Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Злотников Илья Константинович

Идеалы алгебры ограниченных аналитических функций: интерполяция и уравнение Безу

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., академик РАН Кисляков С.В.

Санкт–Петербург — 2019

Оглавление

Глава 1

Введение

В этой диссертации изучаются свойства идеалов алгебры ограниченных аналитических функций. Первая часть посвящена вопросам вещественной интерполяции пространств, образованных в результате пересечения идеалов, а в более общей ситуации — модулей над замкнутыми в w^*-топологии подалгебрами алгебры $L^\infty(\mu)$. В качестве примера пространств, для которых методы этой работы дают интерполяционные результаты (частично новые, частично известные) можно привести пространства, коинвариантные относительно действия оператора сдвига, и пространства Харди на двумерном торе. В процессе исследования изучаются возможности применения модификаций двух методов, ставших стандартными в теории вещественной интерполяции. Эти методы — разложение Кальдерона–Зигмунда и аналитические срезающие функции.

Также во второй главе исследуется вещественная интерполяция *весовых* пространств, коинвариантных относительно оператора сдвига.

Третья глава посвящена решению задачи об идеалах (или уравнения Безу) для ограниченных аналитических функций, принимающих значения в банаховой решётке последовательностей, удовлетворяющей некоторым дополнительным ограничениям. Примером такой решётки может служить пространство l^p при $p \in [1, \infty)$.

Актуальность. В диссертационной работе решаются некоторые задачи гармонического анализа. Вопросы интерполяции давно исследовались для различных функциональных пространств. В этой связи следует особо выделить классы Харди, интерполяционные свойства которых исследовали такие математики, как П. Джонс, Ж. Пизье, Ж. Бургейн, С.В. Кисляков, Ч. Фефферман, К. Шу и другие, см.[25], [6], [14], [41], [10]. Результаты второй главы продолжают предыдущие исследования. Вместо классов Харди, рассматриваются более сложные (с точки зрения теории интерполяции) объекты.

Задачу об идеалах для пространства l^2 впервые решил В.А. Толоконников в работе [8]. Она тесно связана со знаменитой теоремой о короне, которую доказал Карлесон в [11]. Различные вопросы в этой области исследовались многими специалистами в математическом анализе, среди которых были Л. Хермандер, Т. Вольф, М. Розенблюм, Н. Варопулос, П. Джонс, Д. Гарнетт, С. Трейль, С.В. Кисляков, Д.В. Руцкий, А. Учияма и другие (см. [32], [37], [5], [34], [39]). Недавно в работах [5] и [34] удалось получить результаты для теоремы о короне в случае ограниченных аналитических функций, принимающих значения в различных решётках последовательностей. В этой диссертационной работе подобные результаты для векторнозначных функций получены для задачи об идеалах.

Методы. В работе применяется множество методов вещественного, комплексного и функционального анализа. В первой части диссертации стоит отдельно выделить разложение Кальдерона-Зигмунда, которое в своё время использовал Ж.Бургейн (см. [10] и [25]) при решении интерполяционных задач для классов Харди. Один из аналогов этого разложения был получен С.В. Кисляковым и Д.С Анисимовым для случая весовых пространств в работе [1]. Этот инструмент оказался очень удобным при решении задач, связанных с весовыми пространствами K^p_θ во второй главе этой работы. Другой метод в теории вещественной интерполяции предложил С.В. Кисляков, см. обзор [25]. Он основан на применении так называемых аналитических срезающих функций. В данной работе с помощью этого метода удаётся получить некоторые новые разложения в случаях, когда разложение Кальдерона–Зигмунда недоступно, и исследовать интерполяционные свойства широкого класса пространств, образованных в результате пересечения модулей над w^*-замкнутыми подалгебрами алгебры $L^\infty(\mu)$. В процессе доказательства теорем в главе 3 главным инструментом служит метод Д.В. Руцкого, в основе которого лежит теорема Какутани о неподвижной точке. Здесь перечислены только самые важные методы, которые использовались автором при написании этой диссертации.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации — новые.

Теоретическая и практическая значимость. Все полученные результаты теоретические. Результаты диссертации могут быть использованы при решении различных задач функционального и гармонического анализа, более конкретно: в теории интерполяции, изучение свойств операторов Ганкеля и Тёплица, вопросов, связанных с теоремой Бёрлинга-Мальявена и прочее.

Степень достоверности, публикации и апробация результатов. Все полученные в этой диссертационной работе результаты являются математически достоверными фактами. Материалы диссертации опубликованы в статьях [Z1], [Z2], [KZ] в рецензируемых журналах, которые входят в список ВАК. Также результаты были доложены на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций (ПОМИ РАН) и аналитическом семинаре лаборатории Чебышёва.

Далее мы приведём формулировки основных теорем этой работы и несколько основных определений. Все вспомогательные определения, предшествующие результаты и, разумеется, доказательства изложены в двух последующих главах.

1.1 Основные интерполяционные результаты.

Первая часть диссертации посвящена интерполяционным теоремам для различных пространств, образованных в результате пересечения двух подпространств, устроенных в каком-то смысле более просто. В работе изучаются два случая, различие между которыми состоит в наличии или отсутствии разложения Кальдерона–Зигмунда для проектора на одно из подпространств. Это приводит к различным методам решения и ограничениям на участвующие подпространства.

Предварительно мы напомним лишь несколько самых основных определений. Все остальные термины и необходимые рассуждения будут приведены во второй главе этой работы.

При изучении вопросов вещественной интерполяции различных пространств оказалось очень удобным понятие K-замкнутости. Напомним сначала одно стандартное определение.

Определение 1.1. *Пусть X_0 и X_1 — квазибанаховы пространства. Пара (X_0, X_1)*

называется совместимой, если найдётся такое линейное топологическое пространство X, что оба пространства X_i непрерывно вложены в X.

В частности, это условие означает, что можно рассматривать суммы $x_0 + x_1$ для всех $x_i \in X_i$, $i = 1, 2$.

Определение 1.2. *Пусть (X_0, X_1) — совместимая пара квазибанаховых пространств, F_i — подпространства в X_i, $i = 1, 2$. Пару (F_0, F_1) называют K-замкнутой в паре (X_0, X_1), если существует такая универсальная постоянная C, что для всякого элемента f, лежащего в пространстве $F_0 + F_1$, и представления $f = x_0 + x_1$, где $x_i \in X_i$, найдётся такое представление $f = f_0 + f_1$, где $f_i \in F_i$, что выполняются оценки $\|f_i\|_{F_i} \le C\|x_i\|_{X_i}$.*

Замечание 1.3. *При проверке K-замкнутости достаточно доказать утверждение только для плотных подмножеств пространств F_0 и F_1. Утверждение для исходной пары можно будет получить с помощью простого предельного перехода.*

Для лаконичности записи будем использовать следующие обозначения для аннуляторов, замыканий и пересечений с пространством $L^p(\mu)$. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой, а $\mathcal{F}$ — подпространство пространства $L^\infty(X, \mu)$. Аннулятор пространства $\mathcal{F}$ в пространстве $L^1(\mu)$ мы будем обозначать через $\mathcal{F}^\perp$. Напомним, что он определяется формулой:

$$\mathcal{F}^\perp = \{h \in L^1(\mu) \colon \int\limits_X f\overline{h}\, d\mu = 0 \text{ для всех } f \in \mathcal{F}\}.$$

Пусть $p \in [1, \infty]$. Будем обозначать через $\mathcal{F}_p$ замыкание пространства $\mathcal{F}$ в пространстве $L^p(X, \mu)$. Наконец, положим $\mathcal{E}^p = L^p(X, \mu) \cap \mathcal{E}$ для $\mathcal{E} \subset L^1(\mu)$.

Следующее важное условие на алгебру функций позволяет выполнить построение срезающих функций, принадлежащих этой алгебре. Мы подробно обсудим это в разделе 2.5, а здесь ограничимся только формулировкой.

Условие (α_p). Для всякой положительной функции u, принадлежащей пространству $L^p(X, \mu)$, найдётся такая последовательность функций $\{w_n\}_0^\infty$, принадлежащих алгебре $\mathcal{E}$, что

$$\text{(i)}\quad \operatorname{Re} w_n \geq 0,$$

$$\text{(ii)}\quad \operatorname{Re} w_n \text{ слабо сходятся к } u \text{ в } L^p(\mu),$$

$$\text{(iii)}\quad \|w_n\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p},$$

с постоянной C, которая может зависеть только от параметра p.

Мы переходим непосредственно к формулировкам основных результатов первой части диссертации. Следующая теорема кажется несколько громоздкой, однако позже мы увидим, что она единообразно трактует много вполне конкретных важных примеров.

Теорема 1. *Пусть (X,μ) — пространство с конечной мерой, C — подпространство в $L^\infty(X,\mu)$, B — w^*-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(X,\mu)$, удовлетворяющая условию (α_p). Пусть D — модуль над алгеброй B, который, в свою очередь, тоже вложен в пространство $L^\infty(X,\mu)$. Пусть ещё $p>1$, а q — сопряжённый с p показатель. Предположим также, что существует проектор P, отображающий пространство $L^q(\mu)$ на $C^{\perp,q}$ и обладающий слабым типом $(1,1)$, и при этом справедливо включение: $P(D^{\perp,q}) \subset D^{\perp,q}$. Тогда пара $(C_p \cap D_p, C \cap D)$ K-замкнута в паре $(L^p(X,\mu), L^\infty(X,\mu))$, если дополнительно выполняется одно из следующих условий.*

I. *Для проектора P справедливо разложение Кальдерона–Зигмунда (см. раздел 2.3).*

II. *Пространство C образует модуль над некоторой подалгеброй A алгебры $L^\infty(\mu)$. Кроме того, алгебра A тоже удовлетворяет условию (α_p).*

Доказательство теоремы 1 для этих двух различных предположений удалось унифицировать. В основе рассуждения лежит построение некоторого общего разложения, которое удалось доказать либо с помощью разложения Кальдерона–Зигмунда, либо с помощью срезающих функций из w^*-замкнутых подалгебр пространства $L^\infty(\mu)$, удовлетворяющих условию (α_p). Различия между условиями (I) и (II) мы обсудим в главе 2 (например, см. раздел 2.4).

Примеры, упомянутые перед формулировкой, мы подробно обсудим в соответствующем разделе главы 2. Здесь мы приведём лишь самые важные. Кратко отметим, что условиям теоремы удовлетворяет пара пространств Харди на двумерном торе — $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$ (определение классов Харди см. раздел 2.2 и раздел 2.9.1). K-замкнутость для такой пары хорошо известна и была установлена в работе С.В. Кислякова и К. Шу (см. [6]). Интерполяционные свойства пары пространств Харди $(H^p(\mathbb{T}^n), H^\infty(\mathbb{T}^n))$ в случае $n \geq 3$ до сих пор остаются неизученными.

Вторым основным примером служат пространства, коинвариантные относительно оператора сдвига. Пусть θ — внутренняя функция, то есть $\theta \in H^\infty(\mathbb{T})$ и $|\theta| = 1$ п.в. на окружности $\mathbb{T}$, а p — положительное вещественное число или бесконечность. Через K^p_θ в дальнейшем будут обозначены пространства, коинвариантные относительно оператора сдвига или так называемые модельные пространства. Более подробно мы поговорим о них в главе 2, а сейчас ограничимся напоминанием, что справедливо равенство $K^p_\theta = H^p(\mathbb{T}) \cap \theta \overline{H^p_0}(\mathbb{T})$.

Для приведённых примеров следует отметить, что и для пространства Харди на двумерном торе, и для пространства, коинвариантного относительно сдвига, выполняются как первое, так и второе условие в теореме 1. Следующая теорема является прямым следствием теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $p \in (1, +\infty)$. Тогда пара пространств $(K^p_\theta, K^\infty_\theta)$ K-замкнута в паре пространств $(L^p(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$.*

Этот интерполяционный результат для модельных пространств новый и опубликован в совместной с С.В Кисляковым работе [KZ]. Следует отметить, что пока не удаётся доказать K-замкнутость для пространств, коинвариантных относительно сдвига, в случае, когда $p = 1$. Однако, для показателей, близких к 1, можно получить некоторый результат в терминах вещественных интерполяционных пространств (см. определение 2.9).

Теорема 3. *Пусть $p_1 \in (1, \infty)$, $0 < r < 1$. Положим $p = \frac{p_1}{p_1 + r - rp_1}$. Справедливо равенство*

$$(K^{1,\infty}_\theta, K^{p_1}_\theta)_{r,p} = K^p_\theta.$$

Условие (II) в теореме 1 позволяет получить новые интерполяционные теоремы для пересечения модулей над w^*-замкнутыми алгебрами. Мы покажем, что w^*-алгебры Дирихле удовлетворяют условиям из формулировки теоремы 1. Отметим, что для них во многих случаях совершенно неясно наличие разложение Кальдерона–Зигмунда. В некоторых рассмотреных в диссертации примерах даже неясно, что понимать под кубами для пространства X (в основе доказательства разложения Кальдерона–Зигмунда лежит анализ средних по кубам). Теорема 1 с условием (II) опубликована в совместной с С.В. Кисляковым работе [22].

Также в этой главе изучается весовой аналог некоторых предыдущих результатов. Через A_p обозначены классы Макенхаупта. Доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $a \in A_\infty, w \in A_1$. Найдётся число r', которое соответствуют весам a и w такое, что для всякого числа $q > r'$ пара $(K^q_\theta(aw^{-q}), K^\infty_\theta(w))$ K-замкнута в паре $(L^q(aw^{-q}), L^\infty(w))$.*

Теорема 4 новая и опубликована в совместной с С.В. Кисляковым статье [KZ].

1.2 Основные результаты в задаче об идеалах для $H^\infty(X)$

Третья глава этой диссертации посвящена решению задач об идеалах для функций, принимающих значения в некоторых банаховых решётках.

Все основные определения и некоторые свойства приведены в соответствующем разделе третьей главы. Отметим только, что под произведением банаховых решёток мы понимаем следующую конструкцию.

Определение 1.4. *Пусть X и Y — банаховы решётки измеримых функций на одном и том же пространстве с мерой. Произведением решёток X и Y назовём решётку $XY = \{h = fg, f \in X, g \in Y\}$ с индуцированным порядком и снабжённую квазинормой $\|h\|_{XY} = \inf \|f\|_X \|g\|_Y$, где точная нижняя грань берётся по всем разложениям $h = fg$.*

В этой дисертации обычно мы будем рассматривать дискретные решётки, то есть решётки (измеримых — автоматически в этом случае) функций на множестве $\mathbb{N}$. Одним из основных примеров будет служить решётка l^p. Приведём теперь точную формулировку задачи об идеалах.

Определение 1.5. *Пусть X — банахова решётка последовательностей с областью задания на множестве $\mathbb{N}$. Обозначим через X' решётку, порядково сопряжённую с ней. Будем говорить, что для решётки X разрешима задача об идеалах с показателем α и оценкой $C_{X,\alpha}$, если справедливо следующее утверждение. Для всякой функции h из класса $H^\infty(\mathbb{D})$ и векторнозначной функции f из класса $H^\infty(\mathbb{D};X)$, удовлетворяющих условиям*

$$|h(z)| \le \|f(z)\|_X^\alpha \le 1 \tag{1.1}$$

для всех z из круга $\mathbb{D}$ и некоторого фиксированного параметра α, можно найти такую векторнозначную функцию g из класса $H^\infty(\mathbb{D};X')$, что выполняется равенство

$$h(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f(z,i)g(z,i) = \langle f(z), g(z)\rangle, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.2}$$

при этом величина $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D};X')}$ контролируется константой $C_{X,\alpha}$, зависящей только от параметра α и решётки X.

Отметим, что знаменитая теорема о короне тесно связана с задачей об идеалах. Достаточно в приведённой выше формулировке заменить условие (1.1) на требование: найдётся такое строго положительное число δ, что справедливо неравенство

$$1 \ge \|f(z)\|_X \ge \delta > 0,$$

а равенство (1.2) заменить на тождество

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} f(z,i)g(z,i) = \langle f(z), g(z)\rangle, \quad z \in \mathbb{D}.$$

В теореме о короне оценка величины $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D};X')}$ зависит от параметра δ.

В работах [34], [4], [5], [39] среди прочего исследовался вопрос: для каких решёток X справедлива теорема о короне? Подробно мы обсудим имеющуюся здесь информацию в главе 3. Во введении мы лишь кратко перечислим известные результаты. Изначально Л. Карлесон доказал теорему о короне для случая конечномерных пространств. Другой подход к решению этой задаче предложил Т. Вольф, что позволило установить, что теорема о короне выполняется для пространства l^2. В работе

[39] А.Учияма установил, что теорема о короне справедлива для пространства l^∞. Рассуждение Учиямы по сложности находится на одном уровне с исходным доказательством Карлесона, в то время как доказательство Вольфа достаточно лаконично. С.В. Кисляков и Д.В. Руцкий, опираясь на результат Вольфа, доказали теорему о короне для $X = l^p$ при $p > 2$. С помощью методов теории интерполяции Кисляков в статье [5] показал, что теорема о короне выполняется для всех q-вогнутых решёток. В работе [34] Руцкий, опираясь на результат Учиямы и теорему Какутани о неподвижной точке, показал, что теорема о короне справедлива и для банаховых решёток последовательностей с порядково-непрерывной нормой. Наконец, недавно Кисляков предложил простое рассуждение, которое позволяет доказать теорему о короне для произвольных решёток (и даже в большой общности), опираясь лишь на теорему Учиямы. С его разрешения в этой диссертации это рассуждение будет приведено в главе 3. Следует отметить, что в методе Руцкого в качестве базового утверждения можно брать не только теорему Учиямы для решётки l^∞, но и теорему Вольфа для решётки l^2. Тогда, правда, класс допустимых решёток сужается, но всё равно остаётся весьма широким. Рассуждение Кислякова, как будет видно в дальнейшем, подходит только для случая пространства l^∞, то есть опирается именно на сложную теорему Учиямы. Поэтому, даже при наличии простого наблюдения Кислякова, метод Руцкого имеет свою ценность в теореме о короне. В задаче же об идеалах только он и применим.

Для задачи об идеалах возникает тот же естественный вопрос: для каких решёток X задача об идеалах имеет решение? Стоит отметить, что в отличии от теоремы о короне, в задаче об идеалах функция f может обращаться в 0 в некоторых точках z, и это существенно усложняет некоторые рассуждения. В.А. Толоконников в работе [8] установил, что задача об идеалах разрешима для решётки l^2 с показателем 4 и константой 57.

В этой диссертации удалось установить разрешимость задачи об идеалах для достаточно широкого класса банаховых решёток. Мы покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $p \in [1, \infty)$. Для всякого параметра $\varepsilon > 0$ задача об идеалах разрешима в пространствах l^p с показателем $(1+\varepsilon)p$ и константами, зависящими только от ε.*

Следующая теорема показывает, что при некоторых дополнительных предположениях, для произведения решёток задача об идеалах разрешима, если она была разрешима хотя бы для одного из сомножителей.

Теорема 6. *Пусть E и F — конечномерные банаховы решётки, заданные на множестве $\mathbb{N}$. Пусть для решётки E задача об идеалах имеет решение с показателем α_E и оценкой C_E. Если произведение решёток E и F — банахова решётка, которую обозначим через X, то задача об идеалах разрешима и для решётки X с показателем α_E и оценкой $C_E 2^{\alpha_E}(1+\delta)$ для произвольного положительного δ.*

Сформулируем основную теорему третьей главы.

Теорема 7. *Пусть X — q-вогнутая решётка со свойством Фату и областью задания на множестве $\mathbb{N}$. Тогда для решётки X задача об идеалах имеет решение с показателем $(1+\varepsilon)q$ для произвольного положительного ε и с константой, зависящей от q и ε.*

Доказательство этой теоремы опирается на теорему 6 и некоторую техническую лемму о переходе с конечномерных решёток к бесконечномерным.

Пусть X — банахова решётка последовательностей, а N— натуральное число. Через X_N обозначим конечномерную решётку, полученную в результате сужения решётки X на множество $\{1 \dots N\}$.

Лемма 8. *Пусть X — бесконечномерная банахова решётка последовательностей, такая что для всякого натурального N и произвольно малого ϵ в конечномерной решётке X_N задача об идеалах разрешима с показателем α и константой $C_X(1+\epsilon)$, не зависящими от размерности N. Если дополнительно предположить, что решётка X q-вогнута с константой $M_{q,X}$, то задача об идеалах разрешима в X с показателем α и константой $C_X M_{q,X}$.*

В основе доказательств сформулированных выше теорем лежит метод Руцкого, а также теорема Толоконникова для задачи об идеалах в пространстве l^2, однако, как уже отмечалось, при решении задачи об идеалах возникают некоторые технические сложности, что, в частности, приводит к дополнительным ограничениям в формулировке леммы 8. Результаты третьей главы опубликованы в статьях [Z1] и [Z2].

Глава 2

Интерполяция пересечения модулей над подалгебрами в $L^\infty(\mu)$

2.1 Введение

Это глава посвящена решению различных задач вещественной интерполяции. Основной результат этой главы — теорема 1 об интерполяции пространств, образованных в результате пересечений двух модулей или модуля и пространства, если дополнительно предположить, что проектор на аннулятор этого пространства является оператором Кальдерона–Зигмунда. Опишем структуру этой главы.

Вначале мы напомним определения и некоторые свойства пространств Харди и пространств, коинвариантных относительно действия оператора сдвига, и их весовых аналогов.

Затем мы напомним некоторые общие факты из теории вещественной интерполяции. В частности, мы приведём определение вещественного интерполяционного пространства, его связь с уже упоминавшимся понятием K-замкнутости, а также напомним классические теоремы об интерполяции пространств Лоренца и Лебега.

Далее мы обсудим некоторые методы решения интерполяционных задач: разложение Кальдерона–Зигмунда для сингулярных интегральных операторов и его весовой аналог, а также метод построения срезающей аналитической функции. Оба этих метода будут применяться при доказательстве основной теоремы. Разложение

Кальдерона–Зигмунда будет основным при доказательстве теоремы 1 с условием (I) и теоремы 4 об интерполяции весовых модельных пространств.

Метод срезающих функций в этой диссертационной работе играет одну из ключевых ролей. Как ясно из уже сказанного, мы будем рассматривать не только срезающие аналитические функции, но и функции, принадлежащие подалгебрам алгебры $L^\infty(\mu)$, которые обладают некоторыми дополнительными свойствами, включающими условие (α_p). Мы начнём с обсуждения этого условия, затем приведём простой пример применения аналитических срезающих функций при доказательстве K-замкнутости классических пространств Харди. Далее мы докажем важную лемму о свойствах срезающих функций, принадлежащих подалгебрам алгебры $L^\infty(\mu)$. В следующем разделе мы построим новые разложения, которые заменят нам разложения Кальдерона–Зигмунда в тех случаях, когда они недоступны. Далее мы объединим разложения Кальдерона–Зигмунда и разложение с помощью срезающих функций в одно разложение, которое и будем применять при доказательстве теоремы 1.

