}(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t) Q_r(x-t)\,dt. \quad (2.18)$$

Перейдем к исследованию A_2. Обозначим

$$\psi_k(z,x,t) = (\lambda_r(z) - H_{r,m}(z,t))(iz)^k e^{ixz}.$$

Прежде всего заметим, что по лемме 2 при $k \in [1:r]$

$$\frac{d^k}{dx^k}\big(F_{r,m}(x,t) - \Delta_r(x-t)\big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_k(z,x,t) e^{-itz}\,dz,$$

за исключением случая $k = r = m$, $x = x_j$.

Пусть сначала $f^{(r)} \in L_\infty(\mathbb{R})$. Докажем, что функции

$$(z,t) \mapsto \psi_k(z,x,t), \quad k \in [0:r]$$

удовлетворяют условиям леммы 3, причем интегралы в (2.15) ограничены по x. Из этого утверждения при $k = 0$ вытекает существование интеграла $A_2(x)$, а при $k \in [1:r]$ — равномерная относительно x сходимость интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t) \frac{d^k}{dx^k}\left(F_{r,m}(x,t) - \Delta_r(x-t)\right) dt \quad (2.19)$$

и, как следствие, законность r-кратного дифференцирования A_2 под знаком интеграла.

Рассмотрим периодизацию:

$$\Psi_k(z,x,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi_k(z+2l\sigma,x,t) e^{-i(z+2l\sigma)t} =$$
$$= C_1(z,x,t) + \frac{\varkappa_r(z)}{\mu_{r,m}(z,t)} C_2(z,x,t),$$

где

$$C_1(z,x,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda_r(z+2l\sigma)(i(z+2l\sigma))^k e^{i(z+2l\sigma)(x-t)},$$
$$C_2(z,x,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_m(z+2l\sigma,t)(i(z+2l\sigma))^k e^{i(z+2l\sigma)x}.$$

Зафиксируем достаточно малые окрестности точек (z^*,t^*) из свойства F6. В дополнении этих окрестностей равномерная ограниченность по x функций Ψ_k и их производных по z очевидна. В самих же окрестностях C_1, C_2 и их производные по z равномерно ограничены по x. Пользуясь неравенством (2.16), свойствами F2 и F6 и соотношениями

$$\int\limits_{t^*-\delta}^{t^*+\delta} \left(\int\limits_{z^*-\delta}^{z^*+\delta} \frac{dz}{(z-z^*)^2+(t-t^*)^2} \right)^{1/2} dt < \infty,$$
$$\int\limits_{t^*-\delta}^{t^*+\delta} \left(\int\limits_{z^*-\delta}^{z^*+\delta} \frac{(z-z^*)^2\,dz}{((z-z^*)^2+(t-t^*)^2)^2} \right)^{1/2} dt < \infty,$$

получаем требуемое.

Из равномерной сходимости интегралов (2.14) по (x,t) следует их равномерная ограниченность. Поэтому равномерная относительно x сходимость интегралов (2.19) имеет место и в случае $f^{(r)} \in L_1(\mathbb{R})$. Если же $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$ при $p\in(1,\infty)$, то равномерная сходимость следует из неравенства Гельдера и оценок при $p=1$ и $p=\infty$.

Следовательно,

$$A_2^{(r)}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda_r(z)-H_{r,m}(z,t))(iz)^r e^{i(x-t)z}\,dz\,dt. \tag{2.20}$$

Складывая (2.18) и (2.20), приходим к (2.17).

Докажем, что $S\in\mathbf{S}_{\sigma,m-r}$. Для этого перепишем $S(x)$ в виде

$$S(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)P(x,t)\,dt,$$

где

$$P(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixz}\gamma_{m-r}(z)g(z,t)\,dz,$$

$$g(z,t)=\left(e^{i\frac{\pi}{\sigma}z}-1\right)^r\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}}\eta_r(2\sigma s+z)e^{i2s\sigma\varepsilon}}{e^{itz}\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m(2\sigma q+z)e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}}.$$

Функция g ограничена по свойству F5, а функция $g(\cdot,t)$ имеет период 2σ. Поэтому

$$P(x,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(g(\cdot,t))B_{m-r}\left(x+\frac{k\pi}{\sigma}\right),$$

в чем легко убедиться, взяв преобразование Фурье от правой части. Таким образом, $P(\cdot,t)\in\mathbf{S}_{\sigma,m-r}$ при любом t, а тогда и $S\in\mathbf{S}_{\sigma,m-r}$ по лемме 1.

Из равенства (2.17) находим

$$A=f-S^{(-r)},$$

где $S^{(-r)}$ — некоторая r-я первообразная S. Остается учесть, что любая r-я первообразная сплайна из $\mathbf{S}_{\sigma,m-r}$ есть сплайн из $\mathbf{S}_{\sigma,m}$.

$\square$

В условиях леммы 5 определим оператор $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ равенством

$$\mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f,x)=f(x)-\int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt. \tag{2.21}$$

По лемме 5 его значения принадлежат $\mathbf{S}_{\sigma,m}$.

3.2. Сведение к периодической задаче.

Как известно (см., например, [20, § 2.3 и 2.4]), всякий сплайн S из пространства $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ единственным образом раскладывается по сдвигам ядер Бернулли:

$$S(x) = \beta + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j d_{m+1}\left(x - \frac{j\pi}{n}\right), \qquad \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j = 0 \tag{2.22}$$

или по сдвигам периодических B-сплайнов:

$$S(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_j \mathcal{B}_{n,m}\left(x - \frac{j\pi}{n}\right). \tag{2.23}$$

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{n,m}$ подпространство сплайнов из $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$, у которых коэффициенты β_j в разложении (2.22) удовлетворяют условию

$$\sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^j \beta_j = 0, \tag{2.24}$$

а через $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{n,m}$ подпространство сплайнов из $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$, у которых коэффициенты α_j в разложении (2.24) удовлетворяют условию

$$\sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^j \alpha_j = 0. \tag{2.25}$$

Как было сказано во введении, в [3] при $m \geqslant r$ построены линейные операторы $\mathcal{X}_{n,r,m}$ со значениями в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ (аналоги сумм Ахиезера–Крейна–Фавара), реализующие константу в соотношении (2.5), то есть такие, что для всех $p \in [1, \infty]$ и $f \in W_p^{(r)}$

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_p.$$

Здесь, как обычно, $\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$ — константы Фавара. Более того, значения оператора $\mathcal{X}_{n,r,m}$ принадлежат $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{n,m}$. Доказательство основывалось на интегральном представлении погрешности

$$f(x) - \mathcal{X}_{n,r,m}(f,x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\big(d_r(x-t) - \zeta_{n,r,m}(x,t)\big)\,dt,$$

где при каждом $t \in \mathbb{R}$ функция $\zeta_{n,r,m}(\cdot,t)$ — сплайн из $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{n,m}$, интерполирующий ядро Бернулли $d_r(\cdot - t)$ в точках $x = t + \varepsilon + \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Было показано, что

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|d_r(x-t) - \zeta_{n,r,m}(x,t)\big|\,dt = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}, \tag{2.26}$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|d_r(x-t) - \zeta_{n,r,m}(x,t)\big|\,dx = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \tag{2.27}$$

при всех x и t соответственно.

Заменой переменных эти результаты распространяются на пространства функций с произвольным фиксированным периодом. Далее мы убедимся, что при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ на 2π-периодических функциях оператор $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$, определенный формулой (2.21), совпадает с оператором $\mathcal{X}_{n,r,m}$ из [3]. Затем, увеличивая период, мы выведем неравенства для функций, заданных на оси, из неравенств для периодических функций предельным переходом.

