На правах рукописи

СТЕПАНОВ Алексей Владимирович

Структурная теория и подгруппы групп Шевалле над кольцами

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Санкт-Петербург
2014

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете "ЛЭТИ"

Научный консультант:

Вавилов Николай Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского государственного университета

Официальные оппоненты:

Аржанцев Иван Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор, декан факультета компьютерных наук, заведующий базовой кафедрой Яндекса Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики"

Гордеев Николай Леонидович, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена

Залесский Александр Ефимович, доктор физ.-мат. наук, профессор, член-корр. НАН Беларуси

Ведущая организация:

Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится "10" декабря 2014 г. в 16:00 часов на заседании совета Д 002.202.02 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском отделении математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Санкт-Петербургского отделения математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, и на сайте http://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-02/dissertations

Защита будет проходить в Петербургском отделении Математического института имени В.А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, 27, ауд. 311.

Автореферат разослан "____" ____________ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук А. В. Малютин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Изучение линейных групп над полями восходит к середине девятнадцатого века. Однако над кольцами, кроме полулокальных и некоторых типов арифметических колец, практически ничего не было известно до середины 1960-х годов. Настоящая революция общности была инициирована основополагающей работой Х. Басса [47] (см. также [25, 48]). В частности, Басс ввел новое понятие размерности колец, стабильный ранг, и выяснил, что основные результаты о структуре полной линейной группы GL_n над полем с необходимыми изменениями переносятся на кольца, чей стабильный ранг меньше n. При этом условии Басс доказал стандартные коммутационные формулы, стандартность нормального строения и сюръективную стабилизацию $\mathrm{K}_1^{\mathrm{GL}_{n-1}}(R) \to \mathrm{K}_1(R)$. Немного позже Л.Н. Васерштейн доказал и инъективную стабилизацию $\mathrm{K}_1^{\mathrm{GL}_n}(R) \to \mathrm{K}_1(R)$, откуда следует абелевость группы $\mathrm{K}_1^{\mathrm{GL}_n}(R)$. Эти результаты были перенесены на другие классические группы в работах Х. Басса, А. Бака, Л. Н. Васерштейна и других авторов.

Следующий скачок общности произошел в работах Дж. С. Уилсона [67], И. З. Голубчика [31], А. А. Суслина [37], Л. Н. Васерштейна [65] и З. И. Боревича и Н. А. Вавилова [29], в которых было показано, что стандартные коммутационные формулы и стандартность нормального строения группы $\mathrm{GL}_n(R)$ над коммутативным кольцом R имеет место при $n \geqslant 3$ независимо от размерности кольца R. С другой стороны, В. ван дер Каллен [57] и А. Бак [44] показали, что абелевость $\mathrm{K}_1^{\mathrm{GL}_n}(R)$ существенным образом зависит от размерности. Точнее, в работе [44] доказано, что группа $\mathrm{K}_1^{\mathrm{SL}_n}(R)$ является нильпотентной степени не выше $\delta(R) - n + 3$, где $\delta(R)$ обозначает размерность Басса–Серра кольца R, причем оценка на степень нильпотентности не может быть улучшена в общем случае.

В работе [37] А. А. Суслин для решения проблемы Серра о проективных модулях и ее K_1-аналога применил метод локализации, восходящий к работе Д. Квиллена [60]. Эта идея оказалась очень плодотворной и позволила перенести стандартные коммутационные формулы, стандартное описание нормальных делителей и теорему о нильпотентности K_1 на все группы Шевалле. Это было сделано в работах Дж. Таддеи [63], Л. Н. Васерштейна [66], И. Абе [41] и Р. Хазрата и Н. А. Вавилова [53]. В самое последнее время в работах В. А. Петрова и А. К. Ставровой положено начало систематическому изучению нерасщепимых изотропных редуктивных групп над коммутативными кольцами, в частности доказан локально-глобальный принцип Суслина и стандартные коммутационные формулы. Кроме этого, Ф. Морель, М. Вендт, А. Ашок и другие авторы начали изучение нестабильных K-функторов методами $\mathbb{A}^1$-теории гомотопий, используя при этом локально-глобальный принцип, результаты о стабилизации и другие ингриедиенты нестабильной K-теории алгебраических групп над кольцами.

Пусть G – групповая схема Шевалле–Демазюра, а R – коммутативное кольцо. Группа $\mathrm{K}_1^G(R) = G(R)/E(R)$ по определению является препятствием к тому, чтобы любая матрица из $G(R)$ могла быть приведена к единичной при помощи элементарных преобразований из $G(R)$. Другим аспектом этого вопроса является ширина (или, что то же самое, длина) элементов элементарной группы $E(R)$ в некотором множестве образующих. Например, ширина $E(R)$ в элементарных образующих – это просто переформулировка вопроса о количестве элементарных преобразований, необходимых для приведения любой матрицы к единичной. Из разложения Гаусса следует, что над полем эта ширина конечна. Более того, ширина $E(R)$ в коммутаторах не превосходит 2, что вытекает из работ Е. Эллерса и Н. Л. Гордеева [50] и М. Либека, Е. А. О'Брайана, А. Шалева и П. Х. Тьепа [59], посвященных доказательству гипотезы Оре. Над произвольными кольцами эти результаты, конечно, не верны. Даже класс колец, для которого ширина группы $E(R)$ в элементарных образующих конечна, очень невелик, он включает в себя нульмерные и некоторые арифметические кольца. Доказательство конечности для колец целых полей алгебраических чисел получено в работах Д. Картера и Г. Е. Келлера [49] и О. Тавгеня [38], контрпример $R = \mathbb{C}[x]$ приведен в статье В. ван дер Каллена [56]. При этом вопрос о конечности ширины $E(R)$ до сих пор остается открытым для таких простых колец, как $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{F}_p[x]$.

Как показано в работе Й. Шалома [61], ограниченность ширины элементов группы Шевалле в элементарных образующих связана с вычислением константы Каждана, являющейся важным инвариантом теории представлений. Известно также, что конечность ширины элементарной группы связана с конгруэнц-проблемой.

В работе В. ван дер Каллена [56] указано препятствие к конечности ширины группы $E(R)$ в элементарных образующих. Пусть X^∞ обозначает прямое произведение счетного количества экземпляров группы или кольца X. Тогда легко видеть, что конечность ширины $E(R)$ эквивалентна равенству $E(R)^\infty = E(R^\infty)$. Очевидно, что вторая из этих групп всегда содержится в первой. Заметим, что $G(R)^\infty = G(R^\infty)$, поэтому группа $E(R^\infty)$ нормальна в $G(R)^\infty$. Таким образом, препятствием к конечности ширины является факторгруппа $E(R)^\infty/E(R^\infty)$. В диссертации доказано, что ширина коммутаторов $[a,b]$, $a \in E(R)$, $b \in G(R)$ ограничена, что эквивалентно тому факту, что эта факторгруппа лежит в центре группы $\mathrm{K}_1(R^\infty)$. Таким образом, результат настоящей диссертации позволяет изучать препятствие к конечности ширины группы $E(R)$ в элементарных образующих.

Изучение подгрупп линейных групп началось с работ Жордана 1880-х годов. В середине XX-го века, когда закладывались основы теории алгебраических групп, ведущие специалисты, включая Брюа, Бореля и Титса, изучали решетку замкнутых по Зарискому подгрупп редуктивных групп. Следующий виток активности в изучении решетки подгрупп групп Шевалле над полями, особенно конечными и алгебраически замкнутыми, произошел в 1970-х годах в связи с классификацией простых конечных групп. Он связан с именами М. Ашбахера, Р. Дая, А. Е. Залесского, Г. Зейца, М. Кантора, О. Кинга, Б. Куперстейна, М. Либека, Ли Шанжи, Ф. Г. Тиммесфельда, и многих других. В рамках “*Проекта классификации максимальных подгрупп*” в работе [43] М. Ашбахер определил классы C_1–C_8 подгрупп, которые являются максимальными подгруппами конечных классических групп, и высказал гипотезу, что любая максимальная подгруппа либо принадлежит к одному из этих классов, либо является почти простой группой в неприводимом представлении.