В случаях наподобии теоремы 1 естественно обсуждать примеры применения перед доказательством. Здесь сделано почти так, с той разницей, что сначала всё же даны несколько технических утверждений и определений, содержащих какие-то элементы будущего доказательства. Такое изложение материала выбрано по той причине, что эти технические моменты нужны для изложения примеров.

В разделе 2.10 мы докажем теорему 1. В двух последних разделах этой главы мы продолжим изучение интерполяционных свойств модельных пространств и их весовых аналогов и докажем теоремы 3 и 4.

2.2 О пространствах $H^p(\mathbb{T}), H^p(\mathbb{T}, w), K^p_\theta$ и $K^p_\theta(w)$

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность $\{z \in \mathbb{C} \ : |z| = 1\}$, снабжённую нормированной мерой Лебега m, а через $\mathbb{D}$ — единичный круг $\{z \in \mathbb{C} \ : |z| < 1\}$.

В этой работе через $H^p(\mathbb{T})$ обозначены *классы Харди* на единичной окружности $\mathbb{T}$. Напомним, что в случае конечного показателя p эти пространства представляют собой замыкание множества аналитических полиномов $Pol_+ = \left\{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n,\ a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ по норме пространства $L^p(\mathbb{T})$. Для $p = \infty$ замыкание берётся в w^*-топологии. Через

$H^{p,q}(\mathbb{T})$ в работе обозначены пространства, полученные в результате замыкания множества Pol по норме пространства Лоренца $L^{p,q}$.

Здесь и далее через $\mathbb{P}$ будет обозначен проектор Рисса. Напомним, что проектор $\mathbb{P}$ является линейным непрерывным оператором, действующим из пространства L^p в пространство H^p для $1 < p < \infty$, и может быть задан формулой:

$$\mathbb{P}f(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)z^n.$$

В случае, когда $p = 1$, проектор Рисса не является непрерывным оператором, однако выполняется оценка слабого типа $(1, 1)$:

$$m\{z \in \mathbb{T} : |\mathbb{P}f(z)| \geq \lambda\} \leq C\frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda},$$

где C — универсальная постоянная. Другими словами, проектор $\mathbb{P}$ является непрерывным оператором, который действует из пространства L^1 в пространство $H^{1,\infty}$.

Определение 2.1. *Пусть θ — внутренняя функция на единичной окружности, то есть $\theta \in H^\infty(\mathbb{T})$ и $|\theta(z)| = 1$ для п.в. $z \in \mathbb{T}$. Для $1 \leq p \leq \infty$ положим*

$$K^p_\theta = H^p(\mathbb{T}) \cap (\theta\overline{H^p_0}(\mathbb{T})),$$

где под чертой понимаем обычную операцию комплексного сопряжения, а под $H^p_0(\mathbb{T})$ следует понимать пространство $\{f \in H^p(\mathbb{T}) : \hat{f}(0) = 0\}$.

Аналогичной формулой определяются и пространства, коинвариантные относительно сдвига, снабжённые нормой из пространства Лоренца:

$$K^{p,q}_\theta = H^{p,q}(\mathbb{T}) \cap (\theta\overline{H^{p,q}_0}(\mathbb{T})).$$

Знаменитая теорема Бёрлинга утверждает, что подпространство в $H^2(\mathbb{T})$, инвариантное относительно оператора обратного сдвига, можно представить в виде K^2_θ для некоторой внутренней функции θ. На самом деле, и при $1 \leq p < \infty$ коинвариантные подпространства оператора сдвига представляются в виде пространств K^p_θ (см., например, статью [13] или книгу [29]). Подобные пространства возникают во многих задачах современного анализа. В качестве примера можно привести функциональную модель Надя–Фойяша для операторов сжатия в гильбертовых пространствах (см. [28] и [29]). Другое применение пространств K^p_θ можно найти в задачах, связанных с теоремой Бёрлига–Мальявена (см. [2] и приведённые там ссылки).

Проектор на пространство K^p_θ, действующий из пространства L^p, можно определить формулой

$$\mathbb{P}_\theta f = \mathbb{P} f - \theta \mathbb{P}(\overline{\theta} f).$$

Он состоит из проектора Рисса и его же, окаймлённого функцией θ. Как ни просто выглядит эта формула, выясняется, что такая структура проектора ведёт к некоторым трудностям при анализе предельных показателей 1 и ∞.

Зафиксируем двойственность

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\, dm(z).$$

Нам потребуется следующее простое утверждение.

Лемма 2.2. *При указанной двойственности аннуляторы пространств, коинвариантных относительно сдвига, могут быть представлены в виде* $(K^p_\theta)^\perp = \overline{H^p_0} + \theta H^p_0,\ \ 1 < p < \infty$ *и* $(K^\infty_\theta)^\perp = \operatorname{clos}\{\overline{H^1_0} + \theta H^1_0\}$.

Мы переходим к весовым аналогам вышеприведённых понятий. В дальнейшем мы всегда считаем, что *вес* — это неотрицательная функция на окружности с суммируемым логарифмом.

Определение 2.3. *Пусть* (S, μ) *— пространство с мерой,* w *— вес, а* p *— параметр,* $p \in [1; \infty]$. *Определим весовые пространства* $L^p(w)$, *указав норму в этих пространствах:*

$$\|f\|_{L^p(w)} = \int\limits_S |f|^p w d\mu, \ \textit{ в случае } p < \infty;$$

$$\|f\|_{L^\infty(w)} = \operatorname*{ess\,sup}_S \frac{|f|}{w}.$$

Это определение соответствует терминологии статьи [1]. Отметим, что такая система обозначений не вполне универсальна, и в некоторых источниках норма определяется иным образом ($\|f\|_{L^p(w)} = \int |fw|^p d\mu$ и $\|f\|_{L^\infty(w)} = \|fw\|_{L^\infty}$), что следует учитывать при изучении теорем в этих источниках. Напомним определение весовых пространств H^p и K^p_θ.

Определение 2.4. *Пусть u — вес, а $s \in (0, +\infty]$. Пространство $H^s(u)$ определяется как пересечение граничного класса Смирнова с пространством $L^s(u)$, то есть это по-прежнему аналитические функции, лежащие в соответствующем весовом пространстве. В свою очередь, пространство $K^s_\theta(u)$ определяется формулой $K^s_\theta(u) = H^s(u) \cap \theta\overline{H^s(u)}$. Аналогично определяются пространства $H^{p,q}(u)$ и $K^{p,q}(u)$, снабжённые нормой из пространства Лоренца $L^{p,q}(u)$.*

В дальнейшем двойственность, как и раньше, будет определяться обычной полуторалинейной формой *без веса*.

Мы будем обозначать классы Макенхаупта через A_p. Для полноты изложения приведём соответствующие определения.

Определение 2.5. *Будем говорить, что вес $w : \mathbb{T} \to [0; +\infty)$ принадлежит классу A_p для $p \in (1, \infty)$, если найдётся такая универсальная постоянная C, что для всех интервалов $B \subset \mathbb{T}$ выполняется*

$$\left(\frac{1}{m(B)} \int\limits_B w dm\right) \left(\frac{1}{m(B)} \int\limits_B w^{-q/p} dm\right)^{p/q} \leq C < \infty,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Для $p = 1$ класс A_1 определяется следующим условием:

$$\left(\frac{1}{m(B)} \int\limits_B w dm\right) \leq Cw.$$

Наконец, вес w принадлежит классу A_∞, если найдётся такое число $p \in [1, \infty)$, что $w \in A_p$.

Доказательство следующей технической леммы можно найти в работе [1].

Лемма 2.6. *Пусть $w \in A_1$, $a \in A_\infty$. Тогда найдется такое число $r = r(w, a) > 1$, что веса a, aw^{-s} принадлежат классу A_s при $s \geq r$, что эквивалентно "сопряжённому" условию: $a^{-\frac{1}{s-1}}, (aw^{-s})^{-\frac{1}{s-1}} = \frac{w^{s'}}{a^{s'-1}} \in A_{s'}$ при $1 < s' \leq r'$.*

Нам потребуется следующий результат работы [1] об оценках для окаймлённого проектора Рисса в случае весовых пространств L^p.

Теорема 2.7. *Пусть $a \in A_\infty, w \in A_1$. Положим $u = \frac{a}{w}$ и определим проектор R формулой: $Rf = u^{-1}\mathbb{P}(uf)$. Тогда оператор R ограничен на $L^p(a)$ для всех чисел p, $1 < p \le r(w,a)$, где $r(w,a)$ — число из предыдущей леммы, и справедливо равенство:*

$$\|R\|_{L^p(a)\to L^p(a)} = O\left(\frac{1}{p-1}\right), \;\; p \to 1.$$

Более того, проектор R обладает слабым типом $(1,1)$ по отношению к весу a:

$$\int\limits_{\{|Rf|>\lambda\}} a\,dm \le \frac{C}{\lambda}\int |f|a\,dm.$$

2.3 Вспомогательные интерполяционные утверждения

В этой диссертации мы рассматриваем лишь так называемый вещественный интерполяционный метод. Мы докажем результаты о K-замкнутости для модельных пространств. Хорошо известно, что это ведёт и к вычислению интерполяционных пространств (это вычисление и будет проделано в разделе 2.11 для пространств K^p_θ). Остановимся на этих моментах поподробнее. Нам потребуется одно вспомогательное определение.

Определение 2.8. *Пусть (X_0, X_1) — совместимая пара квазибанаховых пространств. Для $t > 0$ и $x \in X_0 + X_1$ определим K-функционал формулой*

$$K(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i, i = 0,1\}.$$

Это понятие тесно связано с уже определённым понятием K-замкнутости (см. определение 1.2). Хорошо известно и легко проверяется, что K-замкнутость пары пространств (F_0, F_1) в паре (X_0, X_1) эквивалентна следующему утверждению: найдётся такая постоянная C, что для всех $f \in F_0 + F_1$ и $t > 0$ выполняется оценка

$$K(t, f; F_0, F_1) \le CK(t, f; X_0, X_1).$$

Поскольку всегда выполнено неравенство

$$K(t, f; X_0, X_1) \leq CK(t, f; F_0, F_1),$$

последнее неравенство говорит в действительности об эквивалентности двух функционалов на подпаре.

Определение 2.9. *Пусть r и q — параметры, $r \in (0, 1)$, а $q \in (0; \infty]$. Обозначим через $(X_0, X_1)_{r,q}$ вещественное интерполяционное пространство, которое определим так: $x \in (X_0, X_1)_{r,q}$ тогда и только тогда, когда*

$$\|x\|_{r,q} = \left(\int \left(t^{-r} K(t, x; X_0, X_1) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty.$$

Ясно, что для K-замкнутых пар можно легко вычислить вещественные интерполяционные пространства по формуле

$$(F_0, F_1)_{\alpha,r} = (F_0 + F_1) \cap (X_0, X_1)_{\alpha,r}.$$

Таким образом, информация о K-замкнутости подпары подпространств помогает распространить на них интерполяционные утверждения, если такие утверждения известны для исходной пары пространств.

Пространства $L^p(m)$ — это классический пример пространств, для которых интерполяционные пространства вычислены.

Теорема 2.10. *Пусть параметры p_0, p_1, q, r удовлетворяют соотношениям: $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, $p_0 < r \leq \infty$ и $\frac{1}{p} = \frac{1-r}{p_0} + \frac{r}{p_1}$. Тогда справедливо следующее равенство:*

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{r,q} = L^{p,q},$$

где через $L^{p,q}$ обозначено пространство Лоренца. В частности,

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{r,p} = L^p.$$

В свою очередь, для пространств Лоренца вещественные интерполяционные пространства тоже известны.

Теорема 2.11. *Пусть p_0, q_0, p_1, q_1 — положительные (возможно, бесконечные) числа, параметр r принадлежит интервалу $(0,1)$, и пусть $\frac{1}{p} = \frac{1-r}{p_0} + \frac{r}{p_1}$. Тогда для $p_0 \neq p_1$ справедливо равенство*

$$(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1})_{r,q} = L^{p,q}.$$

Более подробно об основных определениях и классических результатах в вещественной интерполяции см. [9]. В той же книге изложены и некоторые интерполяционные теоремы для весовых пространств Лебега и Лоренца.

Таким образом, один из методов получить подобные равенства для различных подпространств в L^p (или в большей общности в пространствах Лоренца) состоит в проверке соответствующей K–замкнутости. Отметим, что именно так в конце концов завершилось длительное изучение вопроса о вещественной интерполяции пространств Харди на единичной окружности. K-замкнутость пары пространств $(H^{p_0}(\mathbb{T}), H^{p_1}(\mathbb{T}))$ в паре $(L^{p_0}(\mathbb{T}), L^{p_1}(\mathbb{T}))$ при всех значениях показателей была установлена Ж.Пизье в [30]. За более подробной информацией читателю следует обратиться к обзору [25].

Иногда удобно перейти от доказательства K-замкнутости пары подпространств к доказательству K-замкнутости пары их аннуляторов. Мы будем использовать следующее утверждение из работы [30], которое более подробно изложено в обзоре [25].

Теорема 2.12. *Пусть (X_0, X_1) пара банаховых пространств, причем $X_0 \cap X_1$ плотно как в X_0 так и в X_1. Пусть Y_i — замкнутые подпространства в соответствующем X_i. Тогда пара (Y_0, Y_1) K-замкнута в (X_0, X_1) в том и только в том случае, если пара $(Y_0^{\perp}, Y_1^{\perp})$ K-замкнута в паре сопряжённых пространств (X_0^*, X_1^*).*

В этой диссертации нам также понадобится теорема Вольфа (см. [40]).

Теорема 2.13. *Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 совместимые банаховы пространства, удовлетворяющие условию $X_1 \cap X_4 \subset X_2 \cap X_3$. Пусть $0 < \alpha, \beta < 1$, $1 < p, q \leq \infty$. Если $X_2 = (X_1, X_3)_{\alpha,p}$ и $X_3 = (X_2, X_4)_{\beta,q}$, то $X_2 = (X_1, X_4)_{\varphi,p}$ и $X_3 = (X_1, X_4)_{\psi,q}$, где $\varphi = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha+\alpha\beta}$, а $\psi = \frac{\beta}{1-\alpha+\alpha\beta}$.*

Грубо говоря, эта теорема помогает склеить два пересекающихся интервала на интерполяционной шкале. За соответствующими ссылками и некоторыми интересными модификациями читатель может обратиться к обзору [25].

2.4 Разложение Кальдерона–Зигмунда и его весовые модификации

В этом разделе мы более подробно поговорим об условии (I) из теоремы 1, то есть о разложении Кальдерона–Зигмунда. Приведём точную формулировку.

Разложение Кальдерона–Зигмунда. *Пусть (X, μ) пространство с конечной мерой. Мы будем говорить, что оператор P, действующий из пространства $L^1(\mu)$ а пространство μ-измеримых функций, допускает разложение Кальдерона–Зигмунда, если для любых $g \in L^1(X, \mu)$ и $\lambda > 0$ найдутся такие функции g_0 и g_1, а также множество E, обладающие следующими свойствами:*

$$\text{(CZ1)} \quad g_0 \in L^\infty(\mu), \quad |g_0| \le C\lambda;$$

$$\text{(CZ2)} \quad g_1 \in L^1(\mu), \quad \|g_1\|_{L^1} \le C\|g\|_{L^1(\mu)}, \quad \|g_0\|_{L^1} \le C\|g\|_{L^1(\mu)};$$

$$\text{(CZ3)} \quad \int\limits_{X \setminus E} |Pg_1| \, d\mu \le C\|g_1\|_{L^1};$$

$$\text{(CZ4)} \quad \mu(E) \le \frac{C}{\lambda}\|g\|_{L^1(\mu)}.$$

Хорошо известно, что такие разложения справедливы для сингулярных интегральных операторов, в частности, для проектора Рисса и преобразования Гильберта. Более подробно о разложении Кальдерона–Зигмунда см. к книги [36] или [21]. Это разложение — классический и хорошо известный результат гармонического анализа. Для полноты, наметим стандартную схему доказательства и подчеркнём важные для нас детали.

В любом варианте этой процедуры используются средние по каким-то "каноническим" множествам (вроде кубов в $\mathbb{R}^n$) и наличие у оператора P "сингулярного" ядра специального вида. Мы опишем её в случае пространства $\mathbb{R}^n$; в случае окружности средние вычисляются по дугам вместо кубов. Итак, пусть $X = \mathbb{R}^n$, а m — мера Лебега. Грубо говоря, задача состоит в том, чтобы разложить функцию на "хорошую" и "плохую". На первом шаге для суммируемой функции g и положительного числа λ нужно найти такое (автоматически не более, чем счётное) семейство диадических кубов $\{Q_j\}_{j\in I}$, что выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \operatorname{int} Q_j \cap \operatorname{int} Q_i = \emptyset,\ i \neq j\\
&(2) \quad \lambda \leq \frac{1}{m(Q_i)} \int\limits_{Q_i} |g(s)| ds < 2^n \lambda,\ \forall i \in I\\
&(3) \quad \|g\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \cup Q_j}\|_{L^\infty(m)} \leq \lambda.
\end{aligned}$$

В качестве таких кубов можно взять максимальные по включению кубы в подмножестве диадических кубов $\{Q : \frac{1}{m(Q_i)} \int\limits_{Q_i} |g(s)| ds \geq \lambda\}$. Неравенство (3) будет следовать из теоремы Лебега. На втором шаге мы определим “хорошую” функцию g_0 и “плохую” функцию g_1 формулами:

$$g_0 = \sum_{j\in I} \left(\frac{1}{m(Q_j)} \int\limits_{Q_j} g(s) ds \right) \chi_{Q_j} + g\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \cap Q_j}$$

$$g_1 = g - g_0 = \sum_{j\in I} \left(g - \frac{1}{m(Q_j)} \int\limits_{Q_j} g(s) ds \right) \chi_{Q_j} =: \sum_{j\in I} b_j.$$

Легко видеть, что функция g_1 представляется в виде суммы функций b_i с нулевым средним по кубу Q_j. Именно это обстоятельство очень помогает при написании оценок вида $(CZ3)$. Действительно, для того, чтобы было справедливо разложение Кальдерона–Зигмунда, среди прочих свойств (сингулярный интегральный) оператор P должен обладать ядром k, удовлетворяющим следующему условию:

$$\int\limits_{|x|\geq 2y} |k(x-y) - k(x)| dx \leq C, |y| > 0.$$

Это соотношение в литературе обычно называется условием Хёрмандера. Для куба Q_j обозначим через $c(Q_j)$ его центр, а через Q_j^* — куб с тем же центром $c(Q_j)$, растянутый в $2n^{1/2}$ раз. Отметим, что, если $x \notin Q_j^*$, то выполняется неравенство

$$|x - c(Q_j)| \geq 2|y - c(Q_j)| \text{ для всех } y \in Q_j. \tag{2.1}$$

Справедиво равенство

$$Pb_j(x) = \int\limits_{Q_j} k(x-y)b_j(y) - k(x-c(Q_j))b_j(y)dy,$$

поскольку среднее по кубу Q_j у функции b_j равно нулю. Положим $E = \cup Q_j^*$. В процессе доказательства оценки $(CZ3)$ интегрирование по множеству $X \setminus E$ можно оценить так:

$$\int\limits_{X\setminus E} |Pb(x)|dx \leq \sum_j \int\limits_{x\notin Q_j^*} \int\limits_{Q_j} |k(x-y) - k(x-c(Q_j))||b(y)|dydx.$$

Поменяв порядок интегрирования и принимая во внимание соотношение (2.1), мы получаем возможность применить условие Хёрмандера.

Мы привели эти рассуждения с целью показать, что разложение Кальдерона–Зигмунда вряд ли возможно обобщить на произвольные пространства с мерой, то есть условие (I) в теореме 1 достаточно серьёзное ограничение. Следует отметить, что условие (II) в теореме 1 не связано ни с кубами, ни с ядром k оператора (его может не быть вовсе), что позволяет получить интерполяционные теоремы для пространств, в которых нет аналогов разложения Кальдерона–Зигмунда.

Однако заметим, что разложение Кальдерона–Зигмунда оказалось очень удобным инструментом в теории интерполяции подпространств граничных значений аналитических функций пространства L^p. Например, с его помощью можно для конечного $p > 1$ доказать K-замкнутость пары пространств Харди $(H^1(\mathbb{T}), H^p(\mathbb{T}))$ в паре $(L^1(\mathbb{T}), L^p(\mathbb{T}))$ (см. [25], теорему 2.1).

В статье [1] был построен некий аналог разложения Кальдерона–Зигмунда в случае весовых пространств и сингулярных интегральных операторов. В основе доказательства снова лежит аккуратный анализ средних функции по кубам и ссылка на свойство ядра оператора, что снова накладывает упомянутые выше ограничения на оператор и пространство. В этой диссертации мы применим это разложения в процессе доказательства интерполяционных теорем для весовых пространств, коинвариантных относительно сдвига, и в качестве сингулярного интегрального оператора мы возьмём проектор Рисса $\mathbb{P}$. Приведём удобную для нас формулировку.

Весовое разложение Кальдерона–Зигмунда. *Пусть $w \in A_1$, $a \in A_\infty, u = \frac{a}{w}$, а функция G лежит в пространстве $L^1(w)$. Тогда для всякого наперёд заданного числа $\lambda > 0$ можно найти такое разложение $G = G_0 + G_1$, что справедливы следующие утверждения:*

$$\begin{aligned}
&\text{(CZW1)} \quad |G_0| \le C\lambda u,\\
&\text{(CZW2)} \quad \|G_0\|_{L^1(w)} \le C\|G\|_{L^1(w)}, \ \|G_1\|_{L^1(w)} \le C\|G\|_{L^1(w)},\\
&\text{(CZW3)} \quad \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\Omega} u^{-1}|\mathbb{P}G_1|a\,dm = \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\Omega} |\mathbb{P}G_1|w\,dm \le C\|G_1\|_{L^1(w)},\\
&\text{(CZW4)} \quad \int\limits_{\Omega} a\,dm \le \frac{C}{\lambda}\int |G|w\,dm.
\end{aligned}$$

2.5 Об условии (α_p)

Прежде, чем перейти к описанию другого метода доказательства интерполяционных теорем, в основе которого лежат срезающие функции, принадлежащие w^*-замкнутым подалгебрам в $L^\infty(\mu)$, необходимо обсудить аксиому (α_p).

Напомним, что (X, μ) — пространство с конечной мерой. Пусть $\mathcal{E}$ — w^*-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(\mu)$, содержащая константы, и пусть p — конечное число, строго большее единицы. В дальнейшем мы будем рассматривать алгебры, удовлетворяющие следующему требованию.