Замечание 1. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Если функция $g \in L_\infty(\mathbb{R})$ имеет период $\frac{2N\pi}{\sigma}$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(t) F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt = \int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} g(t)\mathcal{F}_N(x,t)\,dt,$$

где

$$\mathcal{F}_N(x,t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} F_{\sigma,r,m}\left(x, t + \frac{2\nu N\pi}{\sigma}\right).$$

Лемма 6. *В условиях определения*

$$\mathcal{F}_N\left(\frac{Nx}{\sigma},\frac{Nt}{\sigma}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-1}\left(d_r(x-t)-\zeta_{N,r,m}(x,t)\right),$$

где при каждом $t\in\mathbb{R}$ функция $\zeta_{N,r,m}(\cdot,t)$ — сплайн из $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{N,m}$, интерполирующий ядро Бернулли $d_r(\cdot-t)$ в точках $x=t+\varepsilon+\frac{k\pi}{N}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. Положив $F=F_{\sigma,r,m}$, $h=h_{\sigma,r,m}$, запишем

$$F(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i(x-t)z}h(z,t)\,dz=\Phi(x,t,t),$$

где

$$\Phi(x,u,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i(x-u)z}h(z,t)\,dz.$$

Нам понадобится формула суммирования Пуассона (см., например, [1, п.67] и [27, § X.6])

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}g(t+\nu T)=\frac{2\pi}{T}\sum_{s\in\mathbb{Z}}c\left(g,\frac{2\pi s}{T}\right)e^{i\frac{2\pi s}{T}t}.$$

Напомним, что при условии $g\in L_1(\mathbb{R})$ ряд в левой части абсолютно сходится для почти всех t. Обозначим его сумму $G_T(t)$. Тогда функция G_T суммируема на периоде, а ряд в правой части есть ее ряд Фурье. Поэтому для выполнения равенства в фиксированной точке t достаточно условия $G_T(t)=\frac{G_T(t+)+G_T(t-)}{2}$ и сходимости ряда в правой части в точке t. Легко видеть, что при всех x и v функция $g=\Phi(x,\cdot,v)$ удовлетворяет этим условиям для любого t. Пользуясь еще тем, что функция $h(z,\cdot)$ имеет период $\frac{\pi}{\sigma}$, находим

$$\mathcal{F}_N(x,t)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\Phi\left(x,t+\frac{2\nu N\pi}{\sigma},t\right)=\frac{\sigma}{2\pi N}\sum_{s\in\mathbb{Z}}h\left(\frac{\sigma s}{N},t\right)e^{i\frac{\sigma s}{N}(x-t)}.$$

Слагаемое при $s=0$ не зависит от x. Оно принадлежит $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{N,m}$, так как

$$1=\frac{\pi}{N}\sum_{j=0}^{2N-1}\mathcal{B}_{N,m}\left(x-\frac{j\pi}{N}\right).$$

Далее рассмотрим сумму по $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Просуммировав уменьшаемые, получим ядро Бернулли

$$\frac{\sigma}{2\pi N}\sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\eta_r\left(\frac{\sigma s}{N}\right)e^{i\frac{\sigma s}{N}(x-t)}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-1}d_r\left(\frac{\sigma}{N}(x-t)\right).$$

Теперь рассмотрим сумму вычитаемых

$$R(x,t)=\frac{\sigma}{2\pi N}\sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}e^{i\frac{\sigma s}{N}(x-t)}\gamma_m\left(\frac{\sigma s}{N}\right)\frac{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\eta_r\left(2\sigma j+\frac{\sigma s}{N}\right)e^{i2j\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m\left(2\sigma q+\frac{\sigma s}{N}\right)e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}}.$$

При s, кратных N, слагаемые в этой сумме равны нулю. Поэтому

$$R(x,t)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}e^{i\frac{\sigma s}{N}x}\gamma_m\left(\frac{\sigma s}{N}\right)P_s(t),$$

где $P_{2N\rho}(t)=0$,

$$P_s(t)=\frac{\sigma}{2\pi N}e^{-it\frac{\sigma s}{N}}\frac{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\eta_r\left(2\sigma j+\frac{\sigma s}{N}\right)e^{i2j\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m\left(2\sigma q+\frac{\sigma s}{N}\right)e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}}$$

при $s\neq 2N\rho$, $\rho\in\mathbb{Z}$. Легко заметить, что $P_s(t)=P_{s+2N}(t)$. Чтобы упростить сумму, перейдем к дискретному преобразованию Фурье набора $\{P_s(t)\}_{s=0}^{2N-1}$:

$$p_k(t)=\frac{1}{2N}\sum_{s=0}^{2N-1}e^{-i\pi\frac{ks}{N}}P_s(t),\qquad P_s(t)=\sum_{k=0}^{2N-1}e^{i\pi\frac{ks}{N}}p_k(t).$$

Получим

$$R(x,t)=\sum_{s\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{\sigma s}{N}x}\gamma_m\left(\frac{\sigma s}{N}\right)\sum_{k=0}^{2N-1} e^{i\pi\frac{ks}{N}}p_k(t)=$$
$$=\sum_{k=0}^{2N-1} p_k(t)\sum_{s\in\mathbb{Z}}\gamma_m\left(\frac{\sigma s}{N}\right)e^{i\frac{\sigma s}{N}\left(x+\frac{k\pi}{\sigma}\right)}=\sum_{k=0}^{2N-1} p_k(t)\mathcal{B}_{N,m}\left(\frac{\sigma s}{N}\left(x+\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right).$$

Отсюда $R\left(\frac{N\cdot}{\sigma}\cdot,t\right)\in\widetilde{\mathbf{S}}_{N,m}$. Принадлежность $R\left(\frac{N\cdot}{\sigma},t\right)$ подпространству $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{N,m}$ следует из того, что

$$\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k p_k(t)=P_N(t)=0.$$

Интерполяционное же условие выполняется по лемме 4.

$\square$

Чтобы убедиться в совпадении операторов, остается доказать совпадение подпространств $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{n,m}$ и $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{n,m}$.

Лемма 7. *При всех $N\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}_+$ подпространства $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{N,m}$ и $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{N,m}$ совпадают.*

Доказательство. Представим сплайн S в виде (2.22) и (2.23). Перейдем к дискретному преобразованию Фурье последовательности коэффициентов:

$$\widehat{\alpha}_k=\frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}\alpha_j e^{-i\pi\frac{kj}{N}},\quad \widehat{\beta}_k=\frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}\beta_j e^{-i\pi\frac{kj}{N}}.$$

Условия (2.24) и (2.25) означают, что $\widehat{\beta}_N=0$ и $\widehat{\alpha}_N=0$ соответственно, а второе равенство в (2.22) — что $\widehat{\beta}_0=0$.

Разложения в ряд Фурье B-сплайнов и ядер Бернулли имеют вид

$$\mathcal{B}_{N,m}(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{ikt},\qquad d_{m+1}(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k e^{ikt}.$$

Тогда

$$S(x) = \sum_{j=0}^{2N-1} \alpha_j \mathcal{B}_{N,m}\left(x - \frac{j\pi}{N}\right) = \sum_{j=0}^{2N-1} \alpha_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} e^{-i\pi\frac{jk}{N}} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \sum_{j=0}^{2N-1} \alpha_j e^{-i\pi\frac{kj}{N}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} 2N\widehat{\alpha}_k =$$

$$= 2N \sum_{p=0}^{2N-1} \widehat{\alpha}_p \sum_{s\in\mathbb{Z}} c_{p+2sN} e^{i(p+2sN)x} =$$

$$= 2N\widehat{\alpha}_0 + 2N \sum_{p=1}^{2N-1} \widehat{\alpha}_p \sum_{s\in\mathbb{Z}} c_{p+2sN} e^{i(p+2sN)x}.$$

Последнее равенство верно, так как $c_0 = 1$ и $c_{2sN} = 0$ при $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

С другой стороны,

$$S(x) = \beta + \sum_{j=0}^{2N-1} \beta_j d_{m+1}\left(x - \frac{j\pi}{N}\right) = \beta + \sum_{j=0}^{2N-1} \beta_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikx} e^{-i\pi\frac{jk}{N}} =$$

$$= \beta + \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikx} \sum_{j=0}^{2N-1} \beta_j e^{-i\pi\frac{kj}{N}} = \beta + \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikx} 2N\widehat{\beta}_k =$$

$$= \beta + 2N \sum_{p=0}^{2N-1} \widehat{\beta}_p \sum_{s\in\mathbb{Z}} g_{p+2sN} e^{i(p+2sN)x} =$$

$$= \beta + 2N \sum_{p=1}^{2N-1} \widehat{\beta}_p \sum_{s\in\mathbb{Z}} g_{p+2sN} e^{i(p+2sN)x}.$$

Коэффициенты Фурье B-сплайна и ядра Бернулли связаны соотношением

$$c_{p+2sN} = \left(\frac{e^{i\frac{p\pi}{N}} - 1}{i(p+2sN)}\right)^{m+1} = 2\left(e^{i\frac{p\pi}{N}} - 1\right)^{m+1} g_{p+2sN}.$$

Поэтому коэффициенты разложений (2.22) и (2.23) связаны соотношениями

$$\beta = 2N\widehat{\alpha}_0, \qquad \widehat{\beta}_j = 2\left(e^{i\frac{p\pi}{N}} - 1\right)^{m+1} \widehat{\alpha}_j, \quad j \in [1 : 2N-1].$$

Отсюда следует равносильность условий $\widehat{\alpha}_N = 0$ и $\widehat{\beta}_N = 0$.