С другой стороны, в середине 1970-х годов в работе [26] З. И. Боревич получил описание решетки подгрупп полной линейной группы над полем, содержащих группу диагональных матриц. Этот результат был перенесен на полулокальные кольца в работе [27]. Изучению подгрупп групп Шевалле над полями и полулокальными кольцами, содержащими максимальный тор, посвящены десятки работ, однако нет никаких шансов перенести их результаты на произвольные кольца. Оказалось, что правильным аналогом группы диагональных матриц для полной линейной группы над кольцом является группа клеточно диагональных матриц. Описание надгрупп группы клеточно диагональных матриц над коммутативным кольцом было получено З. И. Боревичем и Н. А. Вавиловым в работе [29], а для некоммутативных колец, удовлетворяющих некоторому условию стабильности – в работах [28, 2]. В работе [22] и в кандидатской диссертации автора было получено стандартное описание решетки подгрупп $\mathrm{GL}_n(R)$, содержащих группу клеточно диагональных матриц над подкольцом K, при условии, что пара колец $K \subseteq R$ удовлетворяет некоторому условию стабильности.

Эти результаты позволили З. И. Боревичу и Н. А. Вавилову предположить, что подгруппы групп Шевалле над коммутативными кольцами из классов Ашбахера C_1–C_8 хотя и не являются максимальными, но все же достаточно велики, чтобы можно было пытаться описать решетку их надгрупп. Следуя этой идее, Н. А. Вавилов определил 5 классов “больших” подгрупп, соответствующих (некоторым образом объединенным) классам Ашбахера. В диссертации получены важные результаты об одном из этих классов, надгруппах “subring subgroups”, т. е. элементарной группы над подкольцом основного кольца.

На самом деле, эта конкретная проблема хорошо известна в теории линейных групп с начала 1960-х годов: *Описать все подгруппы линейной алгебраической группы над кольцом A, содержащие подгруппу всех матриц, имеющих коэффициенты в заданном подкольце $K \subseteq A$.* В частности, эта задача была включена в “*Коуровскую тетрадь*”. Первые примеры были разобраны Н. С. Романовским [35, 36] еще в 1967 году. Он доказал стандартность решетки подгрупп в $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$, содержащих $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. В дальнейшем эта проблема изучалась в десятках работ. Полученное там стандартное описание состоит в следующем. Пусть $G = \mathrm{G}(\Phi, \_\,)$ – групповая схема Шевалле–Демазюра, $E = \mathrm{E}(\Phi, \_\,)$ – ее элементарная подгруппа, а $K \subseteq A$ – пара коммутативных колец. Для любой подгруппы H в $G(A)$, содержащей $E(K)$, существует единственное подкольцо R между K и A такое, что

$$E(R) \leqslant H \leqslant N_A(R),$$

где $N_A(R)$ – это нормализатор $E(R)$ в $G(A)$. До работ автора стандартное описание надгрупп $E(K)$ в $G(A)$ было известно в следующих случаях.

0. $A = K$, $\Phi \neq A_1$. В этом случае результат следует из нормальности элементарной подгруппы (Дж. Таддеи [63], 1986).
1. $\Phi = A_n$, $n \geqslant 2$, A является полем частных дедекиндова кольца K (Р. А. Шмидт [40], 1979).
2. $\Phi \neq A_1$, A является полем частных области главных идеалов K (Я. Н. Нужин, А. В. Якушевич [34], 2000).
3. $\Phi \neq A_1$, поле A является алгебраическим расширением поля K, при условии, что все структурные константы $N_{\alpha\beta ij}$ коммутационной формулы Шевалле обратимы в K или поле K является совершенным, и, кроме того, для некоторых систем корней поле K не слишком маленькое (Я. Н. Нужин [33], 1983).

В диссертации обобщаются и улучшаются стандартные коммутационные формулы и результаты о нильпотентной структуре K_1 для групп Шевалле, а также получен результат об ограниченности ширины коммутаторов. Кроме того, полностью решена задача о решетке подгрупп группы $G(A)$, содержащих $E(K)$, в случае систем корней с двойными связями и обратимой двойкой. Разработаны теоретико-групповые аргументы, позволяющие получить аналогичное описание решетки подгрупп $G(A)$, нормализуемых $E(K)$.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Основной целью диссертации является изучение структурной теории групп Шевалле над кольцами, в частности, коммутационных формул, нильпотентной структуры K_1 и ширины элементов, а также решетки их подгрупп, нормализуемых группой над подкольцом. Важными целями работы являются также разработка новой вариации метода локализации, метода универсальной локализации, и упрощение вычислений с образующими элементарной группы, необходимых для применения этого метода. Решение этих задач позволит в будущем перенести результаты диссертации на нерасщепимые изотропные группы, а также группы, определенные сравнениями.

ОБЩАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ. Для изучения структурной теории групп Шевалле над кольцами используется коммутационная формула Шевалле, принцип расщепления и различные вариации принципа избавления от знаменателей. Основной новой идеей является построение *ключевой конструкции* – общего элемента главной конгруэнц-подгруппы уровня главного идеала. Точнее, на основании коммутационной формулы Шевалле вычислена подгруппа, порожденная пересечениями унипотентных радикалов двух противоположных параболических подгрупп с данными конгруэнц-подгруппами, после чего в главе 2 используется только этот результат и принцип расщепления. В главе 3 на основании принципа избавления от знаменателей и ключевой конструкции разработан метод универсальной локализации, с помощью которого и получены все результаты.

В главах 4 и 5 основной новой идеей является использования результатов Н. Л. Гордеева [51] о тождествах с константами в группах Шевалле. Кроме этого используются методы и результаты теории представлений групп Шевалле, а также методы теории групп и групповых схем. Основная канва доказательства основного результата главы 4 заимствована из работ З. И. Боревича и Н. А. Вавилова. При изучении квази-алгебраических расширений в главе 5 основными инструментами являются методы коммутативной алгебры.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Основными новыми результатами диссертации являются следующие.

- Найдено порождающее множество относительной элементарной группы, более маленькое, чем известные ранее.
- Доказан относительный локально-глобальный принцип Суслина и усиленная версия принципа избавления от знаменателей.
- Доказана относительная мультикоммутационная формула, обобщающая все известные ранее коммутационные формулы, выполненные независимо от размерности кольца.
- Получена общая мультикоммутационная формула, обобщающая результаты о нильпотентности относительного K_1.
- Найдена оценка ширины коммутаторов в любой функториальной системе образующих, не зависящая от основного кольца.
- Получено "короткое" тождество с константами в группе Шевалле типа F_4.
- Получено стандартное описание решетки подгрупп группы Шевалле $G(A)$, нормализуемых $E(K)$, при условии, что система корней группы G имеет двойные связи, а K – подкольцо коммутативного кольца A, содержащее $1/2$.
- Доказано, что если система корней группы G имеет простые связи, то стандартность описания решетки подгрупп в $G(A)$, содержащих $E(K)$, влечет квазиалгебраичность расширения колец $K \subseteq A$.
- Изучены квазиалгебраические расширения колец.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории групп, теории алгебраических групп, а также групп, заданных сравнениями, и алгебраической K-теории.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Основные результаты диссертации были представлены в докладах на международных конференциях:

— Ischia group theory 2014 (о. Искья, Италия, 2014);
— Algebraic K-theory and classical-like groups (Пекин, Китай, 2013);
— ATM workshop on classical algebraic K-theory (Бомбей, Индия, 2013);
— Algebraic groups and related structures (Санкт-Петербург, 2012);
— Groups and their actions (Бендлево, Польша, 2012);