Условие (α_p). Для всякой положительной функции u, принадлежащей пространству $L^p(X, \mu)$, найдётся такая последовательность функций $\{w_n\}_0^\infty$, принадлежащих алгебре $\mathcal{E}$ и таких, что

(i) $\operatorname{Re} w_n \ge 0$,

(ii) $\operatorname{Re} w_n$ слабо сходятся к u в $L^p(\mu)$,

(iii) $\|w_n\|_{L^p} \le C\|u\|_{L^p}$,

с постоянной C, которая может зависеть только от параметра p.

Замечание. Отметим, что, переходя к подпоследовательности, можно считать, что функции w_n (а не только их вещественные части) слабо сходятся к $L^p(\mu)$, а, следовательно, некоторые их выпуклые комбинации сходятся сильно в $L^p(\mu)$. После ещё одного перехода к подпоследовательности мы можем полагать, что имеет место сходимость почти всюду. Ясно, что у получившейся в результате этого процесса последовательности функций вещественные части всё ещё положительны и сильно сходятся (а также сходятся почти всюду) к функции u. Следовательно, условие (α_p) можно усилить таким образом без дополнительных потерь в общности.

Детально мы обсудим примеры в соответствующем разделе этой главы, однако здесь мы отметим, что легко проверить это условие для случая $\mathcal{E} = H^\infty(\mathbb{T})$: достаточно положить

$$w_n = u * K_n + iH(u * K_n), \tag{2.2}$$

где через K_n мы обозначили ядра Фейера, а через H — оператор гармонического сопряжения.

2.6 О срезающих функциях в w^*-замкнутых подалгебрах

Перейдём, наконец, к обещанной конструкции срезающих функций, принадлежащих w^*-замкнутым подалгебрам алгебры $L^\infty(\mu)$, удовлетворяющих условию (α_p). Подчеркнём, что такие функции задаются "почти" явно.

В качестве иллюстрации, приведём прямое доказательство известного утверждения о K-замкнутости пространств Харди. В процессе доказательства мы построим аналитическую срезающую функцию Φ.

Теорема 2.14. *Пара $(H^1(\mathbb{T}), H^2(\mathbb{T}))$ K–замкнута в $(L^1(\mathbb{T}), L^2(\mathbb{T}))$.*

(См. [25] и имеющиеся там ссылки по поводу значительно более общих фактов.)

Доказательство. Пусть для функции f, принадлежащей пространству $H^1(\mathbb{T})+H^2(\mathbb{T})$, дано разложение

$$f = g + h, \quad g \in L^1, \quad h \in L^2.$$

Определим срезающие функции формулами:

$$\alpha = \max\left\{1, |g|^{1/2}\frac{\|g\|_{L^1}^{1/2}}{\|h\|_{L^2}}\right\}, \quad \Phi = \frac{1}{\alpha + iH\alpha}.$$

Здесь через H обозначен оператор гармонического сопряжения. Отметим, что для срезающей аналитической функции Φ выполняется оценка

$$|\Phi| \leq \frac{1}{\alpha} \leq 1.$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$|1-\Phi| = \left|1 - \frac{1}{\alpha + iH\alpha}\right| \leq \left|\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right| + \left|\frac{H(\alpha-1)}{\alpha}\right|,$$

и на множестве, где $\alpha = 1$, которое в дальнейшем обозначаем через E, получаем $|1-\Phi| \leq |H(\alpha - 1)|$.

Теперь можно указать искомое разложение:

$$f = \Phi f + (1-\Phi)f.$$

Оценим величину $\|\Phi f\|_{L^2}$, применяя оценки $|\Phi| \leq 1$ и $|\Phi| \leq \frac{1}{\alpha} \leq \frac{\|h\|_{L^2}}{|g|^{1/2}\|g\|_{L^1}^{1/2}}$:

$$\left(\int |\Phi|^2 |g+h|^2\right)^{1/2} \leq \|h\|_{L^2} + \left(\int |\Phi|^2|g|^2\right)^{1/2} \leq \|h\|_{L^2} + \left(\int \left|\frac{\|h\|_{L^2}}{|g|^{1/2}\|g\|_{L^1}^{1/2}}\right|^2 |g|^2\right)^{1/2} = 2\|h\|_{L^2}.$$

Нам осталось показать, что

$$\|(1-\Phi)f\|_{L^1} \leq C\|g\|_{L^1}.$$

У нас была оценка

$$|1-\Phi| \leq \left|\frac{\alpha-1}{\alpha}\right| + \left|\frac{H(\alpha-1)}{\alpha}\right|,$$

которую можно продолжить, используя, что $\alpha \geq 1$:

$$|1-\Phi| \leq (\alpha - 1) + |H(\alpha-1)|.$$

Оценим теперь величину

$$\int |1-\Phi||g+h| \le 2\|g\|_{L^1} + \int |1-\Phi||h| \le 2\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^2}\|1-\Phi\|_{L^2}.$$

Для оценки нормы $\|1-\Phi\|_{L^2}$ разобьем интегрирование по всей окружности на интегрирование по двум множествам E и E^c. На множестве E справедлива оценка $|1-\Phi| \le |H(\alpha-1)|$, поэтому

$$\int\limits_E |1-\Phi|^2 \le \int\limits_E |H(\alpha-1)|^2 \le \int |\alpha-1|^2 \le 2\int\limits_{E^c} |g|\frac{\|g\|_{L^1}}{\|h\|_{L^2}^2} \le 2\frac{\|g\|_{L^1}^2}{\|h\|_{L^2}^2}.$$

На дополнении к множеству E процедура похожая, но есть некоторые изменения: используем оценку $|1-\Phi| \le (\alpha-1) + |H(\alpha-1)|$ и соотношение $\alpha = |g|^{1/2}\frac{\|g\|_{L^1}^{1/2}}{\|h\|_{L^2}} > 1$, которое выполняется на E^c, получаем

$$\int\limits_{E^c} |1-\Phi|^2 \le \int\limits_{E^c} |\alpha-1|^2 + \int\limits_{E^c} |H(\alpha-1)|^2 \le$$

$$\int\limits_{E^c} |2g|\frac{\|g\|_{L^1}}{\|h\|_{L^2}^2}| + \int |\alpha-1|^2 \le 2\frac{\|g\|_{L^1}^2}{\|h\|_{L^2}^2} + 2\int_E |g|\frac{\|g\|_{L^1}}{\|h\|_{L^2}^2} \le 4\frac{\|g\|_{L^1}^2}{\|h\|_{L^2}^2}.$$

Собирая оценки вместе, приходим сначала к неравенству

$$\|1-\Phi\|_{L^2} \le \sqrt{6}\frac{\|g\|_{L^1}}{\|h\|_{L^2}},$$

а потом завершаем оценку второго слагаемого

$$\|(1-\Phi)f\|_{L^1} \le 2\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^2}\|1-\Phi\|_{L^2} \le C\|g\|_{L^1}.$$

□

Теперь мы докажем ключевую лемму о свойствах срезающих функций в более общей ситуации.

Лемма 2.15. *Пусть, как и в предыдущем разделе, $\mathcal{E}$ — w^*-замкнутая подалгебра в $L^\infty(\mu)$, содержащая константы и удовлетворяющая условию (α_p), γ — фиксированное натуральное число, $\gamma \ge 2$. Для любой функции φ из пространства $L^p(\mu)$,* *такой что $\varphi \geq 1$, найдётся функция Φ, принадлежащая алгебре $\mathcal{E}$ и обладающая следующими свойствами:*

$$\begin{aligned} &\text{(O1)} \quad \|1-\Phi\|_{L^p} \leq C_{p,\gamma}\|1-\varphi\|_{L^p}, \\ &\text{(O2)} \quad |\Phi| \leq \frac{1}{|\varphi|^\gamma}. \end{aligned}$$

Доказательство. Положим $u = \varphi - 1$. Тогда $u \geq 0$ и, применяя свойство (α_p) и замечание, которое мы сделали сразу же после него, мы получаем, что существует набор функций w_n, лежащих в алгебре $\mathcal{E}$, с неотрицательными вещественными частями и сходящихся в $L^p(\mu)$ и п.в. к некоторой функции v, такой что $\operatorname{Re} v = u$. Более того, справедлива оценка $\|w_n\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$ с постоянной C, не зависящей от функции u.

Отметим, что функции $1 + w_n$ обратимы в $\mathcal{E}$. Действительно, всякий ненулевой мультипликативный линейный функционал на $\mathcal{E}$ допускает представление через вероятностную меру на пространстве максимальных идеалов алгебры $L^\infty(\mu)$, откуда следует, что спектр элемента $1 + w_n$ лежит в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z \geq 1\}$, а, следовательно, не содержит точку 0. Ясно, что $\|(1+w_n)^{-1}\|_{\mathcal{E}} = \|(1+w_n)^{-1}\|_{L^\infty(\mu)} \leq 1$.

Таким образом, можно заключить, что функция Φ_n, определённая формулой

$$\Phi_n = \frac{1}{(1+w_n)^\gamma},$$

принадлежит алгебре $\mathcal{E}$, а величина её нормы (в алгебре $\mathcal{E}$ или в пространстве $L^\infty(\mu)$) не превосходит 1. Заметим, что также справедливо неравенство

$$|1-\Phi_n| \leq C_\gamma \left|1 - \frac{1}{1+w_n}\right| \leq C_\gamma \left|w_n\right|,$$

из которого можно заключить, что

$$\|1-\Phi_n\|_{L^p} \leq C_{p,\gamma}\|1-\varphi\|_{L^p}. \tag{2.3}$$

Кроме того, ясно, что выполняется поточечная оценка

$$|\Phi_n| \leq \frac{1}{|1+\operatorname{Re} w_n|^\gamma}. \tag{2.4}$$

С помощью выбора функций w_n мы получаем, что функции Φ_n сходятся почти всюду к некоторой функции Φ, принадлежащей единичному шару пространства $\mathcal{E}$, поскольку сходимость справедлива и в w^*-топологии пространства $L^\infty(\mu)$ (а также и в $L^p(\mu)$).

Так как $\operatorname{Re} w_n \to u$ почти всюду, предельный переход в неравенстве (2.4) влечёт оценку (O2). В свою очередь, неравенство (O1) следует из предельного перехода в соотношении (2.3). □

2.7 Разложения с помощью срезающих функций из w^*-замкнутых алгебр

Следующая лемма служит заменой разложению Кальдерона–Зигмунда в процессе доказательства теоремы 1 при условии (II).

Предварительно напомним некоторые определения и зафиксируем некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{E}$ — w^*-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(\mu)$, содержащая константы и удовлетворяющая условию (α_p), $\mathcal{F}$ — модуль над алгеброй $\mathcal{E}$, а $p \in (1, +\infty)$. Обозначим через q показатель, сопряжённый с p. Напомним, что $\mathcal{F}^\perp$ и $\mathcal{F}^{\perp,q}$ были определены во введении. Определим $\mathcal{Q}$ как замыкание $\mathcal{F}^\perp$ в пространств Лоренца $L^{1,\infty}(\mu)$. Ясно, что $\mathcal{F}^\perp$, $\mathcal{F}^{\perp,q}$ и $\mathcal{Q}$ образуют модули над $\overline{\mathcal{E}}$.

Лемма 2.16. *Пусть функция f принадлежит пространству $\mathcal{Q}$, а λ — положительное число. Тогда найдутся такие $a \in \mathcal{F}^{\perp,q}$, $b \in \mathcal{Q}$ и множество E, что $f = a+b$, и выполняются оценки*

$$\|a\|_{\mathcal{F}^{\perp,q}} \le C\lambda^{1/p}\|f\|_{\mathcal{Q}}^{1/q}, \tag{2.5}$$

$$\int_{X\setminus E} |b| d\mu \le C\|f\|_{\mathcal{Q}}, \tag{2.6}$$

$$\mu(E) \le C\lambda^{-1}\|f\|_{\mathcal{Q}}, \tag{2.7}$$

$$\mu\{|b| > t\} \le Ct^{-1}\|f\|_{\mathcal{Q}}, \quad t > 0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Мы применим “аналитическую” срезающую функцию, построенную в предыдущей лемме, но прежде удобно “грубо” разложить функцию на две части с помощью обычной срезки следующим образом: $f = \alpha + \beta$, при этом

$$\alpha = \min\{\lambda, |f|\} \operatorname{sgn} f, \quad \beta = f - \alpha, \quad \text{где } \operatorname{sgn} f = \frac{f}{|f|}, \ \ 0/0 = 0.$$

Ясно, что функция β сосредоточена на множестве $e = \{|f| > \lambda\}$ и

$$\mu(e) \leq \frac{\|f\|_{L^{1,\infty}}}{\lambda}.$$

Легко видеть, что $\|\alpha\|_{L^{1,\infty}}$, $\|\beta\|_{L^{1,\infty}} \leq \|f\|_{L^{1,\infty}}$. Кроме того, справедлива оценка $\|\alpha\|_{L^q} \leq C\lambda^{1/p}\|f\|_{L^{1,\infty}}^{1/q}$. Действительно, рассмотрим для функции α функцию распределения $\sigma(t) = \mu\{x : |\alpha(x)| > t\}$. Заметим, что $\sigma(t) = 0$ при $t > \lambda$ и $\sigma(t) \leq \frac{\|f\|_{L^{1,\infty}}}{t}$. Теперь легко завершить объявленную оценку:

$$\|\alpha\|_{L^q}^q = q \int\limits_0^\infty t^{q-1}\sigma(t)dt \leq C\|f\|_{L^{1,\infty}} \int\limits_0^\lambda t^{q-2}dt \leq C\lambda^{q-1}\|f\|_{L^{1,\infty}}.$$

Отметим, что для этих вычислений достаточно только предположения, что $f \in L^{1,\infty}(\mu)$.

Теперь предположим, что нам дана функция f, принадлежащая пространству $\mathcal{Q}$, и мы хотим разложить её как заявлено в лемме 2.16. Если сравнивать наш случай с классическим для пространств Харди, то следует отметить, что мы сталкиваемся с небольшой технической трудностью: возможно, в нашей ситуации отсутствует аналог граничного принципа максимума. Более точно: если функция из пространства $\mathcal{Q}$ окажется суммируемой, то априори неясно, принадлежит эта функция пространству $\mathcal{F}^\perp$ или нет. Чтобы преодолеть эту трудность, мы сначала предположим, что $f \in \mathcal{F}^\perp$ (при этом, разумеется, никак не контролируется норма в этом пространстве; в наших рассуждениях мы будем использовать только величину $\|f\|_{\mathcal{Q}}$). Если лемма доказана для таких функций f, то и общий случай получается легко. Действительно, мы можем представить любую функцию f из пространства $\mathcal{Q}$ в виде: $f = \sum\limits_{j\geq 1} f_j$, где $f_j \in \mathcal{F}^\perp$ для всех индексов j, и справедлива оценка $\|f_j\|_{\mathcal{Q}} \leq 4^{-j}\|f\|_{\mathcal{Q}}$. Тогда каждое слагаемое f_j можно представить в соответствии с утверждением леммы в виде суммы функций a_j и b_j, при этом в качестве соответствующего числа λ для каждого f_j следует брать величину $2^{-j}\lambda$. Возникающие в процессе и в условиях

(2.6),(2.8) множества обозначим через E_j. Положим $a = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$, $b = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$, $E = \cup E_j$. Для функций a_j и b_j, а также множеств E_j справедливы соотношения (2.5)-(2.8) с $\lambda_j = 2^{-j}\lambda$, из которых легко получить следующие оценки:

$$\|a\|_{\mathcal{F}^{\perp,q}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|_{\mathcal{F}^{\perp,q}} \leq C\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{1/p}\|f\|_{\mathcal{Q}}^{1/q} 2^{-j(1/p+2/q)} \leq C\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{1/p}\|f\|_{\mathcal{Q}}^{1/q}$$

$$\int_{X\setminus E} |b|d\mu \leq \sum_{j=1}^{\infty}\int_{X\setminus E_j} |b_j|d\mu \leq C\|f\|_{\mathcal{Q}}$$

$$\mu(E) \leq C\frac{\|f\|_{Q}}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \frac{\|f\|_{\mathcal{Q}}}{\lambda},$$

$$\mu\{|b| > t\} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left\{|b_j| > \frac{t}{2^j}\right\} \leq \frac{C}{t}\sum_{j=1}^{\infty} 2^j\|f_j\|_{\mathcal{Q}} \leq \frac{C}{t}\|f\|_{\mathcal{Q}},$$

соответствующие неравенствам (2.5)-(2.8). Отметим также, что в последующем изложении нам понадобится только случай, когда $f \in \mathcal{F}^{\perp}$ (и даже $f \in \mathcal{F}^{\perp,q}$).

Итак, не умаляя общности, можно считать, что $f \in \mathcal{F}^{\perp}$. Применим к функции f описанное выше “грубое” разложение: $f = \alpha + \beta$, с соответствующими свойствами. Мы хотим применить лемму 2.15 к функции

$$\varphi = \max\left\{1, \left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^{1/\gamma}\right\},$$

где γ — натуральное число, строго большое, чем p. Начнём с того, что покажем оценку

$$\|\varphi - 1\|_{L^p} \leq C\|f\|_{1,\infty}^{1/p}\lambda^{-1/p}. \tag{2.9}$$

Действительно, левая часть неравенства не превосходит величины

$$\left(\int\limits_{|f|>\lambda} \frac{|f|^{p/\gamma}}{\lambda^{p/\gamma}}\right)^{1/p} = \frac{C}{\lambda^{1/\gamma}}\left(\int\limits_{X} |f\chi_{\{|f|^{1/\gamma}>\lambda^{1/\gamma}\}}|^{p/\gamma}\right)^{1/p}, \tag{2.10}$$

где через χ_c мы обозначили характеристическую функцию множества c. Определив

σ как функцию распределения функции $f\chi_{\{|f|^{1/\gamma}>\lambda^{1/\gamma}\}}$, мы получаем соотношение

$$\sigma(t) = \begin{cases} \mu\{|f|^{1/\gamma} > \lambda^{1/\gamma}\}, & t \in [0, \lambda^{1/\gamma}); \\ \mu\{|f|^{1/\gamma} > t\}, & t \in [\lambda^{1/\gamma}, \infty). \end{cases}$$

Переписывая правую часть равенства (2.10) в терминах функции распределения, мы можем завершить оценку

$$\frac{C}{\lambda^{1/\gamma}}\left(\left(\int\limits_{\lambda^{1/\gamma}}^{\infty} t^{p-1}\ \mu\{x : |f(x)|^{1/\gamma} > t\}\, dt\right)^{1/p} + \left(\int\limits_{0}^{\lambda^{1/\gamma}} t^{p-1}\ \mu\{x : |f(x)|^{1/\gamma} > \lambda^{1/\gamma}\}\, dt\right)^{1/p}\right)$$
$$\leq \frac{C}{\lambda^{1/\gamma}}\left(\left(\|f\|_{L^{1,\infty}} \int\limits_{\lambda^{1/\gamma}}^{\infty} t^{p-1-\gamma}\, dt\right)^{1/p} + \left(\frac{\|f\|_{L^{1,\infty}}}{\lambda} \int\limits_{0}^{\lambda^{1/\gamma}} t^{p-1}\, dt\right)^{1/p}\right)$$
$$\leq \frac{C\|f\|_{1,\infty}^{1/p}}{\lambda^{1/\gamma}}\left(\lambda^{(p-\gamma)/(p\gamma)} + \lambda^{(p/\gamma-1)/p}\right) = C\|f\|_{1,\infty}^{1/p}\lambda^{-1/p}.$$

В процессе доказательства мы использовали неравенство $p - 1 - \gamma < -1$, что в точности соответствует нашему выбору числа γ.

Теперь мы можем применить лемму 2.15 к функции φ *и алгебре* $\overline{\mathcal{E}}$: найдётся такая функция Φ из алгебры $\overline{\mathcal{E}}$, что

$$|\Phi| \leq \min\left\{1, \left|\frac{\lambda}{f}\right|\right\},$$
$$\|1 - \Phi\|_{L^p} \leq C\|\varphi - 1\|_{L^p} \leq C\|f\|_{1,\infty}^{1/p}\lambda^{-1/p}. \tag{2.11}$$

Мы покажем, что требуемое разложение для функции f имеет вид $f = \Phi f + (1-\Phi)f$.

Для доказательства оценок для функций $a = \Phi f$ и $b = (1 - \Phi)f$ нам потребуется описанное выше "грубое" разложение $f = \alpha + \beta$. Отметим, что в силу наших предположений ясно, что $a, b, \in \mathcal{F}^{\perp}$, поскольку $\mathcal{F}^{\perp}$ образует модуль над $\overline{\mathcal{E}}$. Поэтому для того, чтобы показать, что $a \in \mathcal{F}^{\perp,q}$, достаточно доказать оценку $\|a\|_{L^q(\mu)} \leq C\lambda^{1/p}\|f\|_{\mathcal{Q}}^{1/q}$ (см. (2.5)), так как $\mathcal{F}^{\perp,q} = \mathcal{F}^{\perp} \cap L^q(\mu)$ по определению. Напомним, что через e мы обозначили множество $\{|f| > \lambda\}$, на котором сосредоточена функция β. Опираясь на свойство функции Φ, мы можем написать цепочку неравенств:

$$\|a\|_{L^q} \le \|\Phi\alpha\|_{L^q} + \|\Phi\beta\|_{L^q} \le \|\alpha\|_{L^q} + \left(\int\limits_e \frac{\lambda^q}{|f|^q}|f|^q d\mu \right)^{1/q}$$
$$\le C\lambda^{1/p}\|f\|_{\mathcal{Q}}^{1/q} + \lambda\mu(e)^{1/q} \le C\lambda^{1/p}\|f\|_{\mathcal{Q}}^{1/q},$$

и соотношение (2.5) доказано.

Положим $E = e = \{|f| > \lambda\}$. Тогда неравенства (2.7) и (2.8) очевидны. Для того, чтобы доказать неравенство (2.6), мы воспользуемся полученной выше оценкой на величину $\|\alpha\|_{L^q}$ и соотношением (2.11):

$$\int\limits_{X\setminus E} |b| \le \int\limits_{X\setminus E} |1-\Phi||\alpha| \le \|\alpha\|_{L^q}\|1-\Phi\|_{L^p} \le C\|f\|_{\mathcal{Q}}.$$

□

Например, для классов Харди на окружности только что доказанная теорема может быть сформулирована следующим образом.

Следствие 2.17. *Пусть функция f принадлежит пространству $H^{1,\infty}(\mathbb{T})$, а λ — положительное число. Тогда найдутся такие $a \in H^q(\mathbb{T})$, $b \in H^{1,\infty}(\mathbb{T})$, и множество E, что $f = a + b$ и выполняются оценки*

$$\|a\|_{H^q} \le C\lambda^{1/p}\|f\|_{H^{1,\infty}}^{1/q}, \tag{2.12}$$

$$\int_{\mathbb{T}\setminus E} |b| d\mu \le C\|f\|_{H^{1,\infty}}, \tag{2.13}$$

$$\mu(E) \le C\lambda^{-1}\|f\|_{H^{1,\infty}}, \tag{2.14}$$

$$\mu\{|b| > t\} \le Ct^{-1}\|f\|_{H^{1,\infty}}, \quad t > 0. \tag{2.15}$$

2.8 Основная лемма о разложении

В этом разделе мы объединим разложение Кальдерона–Зигмунда и разложение, полученное с помощью срезающих функций, в одно. Это позволит нам провести доказательство теоремы 1 лаконично и единообразно для двух различных ситуаций. Напомним некоторые обозначения и условия этой теоремы.