$\square$

3.3. Неравенство типа Ахиезера–Крейна–Фавара.

Теорема 1. *Пусть* $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $p \in [1, \infty]$, $f \in W_{1,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$, $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} \|f^{(r)}\|_p.$$

При $p = 1, \infty$ *неравенство точное, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение.*

Доказательство. Оценки снизу известны и обсуждались во введении (см. равенство (2.8)). Установим оценки сверху. Воспользуемся представлением погрешности

$$f(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t) F_{\sigma,r,m}(x, t)\, dt.$$

Положим $F = F_{\sigma,r,m}$.

1. Случай $p = \infty$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. При каждом $N \in \mathbb{N}$ определим $\frac{2N\pi}{\sigma}$-периодическую функцию g_N соотношением

$$g_N(t) = \operatorname{sign} F(x, t) \quad \text{при} \quad t \in \left[-\frac{N\pi}{\sigma}, \frac{N\pi}{\sigma}\right).$$

По замечанию 1

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g_N(t) F(x, t)\, dt = \int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} g_N(t) \mathcal{F}_N(x, t)\, dt.$$

По лемме 6 и неравенству (2.26)

$$\int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} |\mathcal{F}_N(x,t)|\,dt = \frac{N}{\sigma}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\mathcal{F}_N\left(x, \frac{Nt}{\sigma}\right)\right|\,dt = \left(\frac{N}{\sigma}\right)^r \frac{\mathcal{K}_r}{N^r} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} g_N(t)\mathcal{F}_N(x,t)\,dt\right| \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}.$$

Так как $g_N \to \operatorname{sign} F(x,\cdot)$ поточечно и $\|g_N\|_\infty = 1$, по теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(x,t)|\,dt = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} g_N(t)F(x,t)\,dt \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r},$$

откуда следует требуемое неравенство.

2. Случай $p = 1$. Рассмотрим интегралы

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)F(x,t)\,dx, \qquad \varphi \in L_\infty(\mathbb{R}).$$

Если φ имеет период $\frac{2N\pi}{\sigma}$, то по замечанию 1

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)F(x,t)\,dx = \int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} \varphi(t)\mathcal{F}_N(x,t)\,dt,$$

поскольку

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} F\left(x + \frac{2\nu N\pi}{\sigma}, t\right) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} F\left(x, t - \frac{2\nu N\pi}{\sigma}\right) = \mathcal{F}_N(x,t).$$

По лемме 6 и неравенству (2.27)

$$\int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} |\mathcal{F}_N(x,t)|\,dx = \frac{N}{\sigma}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\mathcal{F}_N\left(\frac{Nx}{\sigma},t\right)\right|\,dx = \left(\frac{N}{\sigma}\right)^r \frac{\mathcal{K}_r}{N^r} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}.$$

Аналогично первому случаю получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(x,t)|\,dx \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}$$

при всех t. Следовательно,

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m} f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)F(x,t)\,dt\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|f^{(r)}(t)F(x,t)\right| dt\,dx \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}|F(x,t)|\,dx\cdot\|f^{(r)}\|_1 = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_1.$$

При $p\in(1,\infty)$ неравенство следует из доказанного неравенства для $p=1,\infty$ и интерполяционной теоремы Рисса – Торина.

$\square$

Замечание 2. Из доказательства следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F_{\sigma,r,m}(x,t)|\,dt = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} |F_{\sigma,r,m}(x,t)|\,dx = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}$$

при всех x и t соответственно.

Замечание 3. Обозначим

$$\varphi^*_\sigma(t) = \operatorname{sign}\sin\sigma\left(t-\varepsilon\right).$$

В [3] установлено, что произведение $\mathcal{F}_1(x,t)\varphi^*_\sigma(x-t)$ не меняет знака на $\mathbb{R}^2$. Из этого факта и доказательства теоремы 1 следует, что произведение $F_{\sigma,r,m}(x,t)\varphi^*_\sigma(x-t)$ не меняет знака на $\mathbb{R}^2$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1*

$$A_{\sigma,m}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} A_{\sigma,m-r}(f^{(r)})_p.$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$, $s \in \mathbf{S}_{\sigma,m-r}$ — сплайн, реализующий наилучшее приближение $f^{(r)}$ в $L_p(\mathbb{R})$ с точностью до δ, то есть

$$\|f^{(r)} - s\|_p \leqslant A_{\sigma,m-r}(f^{(r)})_p + \delta.$$

Тогда $s^{(-r)} \in \mathbf{S}_{\sigma,m}$. Завершим доказательство двумя способами.

Способ 1. По теореме 1

$$A_{\sigma,m}(f)_p = A_{\sigma,m}\big(f - s^{(-r)}\big)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} \|f^{(r)} - s\|_p = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} \left(A_{\sigma,m-r}\big(f^{(r)}\big)_p + \delta \right).$$

Остается устремить δ к нулю.

Способ 2. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big(f^{(r)}(t) - s(t)\big) F_{\sigma,r,m}(x,t)\, dt = f(x) - P(x),$$

где

$$P(x) = \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f,x) + \int\limits_{\mathbb{R}} s(t) F_{\sigma,r,m}(x,t)\, dt.$$

По лемме 5

$$\int\limits_{\mathbb{R}} s(t) F_{\sigma,r,m}(x,t)\, dt = s^{(-r)}(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(s^{(-r)}, x),$$

где $s^{(-r)}$ — произвольная первообразная s. Поэтому $P \in \mathbf{S}_{\sigma,m}$. Остается воспользоваться замечанием 2.

$\square$

В периодическом случае аналог следствия 1 для приближений тригонометрическими многочленами установил Сунь Юншен, для приближений сплайнами — Корнейчук; см. [20, теорема 4.1.4 и предложение 5.4.9].

Замечание 4. Вообще говоря, операторы $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ не являются единственными линейными сплайновыми операторами, реализующими оценку (1.10). При $r = m = 1$, $p = \infty$ та же оценка реализуется интерполяционными ломаными $\xi_{\sigma,1}$. Доказательство такой оценки элементарно и одинаково для отрезка, периода и оси (см., например, [18, лемма 5.2.12]). Действительно, при любом $x \in [a, b]$

$$\left| f(x) - \frac{b-x}{b-a} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b) \right| = \left| \frac{b-x}{b-a} \int\limits_a^x f' - \frac{x-a}{b-a} \int\limits_x^b f' \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{(b-x)(x-a)}{b-a} \|f'\|_\infty \leqslant \frac{b-a}{2} \|f'\|_\infty.$$

Применяя эту оценку к каждому отрезку $[x_j, x_{j+1}]$, получаем

$$\|f - \xi_{\sigma,1}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2\sigma} \|f'\|_\infty.$$

В связи с последним неравенством напомним, что $\mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}$.

Глава 3. Неравенства типа Джексона для приближений сплайнами

§1. Введение

Неравенствами типа Джексона в теории приближений принято называть неравенства, в которых приближение функции оценивается посредством модуля непрерывности (самой функции, ее производной и т.п.). Первым такое неравенство

$$E_n(f) \leqslant C(\gamma)\omega_1\left(f, \frac{\gamma}{n}\right)$$

для приближений непрерывных периодических функций тригонометрическими многочленами и модуля непрерывности первого порядка получил Д. Джексон в 1911 году.