— International Algebraic Conference dedicated to the 70th birthday of Anatoly Yakovlev, (Санкт-Петербург, 2010);
— Linear Algebraic Groups, Quadratic Forms and Related Topics (Эилат, Израиль, 2004);
— Linear Algebraic Groups and Related Topics (Билефельд, Германия, 1998);
— Summer School on K-Theory and algebraic groups (Левико Терме, Италия, 1998);
— Workshop on K-theory and Number Fields (Наймген, Нидерланды, 1995);
— Workshop on Classical–Like Groups and Algebraic K-Theory (Билефельд, Германия, 1993 и 1997);

неоднократно излагались на алгебраическом семинаре ПОМИ–СПбГУ им. Д. К. Фаддева а также на семинарах в следующих университетах и научных учреждениях:

— Rutgers University, New Brunswick, NJ (США), 01.05.2013;
— Indian Institute of Technology, Mumbai (Индия), 09.11.2011
— Indian Institute of Science, Education, and Research, Pune (Индия), 08.11.2011,
— Indian Statistical Institute, Bangalor (Индия), 02 и 03.11.2011;
— University of Siena (Италия), 12.02.2011
— University of Salerno (Италия), 09.02.2011
— Universita Degli Studi Di Napoli Federico II (Италия), 08.02.2011
— University of L'Aquila (Италия), 07.02.2011
— Universita Degli Studi Di Milano - Bicocca (Италия), 03.02.2011
— Математический институт РАН им. В. А. Стеклова, 06.04.2010
— Московский государственный университет, 05.04.2010

ПУБЛИКАЦИИ. По теме диссертации автором опубликовано 24 статьи, из них:

- 13 в российский журналах из списка ВАК,
- 8 в международных журналах из списка ВАК,
- 19 в журналах, индексированных в базе данных Scopus,
- 9 в журналах, индексированных в базе данных Web of Science.

Все основные результаты диссертации кроме теоремы 4.8.4 и их доказательства принадлежат диссертанту. Теорема 4.8.4 о тождестве с константами в группе Шевалле типа F_4 получена в работе [11] совместно с В. В. Нестеровым. Результаты статьи [21] получены соавторами независимо, опубликованный метод доказательства принадлежит диссертанту. Результаты работ [5] и [11], полученные соавторами диссертанта, в диссертацию не включены. Результаты остальных совместных статей перекрыты в более новых работах соискателя [13], [18], [20] и [24].

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, 5-и глав, списка обозначений и списка цитированной литературы, что составляет 136 страниц машинописного текста. Список литературы состоит из 136 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении формулируются основные задачи, решенные в диссертации и дается исторический обзор предшествующих результатов.

Первая глава носит вспомогательных характер, в ней приведены необходимые обозначения, определения и предварительные результаты. Бо́льшая часть утверждений этой главы хорошо известны специалистам. Из новых понятий можно выделить понятие “большого подфунктора” аффинной групповой схемы. Это понятие постулирует те свойства элементарной подгруппы односвязной групповой схемы Шевалле–Демазюра, которые используются в методе локализации. Утверждение о том, что элементарная подгруппа является большим подфунктором сразу следует из разложения Гаусса в группе Шевалле над полем. Результаты автора приведены также в параграфе 1.3, в котором обсуждается понятие стандартности расположения подгрупп содержащих некоторую подгруппу D или нормализуемых ей. И в том и в другом случае стандартность является вариацией на тему сэндвич классификации, т. е. решетка рассматриваемых подгрупп разбивается в дизъюнктное объединение “сэндвичей” $L(F_i, C_i)$, где i пробегает некоторое множество индексов, а $L(F, C)$ обозначает множество всех погрупп группы C, содержащих F. Основным результатом параграфа 1.3 является утверждение о том, что при условии $[D, D] = D$ стандартность решетки подгрупп, нормализуемых D, следует из стандартности решетки подгрупп, содержащих D. При этом сэндвичи первой решетки можно найти, изучая нормальное строение базисных подгрупп сэндвичей последней решетки.

Приведем основные обозначения, встречающиеся в автореферате. Пусть $a, b \in G$. Через $a^b = b^{-1}ab$ обозначается элемент, сопряженный с a при помощи b. Коммутатор $a^{-1}b^{-1}ab$ обозначается через $[a, b]$. Через $\langle X\rangle$ обозначается подгруппа, порожденная подмножеством $X \subseteq G$. Пусть A и B – подгруппы в G. Через A^B обозначается подгруппа в G, порожденная элементами a^b по всем $a \in A$ и всем $b \in B$. Взаимный коммутант $[A, B]$ – это подгруппа в G, порожденная всеми коммутаторами $[a, b]$, $a \in A$, $b \in B$. Мультикоммутаторы являются левонормированными, т. е. рекуррентно определяются следующим образом:

$$[a_1, \dots, a_m] = \big[[a_1, \dots, a_{m-1}], a_m\big],$$

где $a_1, \dots, a_m \in G$ или $a_1, \dots, a_m$ подгруппы в G.

Все кольца и алгебры являются коммутативными и содержат единицу, а все гомоморфизмы сохраняют единичные элементы. Через $R[t_1, \dots, t_n]$ обозначается кольцо многочленов от n переменных над кольцом R. Пусть S

мультипликативное подмножество в кольце R. Через $S^{-1}R$ обозначается локализация R в S. Локализационный гомоморфизм $R \to S^{-1}R$ обозначается через λ_S. Если $S = \{s^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, то локализация называется главной. В этом случае мы пишем $R_s = S^{-1}R$ и $\lambda_s : R \to R_s$ для обозначения гомоморфизма локализации. Аналогично мы поступаем в случае локализации в простом идеале $\mathfrak{p}$, т. е. в случае $S = R \setminus \mathfrak{p}$. В этом случае локализация обозначается через $R_\mathfrak{p}$, а гомоморфизм локализации через $\lambda_\mathfrak{p}$.

Пусть $G = \mathrm{G}(\Phi, \_\,)$ обозначает групповую схему Шевалле–Демазюра, а $E = \mathrm{E}(\Phi, \_\,)$ – ее элементарную подгруппу. Для идеала $\mathfrak{a}$ кольца R через $G(R, \mathfrak{a})$ обозначается главная конгруэнц-подгруппа, т. е. ядро кононического гомоморфизма $G(R) \to G(R/\mathfrak{a})$, а через $E(R, \mathfrak{a})$ – относительная элементарная группа, т. е. нормальное замыкание в $E(R)$ группы, порожденной всеми элементарными унипотентными элементами, лежащими в $G(R, \mathfrak{a})$. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы кольца R. Введем обозначение:

$$EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = E(R, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cdot [E(R, \mathfrak{a}), E(R, \mathfrak{b})].$$

Хорошо известно, что эта группа совпадает с коммутантом $[E(R, \mathfrak{a}), E(R, \mathfrak{b})]$ в случае $\Phi \neq C_l, G_2$, или если 2 обратима в R. С другой стороны, несложно доказать, что она равна $E(R, \mathfrak{a}\mathfrak{b})$, если $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$. Эта группа возникает в относительном принципе расщепления и, следовательно, во многих других утверждениях второй и третьей глав.

Лемма 1.12.2. *Предположим, что $R = R' \oplus \mathfrak{a}$ для некоторого подкольца R' и идеала $\mathfrak{a}$ в R. Пусть $\mathfrak{b}'$ – идеал в R', а $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'R$. Тогда выполнены следующие формулы.*

$$\begin{aligned} E(R, \mathfrak{b}) &= EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cdot E(R', \mathfrak{b}'), \\ G(R, \mathfrak{a}) \cap E(R, \mathfrak{b}) &= EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}). \end{aligned}$$

Вторая глава посвящена изучению строения элементарной подгруппы. Формально, основным результатом этой главы можно назвать относительный локально-глобальный принцип Суслина.