Пусть (X,μ) — пространство с конечной мерой, C — подпространство в $L^\infty(X,\mu)$, B — w^*-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(X,\mu)$, удовлетворяющая условию (α_p). Пусть D — модуль над алгеброй B, который, в свою очередь, тоже вложен в пространство $L^\infty(X,\mu)$. Пусть ещё $p>1$, а q — сопряжённый с p показатель. Предположим ещё, что существует проектор P, отображающий пространство $L^q(\mu)$ на $C^\perp$ и обладающий слабым типом $(1,1)$, и при этом справедливо включение: $P(D^{\perp,q})\subset D^{\perp,q}$. Дополнительно выполняется одно из следующих условий.

I. Для проектора P справедливо разложение Кальдерона–Зигмунда (см. раздел 2.4).

II. Пространство C образует модуль над некоторой подалгеброй A алгебры $L^\infty(\mu)$. Кроме того, алгебра A тоже удовлетворяет условию (α_p).

Мы покажем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.18. *Пусть функция g принадлежит пространству $L^1(X,\mu)$, λ — положительное число и выполняется условие* (I) *или* (II) *в предыдущих обозначениях. Тогда найдутся такие $a\in C^{\perp,q}$, $b\in \operatorname{clos}_{L^{1,\infty}} C^\perp$ и множество E, что $Pg=a+b$ и выполняются оценки*

$$\|a\|_{C^{\perp,q}}\le C\lambda^{1/p}\|g\|_{L^1}^{1/q}, \tag{2.16}$$

$$\int_{X\setminus E}|b|d\mu\le C\|g\|_{L^1}, \tag{2.17}$$

$$\mu(E)\le C\lambda^{-1}\|g\|_{L^1}, \tag{2.18}$$

$$\mu\{|b|>t\}\le Ct^{-1}\|g\|_{L^1},\quad t>0. \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (II). Применим лемму 2.16 к функции Pg, положив $\mathcal{F}=C$, $\mathcal{Q}=\operatorname{clos}_{L^{1,\infty}} C^\perp$ (в качестве базовой алгебры $\mathcal{E}$ нужно взять алгебру A). Тогда оценки (2.16)-(2.19) следуют из неравенств (2.5)-(2.8) и соотношения $\|Pg\|_Q\le\|g\|_{L^1}$, которое соответствует слабому типу (1,1) оператора P.

Теперь предположим, что выполнено условие (I). Применим разложение Кальдерона–

Зигмунда к g, P и $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{CZ1}) \quad g_0 \in L^\infty(\mu), \quad |g_0| \le C\lambda;\\
&(\mathrm{CZ2}) \quad g_1 \in L^1(\mu), \quad \|g_1\|_{L^1} \le C\|g\|_{L^1(\mu)}, \quad \|g_0\|_{L^1} \le C\|g\|_{L^1(\mu)};\\
&(\mathrm{CZ3}) \quad \int\limits_{X\setminus E} |Pg_1|\, d\mu \le C\|g_1\|_{L^1};\\
&(\mathrm{CZ4}) \quad \mu(E) \le \frac{C}{\lambda}\|g\|_{L^1(\mu)}.
\end{aligned}$$

Положим $a = Pg_0$ и $b = Pg_1$. Легко видеть, что функции a и b образуют разложение функции Pg, а также выполнены соотношения (2.17) - (2.19). Для того, чтобы доказать неравенство (2.16), достаточно применить оценки $(CZ1)$ и $(CZ2)$:

$$\|a\|_{C^{\perp,q}} \le C\|g_0\|_{L^q} \le C\left(\int \lambda^{q-1}|g_0|\right)^{1/q} \le C\lambda^{1/p}\|g\|_{L^1}^{1/q}.$$

□

2.9 Примеры применения теоремы 1.

В этом разделе мы обсудим интерполяционные теоремы для различных пространств, которые следуют из теоремы 1, если выполнено условие (I) или (II).

2.9.1 Интерполяция пространств Харди на двумерном торе

Как обычно, пространство $H^p(\mathbb{T}^2)$ определяем как замыкание линейной оболочки мономов $z_1^k z_2^m$, где k и m — неотрицательные целые числа. При $p = \infty$ замыкание берётся в слабой топологии.

В этом подразделе мы покажем, что следующая теорема вытекает из теоремы 1.

Теорема 2.19. *Пусть $p > 1$. Тогда пара пространств $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$ K-замкнута в паре пространств $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$.*

Этот результат не является новым. Это теорема была доказана С.В. Кисляковым и К. Шу в работе [6]. Более того, в случае пространств Харди на двумерном торе известна и подобная теорема для другого конца интерполяционной шкалы: пара $((H^1(\mathbb{T}^2), H^p(\mathbb{T}^2)))$ K-замкнута в паре $((L^1(\mathbb{T}^2), L^p(\mathbb{T}^2)))$ (подробнее см. [41]).

В обозначениях теоремы 1 в качестве пространства с мерой (X, μ) мы рассмотрим двумерный тор $\mathbb{T}^2$, снабжённый нормированной мерой Лебега m_2. Алгебру A определим как подалгебру алгебры $L^\infty(\mathbb{T}^2, m_2)$, состоящую из функций, принадлежащих классу $H^\infty(\mathbb{T}, m)$ по первой переменной при почти всех фиксированных значениях второй переменной. Аналогично, алгебра B определяется как подалгебра в $L^\infty(\mathbb{T}^2, m_2)$, содержащая функции из класса $H^\infty(\mathbb{T}, m)$ по второй переменной при почти всех фиксированных значениях первой переменной. Далее мы положим $C = A$ и $D = B$.

Как уже отмечалось в разделе 2.5, алгебра H^∞ удовлетворяет условию (α_p). Необходимо проверить, что проектор P, действующий на пространство $C^{\perp,q}$, обладает слабым типом $(1,1)$, и при это выполнялось включение $P(D^{\perp,q}) \subset D^{\perp,q}$. В нашем случае пространство $C^{\perp,q}$ состоит из функций, которые по первой переменной принадлежат пространству $\overline{zH^q(\mathbb{T})}$, поэтому в качестве проектора P можно взять проектор $\mathbb{P}_{1,-} = I - \mathbb{P}_1$. Здесь через I обозначен тождественный оператор, а через $\mathbb{P}_1$ стандартный одномерный проектор Рисса, действующий по первой переменной. Легко видеть, что выбранный нами проектор удовлетворяет условиям теоремы 1: P непрерывно отображает $L^q(\mathbb{T}^2, m_2)$ на $C^{\perp,q}$, обладает слабым типом $(1,1)$, и остаётся лишь показать включение $P(D^{\perp,q}) \subset D^{\perp,q}$. В нашем случае пространство $D^{\perp,q}$ состоит из функций, принадлежащих классу $\overline{zH^q(\mathbb{T})}$ по второй переменной, поэтому указанное выше включение очевидно. В связи с дальнейшими примерами, отметим что $P(D^{\perp,q}) \neq \{0\}$.

Интересно, что для пространств Харди на двумерном торе выполняются условия (I) и (II) одновременно. Отметим, что в статье [6] авторы опирались в своих рассуждениях на разложение Кальдерона–Зигмунда. Подход, основанный только на применении срезающих функций, в этой задаче является новым и опубликован в совместной с С.В. Кисляковым работе [22]. Действительно, хорошо известно, что одномерный проектор Рисса $\mathbb{P}$ является оператором Кальдерона–Зигмунда, и для него справедливо соответствующее разложение из раздела 2.4. Для функции g из пространства $L^1(\mathbb{T}^2)$ при фиксированной второй переменной мы можем применить одномерное разложение Кальдерона–Зигмунда для P_1 — проектора Рисса по первой переменной:

$$g(\cdot,\xi) = g_0(\cdot,\xi) + g_1(\cdot,\xi),\ |g_0| \le C\lambda,$$

при этом выполняются соотношения

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |g_0(\cdot,\xi)| \le C \int\limits_{\mathbb{T}} |g(\cdot,\xi)|,\ \int\limits_{\mathbb{T}} |g_1(\cdot,\xi)| \le C \int\limits_{\mathbb{T}} |g(\cdot,\xi)|.$$

Кроме того найдётся такое множество Ω_ξ — подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$, что справедливы неравенства

$$m_1(\Omega_\xi) \le C\lambda^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}} |g(\cdot,\xi)|,\ \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\Omega_\xi} |P_1 g_1(\cdot,\xi)| \le \int\limits_{\mathbb{T}} |g_1(\cdot,\xi)|.$$

Проинтегрировав, все полученные оценки по переменной ξ, мы получаем что условие (I) выполняется. Как мы показали, достаточно проделать соответствующую конструкцию по одной переменной при фиксированной другой.

С другой стороны, то, что алгебра A обладает свойством (α_p), вновь ясно из замечания после формулировки свойства (α_p). Таким образом, и условие (II) выполняется.

2.9.2 Интерполяция пространств K^p_θ

В качестве пространства с мерой мы возьмём единичную окружность $\mathbb{T}$ и нормированную одномерную меру Лебега m. Пусть θ — внутренняя функция, то есть $|\theta| = 1$ п.в. и $\theta \in H^\infty(\mathbb{T})$. В обозначениях теоремы 1 положим

$$A = H^\infty(\mathbb{T}),\ B = \overline{H^\infty(\mathbb{T})},\ C = H^\infty(\mathbb{T}),\ D = \theta\overline{H^\infty(\mathbb{T})}.$$

Необходимо проверить, что эти алгебры и модули удовлетворяют требованиям теоремы 1. Из замечания после формулировки свойства (α_p) следует, что алгебра B обладает этим свойством. Сразу же отметим, что алгебра A тоже обладает свойством (α_p), поэтому условие (II) в формулировке теоремы 1 тоже выполняется. Легко видеть, что аннуляторы модулей имеют вид:

$$C^\perp = \bar{z}\overline{H^1(\mathbb{T})},\ D^\perp = \theta z H^1(\mathbb{T}).$$

В качестве проектора P вновь рассмотрим проектор $\mathbb{P}_- = I - \mathbb{P}$, который обладает нужными свойствами. Отметим, что в этот раз соотношение $P(D^{\perp,q}) \subset D_q^\perp$ выполнено “радикальным” образом: $P(D^{\perp,q}) = \{0\}$. Кроме того, для проектора P, как и в предыдущем пункте, выполняется разложение Кальдерона–Зигмунда, то есть условие (I) справедливо и в этом случае. Таким образом, мы показали, что справедлива теорема 2, короткую формулировку которой для удобства читателя повторим ниже.

Теорема 2. *Пусть $p \in (1, +\infty)$. Тогда пара пространств $(K^p_\theta, K^\infty_\theta)$ K-замкнута в паре пространств $(L^p(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$.*

Это теорема новая и опубликована в работе [KZ] с доказательством, в основе которого лежит то же рассуждение, что и в доказательстве теоремы 1 с условием (I). Мы продолжим изучать некоторые интерполяционные свойства пространств, коинвариантных относительно действия оператора сдвига, в разделах 2.11 и 2.12.

2.9.3 Интерполяция модулей над w^*-алгебрами Дирихле

Прежде чем привести другие важные примеры применения теоремы 1, мы напомним некоторые классические определения.

Определение 2.20. *Подалгебру $\mathcal{F}$ алгебры $L^\infty(\mu)$, замкнутую в w^*-топологии, будем называть w^*-алгеброй Дирихле, если она содержит константы и обладает двумя следующими свойствами.*

(a) *Пространство $\mathrm{Re}\,\mathcal{F}$ плотно в пространстве $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mu)$ в w^*-топологии.*

(b) *Мера μ представляет некоторый линейный мультипликативный функционал на алгебре $\mathcal{F}$, то есть для всяких функций f и g, принадлежащих алгебре $\mathcal{F}$, справедливо равенство*

$$\int_X fg\,d\mu = \int_X f\,d\mu \int_X g\,d\mu.$$

Замечания.

1. Вообще говоря, довольно часто в литературе не предполагается замкнутость w^*-алгебр Дирихле в w^*-топологии пространства $L^\infty(\mu)$. Однако, в дальнейшем нам

будет удобно работать именно с такими алгебрами, поэтому мы добавили это требование в определение. (Иначе, можно считать, что все теоремы доказаны для w^*-замыканий.)

2. Из условия (b) следует, что мера μ — вероятностная.

3. Условие (a) можно заменить на эквивалентное ему свойство: пространство $\mathcal{F}+\overline{\mathcal{F}}$ плотно в пространстве $L^\infty(\mu)$ в w^*-топологии.

4. Более подробно о w^*-алгебрах Дирихле см. [12, 16, 19, 35].

5. Обозначим через $\mathcal{H}^p$ замыкание w^*-алгебры Дирихле $\mathcal{F}$ по норме пространства $L^p(\mu)$. Тогда ортогональный проектор пространства $L^2(\mu)$ на пространство $\mathcal{H}^2$, который мы в дальнейшем будем называть проектором Рисса (по аналогии с классическим проектором и классами Харди), будет ограничен как оператор в $L^p(\mu)$ при $p \in (1,\infty)$. Кроме того, он обладает слабым типом (1,1), см. [19]. Отметим, что для всякой квадратично суммируемой функции u найдётся единственная квадратично суммируемая функция v такая, что $\int_X v d\mu = 0$ и $u + iv \in \mathcal{H}^2$. Отображение $u \mapsto v$ будем называть *оператором гармонического сопряжения*. Этот оператор тесно связан с проектором Рисса (см. те же источники) и обладает такими же свойствами непрерывности.

Далее мы проверим, что для w^*-алгебр Дирихле (напомним, что мы всегда в дальнейшем молчаливо предполагаем, что выполнено условие замкнутости алгебры в w^*-топологии) выполняется условие (α_p). На самом деле, мы докажем даже более сильное утверждение.

Лемма 2.21. *Пусть $\mathcal{G}$ — w^*-замкнутое линейное подпространство пространства $L^\infty(\mu)$, где μ — конечная мера. Пусть $\operatorname{Re}\mathcal{G}$ плотно по норме в пространстве $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Предположим, что существует линейный оператор H, определённый на $\operatorname{Re}\mathcal{G}$, такой что выполняется соотношение $u + iHu \in \mathcal{G}$. Кроме того, предположим, что оператор H — непрерывный в $L^p(\mu)$ для некоторого $p \in (1,\infty)$, а сопряжённый оператор H^* обладает слабым типом $(1,1)$. Тогда для пространства $\mathcal{G}$ выполняется условие (α_p).*

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству этой леммы, мы приведём одно вспомогательное утверждение. Оно было доказано С.В. Кисляковым в работе

[23]. Мы сформулируем его в удобном для нас виде, учитывая то, что мера μ — конечна, а скаляры — вещественные числа.

Теорема (об исправлении). *Пусть пространство Y удовлетворяет условиям:*

(а) *естественное вложение пространства Y в пространство $L^1(\mu)$ непрерывно, и единичный шар пространства Y слабо компактен в $L^1(\mu)$;*

(б) *для всякой функции $h \in L_0^\infty(\mu)$, определяющей функционал*

$$\Phi_h(u) = \int_X u\bar{h}d\mu,$$

справедлива оценка:

$$\mu\{|h| > \lambda\} \leq \lambda^{-1}\|\Phi_h\|_{Y^*}.$$

Тогда для любого числа ε, лежащего в интервале $(0,1)$, и произвольной функции F, принадлежащей пространству $L^\infty(\mu)$ и удовлетворяющей условию $\|F\|_{L^\infty} \leq 1$, найдётся функция g, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{R1}) \quad g \in Y,\\
&(\mathrm{R2}) \quad |F| = |g - F| + |g|,\\
&(\mathrm{R3}) \quad \|g\|_Y \leq C\left(1 + \log\frac{1}{\varepsilon}\right),\\
&(\mathrm{R4}) \quad \mu\{g \neq F\} \leq \varepsilon\|F\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Мы переходим к доказательству леммы 2.21.

Доказательство. Положим $Y = \operatorname{Re}\mathcal{G}$. На пространстве Y определим норму формулой:

$$\|u\|_Y = \|u\|_\infty + \|Hu\|_\infty.$$

Покажем, что достаточно лишь проверить, что пространство Y удовлетворяет условиям теоремы об исправлении. Действительно, пусть это доказано, проверим тогда условие (α_p). Возьмём неотрицательную функцию u, принадлежащую пространству $L^p(\mu)$, которую необходимо приблизить функциями из пространства Y. Определим для функции u срезающую функцию: $u_n = \max\{u, n\}$ и применим теорему об исправлении к функции $\frac{u_n}{n}$, пространству Y и $\varepsilon = \frac{1}{n^{2p}}$: найдётся такая функция g_n, принадлежащая пространству $\mathcal{G}$, такая что её вещественная часть обладает свойствами $(R1)-(R4)$. Покажем, что функции w_n, определённые формулой $w_n = ng_n$ удовлетворяют требованиям условия (α_p). Отметим, что в нашем случае $F = \frac{u_n}{n}$, и функция F принимает значения в отрезке $[0, 1]$, и, применяя соотношение $(R2)$, мы получаем, что $\operatorname{Re} g_n \geq 0$. Таким образом, мы проверили свойство $(A1)$ для функций w_n в условии (α_p). Для проверки свойства $(A2)$ мы применим соотношения $(R3)-(R4)$:

$$\|u_n - \operatorname{Re} w_n\|_{L^p}^p = \int\limits_{\frac{u_n}{n} \neq \operatorname{Re} g_n} n^p \left|\frac{u_n}{n} - \operatorname{Re} g_n\right|^p d\mu \leq n^p \left(1 + \|\operatorname{Re} g_n\|_{L^\infty}\right)^p \mu\{\operatorname{Re} g_n \neq \frac{u_n}{n}\} \leq$$

$$n^p \left(1 + \|\operatorname{Re} w_n\|_Y\right)^p \varepsilon \left\|\frac{u_n}{n}\right\|_{L^1} \leq C(p)\frac{\log n}{n^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Остаётся лишь отметить, что $u_n \to u$ в пространстве $L^p(\mu)$. Свойство (A3) следует из непрерывности оператора H в пространстве $L^p(\mu)$.

Итак, для завершения доказательства леммы осталось показать, что Y обладает свойствами (A1) и (A2). Для того, чтобы доказать оценку

$$\mu\{|h| > \lambda\} \leq \lambda^{-1}\|\Phi_h\|_{Y^*}, \tag{2.20}$$

мы воспользуемся определением нормы на пространстве Y и представим функционал в виде:

$$\Phi_h(u) = \int\limits_X uA d\mu + \int\limits_X H(u)uB d\mu,$$

где A и B удовлетворяют условию $\|A\|_{L^1} + \|B\|_{L^1} \leq 2\|\Phi_h\|_{Y^*}$. Слегка изменив функции A и B, мы можем считать, что они принадлежат пространству $L^2(\mu)$, что в свою очередь, влечёт, что для функции h справедливо представление: $h = A + H^*B$. Таким образом, неравенство (2.20) следует из оценки слабого типа для оператора H^*.

□

Замечание. Отметим, что в доказанной лемме можно считать, лишь что $\mathcal{G}$ — линейное подпространство в $L^\infty(\mu)$, не обязательно являющееся алгеброй.

Далее в этом разделе мы приведём новые примеры пространств, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Многие из них используют те или иные w^*-алгебры Дирихле. Отметим, что некоторые из них получатся w^*-замыканием того, что называется просто алгеброй Дирихле (или более общим образом, логарифмической (синоним: логмодулярной) алгебры) в $L^\infty(\mu)$, где μ — мультипликативная мера для соответствующей алгебры. Мы не даём здесь определений, однако, отметим, что при поиске примеров в литературе следует также ориентироваться на эти 2 термина (прямого утверждения о w^*-замыкании может и не быть).

Слабые пределы аналитических полиномов

Пусть K — компактное подмножество комплексной плоскости со связным дополнением. Положим $X = \partial K$ и определим вероятностную меру μ на X как представляющую меру для некоторой точки, принадлежащей внутренности компакта K. Тогда замыкание аналитических полиномов в w^*-топологии в пространстве $L^\infty(\mu)$ образует w^*-алгебру Дирихле (см. [16, 35]).

Алгебры, порождённые полугруппой

Другим классическим примером w^*-алгебры Дирихле служит подалгебра алгебры $L^\infty(\mathbb{T}^2)$, состоящая из функций f, у которых $\hat{f}(k,l) = 0$ для $k + \omega l < 0$, где ω — произвольное иррациональное число. В качестве меры μ мы возьмём обычную нормированную меру Лебега на $\mathbb{T}^2$. Легко видеть, что μ — мультипликативная мера на такой алгебре функций (в этом рассуждении важно, что ω иррационально). В случае с рациональным числом ω мера перестаёт быть мультипликативной, операция гармонического сопряжения перестаёт быть единственной с точностью до константы и прочее.

В частности, такая ситуация возникает для алгебры функций, аналитических по одной переменной, однако, в таких случаях, как мы видели, можно проверять непосредственно сами аксиомы.

Модули над w^*-алгебрами Дирихле

В этом разделе мы пока изучали w^*-алгебры Дирихле, и выяснили, что они удовлетворяют условиям теоремы 1. Теперь мы переходим к изучению других объектов, фигурирующих в формулировке этой теоремы: модулей над алгебрами. Такие модули хорошо известны (см. теорему 2.2.1 в статье [35], а также теорему 6.1 и 6.2 в главе V книги [16]). В основном, содержательные примеры модулей для w^*-алгебры Дирихле $\mathcal{G}$ представляются в виде $F\mathcal{G}$, где F — измеримая функция, такая что $|F| = 1$ п.в. Таким образом мы можем сформулировать здесь следующее обобщение теоремы 2.

Следствие 2.22. *Если A — w^* алгебра Дирихле, а F — функция из A такая, что $|F| = 1$ п.в., то пара $(\mathcal{H}^p \cap F\overline{\mathcal{H}^p}, A \cap F\overline{A})$ K-замкнута в паре $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$ при $1 < p < \infty$.*

Скажем несколько слов о случае, когда функция F, задающая данный модуль, не обязательно лежит в A. Для простоты вернёмся к одномерному случаю: $X = \mathbb{T}$, μ — нормированная мера Лебега, $A = H^\infty(\mathbb{T})$ и $B = \overline{H}^\infty(\mathbb{T})$. Положим $C = A$ и $D = FB$, где F — унимодулярная функция, которая не обязательно аналитическая. В случае общей функции F сложно сказать, удовлетворяет ли четвёрка $\{A, B, C, D,\}$ условиям теоремы 1. В качестве примера, когда можно ожидать положительного ответа, мы рассмотрим ситуацию, когда $F = \Theta\Phi/\overline{\Phi}$, где Φ — внешняя функция, а Θ — внутренняя. Аннуляторы модулей принимают вид: $C^\perp = \bar{z}\overline{H^1(\mathbb{T})}$ и $D^\perp = FzH^1(\mathbb{T})$. Обсудим условия теоремы 1. Требование (α_p) для алгебр снова не вызывает вопросов. В качестве проектора мы рассмотрим отображение: $v \mapsto \overline{\Phi}^{-1}\mathbb{P}_-(v\overline{\Phi})$. Легко видеть, что $P(D^{\perp,q}) \subset D^{\perp,q}$. Вопрос об ограниченности этого проектора сводится к сложным вопросам о весовых оценках проектора Рисса. Некоторые результаты в этом направлении даёт теорема 2.7. Дальнейшие детали в этой диссертации мы не обсуждаем.