Первое точное неравенство типа Джексона установил Н. П. Корнейчук [19], который доказал, что для любых вещественнозначных функций f из C и $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f) \leqslant 1 \cdot \omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

причем константа 1 точная при всех n в совокупности, то есть

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in C}\frac{E_n(f)}{\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right)} = 1.$$

Для нечетных r В. В. Жуком [13] ($r = 1$) и А. А. Лигуном [24] ($r > 1$) было установлено неравенство типа Джексона с точной константой

$$\|f - X_{n,r}(f)\| \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)$$

для любой $f \in C^{(r)}$. А. Ю. Громов [12] доказал для нечетных r точное неравенство

$$\|f - X_{\sigma,r}(f)\| \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)$$

для приближений целыми функциями конечной степени и их аналог в интегральной метрике.

Задача о константах в неравенствах типа Джексона для старших модулей непрерывности труднее, чем для первого модуля непрерывности. Обзор известных результатов на эту тему можно найти в статье О. Л. Виноградова и В. В. Жука [9]. В работе [38] был предложен новый способ получения неравенств типа Джексона, позволяющий улучшить константы. Этот способ был развит и улучшен в работе [9], где исследовав свойства линейных комбинаций функций Стеклова, авторы устанавливают оценки функционалов с конечными моментами через модули непрерывности с помощью приближения периодическими сплайнами. В этой главе, следуя методике из работы [9], будут получены некоторые оценки через старшие модули непрерывности.

§2. Неравенства для первого модуля непрерывности производных

Далее под $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ будем понимать при $m \geqslant r$ построенные во второй главе операторы, а при $m = r-1$ интерполяционный сплайн, интерполирующий f в точках $\frac{k\pi}{\sigma} + \varepsilon_m$, где

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ нечетно}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m \text{ четно}. \end{cases}$$

Для первого модуля непрерывности известно следующее усиление неравенства Ахиезера–Крейна–Фавара, полученное В. В. Жуком и А. А. Лигуном (случай $m = 1$ более общего утверждения [15, с. 192–193], см. также [47], случай для нормы пространств L_p был рассмотрен в [20]).

Теорема C. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in C^{(r)}$, P — полунорма класса A (см., например, [15, 16]), то есть инвариантная относительно сдвига функции и такая, что найдется постоянная M, не зависящая от f, что для любой f из C выполнено $P(f) \leqslant M\|f\|$. Построим оператор*

$$U_{n,r,h}f = \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) X_{n,r+1-2l} S_h f^{(2l)}.$$

Тогда

$$P\left(f - U_{n,r,h}f\right) \leqslant \left(\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l-1}}{(2l)!}\left|\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\frac{\mathcal{K}_{r+1-2l}}{n^{r+1-2l}}\right)\omega_1\left(f^{(r)}, h\right)_P +$$

$$+\frac{2h^r}{r!}\int_0^{1/2}\left|\mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2)\right|d\tau \cdot P\left(f^{(r)}\right),$$

Если r нечетно, то $P\left(f^{(r)}\right)$ в правой части можно заменить на $\frac{\omega_1\left(f^{(r)},h\right)_P}{2}$.

При $h=\frac{\pi}{n}$ неравенство точное, а операторы $U_{n,r,\frac{\pi}{n}}$ и $X_{n,r}$ совпадают.

Построим на основе оператора $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ аналогичную теореме C оценку для приближений сплайнами в пространствах $L_p(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Пусть $\sigma>0$, $m,r\in\mathbb{N}$, $m\geqslant r$, $h>0$, $p\in[1,\infty]$, $f\in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. Построим оператор*

$$U_{\sigma,r,h}f=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{h^{2l}}{(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\mathcal{X}_{\sigma,r+1-2l,m}S_hf^{(2l)}.$$

Тогда

$$\|f-U_{\sigma,r,h}f\|_p\leqslant\left(\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{h^{2l-1}}{(2l)!}\left|\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\cdot\frac{\mathcal{K}_{r+1-2l}}{\sigma^{r+1-2l}}\right)\omega_1\left(f^{(r)},h\right)_p+$$
$$+\frac{2h^r}{r!}\int_0^{1/2}\Big|\mathsf{B}_r(\tau)-\mathsf{B}_r(1/2)\Big|d\tau\cdot\|f^{(r)}\|_p.$$

Кроме того, при нечетном r верно

$$\|f-U_{\sigma,r,h}f\|_p\leqslant h^r\left(\frac{A_{r,0}}{2}+\sum_{l=0}^{r-1}|\gamma_l|\frac{\mathcal{K}_{r+1-l}}{(\sigma h)^{r+1-l}}\right)\omega_1\left(f^{(r)},h\right)_p,$$

где

$$A_{r,0}=\frac{2}{r!}\int_0^{1/2}\left|\mathsf{B}_r(t)-\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right)\right|dt,\qquad\gamma_k=\frac{\mathsf{B}_k\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}.$$

При $h=\frac{\pi}{\sigma}$, $p=1,\infty$ неравенство точное, а при $m\geqslant r+1$ операторы $U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}}$ и $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ совпадают.

Замечание 1. Отметим, что при нечетных k выполнено $\mathsf{B}_k\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Замечание 2. Таким образом, при $h=\frac{\pi}{\sigma}$ и $p=1,\infty$ получается точное неравенство

$$\|f-U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}}f\|_p\leqslant\frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r}\omega_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_p.$$

Доказательство. Разобьем доказательство на три части: сначала докажем оценки, далее точность при $h = \frac{\pi}{\sigma}$, $p = 1, \infty$, после покажем совпадение операторов.

1. Воспользуемся представлением функции f, основанном на многочленах Бернулли (см., например, [16, теорема 8.1]),

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!} \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot S_h f^{(2l)}(x) - \\
- \frac{h^r}{r!} \int\limits_{-1/2}^{1/2} f^{(r)}(x - \tau h)\Big(\mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2)\Big) d\tau.
\end{aligned}
$$

Разобьем отклонение оператора $U_{\sigma,r,h} f$ на два слагаемых

$$
f - U_{\sigma,r,h} f = A_1 + A_2,
$$

где

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!} \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(S_h f^{(2l)} - \mathcal{X}_{\sigma,r+1-2l,m} S_h f^{(2l)}\right), \\
A_2 &= \frac{h^r}{r!} \int\limits_{-1/2}^{1/2} f^{(r)}(x - \tau h)\Big(\mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2)\Big) d\tau.
\end{aligned}
$$

Для оценки первого слагаемого воспользуемся теоремой 2.1, применяя ее к функции $S_h f^{(2l)}$ в каждом слагаемом:

$$
\begin{aligned}
\|A_1\|_p = \left\| \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!} \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(S_h f^{(2l)} - \mathcal{X}_{\sigma,r+1-2l,m} S_h f^{(2l)}\right) \right\|_p \leqslant \\
\leqslant \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!} \left| \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \cdot \|S_h f^{(2l)} - \mathcal{X}_{\sigma,r+1-2l,m} S_h f^{(2l)}\|_p \leqslant
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!}\Big|\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\Big| \cdot \frac{\mathcal{K}_{r+1-2l}}{\sigma^{r+1-2l}} \cdot \left\|\Big(S_h f^{(2l)}\Big)^{(r+1-2l)}\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l-1}}{(2l)!}\Big|\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\Big| \cdot \frac{\mathcal{K}_{r+1-2l}}{\sigma^{r+1-2l}}\right) \omega_1\left(f^{(r)}, h\right)_p.$$

Последнее неравенство верно в силу того, что

$$\left\|(S_h f)^{(r+1)}\right\|_p = \left\|\Big(S_h f^{(r)}\Big)'\right\|_p \leqslant \frac{\omega_1(f^{(r)}, h)_p}{h}.$$

Второе слагаемое можно оценить следующим образом:

$$\|A_2\|_p = \left\|\frac{h^r}{r!}\int_{-1/2}^{1/2} f^{(r)}(\cdot - \tau h)\Big(\mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2)\Big)d\tau\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2h^r}{r!}\int_0^{1/2}\Big|\mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2)\Big|d\tau\,\|f^{(r)}\|_p.$$

Кроме того, при нечетном r верно

$$\|A_2\|_p = \left\|\frac{h^r}{r!}\int_0^{1/2} \delta_{2\tau h} f^{(r)}\Big(\mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2)\Big)d\tau\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h^r}{r!}\int_0^{1/2}\Big|\mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2)\Big|d\tau\,\omega_1\left(f^{(r)}, h\right)_p.$$

Складывая оценки для A_1 и A_2, получим оба неравенства из утверждения теоремы.