Теорема 2.7.4. *Пусть $\mathfrak{b}$ – идеал кольца R, а $a \in G(R[t], tR[t])$. Предположим, что $\lambda_\mathfrak{m}(a) \in E(R_\mathfrak{m}[t], \mathfrak{b}R_\mathfrak{m}[t])$ для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R. Тогда $a \in EE(R[t], \mathfrak{b}R[t], tR[t])$.*

Несмотря на то, что он выглядит, как утверждение о связи группы Шевалле и ее элементарной подгруппы, на самом деле, он чисто формально вытекает из принципа избавления от знаменателей, который отражает только внутреннее строение элементарной подгруппы. С технической точки зрения именно принцип избавления от знаменателей является ключевым утверждением о строении элементарной группы, позволяющим получать результаты методом локализации.

Следствие 2.7.3. *Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R, $\mathfrak{b}$ – идеал в R, а $a \in G(R[t], tR[t])$. Предположим, что $\lambda_S(a) \in E(R_S[t], \mathfrak{b}R_S[t])$. Тогда существует $s \in S$ такое, что*

$$a(st) \in EE(R[t], \mathfrak{b}, tR[t]).$$

Доказательство признака избавления от знаменателей происходит следующим образом. Сначала оценивается подгруппа, порожденная пересечениями унипотентных радикалов противоположных параболических подгрупп с главными конгруэнц-подгруппами. Для идеала $\mathfrak{q}$ кольца R обозначим через $\mathfrak{q}^{\boxed{2}}$ идеал, порожденный квадратами элементов $\mathfrak{q}$.

Лемма 2.1.1. *Пусть P – параболическая подгруппа, а $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы кольца R. Положим $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{\boxed{2}}\mathfrak{b} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{\boxed{2}}$, если $\Phi = C_l$, и $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ в противном случае. Тогда $E(\mathfrak{c}) \leqslant [U_P(\mathfrak{a}), U_P^-(\mathfrak{b})]U_P(\mathfrak{a}\mathfrak{b})U_P^-(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.*

В любом случае, если $\mathfrak{a} = R$, то $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$.

Доказательство использует стандартные вычисления с коммутационной формулой Шевалле, аналогичные вычислениям в работах [62, 41, 66, 54].

Затем мы находим образующие относительной элементарной группы $E(R, \mathfrak{a})$. Для дальнейших применений достаточно доказать, что она порождается элементами $z_\alpha(p, r) = x_\alpha(p)^{x_{-\alpha}(r)}$ по всем $p \in \mathfrak{a}$ и $r \in R$, что было сделано в работе Л. Н. Васерштейна [66]. Однако за счет аккуратного использования предыдущей леммы можно доказать более точное утверждение, являющееся одновременным обобщением результатов работ [66, 42, 57] об образующих относительной элементарной группы. Оно должно быть полезно для изучения вопросов предстабилизации младших K-функторов.

Теорема 2.2.2. *Пусть Σ – специальная часть параболического множества корней, а $\mathfrak{a}$ – идеал кольца R. Относительная элементарная подгруппа $E(R, \mathfrak{a})$ порождена элементами $x_\alpha(p)$ и $z_\beta(p, r)$ по всем $\alpha \in \Phi$, $\beta \in \Sigma$, $p \in \mathfrak{a}$ и $r \in R$.*

Подгруппа $E(\mathfrak{a})$ обычно строго меньше, чем относительная элементарная подгруппа $E(R, \mathfrak{a})$. Следующая теорема утверждает, что она все же содержит некоторую относительную элементарную подгруппу. Это утверждение было сформулировано еще в работе Ж. Титса [64]. Для полной линейной группы оно появилось в [30]. Полное доказательство для всех групп Шевалле было опубликовано в [66]. Для относительного принципа избавления от знаменателей необходимо чуть более сильное утверждение, чем сформулировано у Титса и Васерштейна, являющееся следствием теоремы 2.2.2 и леммы 2.1.1. Для идеалов $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ кольца R обозначим через $E(\mathfrak{q}, \mathfrak{b})$ нормальное замыкание подгруппы $E(\mathfrak{b})$ в $E(\mathfrak{q})$.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *– идеалы кольца* R*. Если* $\Phi \neq C_l$*, то* $E(R, \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}) \leqslant E(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\mathfrak{b})$*, в противном случае* $E(R, \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\boxed{2}}\mathfrak{b}) \leqslant E(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\mathfrak{b})$*.*

В частности, при $\mathfrak{b} = R$ *получаем* $E(R, \mathfrak{a}^2) \leqslant E(\mathfrak{a})$ *для* $\Phi \neq C_l$*, и* $E(R, \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\boxed{2}}) \leqslant E(\mathfrak{a})$ *в противном случае.*

Теперь признак избавления от знаменателей следует из последней теоремы и стандартного метода борьбы с делителями нуля. Вторая глава заканчивается выводом стандартных коммутационных формул, в частности, биотносительной коммутационной формулы

$$[E(R, \mathfrak{a}), G(R, \mathfrak{b})] = EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

из локально-глобального принципа и принципа расщепления. В отличии от других доказательств, приведенное в диссертации использует метод общего элемента.

В третьей главе доказаны основные структурные теоремы о строении односвязных групп Шевалле: мультикоммутационные формулы и ограниченность ширины коммутаторов. Доказательство всех утверждений построено на свойствах расширенной относительной элементарной группы. Пусть l обозначает порядок группы Вейля системы корней схемы G. Положим

$$\widetilde{E}(R, \mathfrak{a}) = \bigcap_{(r_1, \ldots, r_l) \in \mathrm{Um}_l(R)} \left(\prod_{k=1}^{l} G(R, r_k\mathfrak{a}) \right).$$

Расширенная элементарная группа $\widetilde{E}(R, \mathfrak{a})$ удовлетворяет следующим коммутационным формулам.

Лемма 3.3.2. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *– идеалы кольца* R*. Тогда*

$$[G(R, \mathfrak{a}), \widetilde{E}(R, \mathfrak{b})] \leqslant EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqslant \widetilde{E}(R, \mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Второе включение почти очевидно. Для доказательства первого строится универсальное кольцо и общий элемент группы $\widetilde{E}$.

Лемма 3.3.3. *Существует кольцо U, идеал $\widetilde{Y}$ в U, элементы $t_1, \ldots, t_l$ кольца U и элемент u группы $\widetilde{E}(U, \widetilde{Y})$ удовлетворяющие следующему универсальному свойству. Для любого кольца R, унимодулярной последовательности $r_1, \ldots, r_l \in R$ и элемента $b \in \widetilde{E}(R, \mathfrak{q})$ существует гомоморфизм $\eta : U \to R$ такой, что $\eta(u) = b$, $\eta(t^{(k)}) = r_k$ для всех $k = 1, \ldots, l$, а $\eta(\widetilde{Y}) \subseteq \mathfrak{q}$.*

Для этого построения используется ключевая конструкция – универсальное кольцо и общий элемент главной конгруэнц-подгруппы уровня главного идеала. За счет использования общих элементов главной конгруэнц-подгруппы и расширенной элементарной группы мы автоматически получаем конечность ширины множества коммутаторов $[a, b]$, $a \in G(R, \mathfrak{a})$, $b \in \widetilde{E}(R, \mathfrak{b})$ по отношениию к любой функториальной системе образующих группы $EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Действительно, каждый такой коммутатор является образом универсального коммутатора $[g, u] \in EE(A \otimes U, I \otimes U, A \otimes \widetilde{Y})$, где A – аффинная алгебра схемы G, I – ее фундаментальный идеал, $g \in G(A, I)$ – общий элемент групы G, а U, $\widetilde{Y}$ и u удовлетворяют универсальному свойству 3.3.3. Поэтому ширина любого коммутатора не превосходит ширины универсального, таким образом, оценка ширины зависит только от групповой схемы G и функториальной системы образющих.

Из включений леммы 3.3.2 сразу следует относительная мультикоммутационная формула.