Пространства ΓH^p на $\mathbb{T}^3$

В сформулированном выше следствии 2.22 выполнено только условие (II). Примеры, когда выполнено только условие (I), тоже многочисленны. Упомянем в качестве иллюстрации хотя бы один.

Рассмотрим на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ градиентные векторные поля, то есть пары распределений вида $(\partial_1 f, \partial_2 f)$, где f — некое распределение на $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $\Gamma^p, 1 \leq p \leq \infty$ множество таких пар с компонентами из L^p.

Далее, на трёхмерном торе $\mathbb{T}^3$ рассмотрим множество ΓH^p, состоящее из пар функций (φ,ψ), лежащих в Γ^p при п.в. фиксированных значениях третьей переменной, а при всех фиксированных значениях первых двух переменных функции φ и ψ должны принадлежать классу $H^p(\mathbb{T})$. Теорема 1 позволяет доказать утверждение о K-замкнутости таких пространств.

Следствие 2.23. *Пара* $(\Gamma H^p, \Gamma H^\infty)$ *K-замкнута в паре* $(L^p(\mathbb{T}^3)\oplus L^p(\mathbb{T}^3), L^\infty(\mathbb{T}^3)\oplus L^\infty(\mathbb{T}^3))$.

Отметим, что интерполяционные свойства пространств ΓH^p использовались в качестве технического элемента при доказательстве основного результата в работе [7]. В той работе, однако, K-замкнутость доказана не была.

Мы переходим к обсуждению доказательства следствия 2.23. В качестве алгебры B из формулировки теоремы 1 можно взять пространство, состоящее из пар (φ,ψ), таких что функции φ и ψ принадлежат классу $H^\infty(\mathbb{T})$ по третьей переменной при фиксированных значениях первых двух. Условие (α_p) для алгебры B очевидно. Положим $D = B$, а в качестве C рассмотрим множество пар (φ,ψ), лежащих в Γ^∞, при почти всех фиксированных значениях третьей переменной. Легко видеть, что пространство ΓH^∞ образовано в результате пересечения пространств C и D. Известно, что ортогональный проектор P_1, действующий из пространства $L^2(m_2)\oplus L^2(m_2)$ в пространство Γ^2, — сингулярный интегральный оператор. Доказательство этого утверждения можно найти в книге [21] в конце раздела 2.2.1. Стоит отметить, что рассуждение там проведено для случая пространства $\mathbb{R}^n$, а не для тора, однако оно переносится с естественными изменениями. Тогда ортогональный проектор P на $\Gamma^{2\perp}$ тоже сингулярный интегральный оператор. Таким образом, стандартно продолжая проектор P на $L^1(m_2)\oplus L^1(m_2)$, мы получаем, что для него справедливо разложение Кальдерона–Зигмунда. Аналогично тому, как мы провели рассуждение для пространств Харди на двумерном торе, мы можем зафиксировать третью переменную у каждой функции из пары (u,v), лежащей в пространстве $L^1(m_3)\oplus L^1(m_3)$, и провести соответствующее разложение Кальдерона–Зигмунда для проектора P_1. Далее, мы просто проинтегрируем возникающие оценки по третьей переменной. Разумеется, проектор на $C^\perp$ действует только по первым двум переменным и не влияет на антианалитичность функций по третьей переменной. Тем самым, образ пространства

$D^{\perp,q}$ под действием такого проектора содержится в этом же пространстве. Таким образом, мы установили, что выполняются требования теоремы 1 с условием (I).

2.10 Доказательство теоремы 1

Этот раздел посвящён доказательству теоремы 1 при условиях (I) или (II). Для удобства читателя напомним формулировку доказываемого утверждения.

Теорема 1. *Пусть (X,μ) — пространство с конечной мерой, C — подпространство в $L^\infty(X,\mu)$, B — w^*-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(X,\mu)$, удовлетворяющая условию (α_p). Пусть D — модуль над алгеброй B, который, в свою очередь, тоже вложен в пространство $L^\infty(X,\mu)$. Пусть ещё $p>1$, а q — сопряжённый с p показатель. Предположим ещё, что существует проектор P, отображающий пространство $L^q(\mu)$ на $C^{\perp,q}$ и обладающий слабым типом $(1,1)$, и при этом справедливо включение: $P(D^{\perp,q})\subset D^{\perp,q}$. Тогда пара $(C_p\cap D_p, C\cap D)$ K-замкнута в паре $(L^p(X,\mu),L^\infty(X,\mu))$, если дополнительно выполняется одно из следующих условий.*

I. *Для проектора P справедливо разложение Кальдерона–Зигмунда (см. раздел 2.4).*

II. *Пространство C образует модуль над некоторой подалгеброй A алгебры $L^\infty(\mu)$. Кроме того, алгебра A тоже удовлетворяет условию (α_p).*

Доказательство. С помощью теоремы 2.12 удобно перейти к доказательству утверждения для соответствующей пары аннуляторов в преддвойственном пространстве. Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы показать, что пара

$$\bigl(\operatorname{clos}_{L^1(\mu)}(C^\perp+D^\perp),\operatorname{clos}_{L^q(\mu)}(C^{\perp,q}+D^{\perp,q})\bigr)$$

K-замкнута в паре $(L^1(\mu),L^q(\mu))$. Отметим, что пространства $C^\perp+D^\perp$ и $C^{\perp,q}+D^{\perp,q}$ не обязательно замкнуты. Однако, как уже отмечалось в замечании 1.3, при доказательстве K-замкнутости утверждение достаточно проверять на плотном множестве. В нашем случае $C^{\perp,q}$ и $D^{\perp,q}$ плотны в $C^\perp$ и $D^\perp$ соответственно.

Итак, достаточно решить следующую задачу.

Пусть функция f из суммы $C^{\perp,q} + D^{\perp,q}$ представлена в виде:

$$f = g + h, \;\; g \in L^1(\mu),\, h \in L^q(\mu).$$

Требуется найти $g_1 \in C^\perp + D^\perp$ и $h_1 \in (C^{\perp,q} + D^{\perp,q})$ такие что

$$f = g_1 + h_1, \;\; \|g_1\|_{C^\perp + D^\perp} \le C\|g\|_{L^1},\, \|h_1\|_{(C^{\perp,q}+D^{\perp,q})} \le C\|h\|_{L^q},$$

где C зависит только от числа q.

Для краткости записи положим $r = \|g\|_{L^1}$ и $s = \|h\|_{L^q}$, а через $\mathcal{Q}$ обозначим замыкание пространства $C^\perp$ в $L^{1,\infty}(\mu)$. Напомним, что по предположению теоремы найдётся проектор, действующий непрерывно из пространства $L^q(\mu)$ на $C^{\perp,q}$. Более того, пространство $L^1(\mu)$ он непрерывно отображает в $\mathcal{Q}$ (и он тождественный оператор на $C^\perp$, и справедливо включение $P(D^{\perp,q}) \subset D^{\perp,q}$).

Мы применим лемму 2.18 к функции $Pg \in \mathcal{Q}$ и $\lambda = r^{1/(1-q)} s^p$. Найдутся $a \in C^{\perp,q}$, $b \in \mathcal{Q}$ и множество E, такие что $Pg = a + b$ и выполняются соотношения:

$$\|a\|_{C^{\perp,q}} \le C\lambda^{1/p} r^{1/q} \le Cs, \tag{2.21}$$

$$\int_{X\setminus E} |b| d\mu \le Cr, \tag{2.22}$$

$$\mu(E) \le Cr\lambda^{-1} \le Cr^p s^{-p}, \tag{2.23}$$

$$\mu\{|b| > t\} \le Crt^{-1}, \;\; t > 0. \tag{2.24}$$

Напомним, что лемма 2.18 справедлива как при условии (I), так и при условии (II) из формулировки теоремы. Все остальные рассуждения не зависят от этих условий.

Определим функцию u формулой

$$u = (I - P)f = g + h - a - b - Ph.$$

Так как $I - P$ обращается в 0 на $C^{\perp,q}$ и переводит множество $D^{\perp,q}$ само в себя (по свойству (γ_p)), легко видеть, что $u \in D^{\perp,q}$, поскольку $f \in C^{\perp,q} + D^{\perp,q}$. Зафиксируем натуральное число $\gamma, \gamma > p$, и определим срезающую функцию φ соотношением:

$$\varphi = \max\left\{1, \left(\frac{(|g|+|b|)r^{1/(q-1)}}{s^p}\right)^{1/\gamma}\right\}.$$

Теперь можно применить лемму 2.15, к алгебре $\overline{B}$, показателю q и функции φ. Получим ещё одну срезающую функцию $\Phi \in \overline{B}$, обладающую свойствами

$$|\Phi| \le \min\left\{1, \frac{r^{1/(1-q)}s^{\ p}}{|g|+|b|}\right\}, \ \ \|1-\Phi\|_{L^p} \le C\|\varphi - 1\|_{L^p}. \tag{2.25}$$

Наконец, мы определим

$$\psi = \Phi u - h + Ph + a$$

и укажем требуемое разложение функции f:

$$f = g_1 + h_1, \ \ g_1 = g - \psi, \ h_1 = h + \psi.$$

Ясно, что $\Phi u \in D^{\perp,q}$, $Ph \in C^{\perp,q}$, и $a \in C^{\perp,q}$, а, следовательно, получаем, что $h_1 \in C^{\perp,q} + D^{\perp,q}$. Так как и функция f принадлежит пространству $C^{\perp,q} + D^{\perp,q}$, то можно заключить, что $g_1 \in C^{\perp,q} + D^{\perp,q} \subset C^{\perp} + D^{\perp}$. Это означает, что достаточно лишь убедиться, что выполняются оценки: $\|g_1\|_{L^1(\mu)} \le Cr$ и $\|h_1\|_{L^q(\mu)} \le Cs$.

Мы начнём с того, что оценим величину $\|g\|_{L^1(\mu)}$. Из определений функций Φ и u следует соотношение

$$\begin{aligned}\|g_1\|_{L^1} = \|g-\psi\|_{L^1} &\le C\|g\|_{L^1} + \|\Phi u - h + Ph + a\|_{L^1} \\ &= C\|g\|_{L^1} + \|\Phi g + \Phi h - \Phi a - \Phi b - \Phi Ph - h + Ph + a\|_{L^1} \\ &\le C\|g\|_{L^1} + \|(1-\Phi)(Ph-h)\|_{L^1} + \|(1-\Phi)a\|_{L^1} + \|\Phi b\|_{L^1}\end{aligned} \tag{2.26}$$

Отдельно оценим три слагаемых в последней строчке предыдущей формулы (2.26). Применяя соотношения (2.25), (2.22) и (2.23), мы переходим к следующему неравенству для последнего слагаемого:

$$\|\Phi b\|_{L^1} = \int\limits_E |\Phi b| + \int\limits_{X\setminus E} |\Phi b| \le \int\limits_E \frac{|b|}{|g|+|b|}\frac{s^p}{r^{1/(q-1)}} + \int\limits_{X\setminus E} |b| \tag{2.27}$$

$$\le \mu E \frac{s^p}{r^{1/(q-1)}} + Cr \le Cr.$$

Оставшиеся два слагаемых оцениваются с помощью неравенства Гёльдера, непрерывности проектора P в L^q и соотношения (2.21):

$$\|(1-\Phi)(Ph-h)\|_{L^1} \le Cs\|1-\Phi\|_{L^p};$$

$$\|(1-\Phi)a\|_{L^1} \le C\|1-\Phi\|_{L^p}\|a\|_{L^q} \le Cs\|1-\Phi\|_{L^p}.$$

Таким образом, достаточно показать неравенство

$$\|1-\Phi\|_{L^p} \le C\,\frac{r}{s}, \tag{2.28}$$

В виду оценки (2.25), необходимо лишь оценить величину $\|\varphi - 1\|_{L^p}$. Рассмотрим функцию распределения σ для функции $\varphi\chi_{\{x:|\varphi(x)|>1\}}$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \mu\{|\varphi|>1\}, & t\in[0,1]; \\ \mu\{|\varphi|>t\}, & t\in[1,\infty). \end{cases}$$

Справедливы соотношения:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |\varphi-1|^p \le 2\int\limits_{\mathbb{T}} |\varphi|^p\chi_{\{x:|\varphi(x)|>1\}} \le C\left(\int\limits_0^1 t^{p-1}\mu\{|\varphi|>1\}dt + \int\limits_1^\infty t^{p-1}\mu\{|\varphi|>t\}dt\right). \tag{2.29}$$

Используя (2.24) и неравенство Чебышёва, мы получаем

$$\mu\{|\varphi|>1\} = \mu\{|g|+|b|>\lambda\} \le \mu\{|g|>\lambda/2\} + \mu\{|b|>\lambda/2\} \le Cr\lambda^{-1} = Cr^ps^{-p};$$

$$\mu\{|\varphi|>t\} = \mu\left\{\frac{|g|+|b|}{\lambda} > t^\gamma\right\} \le \mu\{|g|>t^\gamma\lambda/2\} + \mu\{|b|>t^\gamma\lambda/2\} \le Cr^ps^{-p}t^{-\gamma}.$$

Подставляя эти выражения в (2.29), мы приходим к оценке:

$$\int\limits_X |\varphi - 1|^p \leq Cr^p s^{-p} \left(\int\limits_0^1 t^{p-1} + \int\limits_1^\infty t^{p-1-\gamma} dt \right) \leq Cr^p s^{-p}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (2.28), а вместе с тем, и соотношение (2.26).

Остаётся оценить величину $\|h_1\|_{L^q}$. Используя выражения для функций ψ и u, мы получаем, что справедливы тождества

$$\|h_1\|_{L^q} = \|h + \psi\|_{L^q} = \|\Phi u + Ph + a\|_{L^q} = \|\Phi(g - b - a + h - Ph) + Ph + a\|_{L^q}.$$

Применяя соотношение (2.21) и тот факт, что $|\Phi| < 1$, мы заключаем, что

$$\|h_1\|_{L^q} \leq C\|h\|_{L^q} + \|\Phi(g - b)\|_{L^q}. \tag{2.30}$$

Второе слагаемое мажорируется величиной

$$\left(\int\limits_E |\Phi|^q \left(|g| + |b|\right)^q d\mu \right)^{1/q} + \left(\int\limits_{X \setminus E} |\Phi|^q \left(|g| + |b|\right)^q d\mu \right)^{1/q} \leq \ldots$$

Продолжая оценку, используя (2.25), мы получаем

$$\ldots \leq \lambda \mu(E)^{1/q} + \left(\int\limits_{X \setminus E} \lambda^{q-1} (|g| + |b|) \right)^{1/q}.$$

Наконец, воспользовавшись соотношениями (2.23) и (2.22) для оценки первого и второго слагаемого в последнем выражении, а также подставив значение параметра λ, мы получаем, что величина в правой части последней формулы не превосходит величины

$$s^p r^{1/(1-q)} r^{p/q} s^{-p/q} + C\lambda^{(q-1)/q} r^{1/q} \leq Cs.$$

Мы доказали неравенство (2.30), а вместе с тем и теорему 4. □

2.11 Интерполяция пространств K_θ^p: доказательство теоремы 3

В этом разделе мы продолжим изучать интерполяционные свойства пространств, коинвариантных относительно оператора сдвига. Как уже отмечалось в разделе 2.3, понятия K-замкнутости и вещественных интерполяционных пространств тесно связаны. Следующий результат — это простое следствие доказанной теоремы 2.

Теорема 2.24. *Вещественные интерполяционные пространства для пространств, коинвариантных относительно оператора сдвига, вычисляются по формуле*

$$(K_\theta^{p_0}, K_\theta^\infty)_{r,\frac{p_0}{1-r}} = K_\theta^{\frac{p_0}{1-r}},$$

где $0 < r < 1$, $1 < p_0 < \infty$.

Доказательство. Поскольку K-замкнутость для такой пары доказана, для вещественных интерполяционных пространств мы получаем соотношение

$$(K_\theta^{p_0}, K_\theta^\infty)_{r,\frac{p_0}{1-r}} = K_\theta^{p_0} \cap (L^{p_0}, L^\infty)_{r,p}.$$

Остаётся применить теорему 1.5 для случая $p_1 = \infty$. □

К сожалению, для показателя $p = 1$ пока не удалось доказать соответствующую K-замкнутость. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $p_1 \in (1, \infty)$, $0 < r < 1$. *Положим* $p = \frac{p_1}{p_1 + r - rp_1}$. *Справедливо равенство*

$$(K_\theta^{1,\infty}, K_\theta^{p_1})_{r,p} = K_\theta^p.$$

Доказательство. Легко видеть, что справедливо включение

$$(K_\theta^{1,\infty}, K_\theta^{p_1})_{r,p} \subset (L^{1,\infty}, L^{p_1})_{r,q}.$$

Применяя теорему 2.11 об интерполяции пространств Лоренца, получаем соотношение

$$(L^{1,\infty}, L^{p_1})_{r,p} = L^p \text{ для } \frac{1}{p} = \frac{1-r}{1} + \frac{r}{p_1}.$$

Заметим, что, на самом деле, снова с помощью принципа максимума для пространств Харди, можно установить непрерывное включение $(K_\theta^{1,\infty}, K_\theta^{p_1})_{r,p} \subset K_\theta^p$.

С другой стороны, проектор $\mathbb{P}_\theta = \mathbb{P} - \theta\mathbb{P}(\overline{\theta} f)$ тоже имеет слабый тип $(1,1)$, а, следовательно, является линейным непрерывным оператором, действующим из пространства L^1 в пространство $K_\theta^{1,\infty}$. Кроме того, он непрерывно действует из L^{p_1} в $K_\theta^{p_1}$. Легко проверить неравенства $1 < p < p_1$. Тогда по интерполяционной теореме Марцинкевича проектор $\mathbb{P}_\theta$ непрерывно отображает L^p на K_θ^p. Но образ сужения оператора $\mathbb{P}_\theta$ на L^p совпадает с K_θ^p. Следовательно, пространство K_θ^p непрерывно вложено в $(K_\theta^{1,\infty}, K_\theta^{p_1})_{r,p}$. Таким образом, мы показали, что эти пространства совпадают. □

Мы вычислили интерполяционные пространства для пространств K_θ^p для двух различных наборов показателей: от $(1,\infty)$ до произвольного конечного p и от произвольного конечного p, большего 1, до бесконечности. Применим теорему Вольфа для того, чтобы "склеить" две эти шкалы.

Теорема 2.25. *Пусть* $0 < r < 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$(K_\theta^{1,\infty}, K_\theta^{\infty})_{r,\frac{1}{1-r}} = K_\theta^{\frac{1}{1-r}}.$$

Доказательство. Найдётся такое $k \in (1,+\infty)$, что $0 < r < rk < 1$. Используя теорему 2, вычислим интерполяционное пространство

$$(K_\theta^{1,\infty}, K_\theta^{\frac{k}{k-1}})_{kr,\frac{1}{1-r}} = K_\theta^{\alpha}$$

где

$$\alpha = \frac{\frac{k}{k-1}}{\frac{k}{k-1} + kr - kr\frac{k}{k-1}} = \frac{1}{1 - kr + \frac{kr(k-1)}{k}} = \frac{1}{1-r}.$$

Применяя теорему 2.24, вычислим ещё одно интерполяционное пространство:

$$(K_\theta^{\frac{1}{1-r}}, K_\theta^{\infty})_{\frac{1-kr}{k(1-r)},\frac{k}{k-1}} = K_\theta^{\beta},$$

где

$$\beta = \frac{1}{(1-r)\left(1 - \frac{1-kr}{k(1-r)}\right)} = \frac{k}{k-1}.$$

Тогда по теореме 2.13 справедливо равенство

$$(K_\theta^{1,\infty}, K_\theta^\infty)_{r,p} = K_\theta^{\frac{1}{1-r}},$$

в том случае, если

$$r = \frac{kr\frac{1-kr}{k(1-r)}}{1-kr+kr\frac{1-kr}{k(1-r)}},$$

что, разумеется, выполнено. □

2.12 Интерполяция пространств $K^p_\theta(w)$: доказательство теоремы 4

В этом разделе мы отдельно рассмотрим интерполяционную теорему для весовых пространств, коинвариантных относительно сдвига. Отметим, что для случая модельных пространств без веса теорема уже доказана, поскольку мы установили, что теорема 1 при условии (I) справедлива, и, как мы отмечали в разделе 2.9.2, пространства K^p_θ удовлетворяют условию (I). Доказательство следующей теоремы идейно соответствует доказательству теоремы 1 при условии (I), однако, в случае пространств с весом возникают некоторые новые технические трудности. Напомним формулировку основного результата этого раздела.

Теорема 3. *Пусть $a \in A_\infty, w \in A_1$. Обозначим число из леммы 2.6 которое соответствуют весам a и w,через $r = r(w,a)$. Тогда для всякого числа $q > r'$ (r' сопряжённый с r показатель) пара $(K^q_\theta(aw^{-q}), K^\infty_\theta(w))$ K-замкнута в паре $(L^q(aw^{-q}), L^\infty(w))$.*

Замечание 2.26. *Для весовых пространств Харди известны необходимые и достаточные условия K-замкнутости пары $(H^p(w_0), H^q(w_1))$ в паре $(L^p(w_0), L^q(w_1))$. В случае конечных показателей p и q это условие принимает вид: $\log(w_0^{1/p}w_1^{-1/q}) \in BMO$. Если $q=\infty$, то это условие переписывается в виде $\log(w_0^{1/p}w_1) \in BMO$. Наконец, в случае $p=q=\infty$ пара $(H^\infty(w_0), H^\infty(w_1))$ K-замкнута в паре $(L^\infty(w_0), L^\infty(w_1))$ тогда и только тогда, когда $\log(w_0^{-1}w_1) \in BMO$. Для пространств, коинвариантных относительно сдвига, а тем более для пересечения модулей над алгебрами, подобные необходимые и достаточные условия получить пока не удаётся.*

Вновь при доказательстве K-замкнутости исходной пары пространств удобно перейти к соответствующей паре аннуляторов. В соответствии с определениями 2.3, 2.4 и выбором двойственности получаем

$$K^q_\theta(aw^{-q})^\perp = \operatorname{clos}\left\{\overline{H^p_0\left(\frac{w^p}{a^{p-1}}\right)} + \theta H^p\left(\frac{w^p}{a^{p-1}}\right)\right\}, \text{ а } K^\infty_\theta(w)^\perp = \operatorname{clos}\{\overline{H^1_0(w)} + \theta H^1(w)\},$$

где p — показатель, сопряжённый с q. Ранее мы уже отмечали, что K-замкнутость пространств достаточно проверять на плотном множестве (см. замечание 1.3). Таким образом, достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.27. *Пусть $a \in A_\infty, w \in A_1$. Тогда для всякого числа p, $1 < p \le r(w,a)$, где $r(w,a)$ — число из леммы 2.6, пара пространств $(\overline{H^1_0(w)} + \theta H^1(w), \overline{H^p_0\left(\frac{w^p}{a^{p-1}}\right)} + \theta H^p\left(\frac{w^p}{a^{p-1}}\right))$ K–замкнута в паре $(L^1(w), L^p(\frac{w^p}{a^{p-1}}))$.*

Доказательство. Для краткости положим $b_p = \frac{w^p}{a^{p-1}}$ и $u = \frac{a}{w}$.