2. Покажем, что при $h = \frac{\pi}{\sigma}$, $p = 1, \infty$ неравенство точное. При $h = \frac{\pi}{\sigma}$ неравенство принимает следующий вид:

$$\|f - U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}} f\|_p \leqslant \left(\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{2l-1}}{(2l)!} \left| \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \cdot \frac{\mathcal{K}_{r+1-2l}}{\sigma^{r+1-2l}} \right) \omega_1 \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma} \right)_p + \\ + \frac{2\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r}{r!} \int\limits_0^{1/2} \left| \mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2) \right| d\tau \cdot \|f^{(r)}\|_p.$$

В [16, лемма 8.2] доказано, что

$$\frac{\pi^r}{r!} \int\limits_0^{1/2} \left| \mathsf{B}_r(u) - \mathsf{B}_r(1/2) \right| du + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{\pi^{2l-1}}{(2l)!} \left| \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \cdot \mathcal{K}_{r+1-2l} = \frac{\mathcal{K}_r}{2}.$$

Обозначим

$$\Psi_{\sigma,r} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{2l-1}}{(2l)!} \left| \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \cdot \frac{\mathcal{K}_{r+1-2l}}{\sigma^{1-2l}},$$

тогда

$$\|f - U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}} f\|_p \leqslant \frac{\Psi_{\sigma,r}}{\sigma^r} \omega_1 \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma} \right)_p + \frac{2}{\sigma^r} \left(\frac{K_r}{2} - \Psi_{\sigma,r} \right) \|f^{(r)}\|_p.$$

Далее воспользуемся тем, что $\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p \leqslant 2\|f^{(r)}\|_p$ и получим точное неравенство типа Ахиезера–Крейна–Фавара:

$$\|f - U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}} f\|_p \leqslant \frac{K_r}{\sigma^r} \|f^{(r)}\|_p.$$

Таким образом, неравенство из утверждения теоремы усиливает неравенство типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Поскольку это неравенство является точным, то и неравенство из утверждения теоремы точное.

3. Далее покажем, что $U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}} = \mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ при $m \geqslant r+1$. Запишем интегральное представление отклонение оператора $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$

$$f(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) F_{\sigma,r,m}(x,t)dt.$$

Рассмотрим отклонение оператора $U_{\sigma,r,h}$, воспользовавшись представлением погрешности оператора $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ в каждом слагаемом:

$$\begin{aligned}
&f(x) - U_{\sigma,r,h}f(x) = \\
&= A_2 + \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Big(S_h f^{(2l)}(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r+1-2l,m} S_h f^{(2l)}(x)\Big) = \\
&= A_2 + \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(S_h f^{(2l)}(t)\Big)^{(r+1-2l)} F_{\sigma,r+1-2l,m}(x,t)dt = \\
&= A_2 + \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_h^{(r+1)} f(t)\, F_{\sigma,r+1-2l,m}(x,t)dt = \\
&= A_2 + \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\delta_h f^{(r)}(t)\, F_{\sigma,r+1-2l,m}(x,t)dt = \\
&= A_2 + \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l-1}}{(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)\delta_h^{0,1} F_{\sigma,r+1-2l,m}(x,t)dt = \\
&= A_2 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{h^{2l-1}}{(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \delta_h^{0,1} F_{\sigma,r+1-2l,m}(x,t)dt.
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_h^{0,1}$ — центральная разность с шагом h по второму аргументу.

В интеграле в A_2 сделаем замену переменной $x - \tau h = t$. Тогда

$$f(x) - U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}} f(x) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) \Biggl\{ \frac{\pi^r}{\sigma^r r!} \left(\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right) - \mathsf{B}_r\left(\frac{\sigma(x-t)}{\pi}\right)\right) \cdot \chi_{\left(-\frac{\pi}{2\sigma},\frac{\pi}{2\sigma}\right)}(x-t) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{\pi^{2l-1}}{\sigma^{2l-1}(2l)!} \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \delta^{0,1}_{\frac{\pi}{\sigma}} F_{\sigma,r+1-2l,m}(x,t) \Biggr\} dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) Q(x,t) dt.$$

Рассмотрим периодизацию ядра Q по второй переменной:

$$\mathcal{Q}_N(x,t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} Q_{\sigma,r,m}\left(x, t + \frac{2\nu N\pi}{\sigma}\right).$$

Тогда для периодических функций g с периодом $T = \frac{2N\pi}{\sigma}$ верно следующее равенство:

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) Q_{\sigma,r,m}(x,t)\, dt = \int_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} g(t) \mathcal{Q}_N(x,t)\, dt.$$

Покажем, что ядро $\mathcal{Q}_N(x,t)$ совпадает с ядром $\mathcal{F}_{N,r}(x,t)$. Заметим, что

$$\mathcal{Q}_N\left(\frac{Nx}{\sigma}, \frac{Nt}{\sigma}\right) =$$

$$= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\pi^r}{\sigma^r r!} \left(\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right) - \mathsf{B}^*_r\left(\frac{N(x-t)}{\pi} - 2\nu N\right)\right) \cdot \chi^*_{\left(-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right)}(x-t-2\nu\pi) +$$

$$+ \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{\pi^{2l-1}}{\sigma^{2l-1}(2l)!} \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \delta^{0,1}_{\frac{\pi}{N}} F_{\sigma,r+1-2l,m}\left(\frac{Nx}{\sigma}, \frac{Nt}{\sigma} + \frac{2\nu N\pi}{\sigma}\right) =$$

$$= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\pi^r}{\sigma^r r!} \left(\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right) - \mathsf{B}^*_r\left(\frac{N(x-t)}{\pi} - 2\nu N\right)\right) \cdot \chi^*_{\left(-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right)}(x-t-2\nu\pi) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor} \frac{\pi^{2l-1}}{\sigma^{2l-1}(2l)!} \mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right) \delta^{0,1}_{\frac{\pi}{N}} \mathcal{F}_{N,r+1-2l}\left(\frac{Nx}{\sigma}, \frac{Nt}{\sigma}\right),$$

где χ^* – это 2π-периодическое продолжение характеристической функ-

ции и
$$\mathcal{F}_{N,r+1-2l}(x,t)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}F_{\sigma,r+1-2l,m}\left(x,t+\frac{2\nu N\pi}{\sigma}\right).$$

Воспользуемся представлением ядра $\mathcal{F}_{N,r+1-2l}$ из леммы 2.6 для записи второй суммы.

$$\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{\pi^{2l-1}}{\sigma^{2l-1}(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\delta^{0,1}_{\frac{\pi}{N}}\Big(d_{r+1-2l}(x-t)-\zeta_{N,r+1-2l}(x,t)\Big)\frac{1}{\pi}\left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-2l}=$$
$$=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{\pi^{2l-2}N^{r-2l}}{\sigma^{r-1}(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\delta^{0,1}_{\frac{\pi}{N}}\Big(d_{r+1-2l}(x-t)-\zeta_{N,r+1-2l}(x,t)\Big).$$

Таким образом,

$$\mathcal{Q}_N\left(\frac{Nx}{\sigma},\frac{Nt}{\sigma}\right)=$$
$$=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{\pi^r}{\sigma^r r!}\left(\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right)-\mathsf{B}^*_r\left(\frac{N(x-t)}{\pi}-2\nu N\right)\right)\cdot\chi^*_{\left(-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right)}(x-t-2\nu\pi)+$$
$$+\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{\pi^{2l-2}N^{r-2l}}{\sigma^{r-1}(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\delta^{0,1}_{\frac{\pi}{N}}d_{r+1-2l}(x-t)-$$
$$-\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{\pi^{2l-2}N^{r-2l}}{\sigma^{r-1}(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\delta^{0,1}_{\frac{\pi}{N}}\zeta_{N,r+1-2l}(x,t)=J_1+J_2-J_3.$$

В работе О. Л. Виноградова и В. В. Жука [47] было получено следующее равенство:

$$\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2l)!}h^{2l-1}\delta^1_h d_{r+1-2l}(x)=$$
$$=d_r(x)-\frac{\pi h^{r-1}}{r!}\left(\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right)-\mathsf{B}_r\left(\frac{x}{h}\right)\right)\chi_{\left(-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)}(x)+\alpha_{h,r},$$