Теорема 3.6.4. *Пусть $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ – идеалы кольца R. Тогда*

$$[\widetilde{E}(R, \mathfrak{a}_1), G(R, \mathfrak{a}_2), \ldots, G(R, \mathfrak{a}_m)] \leqslant EE(R, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{a}_m).$$

При $G = \mathrm{GL}_n$ эта формула с заменой $\widetilde{E}$ на E была получена Р. Хазратом и Джанг Дзухонгом в работе [55]. Формула, доказанная в диссертации, сильнее, но имеет место только для односвязных групп Шевалле. Также, как и лемма 3.3.2, эта, более сильная, формула вероятно неверна, если тор группы G не содержится в элементарной подгруппе.

Оставшаяся часть главы посвящена обсуждению мульти-относительной версии теоремы А. Бака о нильпотентной структуре K_1. На самом деле, в диссертации в основном обсуждается индукционный переход. База индукции, которая следует из би-относительной версии сюръективной стабилизации, в настоящий момент известна только для специальной линейной группы благодаря работе А. Мэйсона и В. Стотерса [58]. С другой стороны, если сосредоточиться на качественном аспекте, не обращая внимания на зависимость степени нильпотентности от размерности кольца, то в качестве базы индукции можно использовать хорошо известный факт о том, что $G(R) = E(R)$ для любого полулокального кольца. Для того, чтобы результат не зависел от базы индукции, в диссертации вводится аксиоматическое определение функции размерности, которое используется вместо какой-то конкретной размерности кольца. Набор аксиом похож на аксиомы функции размерности А. Бака [45, 52] для конкретной инфраструктуры и набора структурных квадратов.

Определение 3.7.1. Пусть $\delta = \delta_G$ – функция из класса колец в $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющая следующим свойствам.

1. Если $\delta(R) \leqslant 1$, то для любых идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ кольца R имеет место включение $[G(R, \mathfrak{a}), G(R, \mathfrak{b})] \leqslant EE(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.
2. Для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца R существует мультипликативное подмножество S в R такое, что $G(S^{-1}R, S^{-1}\mathfrak{a}) = E(S^{-1}R, S^{-1}\mathfrak{a})$, и для всех $r \in S$ выполнено неравенство $\delta(R/rR) < \delta(R)$.
3. Если кольцо R не нетерово, то $\delta(R) = \infty$.

В этом случае δ называется функцией размерности для G.

Например, функцией размерности в смысле этого определения является комбинаторная размерность максимального спектра $\dim \operatorname{Max} R$ кольца R. Несколько меньшая функция, размерность Басса–Серра BS-dim, также является функцией размерности в нашем смысле, детали приведены в работах [44, 52].

Ясно, что второе и третье свойства из определения не зависят от сдвига функции размерности. Точнее, если (2) имеет место для функции δ, то это свойство также выполнено и для $\delta' = \delta - k$, где k фиксированное целое число. В работе [58] А. Мэйсона и В. Стотерса доказано, что для $G = \mathrm{SL}_n$ функция $\text{BS-dim}(R) - n + 2$ удовлетворяет первому условию и, следовательно, является функцией размерности для SL_n. Ожидается, что и в общем случае функция $\text{BS-dim}(R) - \operatorname{rank} G + 1$ будет функцией размерности для G, Но в настоящий момент мы не можем это доказать.

Зафиксируем G и функцию размерности δ для G. Пользуясь идеей А. Бака из работы [44], для идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ кольца R определим следующую группу:

$$S_\delta^{(k)} G(R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \{h \in G(R, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \mid \varphi(h) \in EE(R', \mathfrak{a}', \mathfrak{b}') \\ \text{для любого морфизма } \varphi : (R, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to (R', \mathfrak{a}', \mathfrak{b}') \text{ такого, что } \delta(R') \leqslant k\}.$$

Пусть $d = \delta(R)$. Ясно, что $S_\delta^{(d)}G(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = EE(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b})$. Ключевую роль в доказательстве индукционного перехода играет группа $S_\delta^{(d-1)}G(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b})$. Для доказательство эта группа увеличивается в том же стиле, как и относительная элементарная группа.

Элемент r кольца R называется δ-регулярным, если $\delta(R/r^kR) < \delta(R)$ для всех натуральных чисел k. Определим функтор $\widetilde{E}_\delta$ на категории идеалов по формуле

$$\widetilde{E}_\delta(R,\mathfrak{a}) = \bigcap_r \Big(G(R, r\mathfrak{a})\widetilde{E}(R,\mathfrak{a}) \Big),$$

где пересечение берется по всем δ-регулярным элементам r.

Лемма 3.7.3. *Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы кольца R, а $d = \delta(R)$. Тогда $S_\delta^{(d-1)}G(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \leqslant \widetilde{E}_\delta(R,\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.*

Доказательство аналогично соответствующей части доказательства индукционного перехода из работы [44]. Следующий результат усиливает коммутационную формулу из леммы 3.3.2. При этом лемма 3.3.2 используется в доказательстве этого результата, наряду с усиленным принципом избавления от знаменателей и свойством 3.7.1(2) функции размерности.

Лемма 3.7.4. *Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы кольца R. Тогда*

$$[\widetilde{E}_\delta(R,\mathfrak{a}), G(R,\mathfrak{b})] \leqslant EE(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b}).$$

Следующее утверждение является доказательством индукционного перехода для теоремы 3.7.6 и без труда выводится из предыдущей леммы.

Следствие 3.7.5. *Пусть $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ – идеалы кольца R. Тогда*

$$[S_\delta^{(k)}G(R,\mathfrak{a},\mathfrak{b}), G(R,\mathfrak{c})] \leqslant S_\delta^{(k+1)}G(R,\mathfrak{a}\mathfrak{b},\mathfrak{c}).$$

В частности, если $\delta(R) = 0 \implies G(R,\mathfrak{a}) = E(R,\mathfrak{a})$ для любой пары $(R,\mathfrak{a})$, то условие 3.7.1(1) *вытекает из условий* 3.7.1(2) *и* (3).

Последняя теорема третьей главы мгновенно вытекает из предыдущего следствия. Она является существенным усилением результатов А. Бака, Р. Хазрата и Н. Вавилова о нильпотентной структуре K_1, полученные в работах [44], [53] и [46].

Теорема 3.7.6. *Пусть $\mathfrak{a}_0,\dots,\mathfrak{a}_d$ – идеалы кольца R, где $d \geqslant 1$. Пусть δ – функция размерности для G, и $\delta(R) \leqslant d$. Тогда*

$$[G(R,\mathfrak{a}_0), G(R,\mathfrak{a}_1),\dots,G(R,\mathfrak{a}_d)] \leqslant EE(R,\mathfrak{a}_0\dots\mathfrak{a}_{d-1},\mathfrak{a}_d).$$

Четвертая глава посвящена описанию решетки подгрупп группы $G(A)$, нормализуемых $E(K)$, где $K \subseteq A$ – пара коммутативных колец, а G – групповая схема Шевалле–Демазюра с системой корней Φ, имеющей двойные связи, т. е. $\Phi = B_l$, C_l или F_4. При этом предполагается, что 2 обратимо в K. При $\Phi = B_{2k+1}$ дополнительно предполагается, что -1 является квадратом в K. При этих условиях получен следующий результат.

Теорема 4.10.1. *Для любой подгруппы $H \leqslant G(A)$, нормализуемой $E(K)$, существует единственное подкольцо $R \subseteq A$, содержащее K, и единственный идеал $\mathfrak{q}$ в R такие, что*

$$E(R, \mathfrak{q}) \leqslant H \leqslant C_A(R, \mathfrak{q}),$$

где $C_A(R, \mathfrak{q})$ обозначает наибольшую подгруппу в $G(A)$, удовлетворяющую условию $[C_A(R, \mathfrak{q}), E(R)] = E(R, \mathfrak{q})$.