Пусть функция f принадлежит пространству $\overline{H^1_0(w)} + \theta H^1(w) + \overline{H^p_0(b_p)} + \theta H^p(b_p)$ и представлена в виде $f = G + h$, при этом $G \in L^1(w)$, а $h \in L^p(b_p)$.

Применим весовое разложение Кальдерона–Зигмунда к функции G и некоторому параметру $\lambda > 0$, который выберем чуть позже. Найдутся такие функции G_1 и G_0, а также множество Ω, что справедливы соотношения $(CZW1) - (CZW4)$, и равенство $G = G_0 + G_1$. Пусть Φ некоторая ограниченная на $\mathbb{T}$ аналитическая функция, которую мы определим позднее. Положим $\psi = \mathbb{P}G_1 - (1-\Phi)\mathbb{P}f$. Мы будем использовать эквивалентное представление функции ψ:

$$\psi = \Phi\mathbb{P}G_1 + (1-\Phi)\mathbb{P}(G_0 + h).$$

Задача сводится к доказательству следующих трёх неравенств:

$$\|\psi\|_{L^1(w)} \le C\|G\|_{L^1(w)} \tag{2.31}$$

$$\|\psi\|_{L^p(b_p)} \le C\|h\|_{L^p(b_p)} \tag{2.32}$$

$$\|G_0\|_{L^p(b_p)} \le C\|h\|_{L^p(b_p)}. \tag{2.33}$$

Действительно, предположим, что эти соотношения доказаны, и покажем, что в таком случае выводы теоремы справедливы. Рассмотрим разложение

$$f = (G_1 - \psi) + (G_0 + h + \psi)$$

или более подробно:

$$f = [G_1 - \mathbb{P}G_1 + (1-\Phi)\mathbb{P}f] + [G_0 + h + \mathbb{P}G_1 - (1-\Phi)\mathbb{P}f]\,.$$

Убедимся, что оба слагаемых, заключенных в квадратные скобки, лежат в соответствующих пространствах.

Заметим, что справедливо включение $L^p(\frac{w^p}{a^{p-1}}) \subset L^1(w)$. Действительно, это следует из неравенства Гёльдера:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |f|w\,dm \le \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^p \frac{w^p}{a^{p-1}}\,dm\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathbb{T}} a\,dm\right)^{1/q} < \infty.$$

Легко видеть, что функция $\mathbb{P}f$ принадлежит пространству $\theta(H^1(w) + H^p(\frac{w^p}{a^{p-1}})) = \theta H^1(w)$, а, следовательно, и функция $\Phi\mathbb{P}f$ лежит в этом же пространстве, поскольку функция Φ ограничена и аналитическая. Принимая во внимание оценки (2.31) и ($CZW2$), получаем, что слагаемое $G_1 - \mathbb{P}G_1 + (1-\Phi)\mathbb{P}f$ лежит в пространстве $L^1(w)$. Тогда и функция $G_1 - \mathbb{P}G_1$ принадлежит пространству $L^1(w)$, а так как у этой функции отсутствует неотрицательная часть спектра, то по принципу максимума она принадлежит классу $\overline{H_0^1(w)}$. Таким образом, мы показали, что $G_1 - \psi \in \overline{H_0^1(w)} + \theta H^1(w)$.

Используя эквивалентное представление функции ψ, заметим, что второе слагаемое можно представить в виде

$$G_0 + h + \Phi\mathbb{P}G_1 - (1-\Phi)\mathbb{P}(G_0 + h) = G_0 + h - \mathbb{P}(G_0 + h) + \Phi\mathbb{P}f.$$

Напомним, что лемма 2.6 гарантирует, что вес $\frac{w^p}{a^{p-1}}$ принадлежит классу Макенхаупта A_p. Следовательно, применяя непрерывность проектора Рисса как оператора в весовом пространстве L^p с весом, лежащим в классе Макенхаупта A_p, оценку (2.33), а также рассуждения о спектре, мы можем заключить, что $G_0+h-\mathbb{P}(G_0+h) \in \overline{H^p_0(b_p)}$. Принимая во внимание неравенства (2.31) и (2.32), получаем, что слагаемое принадлежит пространству $L^p(b_p)$. Как уже отмечалось, функция $\Phi\mathbb{P}f$ принадлежит пространству $\theta H^1(w)$. С другой стороны, из равенства $\Phi\mathbb{P}f = \psi - \mathbb{P}(G_0+h)$ с помощью оценки (2.32) и уже установленного соотношения $\mathbb{P}(G_0+h) \in L^p_0(b_p)$ можно заключить, что функция $\Phi\mathbb{P}f$ принадлежит пространству $L^p(b_p)$. Вновь применяем принцип максимума и включение $L^p(\frac{w^p}{a^{p-1}}) \subset L^1(w)$ и получаем, что $\Phi\mathbb{P}f \in \theta H^p(b_p)$. Таким образом, нам удалось показать, что $G_0+h+\psi \in \overline{H^p_0(b_p)} + \theta H^p(b_p)$.

Легко видеть, что соответствующие оценки для K-замкнутости на оба слагаемых следуют из соотношений (2.31), (2.32), (2.33) и $(CZW2)$.

Теперь мы покажем, что неравенства (2.31), (2.32) и (2.33) справедливы. Начнём с доказательства соотношения (2.31).

Определим функции y_1 и y_0 формулами:

$$y_1 = G_1 u^{-1}, y_0 = G_0 u^{-1}.$$

Отметим, что эти функции лежат в пространстве $L^1(a)$:

$$\int |y_i| a\, dm = \int |G_i| \frac{w}{a} a\, dm = \|G_i\|_{L^1(w)} < \infty,\ i = 0, 1.$$

Пусть R — окаймленный проектор Рисса: $Rf = u^{-1}\mathbb{P}(fu)$, свойства которого мы отмечали в теореме 2.7. Справедливо следующее равенство:

$$w\mathbb{P}(G_0+h) = \frac{w}{a}\mathbb{P}(u(u^{-1}G_0 + hu^{-1}))a = R(y_0 + hu^{-1})a.$$

Для доказательства оценки (2.31) применим предыдущее соотношение и неравенство Гёльдера с весом a:

$$\|\psi\|_{L^1(w)} \le \int_{\mathbb{T}} |\Phi\mathbb{P}G_1| w\, dm + \|1-\Phi\|_{L^{p'}(a)} \|R(y_0 + hu^{-1})\|_{L^p(a)}. \qquad (2.34)$$

Для оценки первого слагаемого в предыдущем соотношении нам потребуется следующее равенство:

$$|\mathbb{P}G_1|w = \frac{w}{a}|\mathbb{P}(uu^{-1}G_1|a = |Ry_1|a.$$

Напомним, что Ω — множество, о котором мы говорили в условии $(CZW3)$ весового разложения Кальдерона–Зигмунда. Первое слагаемое в правой части соотношения (2.34) можно представить в виде:

$$\int_{\mathbb{T}} |\Phi\mathbb{P}G_1|w\, dm = \int_{\mathbb{T}\setminus\Omega} |\Phi\mathbb{P}G_1|w\, dm + \int_{\Omega} |\Phi Ry_1|a\, dm.$$

Теперь мы определим аналитическую срезку — функцию Φ. Положим $\alpha = \max\{1, \frac{|Ry_1|}{\lambda}\}$ и $\Phi = e^{-\log\alpha - i\mathbb{H}\log\alpha}$. Как обычно, функция Φ обладает следующими свойствами: Φ — аналитична, $|\Phi| \le 1$, кроме того, $|\Phi Ry_1| \le \lambda$. Применяя соотношение $(CZW3)$ из весового разложение Кальдерона–Зигмунда, мы получаем оценку:

$$\int_{\mathbb{T}\setminus\Omega} |\Phi(\mathbb{P}G_1)w|\, dm \le \int_{\mathbb{T}\setminus\Omega} |\mathbb{P}G_1|w\, dm \le C\|G\|_{L^1(w)}.$$

Используя третье свойство функции Φ и неравенство $(CZW4)$, мы завершаем оценку первого слагаемого в правой части соотношения (2.34):

$$\int_{\Omega} |\Phi Ry_1|a\, dm \le \lambda \int_{\Omega} a\, dm \le C\|G\|_{L^1(w)}.$$

Для доказательства неравенства (2.31) остается оценить второе слагаемое в соотношении (2.34). Напомним, что по лемме 2.6 вес a лежит в $A^{p'}$, поэтому оператор гармонического сопряжения непрерывен в пространстве $L^{p'}(a)$.

Обозначим $\sigma(t) = \int\limits_{|Ry_1|>\lambda e^t} a\, dm$. Справедливы неравенства:

$$\|1-\Phi\|^{p'}_{L^{p'}(a)} \le C\|\log\alpha\|^{p'}_{L^{p'}(a)} \le C\int\limits_0^\infty \tau^{p'-1}\sigma(\tau)d\tau.$$

Используя слабый тип $(1,1)$ оператора R (см. теорему 2.7), получаем оценку:

$$\sigma(\tau) = \int\limits_{|Ry_1|>\lambda e^t} a\, dm \le C\frac{\|G_1\|_{L^1(w)}}{\lambda e^t} \le C\frac{\|G\|_{L^1(w)}}{\lambda e^t}.$$

Подставляя полученную оценку величины $\sigma(t)$ в неравенство выше, приходим к соотношению

$$\|1-\Phi\|_{L^{p'}(a)} \le C\|G\|^{1/p'}_{L^1(w)}\lambda^{-1/p'}. \tag{2.35}$$

Для оценки второго множителя во втором слагаемом в выражении (2.34) снова воспользуемся непрерывностью оператора R как оператора, действующего в пространстве $L^p(a)$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\|R(y_0+hu^{-1})\|_{L^p(a)} \le C\|y_0+hu^{-1}\|_{L^p(a)}.$$

Отметим, что выполняется соотношение $u^{-p}a = \frac{w^p}{a^{p-1}} = b_p$, а значит верны равенства

$$\|y_0+hu^{-1}\|_{L^p(a)} = \left(\int |G_0u^{-1}+hu^{-1}|^p a\,dm\right)^{1/p} = \|h+G_0\|_{L^p(b_p)}.$$

Предположим, что оценка (2.33) доказана. Тогда величину $\|y_0+hu^{-1}\|_{L^p(a)}$ можно оценить величиной $C\|h\|_{L^p(b_p)}$. Выберем значение параметра λ. Положим

$$\lambda = \|h\|^{p'}_{L^p(b_p)}\|G\|^{-\frac{p'}{p}}_{L^1(w)}.$$

Тогда, подставляя в соотношение (2.35) выбранное значение параметра λ, получаем, что

$$\|1-\Phi\|_{L^{p'}(a)} \le C\|G\|_{L^1(w)}\|h\|^{-1}_{L^p(b_p)}.$$

Собирая все оценки, которые были проделали для доказательства неравенства (2.31), мы завершаем это рассуждение:

$$\|\psi\|_{L^1(w)} \le C\|G\|_{L^1(w)} + C\|1-\Phi\|_{L^{p'}(a)}\|h\|_{L^p(b_p)} \le C\|G\|_{L^1(w)}.$$

Теперь покажем, что выполняется неравенство (2.33). Применяя неравенство $(CZW1)$, а затем неравенство $(CZW2)$ и представление веса $u = \frac{a}{w}$, получаем оценку:

$$\|G_0\|_{L^p(b_p)} \le C\left(\int \lambda^{p-1}u^{p-1}|G_0|\frac{w^p}{a^{p-1}}\right)^{1/p} \le C\lambda^{\frac{p-1}{p}}\|G\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(w)}.$$

Подставим уже выбранное значение параметра λ и завершим доказательство неравенства (2.33):

$$\|G_0\|_{L^p(b_p)} \le C\|G\|^{1/p}_{L^1(w)}\|h\|^{\frac{(p-1)p'}{p}}_{L^p(b_p)}\|G\|^{-1/p}_{L^1(w)} = C\|h\|_{L^p(b_p)}.$$

Для доказательства неравенства (2.32) достаточно показать, что

$$\|\psi\|_{L^p(b_p)} \le \left(\int |\Phi\mathbb{P}G_1|^p \frac{w^p}{a^{p-1}}\,dm\right)^{1/p} + \left(\int |(1-\Phi)\mathbb{P}(G_0+h)|^p \frac{w^p}{a^{p-1}}\,dm\right)^{1/p}.$$

Перепишем первое слагаемое в терминах оператора R:

$$\int |\Phi\mathbb{P}G_1|^p \frac{w^p}{a^{p-1}}\,dm = \int |\Phi R y_1|^p a\,dm.$$

Обозначим $\pi(t) = \int\limits_{|\Phi R y_1|>t} a\,dm$. Отметим, что функция $\pi(t)$ обладает следующим свойством: при $t > \lambda$ выполняется равенство $\pi(t) = 0$, а при $t < \lambda$ справедлива оценка $\pi(t) \le C\frac{\|G\|_{L^1(w)}}{t}$. Первое утверждение мы получили из свойства аналитической срезки Φ ($|\Phi R y_1| \le \lambda$), а второе следует из весового слабого типа $(1,1)$ для оператора R. Интеграл, который необходимо оценить, можно представить в виде:

$$\int |\Phi R y_1|^p a\,dm \le \int_0^\infty \tau^{p-1}\pi(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^\lambda \tau^{p-1}\pi(\tau)d\tau \le C\|G\|_{L^1(w)}\int_0^\lambda \tau^{p-2}\,d\tau \le C\lambda^{p-1}\|G\|_{L^1(w)}.$$

Подставляя определенное выше значение параметра λ, которое удобно переписать в виде $\lambda = \|h\|^{\frac{p}{p-1}}_{L^p(b_p)}\|G\|^{-\frac{1}{p-1}}_{L^1(w)}$, мы завершаем оценку первого слагаемого:

$$\int |\Phi R y_1|^p a\,dm \le C\|h\|^p_{L^p(b_p)}.$$

Напомним, что по построению аналитической срезки выполняется $|\Phi| \le 1$. Как уже отмечалось, справедливо равенство $w\mathbb{P}(G_0+h) = R(y_0 + hu^{-1})a$. Перепишем второе слагаемое в терминах проектора R:

$$\left(\int |(1-\Phi)\mathbb{P}(G_0+h)|^p \frac{w^p}{a^{p-1}}\,dm\right)^{1/p} \le 2\left(\int |R(y_0+hu^{-1})|^p a\,dm\right)^{1/p}.$$

Воспользуемся непрерывностью проектора R, а также уже полученной оценкой (2.33):

$$\left(\int |R(y_0+hu^{-1})|^p a\,dm\right)^{1/p} \le C\left(\int |y_0+hu^{-1}|^p a\,dm\right)^{1/p} \le C\|G_0+h\|_{L^p(b_p)} \le C\|h\|_{L^p(b_p)}$$

Таким образом, мы завершили оценку $\|\psi\|_{L^p(b_p)} \le C\|h\|_{L^p(b_p)}$. Мы показали, что неравенства (2.31)-(2.33) справедливы, а, следовательно, доказали теорему.

□

Из доказанного утверждения легко получить следующий результат.

Теорема 2.28. *Для случая пространств с весами $a \in A_\infty$ и $w \in A_1$ вещественные интерполяционные пространства для подпространств, коинвариантных относительного сдвига, могут быть вычислены по формуле:*

$$(K^{p_0}_\theta(aw^{-p_0}), K^\infty_\theta(w))_{t,\frac{p_0}{1-t}} = K_\theta^{\frac{p_0}{1-t}}(aw^{-\frac{p_0}{1-t}}),$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0}$, $0 < t < 1$, $r(w,a) < p_0 < \infty$. *Как и прежде,* $r = r(w,a)$ *— число из леммы* 2.6*, которое соответствует весам a и w.*

Доказательство. Справедливо включение

$$K^\infty_\theta(w) \subset K^{p_0}_\theta(aw^{-p_0}),$$

поскольку выполняется оценка

$$\|f\|_{L^{p_0}(aw^{-p_0})} \le \|f\|^{p_0}_{L^\infty(w)}\int a \le C\|f\|^{p_0}_{L^\infty(w)}.$$

Так как доказана K-замкнутость для такой пары весовых пространств, мы получаем, что справедливо равенство

$$(K^{p_0}_\theta(aw^{-p_0}), K^\infty_\theta(w))_{t,\frac{p_0}{1-t}} = K^{p_0}_\theta(aw^{-p_0}) \cap (L^{p_0}(aw^{-p_0}), L^\infty(w))_{t,\frac{p_0}{1-t}}.$$

Интерполяционное пространство для весовых пространств L^p вычислим с помощью теоремы 2.10:

$$(L^{p_0}(aw^{-p_0}), L^\infty(w))_{t,\frac{p_0}{1-t}} = L^{\frac{p_0}{1-t}}\left(\left(aw^{-p_0}\right)^{\frac{1-t}{p_0}\frac{p_0}{1-t}} w^{-\frac{tp_0}{1-t}}\right) = L^{\frac{p_0}{1-t}}\left(aw^{-\frac{p_0}{1-t}}\right).$$

Подставляя вычисленное пространство в предыдущее соотношение и используя включение $L^{p_0}(aw^{-p_0}) \subset L^{\frac{p_0}{1-t}}(aw^{-\frac{p_0}{1-t}})$, получаем, что

$$(K^{p_0}_\theta(aw^{-p_0}), K^\infty_\theta(w))_{t,\frac{p_0}{1-t}} = K^{\frac{p_0}{1-t}}_\theta(aw^{-\frac{p_0}{1-t}}).$$

$\square$

Глава 3

Задача об идеалах для $H^\infty(X)$

3.1 Введение

Эта глава диссертации посвящена решению задачи об идеалах для ограниченных аналитических функций, принимающих значения в банаховых решётках. Опишем структуру главы 3. Мы начнём с того, что напомним основные определения о банаховых решётках, а также приведём некоторые вспомогательные утверждения. Далее мы обсудим историю теоремы о короне и задачи об идеалах, напомним классические результаты, а также приведём упомянутое во введении лаконичное доказательство Кислякова теоремы о короне для банаховых решёток (при условии, что доказана теорема Учиямы для пространства l^∞). Кроме того, мы отметим значение показателя α для разрешимости задачи об идеалах. В следующем разделе мы докажем, что задача об идеалах разрешима для всех пространств l^p с $p \in [1, \infty)$. Из этого результата мы сразу же выводим теорему 7, если предположить, что теорема 6 и лемма 8 доказаны. Далее мы докажем техническую лемму 8. Последний раздел посвящён доказательству теоремы 6.

3.2 Банаховы решётки: основные определения и вспомогательные утверждения

Напомним несколько основных определений и классических результатов из теории векторных решёток. Сформулированы они не в полной общности, а лишь в той мере, в какой это необходимо для дальнейшей работы. Более подробно см. в [3] и [27].

Определение 3.1. *Пусть (S, μ) — пространство с мерой, а X — некоторое линейное пространство измеримых функций на S, снабжённое полной квазинормой $\| \cdot \|$. Говорят, что X — решётка измеримых функций, если выполняется следующее свойство. Пусть функция g измерима и найдётся такая функция f из пространства X, что почти всюду справедлива оценка $|g| \leq |f|$, тогда $g \in X$ и $\|g\|_X \leq \|f\|_X$. Решётка X называется банаховой, если её квазинорма является нормой (более общим образом, если такая ситуация возникает после перенормировки).*

В нашей работе мы ограничимся специальным случаем, когда $S = \mathbb{N}$, а μ — считающая мера. В этом случае мы будем называть банахову решётку измеримых функций банаховой решёткой последовательностей, а для краткости — просто банаховой решёткой. Нам потребуется понятие степени решётки измеримых функций.

Определение 3.2. *Пусть X — решётка измеримых функций, а параметр α положителен. Обозначим через X^α решётку $\{f : |f|^{1/\alpha} \in X\}$ с тем же поточечным порядком и снабжённую квазинормой*

$$\|f\|_{X^\alpha} = \||f|^{1/\alpha}\|_X^\alpha.$$

Напомним, что произведение решёток X и Y мы определили в главе 1 (см. определение 1.4). Вообще говоря, решётки XY и X^α не обязаны быть банаховыми. Отметим одно важное определение.

Определение 3.3. *Пусть X — банахова решётка измеримых функций, а $p \in [1, \infty)$. Если X^p — банахова решётка, то говорят, что решётка X p-выпукла.*

Определение 3.4. *Пусть X — банахова решётка последовательностей. Порядково сопряжённая решётка X' состоит из таких последовательностей $y = \{y_n\}$, что для всех $x \in X$ выполняется $\sum\limits_n |x_n y_n| < \infty$.*

В дальнейшем будем молчаливо предполагать, что для всех встречающихся нам решёток измеримых функций выполнено равенство $X'' = X$. В случае банаховых решёток это условие эквивалентно свойству Фату. Приведём точную формулировку.

Определение 3.5. *Пусть X — квазибанахова решётка последовательностей. Будем говорить, что решётка X обладает свойством Фату, если для всякой последовательности $\{x_n\}$, такой что величины $\|x_n\|$ ограничены в совокупности некоторой постоянной C, справедливо следующее утверждение. Из того что последовательность x_n сходится покомпонентно к последовательности x, следует, что $x \in X$ и при этом $\|x\| \leq C$.*

Отметим, что произведение решёток и возведение решётки в степень наследуют свойство Фату.

Определение 3.6. *Пусть параметр q сопряжен с показателем p. Решётка X называется q-вогнутой, если решётка X' p-выпукла.*

Напомним одно свойство q-вогнутых решёток, за подробностями читателю следует обратиться к [27]. Решётка X — q-вогнута тогда и только тогда, когда существует такая универсальная константа $M_{q,X}$ (наименьшая из возможных), что для всякой конечной последовательности элементов x_i решётки X выполняется соотношение

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \|x_i\|_X^q\right)^{1/q} \leq M_{q,X} \left\| \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^q\right)^{1/q} \right\|_X .$$

Отметим, что константа $M_{q,X}$ не зависит от количества элементов в последовательности, а зависит только от самой решётки X и параметра q.