где

$$\alpha_{h,r} = \frac{h^{r-1}}{r!2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right) - \mathsf{B}_r\left(\frac{x}{h}\right)\right)\chi_{\left(-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)}(x)dx =$$
$$= \begin{cases} 0, & r \text{ нечетно}, \\ \frac{(-1)^{r/2}h^r A_{r,0}}{r!2}, & r \text{ четно}. \end{cases}$$

Воспользуемся им при $h = \frac{\pi}{N}$ для записи суммы J_2:

$$J_2 = \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{\pi^{2l-2}N^{r-2l}}{\sigma^{r-1}(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\delta^{0,1}_{\frac{\pi}{N}}d_{r+1-2l}(x-t) =$$
$$= \left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-1}\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{\pi^{2l-1}}{N^{2l-1}(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\delta^{0,1}_{\frac{\pi}{N}}d_{r+1-2l}(x-t) =$$
$$= \left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-1}\frac{1}{\pi}\Bigg\{d_r(x-t) - \pi\left(\frac{\pi}{N}\right)^{r-1}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{r!}\Bigg(\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right) -$$
$$- \mathsf{B}^*_r\left(\frac{N(x-t)}{\pi} - 2\nu N\right)\Bigg)\cdot\chi^*_{\left(-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right)}(x-t-2\nu\pi) + \alpha_{\frac{\pi}{N},r}\Bigg\}.$$

Далее,

$$J_3 = \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}\frac{\pi^{2l-2}N^{r-2l}}{\sigma^{r-1}(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\delta^{0,1}_{\frac{\pi}{N}}\zeta_{N,r+1-2l}(x,t) =$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-1}\left\{\zeta_{N,r}(x,t) + \alpha_{\frac{\pi}{N},r}\right\}.$$

Таким образом, получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Q}_N\left(\frac{Nx}{\sigma},\frac{Nt}{\sigma}\right)=\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-1}\left\{\pi\left(\frac{\sigma}{N}\right)^{r-1}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{\pi^r}{\sigma^{r-1}r!}\left(\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right)-\mathsf{B}^*_r\left(\frac{N(x-t)}{\pi}-2\nu N\right)\right)\cdot\right.\\
&\cdot\chi^*_{\left(-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right)}(x-t-2\nu)+d_r(x-t)-\pi\left(\frac{\pi}{N}\right)^{r-1}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{r!}\Bigg(\mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right)-\\
&-\mathsf{B}^*_r\left(\frac{N(x-t)}{\pi}-2\nu N\right)\Bigg)\cdot\chi^*_{\left(-\frac{\pi}{2N},\frac{\pi}{2N}\right)}(x-t-2\nu\pi)+\alpha_{\frac{\pi}{N},r}-\zeta_{N,r}(x,t)-\\
&\left.-\alpha_{\frac{\pi}{N},r}\right\}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-1}\Big(d_r(x-t)-\zeta_{N,r}(x,t)\Big)=\mathcal{F}_{N,r}\left(\frac{Nx}{\sigma},\frac{Nt}{\sigma}\right),
\end{aligned}
$$

то есть ядро $\mathcal{Q}_N$ совпадает с ядром $\mathcal{F}_{N,r}$. Из этого следует, что для периодических функций g_N с периодом $T=\frac{2N\pi}{\sigma}$ верна цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} g_N(t)F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt&=\int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} g_N(t)\mathcal{F}_{N,r}(x,t)\,dt=\\
=\int_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} g_N(t)\mathcal{Q}_N(x,t)\,dt&=\int_{\mathbb{R}} g_N(t)Q_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Пусть $g\in L(\mathbb{R})$, построим семейство периодических функций g_N с периодами $T=\frac{2N\pi}{\sigma}$, таких что

$$
g_N=g\quad\text{на}\quad\left[-\frac{2N\pi}{\sigma},\frac{2N\pi}{\sigma}\right).
$$

Так как $g_N\longrightarrow g$ поточечно и $\|g_N\|\leqslant\|g\|$, то, переходя к пределу при $N\longrightarrow\infty$ в соотношении

$$
\int\limits_{\mathbb{R}} g_N(t)F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt=\int_{\mathbb{R}} g_N(t)Q_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt
$$

в силу теоремы Лебега получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(t)F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)Q_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt.$$

Левая часть равенства является представлением погрешности оператора типа Ахиезера–Крейна–Фавара:

$$f(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt,$$

то есть отклонения операторов $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ и $U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}}$ совпадают:

$$f(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f,x) = f(x) - U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}}(f,x),$$

а, значит, совпадают и операторы.

$\square$

Следствие 1. *Пусть* $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, r *нечетно,* $h > 0$, $p \in [1,\infty]$, $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\|f - U_{\sigma,r,h}f\|_p \leqslant h^r \left(\frac{A_{r,0}}{2} + \sum_{l=0}^{r-1} |\gamma_l| \frac{\mathcal{K}_{r+1-l}}{(\sigma h)^{r+1-l}}\right) \omega_1\left(f^{(r)}, h\right)_p.$$

Если $p = \infty$, $h = \frac{\pi}{\alpha\sigma}$, α — *нечетное натуральное число, то константы не могут быть уменьшены, даже если заменить левую часть на* $E_{n,m}(f)_\infty$ *и ограничиться* $\frac{2\pi}{\sigma}$*-периодическими функциями.*

Утверждение о точности получено в [3]. Обозначим

$$D_r(\alpha) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^r \left\{\frac{A_{r,0}}{2} + \sum_{l=0}^{r-1} |\gamma_l| \frac{\mathcal{K}_{r+1-l}}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{r+1-l}}\right\} =$$
$$= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1} \sin\frac{(2\nu+1)\pi}{2\alpha}}.$$

Как следует из теоремы 1,

$$D_r(1) = \frac{\mathcal{K}_r}{2}.$$

Кроме того, в [47] подсчитано значение величины

$$D_r(3) = \left(2 - \frac{1}{3^r}\right)\frac{\mathcal{K}_r}{2}.$$

§3. Неравенства для старших модулей непрерывности функции

В работе [9] обсуждаются свойства линейных комбинаций функций Стеклова. С их помощью устанавливается общая теорема, содержащая оценки полуаддитивных функционалов и выводятся ее следствия для частных случаев. В том числе, доказана следующая теорема.

Теорема D. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $n, m, \gamma \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\gamma \geqslant 2m - 1$,

$$Y_{n,m,\gamma} = \sum_{k=1}^{m-1} X_{n,2k,\gamma} U_{h,m}^k (I - U_{h,m}) + X_{n,2m,\gamma} U_{h,m}^m.$$

Тогда для всех $f \in L_p$

$$\|f - Y_{n,m,\gamma} f\|_p \leqslant \left\{ \frac{1}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mathcal{K}_{2k}}{(\sigma h)^{2k}} \nu_m^k + \frac{\mathcal{K}_{2m}}{(nh)^{2m}} \frac{\nu_m^m}{2^{2m}} \right\} \omega_{2m}(f, h)_p.$$

Следуя схеме получения этой оценки в [9], рассмотрим линейные комбинации средних Стеклова

$$U_{h,k} = \frac{2}{C_{2k}^k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} C_{2k}^{k-j} S_{jh}^2,$$

отметим, что $U_{h,1} = S_h^2$.