Для подгрупп H, содержащих $E(K)$, очевидно, что $\mathfrak{q} = R$. В этом случае $C_A(R, R) = N_A(R)$ является нормализатором группы $E(R)$ в $G(A)$. В таком виде результат получен в теореме 4.9.2. Теорема 4.10.1 вытекает из теоремы 4.9.2 при помощи теоретико групповых аргументов, разработанных в главе 1, о которых шла речь выше.

Для доказательства различных вариаций теорем сэндвич классификации обычно использовалась следующая стратегия. Пусть $\mathcal{L}$ – решетка подгрупп в $G(A)$, содержащая некоторую подгруппу D. Пусть $H \in \mathcal{L}$. Обозначим через E_H группу, порожденную всеми корневыми унипотентными элементами, содержащимися в H, и пусть N_H обозначает ее нормализатор в $G(A)$. Пусть a – произвольный элемент группы H. Для доказательства сэндвич классификации достаточно показать, что a принадлежит N_H. Предположим, что нам удалось найти такое множество образующих $X = X(a)$ группы E_H, что для любого $x \in X$ элемент x^a принадлежит некоторой параболической подгруппе (этот трюк называется “редукцией к собственной параболической подгруппе”). Тогда для завершения доказательства стандартности решетки $\mathcal{L}$ достаточно доказать, следующие технические утверждения.

1. Если $E_H^a \leqslant N_H$, то $a \in N_H$ (включение в нормализатор).
2. Если $b \in H \cap P$ для некоторой параболической подгруппы P, то $b \in N_H$ (элементы параболической подгруппы).

Действительно, тогда для любого $x \in X$ имеем $x^a \in H \cap P$, откуда $x^a \in N_H$. Так как X порождает E_H, то $E_H^a \leqslant N_H$, откуда $a \in N_H$.

В нашем случае (т. е. в случае $D = E(K)$), в диссертации доказано, что $E_H = E(R)$ для некоторого подкольца R: $K \subseteq R \subseteq A$ (вычисление уровня). Однако хорошего множества образующих для группы $E(R)$ найти не удается, поэтому в доказательстве теоремы 4.9.2 используется новый прием, похожий, но не совпадающий с параболической редукцией. Для применения этого приема используется тождество с константами. Элемент тора группы Шевалле называется *маленьким полупростым элементом*, если он отображается в 1 всеми длинными корнями. Заметим, что условия на обратимость двойки и наличия корня из -1 нужны ровно для того, чтобы гарантировать существование маленького полупростого элемента в группе $E(K)$.

Теорема 4.8.4. *Пусть $\Phi = B_n, C_n$ или F_4, а T – расщепимый максимальный тор группы $G = \mathrm{G}(\Phi, \_)$. Пусть R – область целостности, A – R-алгебра, $\gamma \in \Phi$ – длинный корень. Пусть $h' \in T(R)$ – маленький полупростой элемент, а h – его образ в $T(A)$ под действием естественного гомоморфизма. Тогда $X_\gamma(A)^{h^a}$ коммутирует с $X_\gamma(A)$ для любого $a \in G(A)$. В частности, $X_\gamma(A)^{h^a}$ содержится в собственной параболической подгруппе $G(A)$.*

Существование тождества с константами в классических группах изучалось в работе И. З. Голубчика и А. В. Михалева [32], но нам необходимо конкретное “короткое” тождество. В классических группах оно было получено Н. Л. Гордеевым в работе [51], а в группе типа $\Phi = F_4$ – в совместной работе автора с В. В. Нестеровым [11]. Для других систем корней короткое тождество не имеет место. На самом деле, используя подход, предложенный Г. М. Томановым в работе [39], Н. Л. Гордеев в работе [51] доказал, что для систем корней с простыми связями тождеств с константами вообще нет, а в работе [11] показано, что короткое тождество не выполнено для $\Phi = G_2$.

Оставшаяся часть главы, параграфы 4.2–4.4, посвящены доказательству технических утверждений о включении в нормализатор и элементах параболической подгруппы. Как и вычисление уровня, доказательство этих утверждений проведено для всех систем корней, если кольцо K удовлетворяет следующему условию.

Свойство 4.1.1. $\Phi \neq A_1$. Если $\Phi = B_l, C_l, F_4$, то $1/2 \in K$. Если $\Phi = G_2$, то $1/3 \in K$, а K не имеет полей вычетов из двух элементов.

Пусть H – подгруппа в $G(A)$, содержащая $E(K)$, а R – наибольшее подкольцо такое, что $H \geqslant E(R)$. В параграфе 4.2 изучается пересечение H

с унипотентным радикалом $U(A)$ борелевской подгруппы. В частности, из основного утверждения этого параграфа вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.4.1. *Если для элемента $a \in U(A)$ выполнено включение $E(K)^a \leqslant H$, то $a \in U(R)$.*

Пусть теперь $d = ab \in P(A) \cap H$, где P – параблическая подсхема в G, a лежит в подгруппе Леви $L_P(A)$, а b – в унипотентном радикале $U_P(A)$. Ясно, что $U_P(K)^d \leqslant U_P(A) \cap H$, а по лемме 4.4.1 это содержится в $U(R)$. Пусть $\pi : P(A) \to \mathrm{GL}_m(A)$ – представление группы $P(A)$ на внутреннем модуле Шевалле $V(A) = U_P(A)/[U_P(A), U_P(A)]$. Выбрав базис $V(A)$ из корневых унипотентнов, получим включение $\pi(d) = \pi(a) \in \mathrm{GL}_m(R)$. Для того, чтобы доказать, что $a \in N_A(R)$ достаточно проверить, что ядро сужения π_A на подгруппу Леви $L_P(A)$ лежит в центре группы $G(A)$. Этому посвящен параграф 4.3, где доказана следующая теорема, представляющая и самостоятельный интерес.

Теорема 4.3.3. *Пусть L – подсхема Леви максимальной параболической подсхемы групповой схемы Шевалле–Демазюра G, а K – кольцо, удовлетворяющее условию* 4.1.1. *Тогда ядро представления L на внутреннем модуле Шевалле $U_P/[U_P, U_P]$ содержится в центре схемы G.*

На основании этой теоремы в параграфе 4.4 доказано включение $P(A) \cap H \leqslant N_A(R)$.

Оставшемуся ингредиенту – лемме о включении в нормализатор, посвящены параграфы 4.5 и 4.6. Первым шагом является доказательство разрешимости группы $N_A(R)/G(R)$. Это утверждение следует из условий на элементы матриц из образа $N_A(R)$ в точном абсолютно неприводимом представлении. Назовем представление $\varphi : G \to \mathrm{GL}_n$ *абсолютно неприводимым* над кольцом K, если образ φ_K порождает полное матричное кольцо $\mathrm{M}_n(K)$ как K-модуль. Из результатов параграфа 4.5 следует, что при некотором условии на обратимость маленьких простых в K для любой системы корней Φ существует решетка весов P такая, что $G_P(\Phi, \_\,)$ имеет точное абсолютно неприводимое представление. При $G = G_P(\Phi, \_\,)$ факторгруппа $N_A(R)/G(R)$ абелева, а из коммутативности ядер и коядер отображений $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\Phi, \_\,) \to G_P(\Phi, \_\,) \to \mathrm{G}_{\mathrm{ad}}(\Phi, \_\,)$ следует разрешимость этой факторгруппы в общем случае.

Теперь из теоремы Р.Хазрата и Н.А.Вавилова о нильпотентности $K_1^G(R)$, являющейся частным случаем теоремы 3.7.6, вытекает разрешимость группы $N_A(R)/E(R)$ для конечномерных колец R. Из этого факта сразу следует лемма о включении в нормализатор. Общий случай выводится из конечномерного стандартной процедурой перехода к прямому пределу для “конечнопорожденных” утверждений.

В последней главе показано, что для систем корней с простыми связями стандартное описание решетки подгрупп $G(A)$, содержащих $E(K)$, влечет сильное условие на пару колец $K \subseteq A$. Основным утверждением, из которого это следует, является теорема о свободном произведении в группе над кольцом многочленов.