Определение 3.7. *Пусть X — банахова решётка последовательностей. Говорят, что норма в X порядково непрерывна, если для всякой последовательности $\{x_n\}$ элементов решётки X, такой что $x_n \geq 0, x_n \to 0$ покомпонентно и $\sup\limits_n x_n \in X$, справедливо соотношение $\|x_n\|_X \to 0$.*

Важным примером решётки, не обладающей свойством порядковой непрерывности нормы, является пространство l^∞. С другой стороны, в конечномерных решетках порядковая непрерывность нормы и свойство Фату имеют место автоматически.

Следующие две леммы можно считать хорошо известными. См. ссылки в [34], [5] (где можно найти и доказательство леммы 3.9).

Лемма 3.8. *Пусть X, Y — банаховы решётки, а параметры p и q сопряжены, при этом $p, q \in (1, \infty)$. Тогда справедливо равенство $(X^{1/p}Y^{1/q})' = (X')^{1/p}(Y')^{1/q}$*

Лемма 3.9. *Пусть X, Y и XY — банаховы решётки. Тогда справедливо равенство $X' = (XY)'Y$.*

Нам потребуется следующее известное утверждение. Поскольку оно является одним из ключевых в структуре нашего изложения, для полноты приведём доказательство.

Лемма 3.10. *Пусть X — q-вогнутая банахова решётка со свойством Фату. Тогда X представляется в виде произведения некоторой банаховой решётки на решётку l^q.*

Доказательство. Из того, что решётка X q-вогнута, следует, что порядково сопряженная с ней решётка X' p-выпукла, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда найдётся банахова решётка Z, такая что $X' = Z^{1/p}$. Очевидно, что умножение на решётку l^∞ в произвольной степени не меняет исходную решётку. Таким образом, верно равенство $X' = Z^{1/p}(l^\infty)^{1/q}$. Применим лемму 2.9 и, учитывая, что $(l^\infty)' = l^1$, получаем, что справедливо равенство $X'' = (Z')^{1/p}(l^1)^{1/q} = (Z')^{1/p}l^q$. Остаётся напомнить, что решётка X обладает свойством Фату, а, следовательно, $X'' = X$. □

3.3 Историческая справка

3.3.1 Теорема о короне

Классическая проблема короны была сформулирована в 1941 году С. Какутани и возникла при изучении пространства максимальных идеалов алгебры H^∞. Л. Карлесон в работе [11] решил её, доказав следующее утверждение.

Теорема 3.11. *Пусть функции $f_1, \ldots, f_n$ принадлежат классу $H^\infty(\mathbb{D})$ и пусть $\delta > 0$. Если выполняются условия*

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(z)| \geq \delta \text{ и } \|f_j\|_{H^\infty} \leq 1 \text{ при } 1 \leq j \leq n,$$

то найдутся такие функции $g_1, \ldots, g_n$ из класса $H^\infty(\mathbb{D})$, что

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z) g_j(z) = 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

при этом $\|g_j\|_{H^\infty} \le C(\delta, n)$.

Отметим зависимость от n в последнем неравенстве. Т. Вольф в 1979 году предложил другой подход к доказательству теоремы о короне, который был основан на идее Л. Хёрмандера, сводившей исходную проблему к решению $\overline{\partial}$ задачи. Доказательство Вольфа удалось обобщить на случай бесконечной размерности. Для лаконичности изложения нам потребуется следующее определение.

Определение 3.12. *Пусть X — банахова решётка последовательностей на множестве $\mathbb{N}$. Обозначим через X' решётку, порядково сопряжённую с ней. Будем говорить, что для решётки X справедлива теорема о короне, если выполняется следующее утверждение. Для параметра $\delta > 0$ и любой векторнозначной функции f из класса $H^\infty(\mathbb{D}; X)$, удовлетворяющих условиям*

$$\delta \le \|f(z)\|_X \le 1, \ \ z \in \mathbb{D},$$

можно найти такую векторнозначную функцию g из класса $H^\infty(\mathbb{D}; X')$, что выполняется:

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} f(z,i)g(z,i) = \langle f(z), g(z) \rangle, \quad z \in \mathbb{D},$$

при этом величина $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D};X')}$ контролируется константой $C_{X,\delta}$, зависящей только от параметра δ и решётки X.

В этой связи отметим работы В. А. Толоконникова [8] и А. Учиямы [39]. В статье последнего одним из интересных полученных результатов была теорема о короне в случае пространства $X = l^\infty$. Отметим, что рассуждение Учиямы находится на том же уровне сложности, что и рассуждение Карлесона. С. В. Кисляков и Д. В. Руцкий показали в статье [4], что теорема о короне справедлива для пространств l^p для $2 \le p < \infty$. Используя интерполяционный метод, Кисляков в работе [5] установил справедливость теоремы о короне для всех пространств l^p (и даже для всех q-вогнутых решёток, удовлетворяющих дополнительному интерполяционному требованию BMO-регулярности). В работе [34] Д. В. Руцкому с помощью теоремы Какутани о неподвижной точке удалось показать, что теорема о короне справедлива для всех порядково непрерывных решёток последовательностей. Изначально в основе его доказательства лежал результат Учиямы для пространства l^∞, однако оно применимо и в случае, если в качестве базового результата взять рассуждение Вольфа для пространства l^2 (при этом возникнут некоторые ограничения на участвующие решётки). Следующее простое рассуждение принадлежит С.В. Кислякову и позволяет обобщить теорему о короне на произвольные решётки последовательностей если предположить, что теорема Учиямы доказана.

Теорема 3.13. *Для произвольного конечномерного подпространства F теорема о короне справедлива.*

Доказательство. Пусть функция Φ принадлежит классу $H^\infty(F)$, при этом

$$\|\Phi(z)\|_F \geq \delta > 0.$$

Решётка F допускает вложение в пространство l^∞_N, то есть существует оператор вложения $j : F \to l^\infty_N$. Обозначим через j^* сопряжённый оператор, действующий из l^1_N в пространство F'. По теореме Учиямы найдётся такая функция $\Theta(z)$, принадлежащая пространству $H^\infty(F')$, что справедливо равенство

$$\langle jF(z), \Theta(z)\rangle = 1.$$

Оно эквивалентно соотношению

$$\langle F(z), j^*\Theta(z)\rangle = 1,$$

из которого ясно, что функция $j^*\Theta(z)$ и есть нужное нам решение. □

Для того, чтобы доказать теорему о короне для бесконечномерного пространства остаётся провести аналогичное лемме 8 техническое рассуждение. Дальнейшие детали доказательства в этой диссертации мы разбирать не будем.

3.3.2 Задача об идеалах

Напомним определение задачи об идеалах, которое мы уже приводили в первой главе.

Определение. *Пусть X — банахова решётка последовательностей с областью задания на множестве $\mathbb{N}$. Обозначим через X' решётку, порядково сопряжённую* *с ней. Будем говорить, что для решётки X разрешима задача об идеалах с показателем α и оценкой $C_{X,\alpha}$, если справедливо следующее утверждение. Для всякой функции h из класса $H^\infty(\mathbb{D})$ и вектор-функции f из класса $H^\infty(\mathbb{D};X)$, удовлетворяющим условиям*

$$|h(z)| \le \|f(z)\|_X^\alpha \le 1$$

для всех z из круга $\mathbb{D}$ и некоторого фиксированного параметра α, можно найти такую векторнозначную функцию g из класса $H^\infty(\mathbb{D};X')$, что выполняется равенство

$$h(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f(z,i)g(z,i) = \langle f(z), g(z)\rangle, \;\; z \in \mathbb{D},$$

при этом величина $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D};X')}$ контролируется константой $C_{X,\alpha}$, зависящей только от параметра α и решётки X.

В упомянутой выше статье Толоконникова [8] было показано, что задача об идеалах разрешима для пространства l^2 с показателем 4 и константой 57.

Замечание 3.14. *Оптимальный показатель в задаче об идеалах — предмет отдельного исследования.*

Можно показать, что при $\alpha < 2$ задача об идеалах неразрешима. В этой связи отметим работу Рао [31] *и вновь статью Толоконникова* [8], теорема 8.

Показатель 4 для пространства l^2 был улучшен рядом авторов, см. [37]*. На самом деле, в формулировке задачи об идеалах вместо соотношения* (1.1)*, можно взять неравенство $|h(z)| \le C\psi(\|f(z)\|_{l^2})$ и поставить вопрос так: при каких условиях на рост функции ψ задача об идеалах имеет решение? Долгое время стоял вопрос о разрешимости задачи об идеалах с $\alpha = 2$, то есть $\psi(s) = s^2$. С. Трейль в работе* [38] *дал отрицательный ответ на этот вопрос. Более точные оценки (и гипотезу об их оптимальности) на поведение функции ψ можно найти в работе* [37].

Нам будет достаточно, что для произвольного положительного ε задача об идеалах разрешима для пространства l^2 с показателем $2+\varepsilon$ и константой, зависящей только от ε, которую мы условились обозначать через $C_{l^2,2+\varepsilon}$. В работе [Z1]*, опираясь на случай пространства l^2, с помощью теоремы о неподвижной точке удалось показать, что для пространства l^1 разрешима задача об идеалах с показателем $2+\varepsilon$ для произвольного положительного ε и с той же константой $C_{l^2,2+\varepsilon}$.*

3.4 Сведение теоремы 5 к теореме 6 и лемме 8

Следующее простое интерполяционное утверждение говорит о том, что задача об идеалах для пространства l^p разрешима при $2 \leq p < \infty$. Рассуждение основано на разрешимости задачи об идеалах в пространстве l^{p_0} для некоторого $p_0 < p$.

На этом пути мы, возможно, сильно ухудшаем показатель, с которым разрешима задача об идеалах. Подобное явление встречалось при использовании интерполяционного подхода в [4].

Лемма 3.15. *Пусть $p \in [2, \infty)$. Для всякого параметра $\varepsilon > 0$ задача об идеалах разрешима в пространствах l^p с показателем $(1+\varepsilon)p$ и константами, зависящими только от ε.*

Доказательство. Условие леммы означает, что функции h и f удовлетворяют следующему соотношению:

$$|h(z)| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f(z,i)|^p \right)^{1+\varepsilon} \leq 1$$

Рассмотрим внешне-внутреннюю факторизацию функции $f(z)$. Найдутся такие внешняя и внутренняя функции θ и F, что справедливо равенство $f(z,i) = \theta(z,i)F(z,i)$, при этом $|\theta(z,i)| \leq 1$ и $i \in \mathbb{N}$.

Отметим, что на окружности выполняется следующее условие:

$$\|F(\xi)\|_{l^p} = \|f(\xi)\|_{l^p} \leq 1, \;\; \xi \in \mathbb{T},$$

а тогда по принципу максимума, $\|F(z)\|_{l^p} \leq 1$ и во всём круге $\mathbb{D}$.

Теперь можно определить функцию $\varphi(z,i) = \theta(z,i)F(z,i)^{p/2}$. Так как $|\theta(z,i)| \leq 1$ для всех z в круге $\mathbb{D}$, то справедлива оценка:

$$|h(z)| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\theta(z,i)|^2 |F(z,i)|^p \right)^{1+\varepsilon} = \|\varphi(z)\|_{l^2}^{2\varepsilon+2} \leq \|F(z)\|_{l^p}^{p(1+\varepsilon)} \leq 1.$$

Применяя теорему о задаче об идеалах для пространства l^2 с показателем $2+\varepsilon$, найдём такую функцию $g(z)$ в пространстве $H^\infty(\mathbb{D}; l^2)$, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} h(z) &= \langle \varphi(z), g(z) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \theta(z,i) F(z,i) g(z,i) F(z,i)^{p/2-1} = \langle f(z), g(z) F(z)^{p/2-1} \rangle \end{aligned}$$

и величина $\|g\|_{H^\infty(l^2)}$ ограничена константой $C_{l^2,\varepsilon}$. Таким образом, функция

$$g_1(z,i) = g(z,i) F(z,i)^{p/2-1}$$

решает задачу об идеалах для пространства l^p. Остаётся применить неравенство Гёльдера с показателями $2(p-1)/p$ и $2(p-1)/(p-2)$, чтобы получить оценку

$$\|g_1\|_{H^\infty(l^{p'})} \leq \|g\|_{H^\infty(l^2)} \|F\|_{H^\infty(l^p)}^{p/2-1} \leq C_{l^2,\varepsilon}.$$

Таким образом, мы завершили доказательство для пространств l^p с $p > 2$. □

Задача об идеалах для пространства l^1 была решена положительно автором в статье [Z1], и можно было бы использовать пространство l^1 вместо пространства l^2 в качестве "базового" в предыдущем рассуждении, чтобы получить разрешимость в задачи об идеалах сразу для всех l^p при $1 \leq p < \infty$. В этой диссертации мы не будем приводить отдельно доказательство разрешимости задачи об идеалах для пространства l^1, поскольку оно очень близко к теореме 6. Вместо этого, мы отметим, что разрешимость задачи об идеалах для пространств l^p с $p \in [1, 2)$ можно будет установить с помощью теоремы 6 и леммы 8. Достаточно заметить, что найдётся такое $q \in [2; +\infty)$, для которого верно соотношение $l^p = l^2 l^q$. Обозначим через X_N решётку с носителем на множестве $\{1 \dots N\}$. Разумеется, из разрешимости задачи об идеалах для пространства l^2 следует разрешимость задачи в пространстве l^2_N с константой, не зависящей от размерности. Тогда по теореме 6 задача об идеалах разрешима (тоже равномерно по N) в пространстве $l^p_N = l^2_N l^q_N$. Для доказательства теоремы 5 нам остаётся применить p-вогнутость решёток l^p и лемму 8.

3.5 Сведение теоремы 7 к теореме 6 и лемме 8

Для вывода теоремы 7 остаётся применить полученные результаты, теорему 6 и лемму 8. Действительно, всякая q-вогнутая решётка (со свойством Фату) представляется в виде $X = l^q F$ (см. лемму 3.10), при этом без потери общности мы можем считать, что $q \geq 2$. Рассмотрим последовательность $X_N = l^q_N F_N$ (X_N — суженная решётка X с носителем на множестве $\{1 \dots N\}$). Для пространств l^q_N задача об идеалах разрешима с оценкой и показателем, не зависящими от размерности. Тогда по теореме 6 она разрешима и в решётке X_N с соответствующей оценкой и показателем. Для завершения доказательства применим лемму 8.

В заключении этого параграфа сделаем следующее замечание про случай $p = \infty$. При изучении метрических аспектов теоремы о короне пока не удаётся с помощью интерполяционных методов или теоремы о неподвижной точке свести задачу для случая $p = \infty$ к хорошо известному случаю $p = 2$. Однако, как уже было отмечено, существует отдельное доказательство соответствующего утверждения А. Учиямы (см. [6]), в основе которого лежит оригинальное рассуждение Карлесона. Для задачи об идеалах метод Учиямы, по-видимому, не работает, и пока остаётся неясной справедливость утверждения для показателя $p = \infty$.

3.6 Доказательство леммы 8

Доказательство теоремы 6 и леммы 8 представляет собой модификацию метода Д. В. Руцкого из [34]. В отличие от случая теоремы о короне, в лемме 8 не удаётся пока исключить условие q-вогнутости решёток E. Это связано с тем, что на настоящий момент, как уже отмечалось, задача об идеалах для пространства $E = l^\infty$ не решена.

В этом параграфе мы докажем лемму 8, предполагая, что теорема 6 справедлива.

Напомним, что ограниченная w^* топология на пространстве H^∞ совпадает с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в $\mathbb{D}$. Впервые это довольно простое утверждение было отмечено, видимо, в [33].

Можно считать, что для каждого $j \in \operatorname{supp} X$ найдётся такая точка $z \in \mathbb{D}$, что

$f(z, j) \neq 0$. В противном случае в качестве $g(\,\cdot\,, j)$ можно просто взять тождественный ноль.

Зафиксируем параметры $\delta > 0$, $0 < \nu < 1$. Определим множество $K = \{z \in \nu\overline{\mathbb{D}} : |h(z)| \geq \delta\}$, которое, очевидно, компактно.

Напомним, что в случае конечномерной решётки X_N (определённой на некотором конечном подмножестве множества натуральных чисел) задача об идеалах предполагается разрешимой с показателем α и оценкой $C_X(1 + \epsilon)$, при этом C_X не зависит от размерности N, а ϵ можно выбрать сколь угодно малым положительным числом. Положим $\epsilon = \delta$.

Обозначим через $f_N(z)$ функцию $f(z)\chi_{\mathbb{D}\times\{1\ldots N\}}(z)$. Отметим, что функция f_N принимает значения в конечномерной решётке.

Для всякой точки $z \in K$ можно указать такой номер $N(z)$, что справедливо соотношение

$$(1 - \delta/2)|h(z)| \leq \|f_{N(z)}(z)\|_X^\alpha \leq 1.$$

Действительно, так как норма в X порядково непрерывна, то последовательность $\|f_{N(z)}(z)\|_X$ сходится к величине $\|f(z)\|_X$ при $N(z) \to \infty$ и фиксированном z. Заметим, что на множестве K выполняются соотношения

$$(1 - \delta/2)|h(z)| \leq |h(z)| - \delta^2/2 \leq \|f(z)\|_X^\alpha - \delta^2/2 \leq \|f_{N(z)}(z)\|_X^\alpha \leq 1,$$

если $N(z)$ настолько велико, что одновременно выполняются оценки:

$$\begin{aligned} \|f(z)\|_X^\alpha - \|f_{N(z)}(z)\|_X^\alpha &\leq \delta^2/2, \\ \|f(z) - f_{N(z)}(z)\|_X &\leq \delta^2/2. \end{aligned}$$

Теперь для каждой точки $z \in K$ рассмотрим окрестность $U(z)$, в которой для всех $z_1 \in U(z)$ справедливы неравенства

$$(1 - \delta)|h(z_1)| < \|f_{N(z)}(z_1)\|_X^\alpha < 1 + \delta^{1/\alpha}.$$

Эти окрестности образуют открытое покрытие компакта K. Следовательно, можно выбрать такой номер N, что для всех $z \in K$ выполняются оценки

$$(1-\delta)|h(z)| \le \|f_N(z)\|_X^\alpha \le 1 + \delta^{1/\alpha}.$$

Пусть t — некоторый положительный параметр, значение которого выберем позднее. Определим векторнозначную функцию φ с областью значений на решётке с носителем $\{1 \dots N+1\}$ покомпонентно: $\varphi(z) = (f_N(z), t)$. Отметим, что справедливы следующие равенства:

$$\varphi(z) = f_N(z) + te_{N+1} \text{ и } |\varphi(z)| = |f_N(z)| + te_{N+1},$$
$$\text{где } e_{N+1} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{N+1}, 0, \dots).$$

поскольку носители соответствующих функций не пересекаются.

Напомним свойство q-вогнутых решёток, которое отметили в разделе 2.2. Если X — q-вогнутая решётка, то существует такая универсальная константа $M_{q,X}$, что для всякой конечной последовательности элементов x_i решётки X выполняется соотношение

$$\left(\sum_{i=1}^N \|x_i\|_X^q\right)^{1/q} \le M_{q,X} \left\| \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^q\right)^{1/q} \right\|_X,$$

кроме того константа $M_{q,X}$ не зависит от количества элементов в последовательности, а зависит только от самой решётки X и параметра q. Тогда в нашей ситуации справедливо неравенство

$$\|\varphi(z)\|_X \ge M_{q,X}^{-1} \left(\|f_N(z)\|_X^q + t^q \|e_{N+1}\|_X^q\right)^{1/q}.$$

Выберем теперь параметр t, так чтобы $\delta^{1/\alpha} = t\|e_{N+1}\|_X$. Для всех $z \in \nu\mathbb{D}$ справедлива оценка

$$\|\varphi(z)\|_X^\alpha \ge M_{q,X}^{-\alpha} \max\{\delta, \|f_N(z)\|_X^\alpha\} \ge |h(z)| M_{q,X}^{-\alpha}(1-\delta).$$

С другой стороны,

$$\|\varphi(z)\|_X^\alpha \le \big(\|f_N(z)\|_X + t\|e_{N+1}\|_X\big)^\alpha \le \big(1 + 2\delta^{1/\alpha}\big)^\alpha.$$

Определим функции

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(\nu z)}{1+2\delta^{1/\alpha}} \quad \text{и} \quad h_1(z) = \frac{h(\nu z)(1-\delta)}{M^{\alpha}_{q,X}(1+2\delta^{1/\alpha})^{\alpha}}; \quad z \in \mathbb{D}.$$

Легко видеть, что для функций h_1 и φ_1 выполняются условия задачи об идеалах:

$$|h_1(z)| \le \|\varphi_1(z)\|^{\alpha}_X \le 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

при этом функция φ_1 принимает значения в конечномерной решётке, в которой по предположению задача об идеалах разрешима. Следовательно, найдётся такая функция $g_{\delta,\nu}$, для которой справедливы следующие соотношения:

$$h_1(z) = \langle \varphi_1(z), g_{\delta,\nu}(z)\rangle, \quad \|g_{\delta,\nu}\|_{H^\infty(X')} \le C_X(1+\delta).$$

Положим $K_\delta = \frac{M^{\alpha}_{q,X}(1+2\delta^{1/\alpha})^{\alpha-1}}{(1-\delta)}$. Отметим, что $K_\delta \to M^{\alpha}_{q,X}$, когда $\delta \to 0$. Обозначим через I_N множество $\{1 \dots N\}$ (напомним, что N зависит от δ и ν), а через χ_{I_N} соответствующую характеристическую функцию. Перепишем конечномерное решение задачи об идеалах в чуть более удобном виде:

$$h(\nu z) = K_\delta \langle f_N(\nu z), g_{\delta,\nu}(z)\chi_{I_N}(z)\rangle + K_\delta t g_{\delta,\nu}(z, N+1).$$

Будем варьировать параметры δ и ν. Пусть $\delta \to 0$, а $\nu \to 1$. Используя компактность шара в w^*-топологии, можно, перейдя к подпоследовательности, считать, что $g_{\delta,\nu}$ сходятся равномерно на компактных подмножествах множества $\mathbb{D}$ к некоторой функции g_1, величина нормы которой ограничена величиной C_X. Покажем, что функция $g = g_1 M^{\alpha}_{q,X}$ — решение исходной задачи об идеалах. Действительно, для фиксированного $z \in \mathbb{D}$ оценим разность

$$\begin{aligned} |\langle f(z), g(z)\rangle - h(z)| &\le |\langle f(z) - f(\nu z), g(z)\rangle| + |\langle f(\nu z) - f_N(\nu z), g(z)\rangle| \\ &+ |\langle f_N(\nu z), g(z) - M^{\alpha}_{q,X} g_{\delta,\nu}(z)\rangle| + |\langle f_N(\nu z), M^{\alpha}_{q,X} g_{\delta,\nu}(z)\rangle - h(z)|. \end{aligned}$$

Во всех последующих оценках удобно сначала применить неравенство ($|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_X \|y\|_{X'}$), а затем последовательно оценить каждый из множителей.