Замечание 3. Оператор $U_{h,k}$ может быть представлен в виде

$$U_{h,k} f = f + \frac{2(-1)^{k-1}}{C_{2k}^k} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \delta_{th}^{2k} f \psi_2(t) dt,$$

где ψ_2 — ядро Стеклова второго порядка, обладающее свойствами: ψ_2 неотрицательно, четно, $\int_{\mathbb{R}} \psi_2 = 1$, $\operatorname{supp} \psi_2 = [-1, 1]$. Тогда очевидно, что отклонение оператора $U_{h,k}$ оценивается следующим образом

$$\|f - U_{h,k}f\|_p \leqslant \frac{2(-1)^{k-1}}{C_{2k}^k} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \|\delta_{th}^{2k} f\|_p \psi_2(t)dt \leqslant \frac{1}{C_{2k}^k}\omega_{2k}(f,h)_p.$$

Будем обозначать за D оператор дифференцирования, а за $D^{-l}f$ при $l \in \mathbb{N}$ произвольную l-кратную первообразную функции f. В выражениях вида $\delta_h^l D^{-l}$ уточнение не требуется, так как результат не зависит от выбора первообразной. По определению функций Стеклова операторы $U_{h,k}$ записываются в виде

$$U_{h,k} = \frac{2}{C_{2k}^k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{C_{2k}^{k-j}}{(jh)^2} \delta_{jh}^2 D^{-2}.$$

Поэтому оператор $V_{h,k} = h^2 D^2 U_{h,k}$ сумматорный:

$$\begin{aligned} V_{h,k} &= \frac{2}{C_{2k}^k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{C_{2k}^{k-j}}{j^2} \delta_{jh}^2 = \\ &= \frac{2}{C_{2k}^k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{C_{2k}^{k-j}}{j^2} (T^{jh} + T^{-jh}) - \left(\frac{4}{C_{2k}^k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{C_{2k}^{k-j}}{j^2} \right) I, \end{aligned}$$

где T^a — оператор сдвига на шаг a, то есть $T^a f = f(\cdot + a)$. Кроме того, в [38] получена оценка

$$\|V_{h,k}\|_p \leqslant \nu_k,$$

где

$$\nu_r = \frac{8}{C_{2m}^m} \sum_{l=0}^{\lfloor (r-1)/2 \rfloor} \frac{C_{2r}^{r-2l-1}}{(2l+1)^2}.$$

В той же работе получена двусторонняя оценка

$$\frac{8}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2k}}{2k+1} \leqslant 1 - \frac{\nu_k}{\pi^2} \leqslant \frac{8}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2k+1}}{2k}.$$

Отметим, что ν_k не зависит от h, что и отражено в обозначении.

С другой стороны, поскольку

$$\delta_{jh}^2 = \sum_{s=1-j}^{j-1} (j - |s|) T^{sh} \delta_h^2,$$

операторы $U_{h,k}$ и $V_{h,k}$ допускают выделение разностного множителя δ_h^2, и их можно записать в виде

$$U_{h,k} = \frac{2}{C_{2k}^k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{C_{2k}^{k-j}}{(jh)^2} \sum_{s=1-j}^{j-1} (j - |s|) T^{sh} \delta_h^2 D^{-2},$$

$$V_{h,k} = \delta_h^2 W_{h,k}, \qquad W_{h,k} = \sum_{s=1-k}^{k-1} A_{k,s} T^{sh},$$

$$A_{k,s} = \frac{2}{C_{2k}^k} \sum_{j=|s|+1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{C_{2k}^{k-j}}{j^2} (j - |s|).$$

Замечание 4. Отметим обобщение представления оператора $U_{h,k}$:

$$D^s U_{h,k}^r = \frac{1}{h^{2r}} W_{h,k}^r \delta_h^{2r} D^{s-2r}.$$

Замечание 5. В [8] показано, что последовательность $\{A_{k,s}\}_s$ знакочередующаяся, и выполнено равенство

$$\sum_{s=1-k}^{k-1} |A_{k,s}| = \frac{\nu_k}{4}.$$

Следовательно,

$$\|V_{h,k}\| \leqslant \nu_k, \qquad \|W_{h,k}\| \leqslant \frac{\nu_k}{4},$$

более того, поскольку коэффициенты в представлении исходных операторов знакочередуются, в пространствах равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с равномерной нормой и $L_1(\mathbb{R})$ эти неравенства обращаются в равенства.

Теорема 2. *Пусть* $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2r-1$, $p \in [1,\infty]$,

$$Y_{\sigma,r,m,h} = \sum_{k=1}^{r-1} \mathcal{X}_{\sigma,2k,m} U_{h,r}^k (I - U_{h,r}) + \mathcal{X}_{\sigma,2r,m} U_{h,r}^r.$$

Тогда для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$

$$\|f - Y_{\sigma,r,m,h} f\|_p \leqslant \left\{ \frac{1}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\mathcal{K}_{2k}}{(\sigma h)^{2k}} \nu_r^k + \frac{\mathcal{K}_{2r}}{(\sigma h)^{2r}} \frac{\nu_r^r}{2^{2r}} \right\} \omega_{2r}(f,h)_p.$$

Доказательство. Представим тождественный оператор следующим образом:

$$I = \sum_{k=0}^{r-1} U_{h,r}^k (I - U_{h,r}) + U_{h,r}^r.$$

Тогда

$$I - Y_{\sigma,r,m,h} = \sum_{k=0}^{r-1} (I - \mathcal{X}_{\sigma,2k,m}) U_{h,r}^k (I - U_{h,r}) + (I - \mathcal{X}_{\sigma,2r,m}) U_{h,r}^r.$$

Далее применим неравенство треугольника и оценки для отклонения оператора типа Ахиезера–Крейна–Фавара

$$\|(I - Y_{\sigma,r,m,h}) f\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{r-1} \|(I - \mathcal{X}_{\sigma,2k,m}) U_{h,r}^k (I - U_{h,r}) f\|_p + \\ + \|(I - \mathcal{X}_{\sigma,2r,m}) U_{h,r}^r f\|_p.$$

Рассмотрим последнее слагаемое:

$$\|(I - \mathcal{X}_{\sigma,2r,m}) U_{h,r}^r f\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_{2r}}{\sigma^{2r}} \|(U_{h,r}^r f)^{(2r)}\|_p = \frac{\mathcal{K}_{2r}}{\sigma^{2r}} \left\| \frac{1}{h^{2r}} W_{h,m}^r \delta_h^{2r} D^{2r-2r} f \right\|_p \leqslant \\ \leqslant \frac{\mathcal{K}_{2r}}{(h\sigma)^{2r}} \frac{\nu_m^r}{4^r} \|\delta_h^{2r} f\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_{2r}}{(h\sigma)^{2r}} \frac{\nu_m^r}{4^r} \omega_{2r}(f,h)_p.$$

Оценка верна в силу теоремы 2.1, замечаний 3 и 5.

Аналогичным образом оценим каждое слагаемое в сумме:

$$\begin{aligned}\|(I-\mathcal{X}_{\sigma,2k,m})U_{h,r}^k(I-U_{h,r})f\|_p &\leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{\sigma^{2k}}\|(U_{h,r}^k(I-U_{h,r})f)^{(2k)}\|_p \leqslant\\ &\leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{\sigma^{2k}}\frac{1}{h^{2k}}\|W_{h,m}^k\delta_h^{2k}D^{2k-2k}(I-U_{h,r})f\|_p \leqslant\\ &\leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{(\sigma h)^{2k}}\nu_m^k\|(I-U_{h,r})f\|_p \leqslant\\ &\leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{(\sigma h)^{2k}}\nu_m^k\frac{1}{C_{2m}^m}\omega_{2r}(f,h)_p.\end{aligned}$$

Последнее неравенство верно по замечанию 3. Складывая полученные две оценки, получаем требуемое неравенство.

□

Тем самым, получены явные константы в неравенствах типа Джексона для сплайнового приближения на прямой.

Замечание 6. Неравенство для второго модуля непрерывности может быть получено с помощью приема В. В. Жука (см., например, [15, гл. 4, §1]) и неравенств:

$$\|f-S_h^2f\|_p \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,h)_p,$$
$$\|S_h^2f-Y_{\sigma,1,m,h}S_h^2f\|_p \leqslant \frac{\pi^2}{8h^2\sigma^2}\omega_2(f,h)_p.$$

Тогда

$$\|f-Y_{\sigma,1,m,h}S_h^2f\|_p \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8h^2\sigma^2}\right)\omega_2(f,h)_p.$$

При шаге равном $\frac{\pi}{2\sigma}$ неравенство принимает следующий вид:

$$\|f-Y_{\sigma,1,m,\frac{\pi}{2\sigma}}S_{\frac{\pi}{2\sigma}}^2f\|_p \leqslant 1\cdot\omega_2\left(f,\frac{\pi}{2\sigma}\right)_p.$$

При $p=\infty$ константу 1 нельзя уменьшить для всех σ одновременно, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение пространством $\mathbf{S}_{\sigma,m}$.