Теорема 5.2.4. *Пусть F – поле, Φ – система корней с простыми связями, $G = \mathrm{G}_{\mathrm{ad}}(\Phi, \_)$ – групповая схема Шевалле–Демазюра присоединенного типа, а E – ее элементарная подгруппа. Существует элемент $h \in E(F[t])$ такой, что*

$$\langle h, E(F)\rangle = \langle h\rangle * E(F).$$

Для того, чтобы предъявить элемент h используется понятие противоположных корневых подгрупп. Пусть K – поле, α – длинный корень (если Φ имеет простые связи, то все корни называются длинными), а $a, b \in G(K)$. Легко показать, что корневые подгруппы $X_\alpha(K)^a$ и $X_\alpha(K)^b$ одновременным сопряжением приводятся к виду $X_\beta(K)$ и $X_\gamma(K)$ для некоторых корней $\beta, \gamma \in \Phi$. Подгруппы $X_\alpha(K)^a$ и $X_\alpha(K)^b$ называются противоположными, если $\beta = -\gamma$. На самом деле, свойство быть противоположными являтся открытым условием. Более точно, подгруппы $X_\alpha(K)^a$ и $X_\alpha(K)^b$ не противоположны тогда и только тогда, когда элемент $d = ab^{-1}$ удовлетворяет тождеству

$$\big[[x_\alpha(1)^d, x_\alpha(1)], x_\alpha(1)\big] = e.$$

Свойства противоположных корневых подгрупп исследуются в параграфе 4.7 главы 4, потому что эти свойства используются при изучении тождеств с константами. Пусть $K = F(t)$. В параграфе 5.1 строится элемент $a \in G(F[t])$ такой, что подгруппы $X_\alpha(K)^a$ и $X_\alpha(K)^{ac}$ противоположны для любого элемента $c \in G(F)$. При построении используется теорема Г. М. Томанова [39] и Н. Л. Гордеева [51] об отсутствии тождеств с константами в группах Шевалле имеющих системы корней с простыми связями, а также нетерова индукция.

Теперь мы можем указать вид элемента h. А именно, $h = x_\alpha(t^N)^a$, где N – достаточно большое натуральное число, а $a \in G(F[t])$ – элемент, построенный в параграфе 5.1. Доказательство теоремы 5.2.4 довольно технично, оно использует присоединенное представление группы $G\bigl(F(t)\bigr)$ и базируется на вычислении степеней числителей и знаменателей матричных элементов.

Ясно, что стандартное строение решетки подгрупп $G(A)$, содержащих $E(K)$, наследуется подкольцами и факторкольцами. Точнее, пусть R – подкольцо в A, содержащее K, а $\bar{\ }: R \to \overline{R}$ – эпиморфизм колец. Легко показать, что стандартность описание подгрупп $G(A)$, содержащих $E(K)$, влечет стандартность описание подгрупп $G(\overline{R})$, содержащих $E(\overline{K})$. Таким образом, если $\overline{K} = F$ – поле, а $\overline{R} = F[t]$ – кольцо многочленов над ним, то по теореме 5.2.4 описание подгрупп $G(A)$, содержащих $E(K)$, не может быть стандартным. Это наблюдение мотивирует следующее определение.

Определение. Расширение колец $K \subseteq A$ называется *квазитрансцендентным*, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & R & \longrightarrow & A \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ F & \longrightarrow & F[t] & & \end{array}$$

где F – поле, $F[t]$ – кольцо многочленов над F, горизонтальные стрелки инъективны, а вертикальные – сюръективны. В противном случае расширение называется *квазиалгебраическим.*

Последние два параграфа диссертации посвящены характеризации квазиалгебраических расширений. Она особенно элегантна в следующем случае.

Теорема 5.5.8. *Пусть K – конечнопорожденная алгебра над полем, а A – область целостности, содержащая K. Кольцо A является квазиалгебраическим расширением K тогда и только тогда, когда A цело над K или размерность Крулля кольца K не превосходит 1, а A содержится в алгебраическом замыкании поля частных кольца K.*

В частности из этого следует, что решетка подгрупп $\mathrm{SL}_n\bigl(F(x,y)\bigr)$, содержащих $\mathrm{E}_n\bigl(F[x,y]\bigr)$, не является стандартной. Этот совсем не очевидный факт был толчком к исследованию, результатами которого стали последние две главы диссертации.

Основные работы автора по теме диссертации

Публикации по списку ВАК

[1] *Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б., Степанов А. В.* Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами // *Доклады АН СССР.* — 1989. — Т. 307, № 4. — С. 788–791.

[2] *Вавилов Н. А., Степанов А. В.* Подгруппы полной линейной группы над кольцом, удовлетворяющим условиям стабильности // *Изв. вузов. Матем.* — 1989. — № 10. — С. 19–25.

[3] *Степанов А. В.* О расположении подгрупп, нормализуемых фиксированной // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 1991. — Т. 198. — С. 92–102.

[4] *Степанов А. В.* О нормальном строении полной линейной группы над кольцом // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 1997. — Т. 236. — С. 166–182.

[5] *Sivatski A. S., Stepanov A. V.* On the word length of commutators in $\mathrm{GL}_n(R)$ // *K-Theory.* — 1999. — Vol. 17. — P. 295–302.

[6] *Stepanov A. V., Vavilov N. A.* Decomposition of transvections: Theme with variations // *K-Theory.* — 2000. — Vol. 19, no. 2. — P. 109–153.

[7] *Bak A., Stepanov A. V.* Dimension theory and nonstable K-theory for net groups // *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.* — 2001. — Vol. 106. — P. 207–253.

[8] *Stepanov A. V.* Nonstandard subgroups between $\mathrm{E}_n(R)$ and $\mathrm{GL}_n(A)$ // *Algebra Colloq.* — 2004. — Vol. 10, no. 3. — P. 321–334.

[9] *Вавилов Н. А., Степанов А. В.* Надгруппы полупростых групп // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.* — 2008. — № 3. — С. 51–95.

[10] *Вавилов Н. А., Степанов А. В.* Стандартная коммутационная формула // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: Мат., Мех., Астроном.* — 2008. — № 1. — С. 9–14.

[11] *Нестеров В. В., Степанов А. В.* Тождество с константами в группе Шевалле типа F_4 // *Алгебра и анализ.* — 2009. — Т. 21, № 5. — С. 196–202.

[12] *Luzgarev A. Y., Stepanov A. V., Vavilov N. A.* Calculations in exceptional groups over rings // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2009. — Т. 373. — С. 42–72.

[13] *Stepanov A. V.* Free product subgroups between Chevalley groups $\mathrm{G}(\Phi, F)$ and $\mathrm{G}(\Phi, F[t])$ // *J. Algebra.* — 2010. — Vol. 324, no. 7. — P. 1549–1557.

[14] *Вавилов Н. А., Степанов А. В.* Еще раз о стандартной коммутационной формуле // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: Мат., Мех., Астроном.* — 2010. — Т. 43, № 1. — С. 16–22.

[15] *Вавилов Н. А., Степанов А. В.* Линейные группы над общими кольцами I. Общие места. // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2011. — Т. 394. — С. 33–139.

[16] *Stepanov A. V., Vavilov N. A.* Length of commutators in Chevalley groups // *Israel J. Math.* — 2011. — Vol. 185. — P. 253–276.

[17] *Hazrat R., Stepanov A. V., Vavilov N. A., Zhang Z.* The yoga of commutators // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2011. — Т. 389. — С. 53–82.

[18] *Stepanov A. V.* Subring subgroups in Chevalley groups with doubly laced root systems // *J. Algebra.* — 2012. — Vol. 362. — P. 12–29.

[19] *Hazrat R., Stepanov A. V., Vavilov N. A., Zhang Z.* The yoga of commutators: Further applications // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2014. — Т. 421. С. 166–213.

[20] *Степанов А. В.* Неабелева K-теория групп Шевалле над кольцами // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2014. — Т. 423. — С. 244–263.