Рассмотрим первое слагаемое. Из непрерывности f внутри круга $\mathbb{D}$ и конечности величины $\|g\|_{H^\infty(X')}$ следует, что при $\nu \to 1$ первое слагаемое стремится к 0.

Второе слагаемое также сходится к 0 при $\delta \to 0$, поскольку норма функции g конечна, а

$$\|f(\nu z) - f_N(\nu z)\|_X \leq \frac{\delta^2}{2}.$$

Аналогично, можно получить, что и третье слагаемое также стремится к 0, так как $\|f_N(\nu z)\|_X \leq 1$, а $M^\alpha_{q,X} g_{\delta,\nu}(z) \to g(z)$ на компактных подмножествах множества $\mathbb{D}$.

Наконец, последнее слагаемое оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}
&|\langle f_N(\nu z), M^\alpha_{q,X} g_{\delta,\nu}(z)\rangle - h(z)| \\
&\quad \leq \big|K_\delta \langle f_N(\nu z), g_{\delta,\nu}(z)\rangle + K_\delta t g_{\delta,\nu}(z, N+1) - h(\nu z)\big| \\
&\qquad + |h(z) - h(\nu z)| + \big|(M^\alpha_{q,X} - K_\delta)\langle f_N(\nu z), g_{\delta,\nu}(z)\rangle - K_\delta t g_{\delta,\nu}(z, N+1)\big|.
\end{aligned}$$

В этой оценке первое слагаемое тождественный ноль, второе сходится к 0 из непрерывности h в круге $\mathbb{D}$, а третье тоже стремится к 0, так как $K_\delta \to M^\alpha_{q,X}$, величина $|\langle f_N(\nu z), g_{\delta,\nu}(z)\rangle|$ ограничена универсальной постоянной, а $|t g_{\delta,\nu}(z, N+1)| \leq \delta \|g\|_{X'} \to 0$.

Итак, нам удалось показать, что $\langle f(z), g(z)\rangle = h(z)$ и величина нормы функции g контролируется соответствующим образом: $\|g\|_{H^\infty} \leq C_X M^\alpha_{q,X}$.

Замечание 3.16. *Отметим, что на самом деле приведённое выше доказательство можно применить и в несколько более общем случае. Вместо условия q-вогнутости банаховой решётки последовательностей X можно потребовать следующее: существует такая непрерывная строго возрастающая функция θ, $\theta(0) = 0$, что для покомпонентно определённой функции $\varphi(z) = (f(z), t)$, $t > 0$, $z \in \mathbb{D}$, начиная с некоторого номера N, где f принимает значения в конечномерной решётке X_N, выполняется неравенство*

$$\|\varphi(z)\|_X \geq \|f(z)\|_X + \theta(t).$$

3.7 Доказательство теоремы 6

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 6, сформулируем несколько важных дополнительных утверждений. Основным инструментом доказательства будет следующая теорема о неподвижной точке.

Теорема 3.17. *Пусть K — компактное выпуклое подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства. Пусть отображение Φ определено на множестве K и действует в множество непустых выпуклых компактных подмножеств множества K. Если график*

$$\Gamma(\Phi) = \{(x, y) \in K \times K\colon\; y \in \Phi(x)\}$$

замкнут в $K \times K$, то отображение Φ имеет неподвижную точку, то есть для некоторого $x \in K$ выполняется соотношение $x \in \Phi(x)$.

Нам потребуется следующая лемма о непрерывном выборе представителей для функции из произведения решёток. Её доказательство основано на теореме Майкла о непрерывном выборе. Мы ограничимся только формулировкой (более подробно см. [34], предложение 5).

Лемма 3.18. *Пусть F_0, F_1 — конечномерные банаховы решётки функций, определенных на одном и том же конечном множестве со считающей мерой. Тогда для каждого наперёд заданного $\varepsilon > 0$ найдётся такое непрерывное отображение $\Delta : F_0F_1 \setminus \{0\} \to F_1$, принимающее неотрицательные значения, что $\|\Delta f\|_{F_1} \leq 1$ и при этом $\|f(\Delta f)^{-1}\|_{F_0} \leq (1+\varepsilon)\|f\|_{F_0F_1}$.*

Отметим существенность условия конечномерности решёток. Вопрос о справедливости аналога данной леммы в случае бесконечномерных решёток остаётся, насколько автору известно, открытым даже в простом случае $F_0' = F_1$.

Ещё раз напомним, что ограниченная w^*-топология на пространстве H^∞ совпадает с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в $\mathbb{D}$.

Мы переходим к доказательству теоремы 6. Как уже говорилось, мы применим подход Д. В. Руцкого.

Напомним формулировку утверждения, которое нам предстоит доказать. Пусть E и F конечномерные банаховы решётки. Пусть задача об идеалах разрешима для решётки E. Необходимо показать, что для конечномерной решётки $X = EF$, если она банахова, задача об идеалах также разрешима с показателем α_E и константой $C_E 2^{\alpha_E}(1+\delta)$ для всякого положительного δ.

Далее всюду через z будем обозначать переменную, принадлежащую кругу $\mathbb{D}$, а через ξ — переменную, лежащую на окружности $\mathbb{T}$.

Найдём измеримое разложение функции $f(\xi) = f_E(\xi) f_F(\xi)$. Не умаляя общности, можно считать, что функции f_E, f_F лежат в пространствах $L^\infty(E)$ и $L^\infty(F)$ соответственно, и величины их норм ограничены единицей.

Отметим, что из леммы 3.9 следует справедливость равенства $E' = (EF)'F$. Применим теперь лемму 3.18. В качестве решётки из формулировки леммы возьмём $F_0 := (EF)'$ и $F_1 := F$. Тогда найдётся непрерывное отображение $\Delta : (EF)'F (= E') \to F$, обладающее указанными в заключении леммы свойствами.

Напомним, что через C_E мы обозначили константу, с которой существует решение задачи об идеалах для решётки E. Определим шар

$$B = \{\gamma \in H^\infty(E'),\ \|\gamma\|_{H^\infty(E')} \le C_E\}.$$

Отметим, что по теореме Банаха–Алаоглу выбранный шар компактен в w^*-топологии. Пусть $r_k \in (0,1]$, а $\delta > 0$. Зафиксируем k и δ. Обозначим через σ элемент конечномерной решётки F, такой что все его компоненты строго отделены от 0, а величина нормы равна δ. Зафиксируем ещё функцию γ из шара B. Дальнейшие построения выполняются для этой функции γ. Определим функцию

$$\varphi(\xi, j) = \log(|\left(\Delta\gamma\left(r_k\xi\right)\right)(j)| + |f_F(\xi, j)| + \sigma_j).$$

В последнем равенстве понимаем под $\gamma(r_k\xi, j)$ свёртку функции γ с ядром Пуассона, соответствующим радиусу r_k. Через H обозначим оператор гармонического сопряжения. Вновь построим внешнюю функцию

$$\Phi(\xi, j) = e^{\varphi(\xi,j) + iH(\varphi(\xi,j))}$$

и определим функцию $\Psi(z) = \frac{f(z)}{\Phi(z)}$. Отметим некоторые полезные свойства построенных функций:

$$|\Phi(\xi, j)| = |f_F(\xi, j)| + |\Delta\gamma(r_k\xi, j)| + \sigma_j,$$

и, так как $\|f_F\|_{L^\infty(F)} \le 1$ и по лемме 3.18 справедливо соотношение

$$\|\Delta\gamma(z)\|_F \le 1,$$

то выполняется оценка $\|\Phi\|_{H^\infty(F)} \le 2 + \delta$.

Напомним, что через α_E обозначен показатель, для которого разрешима задача об идеалах в банаховой решётке E. Завершим конструкцию, построив отображение T, которое сопоставляет исходной функции γ множество функций

$$\{u(z) \in B \mid \langle u(z), \Psi(z)\rangle = h(z)/(2+\delta)^{\alpha_E}\}.$$

Мы хотим применить к отображению T теорему Фана–Какутани о неподвижной точке. Проверим, что действительно находимся в условиях теоремы. Для начала покажем, что для всякой функции γ из шара B образы $T\gamma$ — непустые множества. Для этого достаточно убедиться, что функция Ψ удовлетворяет условиям задачи об идеалах для решётки E. Действительно, для каждого фиксированного z, справедлива следующая оценка:

$$|h(z)| \le \|f(z)\|_{EF}^{\alpha_E} \le \|\Psi(z)\|_E^{\alpha_E} \|\Phi(z)\|_F^{\alpha_E} \le (2+\delta)^{\alpha_E} \|\Psi(z)\|_E^{\alpha_E}.$$

Заметим, что также выполняются соотношения

$$|\Psi(\xi, j)| = \left|\frac{f(\xi, j)}{\Phi(\xi, j)}\right| = \frac{|f_E(\xi, j)||f_F(\xi, j)|}{|f_F(\xi, j)| + |\Delta\gamma(r_k\xi, j)| + \sigma_j} \le |f_E(\xi, j)|,$$

для каждого индекса $j \in \mathbb{N}$, а, следовательно, верно неравенство

$$\|\Psi(\xi)\|_E \le \|f_E(\xi)\|_E \le 1.$$

Применяя принцип максимума, получаем, что справедлива оценка

$$\|\Psi(z)\|_E \le 1.$$

Таким образом, мы оказались в условиях задачи об идеалах для решётки E, и непустота образов отображения T доказана. Выпуклость этих множеств очевидна. Так как компактность в нашем случае совпадает с секвенциальной компактностью и оператор T, как будет показано, имеет замкнутый график, то и утверждение о компактности образов считаем ясным.

Осталось проверить условие замкнутости графика отображения T. Необходимо убедиться, что для всякой последовательности γ_n, которая сходится равномерно на компактных подмножествах множества $\mathbb{D} \times \operatorname{supp} E$ к некоторой функции γ, и последовательности функций u_n, лежащих в образах $T\gamma_n$ и равномерно сходящихся на компактных подмножествах множества $\mathbb{D} \times \operatorname{supp} E$ к некоторой функции u, справедливо утверждение: $u \in T\gamma$. Последнее означает, что для построенной по γ функции Ψ из класса $H^\infty(E)$ верно равенство $\langle u(z), \Psi(z)\rangle = h(z)/(2+\delta)^{\alpha_E}$. Условимся отмечать индексом n возникающие при построении для функции γ_n функции Φ_n и Ψ_n:

$$\varphi_n(\xi, j) = \log(|\Delta\gamma_n(r_k\xi, j)| + |f_F(\xi, j)| + \sigma_j).$$

$$\Phi_n(\xi, j) = e^{\varphi_n(\xi,j) + iH(\varphi_n(\xi,j))}$$

$$\Psi_n(z) = \frac{f(z)}{\Phi_n(z)}.$$

Воспользуемся, тем что $r_k < 1$. Тогда при фиксированном j функции $\varphi_n(\,\cdot\,, j)$ сходятся при $n \to \infty$ равномерно на окружности $\mathbb{T}$ к функции φ, которая была построена по функции γ. Из равномерной сходимости, разумеется, следует сходимость в L^2, и пользуясь непрерывностью оператора гармонического сопряжения в L^2, мы получаем, что функции $\Phi_n(\,\cdot\,, j)$ сходятся равномерно на компактных подмножествах круга $\mathbb{D}$ к построенной по γ функции $\Phi(\,\cdot\,, j)$. Поскольку функции $\Phi_n(\,\cdot\,, j)$ отделены от 0 на величину σ_j, а функции принимают значения в конечномерных решётках, можно перейти к пределу в равенстве:

$$\left\langle u_n(z), \frac{f(z)}{\Phi_n(z)} \right\rangle = h(z)/(2+\delta)^{\alpha_E},$$

что и требовалось показать.

Тем самым, мы проверили все условия теоремы Фана–Какутани о неподвижной точке. Следовательно, существует такая функция γ из множества D, что выполняется включение $\gamma \in T\gamma$. Напомним, что все построения были выполнены в зависимости от параметра r_k. Наша заключительная цель в доказательстве основной теоремы состоит в том, чтобы перейти к пределу при $r_k \to 1$ для функций-решений и показать, что предельная функция является решением исходной задачи. Обозначим через γ_k функции-решения, полученные для параметра r_k, а соответствующие построенные функции через φ_k,Φ_k,Ψ_k (отметим, что это не те функции, которые встречались при доказательстве замкнутости графика оператора T, и были обозначены похожим образом). По построению для каждого $z \in \mathbb{D}$ справедливо следующее равенство: $\langle \gamma_k(z), \Psi_k(z)\rangle = h(z)/(2+\delta)^{\alpha_E}$. Непосредственно из определения функции Ψ_k получаем, что

$$\left\langle f(z), \frac{\gamma_k(z)}{\Phi_k(z)}(2+\delta)^{\alpha_E} \right\rangle = h(z).$$

Из леммы 3.18 следует, что отношения $\left\|\frac{\gamma_k(z,j)}{\Delta\gamma_k(z,j)}\right\|_{(EF)'}$ ограничены в совокупности величиной $(1+\varepsilon)C_E$. Напомним, что

$$|\Phi_k(\xi,j)| = |\left(\Delta\gamma_k\left(r_k\xi\right)\right)(j)| + \sigma_j + |f_F(\xi,j)|.$$

Так как множество B компактно в w^*-топологии, то можно считать, что при фиксированном j функции γ_k сходятся равномерно на компактных подмножествах множества $\mathbb{D}\times \operatorname{supp} E$ к некоторой ограниченной аналитической функции $u(\,\cdot\,,j)$. Тогда, ввиду непрерывности отображения Δ и определения функции φ_k, можно считать, что функции $\varphi_k(\,\cdot\,,j)$ слабо сходятся в L^2 к некоторой функции $v(\,\cdot\,,j)$ для всякого фиксированного индекса $j \in \operatorname{supp} E \subset \mathbb{N}$. Используя слабую непрерывность оператора гармонического сопряжения, получаем, что функции $\Phi_k(\,\cdot\,,j)$ сходятся равномерно на компактных подмножествах множества $\mathbb{D}\times\operatorname{supp} E$ и отделены от 0. Таким образом, можно считать, что

$$\frac{\gamma_k(r_k z)}{\Phi_k(z,j)} \to w(z,j), \quad k\to\infty,\ r_k \to 1,$$

где $w(z,j)$ — аналитические функции в круге для каждого индекса j. Составим из этих функций вектор-функцию $w \in H^\infty(E')$. Применяя оценку

$$\left\|\frac{\gamma_k(r_k\xi,j)}{\Phi_k(\xi,j)}\right\| \le \left\|\frac{\gamma_k(r_k\xi,j)}{\Delta\gamma_k(r_k\xi,j)}\right\| \le (1+\varepsilon)C_E,$$

получаем, что

$$\|w(z)\|_{(EF)'} \leq (1+\varepsilon)C_E$$

для всякого $z \in \mathbb{D}$. Теперь можно перейти к пределу в соответствующем равенстве:

$$\begin{aligned} &|\langle f(z), w(z)(2+\delta)^{\alpha_E}\rangle - h(z)| \\ &\qquad \leq \|f(z)\|_{EF}(2+\delta)^{\alpha_E}\left(\left\|w(z) - \frac{\gamma_k(r_k z)}{\Phi_k(z)}\right\|_{(EF)'}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left\|\frac{\gamma(z)}{\Phi_k(z)} - \frac{\gamma_k(r_k z)}{\Phi_k(z)}\right\|_{(EF)'}\right) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остаётся перейти к пределу по $\delta \to 0$.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научном руководителю Сергею Витальевичу Кислякову за постановку задач, помощь в работе, а также за терпение и непрерывную поддержку.

Автор благодарит лабораторию Чебышёва и ПОМИ РАН за отличные условия для работы.

Список публикаций автора по теме диссертации

[Z1] И.К. Злотников, *“Об оценках в задаче об идеалах алгебры H^∞”,* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 447, с. 66–74, (2016).

[Z2] И.К. Злотников, *“Задача об идеалах алгебры H^∞ в случае некоторых пространств последовательностей”,* Алгебра и анализ, т. 29, вып. 5, с. 51–67, (2017).

[KZ] S. V. Kislyakov, I. K. Zlotnikov, *“Coinvariant Subspaces of the Shift Operator and Interpolation”,* Analysis Mathematica, vol. 44, no. 2, p. 219-236, (2018).

Список литературы

[1] Д. С. Анисимов, С. В. Кисляков, *“Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление”*, Алгебра и анализ, т. 16, вып.5, с. 1-33, (2004).

[2] А. Д. Баранов, В. П. Хавин, *“Допустимые мажоранты для модельных подпространств и аргументы внутренних функций”*, Функциональный анализ и его приложения, т. 40, вып. 4, с. 3–21,(2006).

[3] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *“Функциональный анализ, изд. 2,”* Москва, 1977.

[4] С.В. Кисляков, Д.В. Руцкий, *“Несколько замечаний к теореме о короне”,* Алгебра и анализ, т. 23, вып. 2, с. 171-191, (2012).

[5] С.В. Кисляков, *“Теорема о короне и интерполяция”* , Алгебра и анализ 2015, т. 27, вып. 5, с. 69–80, (2015).

[6] С. В. Кисляков, Куанхуа Шу, *“Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы”,* Алгебра и анализ, т. 8, вып. 4, с. 75–109, (1996).

[7] С.В. Кисляков, *“В пространстве непрерывно дифференцируемых функций на торе нет локальной безусловной структуры”,* Препринт ЛОМИ P-I-77, с. 3-19, Ленинград, 1977.

[8] В.А. Толоконников, *“Оценки в теореме Карлесона о короне, идеалы алгебры H^∞, задача Секефальви–Надя”,* Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 113, с. 178-198, (1981).

[9] J. Bergh, J. Löfström, *“Interpolation spaces”,* Grundlehren Math. Wiss., 223, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.

[10] J. Bourgain, *“Some consequences of Pisier's approach to interpolation”*, Israel. J. Math, vol. 77, p. 165–185, (1992).

[11] L. Carleson, *“Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem”*, Ann. of Math., vol. 76, no. 3, p. 547–559, (1962).

[12] A. Devinatz, *“Conjugate function theorems for Dirichlet algebras”*, Rev. Un. Mat. Argentina, vol. 23, no. 1, p. 3-30, (1966).

[13] R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. L. Shields, *“On cyclic vectors of the backward shift”*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73, no. 1, p. 156–159, (1967).

[14] C. Fefferman, N.M. Riviere and Y.Sagher, *“Interpolation between H^p spaces: the real method”*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 191, p. 75-81, (1974).

[15] D. Freitag, *“Real interpolation of weighted Lp-spaces”*, Math. Nachr., vol. 86, p. 15-18, (1978).

[16] T. W. Gamelin, *“Uniform Algebras”*, 2nd edition, Chelsea Press, 1984.

[17] J. Garcia-Cuerva, J.L. Rubio de Francia, *“Weighted norm inequalities and related topics”*, North-Holland, 1985.

[18] K. Hoffman, *“Banach spaces of analytic functions”*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962

[19] I. I. Hirschman Jr., Richard Rochberg, *“Conjugate function theory in weak $*$-Dirichlet algebras”*, J. Funct. Anal., vol. 16, no. 4, p. 359-371, (1974).

[20] P. Jones, *“L^∞ estimates for the $\overline{\partial}$ problem on a half-plane”*, Acta Math., vol. 150, p. 137–152, (1983).

[21] S. Kislyakov, N. Kruglyak, *“Extremal problems in interpolation theory, Whitney-Besicovitch coverings, and singular integrals”*, vol. 74, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (New Series) [Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical monographs (New series)]. Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG, (2013).

[22] S. V. Kislyakov, I. K. Zlotnikov, *"Interpolation for intersections of Hardy-type spaces"*, submitted to Israel J. Math., preprint: arxiv.org/abs/1903.09959

[23] S. V. Kislyakov, *"A sharp correction theorem"*, Studia Math., vol. 113, p. 177-196, (1995).

[24] S. V. Kislyakov, *"Interpolation involving bounded bianalytic functions"*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 113, p. 135-149, (2000).

[25] S. V. Kislyakov, *"Interpolation of H^p-spaces: some recent developments"*, Israel Math. Conf. vol. 13, p. 102–140, (1999).

[26] P. Koosis, *"Introduction to H^p Spaces"*, (Cambridge Tracts in Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press, (1999).

[27] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *"Classical Banach spaces I and II"*, Springer-Verlag, (1996).

[28] N. K. Nikolski, *"Operators, functions, and systems: an easy reading"*, Vol. 1, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 92, American Mathematical Society, Providence, RI, (2002).

[29] N. K. Nikolski, *"Treatise on the Shift Operator"*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 273, Springer, Berlin, (1985).

[30] G. Pisier, *"Interpolation between H^p spaces and non-commutative generalizations, I"*, Pacific J. Math., vol. 155 , no. 2, p. 341-368, (1992).

[31] K. V. R. Rao, *"On a generalized corona problem"*, J. Anal. Math., vol. 18, no. 1, p. 277–278, (1967).

[32] M. Rosenblum, *"A corona theorem for countably many functions"*, Integral Equations Operator Theory, vol. 3, no. 1, p. 125-137, (1980).

[33] L. Rubel, A. Shields, *"The space of bounded analytic functions on a region"*, Ann. Inst. Fourier, vol. 16, no. 1, p. 235-277, (1966).

[34] D. Rutsky, *"Corona problem with data in ideal spaces of sequences"*, Arch. Math. (Basel), vol. 108, no. 6, p. 609-619, (2017).

[35] T. P. Srinivasan and Ju-kwei Wang, *“Weak *-Dirichlet algebras, Function Algebras”,* (Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras, Tulane Univ., 1965) Scott-Foresman, Chicago, Ill., p. 216-249, (1966).

[36] E. Stein, *“Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions”,* (PMS-30). Princeton, New Jersey: Princeton University Press, (1970).

[37] S. Treil, *“The problem of ideals of H^∞: beyond the exponent 3/2”,* J. Funct. Anal., vol. 253, no. 1, p. 220-240, (2007).

[38] S. Treil, *“Estimates in the corona theorem and ideals of H^∞: A problem of T. Wolff”,* J. Anal. Math., vol. 87, p. 481-495, (2002).

[39] A. Uchiyama, *“Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions”,* Preprint, UCLA, (1980).

[40] T. Wolff, *“A note on interpolation spaces”*, Harmonic Analysis (Minneapolis, Minn., 1981), Lecture Notes in Math., 908, Springer-Verlag, Berlin–New York, p. 199-204, (1982).

[41] Q. Xu, *“Some properties of the quotient space $(L^1(\mathbb{T}^d)/H^1(\mathbb{D}^d))$”*, Illinois J. Math., vol. 37, no. 3, p. 437–454, (1993).