Для приближений тригонометрическими многочленами оценки сверху получены Жуком [14], оценка снизу — Шалаевым [33] (см. также [15, с. 321–322]; оценки сверху для приближений операторами общего вида (в частности, сплайнами) — Виноградовым и Жуком [7]. В [4] показана точность неравенства для наилучшего приближения функции пространствами сдвигов и, в частности, сплайнами. Точность достигается на классе периодических функций.

Заключение

Основными результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. В первой главе были получены аналоги классических результатов П. Л. Чебышева и С. Н. Бернштейна о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля с весом, для целых функций экспоненциального типа. Построены целые функции конечной степени, строго наименее уклоняющиеся от нуля в классе Картрайт в равномерной и интегральной метриках с весом.

2. Во второй главе построены линейные операторы со значениями в пространстве непериодических сплайнов минимального дефекта, с помощью которых устанавливается возможность реализации верхних граней в неравенстве типа Ахиезера–Крейна–Фавара линейными методами приближения, ранее остававшаяся неизвестной.

3. В третьей главе получены неравенства типа Джексона для приближений сплайнами с явными константами для первого модуля непрерывности производной и старших модулей непрерывности самой функции, некоторые из которых являются точными.

Полученные результаты могут быть полезны при решении родственных задач теории приближений.

Список литературы

[1] Н. И. Ахиезер. *Лекции по теории аппроксимации.* Наука, М. (1965).

[2] Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн. *О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций.* Докл. АН СССР 15:3 (1937), 107–112.

[3] О. Л. Виноградов. *Аналог сумм Ахиезера–Крейна–Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта.* Проблемы мат. анализа 25 (2003), 29–56.

[4] О. Л. Виноградов. *Точные неравенства для приближений классов периодических сверток подпространствами сдвигов нечетной размерности.* Мат. заметки 85:4 (2009), 569–584.

[5] О. Л. Виноградов, А. В. Гладкая. *Целые функции, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной и интегральной метриках с весом.* Алгебра и анализ 26:6 (2014), 10–28.

[6] О. Л. Виноградов, А. В. Гладкая. *Непериодический сплайновый аналог операторов Ахиезера–Крейна–Фавара.* Зап. научн. сем. ПОМИ 440 (2015), 8–35.

[7] О. Л. Виноградов, В. В. Жук. *Точные оценки отклонений линейных методов приближения периодических функций посредством линейных комбинаций модулей непрерывности различных порядков.* Проблемы мат. анализа 25 (2003), 57–97.

[8] О. Л. Виноградов, В. В. Жук. *Оценки функционалов с известной последовательностью моментов через отклонения средних типа Стеклова.* Зап. научн. сем. ПОМИ 383 (2010), 5–32.

[9] О. Л. Виноградов, В. В. Жук. *Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности и поведение констант в неравенствах типа Джексона.* Алгебра и анализ, 24:5 (2012), 1–43.

[10] Дж. Гарнетт. *Ограниченные аналитические функции.* Мир, М. (1984).

[11] А. В. Гладкая. *Целые функции, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной метрике с весом.* Зап. научн. сем. ПОМИ 416 (2013), 98–107, СПб.

[12] А. Ю. Громов. *О точных константах приближений целыми функциями дифференцируемых функций.* В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям 7 (1976), 17–21, Днепропетровск.

[13] В. В. Жук. *О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и молулями непрерывности.* Сибирский мат. журнал 12:6 (1971), 1283–1297.

[14] В. В. Жук. *О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности.* Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон. 1 (1974), 21–26.

[15] В. В. Жук. *Аппроксимация периодических функций.* Изд. Ленинградского Университета, Ленинград (1982).

[16] В. В. Жук. *Лекции по теории аппроксимации.* ВВМ (2008).

[17] И. И. Ибрагимов. *Теория приближения целыми функциями.* ЭЛМ, Баку (1979).

[18] Н. П. Корнейчук. *Сплайны в теории приближения.* Наука, М. (1984).

[19] Н. П. Корнейчук. *Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций.* Докл. АН СССР 145:3 (1962), 514–515.

[20] Н. П. Корнейчук. *Точные константы в теории приближения.* Наука, М. (1987).

[21] М. Г. Крейн. *О наилучшей аппроксимации непрерывных дифференцируемых функций на всей вещественной оси.* Докл. АН СССР 18:9 (1938), 619–623.

[22] П. Кусис. *Введение в теорию пространств H^p.* Мир, М. (1984).

[23] Б. Я. Левин. *Распределение корней целых функций.* Государственное издательство технико-теоретической литературы, М. (1956).

[24] А. А. Лигун. *О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций.* Мат. заметки 38:2 (1985), 248–256.

[25] Г. Г. Магарил-Ильяев. *О наилучшем приближении сплайнами классов функций на прямой.* Труды Мат. ин-та РАН 194 (1992), 148–159.

[26] Г. Г. Магарил-Ильяев. *Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой.* Мат. сборник 182:11 (1995), 1635–1656.

[27] Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов. *Лекции по вещественному анализу.* БХВ-Петербург, СПб (2011).

[28] С. М. Никольский. *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.* Изв. АН СССР. Сер. мат. 10:9 (1946), 207–256.

[29] В. И. Смирнов. *Избранные труды.* Издательство Ленинградского университета, Л. (1988).

[30] Сунь Юншен, Ли Чунь. *Наилучшее приближение некоторых классов гладких функций на действительной оси сплайнами высшего порядка.* Мат. заметки 48:4 (1990), 148–159.

[31] А. Ф. Тиман. *Теория приближения функций действительного переменного.* ГИФМЛ, М. (1960).

[32] В. М. Тихомиров. *Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве* $C[-1,1]$. Мат. сборник 80:2 (1969), 290–304.

[33] В. В. Шалаев. *К вопросу о приближении непрерывных периодических функций три гонометрическими полиномами.* Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям 8 (1977), 39–43, Днепропетровск.

[34] R. P. Boas, Jr. *Entire Functions.* Academic press Inc., publishers (1954).

[35] C. de Boor, I. J. Schoenberg. *Cardinal interpolation and spline functions VIII. The Budan – Fourier theorem for splines and applications.* — In: Spline functions. Proceedings of an International Symposium, Karlsruhe, Germany, May 20–23 (1975). Edited by K. Böhmer, G. Meinardus, and W. Schempp. Lecture notes in mathematics 501, 1–79, Berlin – Heidelberg – New York, Springer-Verlag (1976).

[36] L. de Branges. *Hilbert Spaces of Entire Functions.* Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs (1968).

[37] J. Favard. *Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonométriques.* Bull. de Sci. Math. 61 (1937), 209–224, 243–256.

[38] S. Foucart, Y. Kryakin, A. Shadrin. *On the exact constant in the Jackson–Stechkin inequality for the uniform metric.* Constr. Approx. 29 (2009), 157–179.

[39] K. Jetter, S. D. Riemenschneider, N. Sivakumar. *Schoenberg's exponential Euler spline curves.* Proc. of the Royal Society of Edinburgh 118A (1991), 21–33.

[40] N. P. Korneičuk. *Exact error bound of approximation by interpolating splines on L-metric on the classes W_p^r ($1 \leqslant p < \infty$) of periodic functions.* Analysis Mathematica 3:2 (1977), 109–117.

[41] A. Kroo, F. Peherstorfer. *Asymptotic representation of weighted L_∞- and L_1-minimal polynomials.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2008), 241–254.

[42] B. Ya. Levin. *Lectures on Entire Functions.* AMS (1996).

[43] A. A. Ligun. *Inequalities for upper bounds of functionals.* Analysis Mathematica 2:1 (1976), 11–40.

[44] B. Nagy. *Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall.* Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig 91 (1939), 3–24.

[45] I. J. Schoenberg. *Cardinal spline interpolation.* SIAM, 2 ed., Philadelphia (1993).

[46] I. J. Schoenberg. *On the remainders and the convergence of cardinal spline interpolation for almost periodic functions.* In: Studies in spline functions and approximation theory. Edited by S. Karlin et.al, Academic Press (1976), 277–303, New York.

[47] O. L. Vinogradov, V. V. Zhuk. *Sharp estimates for deviations of linear approximation methods for periodic functions by linear combinations of moduli of continuity of different order.* Journal of Math. Sciences 114:5 (2003), 1628–1656.