[21] *Apte H., Stepanov A. V.* Local-global principle for congruence subgroups of Chevalley groups // *Cent. Eur. J. Math.* — 2014. — Vol. 12, no. 6. — P. 801–812.

Прочие публикации

[22] *Степанов А. В.* Описание подгрупп полной линейной группы над кольцом при помощи условий стабильности // Кольца и линейные группы. — Краснодар: Кубанский государственный университет, 1988. — С. 82–91.

[23] *Hazrat R., Stepanov A. V., Vavilov N. A., Zhang Z.* Commutator width in Chevalley groups // *Note Mat.*. — 2013. — Vol. 33, no. 1. — P. 139–170.

[24] *Stepanov A. V.* Elementary calculus in Chevalley groups over rings // *J. Prime Research in Math.* — 2013. — Vol. 9. — P. 79–95.

Цитированная литература

[25] *Басс Х.* Алгебраическая K-теория. — Москва: Мир, 1973.

[26] *Боревич З. И.* Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1976. — Т. 64. — С. 12–29.

[27] *Боревич З. И., Вавилов Н. А.* Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц // *Тр. МИАН.* — 1978. — Т. 148. — С. 43–57.

[28] *Боревич З. И., Вавилов Н. А.* Расположение подгрупп, содержащих группу клеточно диагональных матриц, в полной линейной группе над кольцом // *Изв. вузов. Матем.* — 1982. — № 11. — С. 12–16.

[29] *Боревич З. И., Вавилов Н. А.* Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом // *Тр. МИАН.* — 1984. — Т. 165. — С. 24–42.

[30] *Васерштейн Л. Н., Суслин А. А.* Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1976. — Т. 40, № 5. — С. 993–1054.

[31] *Голубчик И. З.* О полной линейной группе над ассоциативным кольцом // *УМН.* — 1973. — Т. 28, № 3. — С. 179–180.

[32] *Голубчик И. З., Михалев А. В.* Обобщенные групповые тождества в классических группах // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1982. — Т. 114. — С. 96–119.

[33] *Нужин Я. Н.* О группах, заключенных между группами лиева типа над различными полями // *Алгебра и логика.* — 1983. — Т. 22, № 5. — С. 526–541.

[34] *Нужин Я. Н., Якушевич А. В.* Промежуточные подгруппы групп Шевалле над полем частных кольца главных идеалов // *Алгебра и логика.* — 2000. — Т. 39, № 3. — С. 347–358.

[35] *Романовский Н. С.* Максимальные подкольца поля Q и максимальные подгруппы группы $\mathrm{SL}(n, Q)$ // *Алгебра и логика.* — 1967. — Т. 6, № 4. — С. 75–82.

[36] *Романовский Н. С.* Подгруппы, лежащие между специальными линейными группами над кольцом и его подкольцом // *Мат. заметки.* — 1969. — Т. 6, № 3. — С. 335–345.

[37] *Суслин А. А.* О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1977. — Т. 41, № 2. — С. 235–252.

[38] *Тавгень О. И.* Ограниченная порождаемость групп Шевалле над кольцами S-целых алгебраических чисел // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1990. — Т. 54, № 1. — С. 97–122.

[39] *Томанов Г. М.* Обобщенные групповые тождества в линейных группах // *Мат. Сб.* — 1984. — Т. 123(165), № 1. — С. 35–49.

[40] *Шмидт Р. А.* О подгруппах полной линейной группы над полем частных дедекиндова кольца // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1979. — Т. 94. — С. 119–130.

[41] *Abe E.* Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Contemp. Math.* — 1989. — Vol. 83. — P. 1–17.

[42] *Apte H., Chattopadhyay P., Rao R.* A local global theorem for extended ideals // *J. Ramanujan Math. Soc.* — 2012. — Vol. 27, no. 1. — P. 17–30.

[43] *Aschbacher M.* On the maximal subgroups of the finite classical groups // *Invent. Math.* — 1984. — Vol. 76. — P. 469–514.

[44] *Bak A.* Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability // *K-Theory.* — 1991. — Vol. 4. — P. 363–397.

[45] *Bak A.* Lectures on dimension theory, group valued functors, and nonstable K-theory. — Preprint, Buenos Aires, 1995.

[46] *Bak A., Hazrat R., Vavilov N. A.* Localization-completion strikes again: relative K_1 is nilpotent // *J. Pure and Appl. Algebra.* — 2009. — Vol. 213. — P. 1075–1085.

[47] *Bass H.* K-theory and stable algebra // *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* — 1964. — Vol. 22. — P. 5–60.

[48] *Bass H., Milnor J., J.-P. S.* Solution of the congruence subgroup problem for SL_n $(n \geqslant 3)$ and Sp_{2n} $(n \geqslant 2)$ // *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* — 1967. — Vol. 33. — P. 59–137.

[49] *Carter D., Keller G. E.* Bounded elementary generation of $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ // *Amer. J. Math.* — 1983. — Vol. 105. — P. 673–687.

[50] *Ellers E., Gordeev N. L.* On the conjectures of J. Thompson and O. Ore // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1998. — Vol. 350, no. 9. — P. 3657–3671.

[51] *Gordeev N. L.* Freedom in conjugacy classes of simple algebraic groups and identities with constants // *Алгебра и анализ.* — 1997. — Т. 9, № 4. — С. 63–78.

[52] *Hazrat R.* Dimension theory and nonstable K_1 of quadratic modules // *K-Theory.* — 2002. — Vol. 27, no. 4. — P. 293–328.

[53] *Hazrat R., Vavilov N. A.* K_1 of Chevalley groups are nilpotent // *J. Pure and Appl. Algebra.* — 2003. — Vol. 179. — P. 99–116.

[54] *Hazrat R., Vavilov N. A., Zhang Z.* Relative commutator calculus in Chevalley groups // *J. Algebra.* — 2013. — Vol. 385. — P. 262–293.

[55] *Hazrat R., Zhang Z.* Multiple commutator formulas // *Israel J. Math.* — 2013. — Vol. 195, no. 1. — P. 481–505.

[56] *van der Kallen W.* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}[x])$ does not have bounded word length // *Lecture Notes in Math.* — 1982. — Vol. 966. — P. 357–361.

[57] *van der Kallen W.* A group structure on certain orbit sets of unimodular rows // *J. Algebra.* — 1983. — Vol. 82. — P. 363–397.

[58] *Mason A. W., Stothers W. W.* On subgroups of GL(n,A) which are generated by commutators // *Invent. Math.* — 1974. — Vol. 23. — P. 327–346.

[59] The Ore conjecture / M. Liebeck, E. A. O'Brien, A. Shalev, P. H. Tiep // *J. Eur. Math. Soc. (JEMS).* — 2010. — Vol. 12, no. 4. — P. 939–1008.

[60] *Quillen D.* Projective modules over polynomial rings // *Invent. Math.* — 1976. — Vol. 36. — P. 167–171.

[61] *Shalom Y.* Bounded generation and Kazhdan's property (T) // *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* — 1999. — Vol. 90. — P. 145–168.

[62] *Stein M. R.* Generators, relations, and coverings of Chevalley groups over commutative rings // *Amer. J. Math.* — 1971. — Vol. 93. — P. 965–1004.

[63] *Taddei G.* Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau // *Contemp. Math.* — 1986. — Vol. 55. — P. 693–710.

[64] *Tits J.* Systemes générateurs de groupes de congruences // *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A.* — 1976. — Vol. 283. — P. 693–695.

[65] *Vaserstein L. N.* On the normal subgroups of GL_n over a ring // *Lecture Notes in Math.* — 1981. — Vol. 854. — P. 456–465.

[66] *Vaserstein L. N.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Tohoku Math. J.* — 1986. — Vol. 38. — P. 219–230.

[67] *Wilson J. S.* The normal and subnormal structure of general linear groups // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1972. — Vol. 71. — P. 163–177.