

Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Рядовкин Кирилл Сергеевич

**Ветвящиеся случайные блуждания на  
периодических графах с периодическими  
источниками ветвления**

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д. ф.-м. н., Смородина Н. В.

Санкт-Петербург – 2019

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Ветвящееся случайное блуждание</b>	<b>14</b>
1.1 Описание модели ветвящегося случайного блуждания . . .	14
1.2 Построение ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$ . . .	19
1.3 Вывод основного уравнения . . . . .	24
<b>2 Спектральный анализ оператора <math>\mathcal{A}</math></b>	<b>27</b>
2.1 Разложение в прямой интеграл . . . . .	27
2.2 Анализ спектра оператора $A(\theta)$ . . . . .	34
<b>3 Асимптотическое поведение среднего числа частиц</b>	<b>46</b>
3.1 Среднее число частиц в фиксированной точке . . . . .	46
3.2 Среднее число частиц на всей решетке . . . . .	51
3.3 Однородное случайное блуждание . . . . .	53
<b>4 Примеры</b>	<b>56</b>
4.1 Случайное блуждание на оси . . . . .	56
4.2 Случайное блуждание в плоскости . . . . .	58
4.3 Случайное блуждание на графеновой решетке . . . . .	60
4.4 Случайное блуждание на станеновой решетке . . . . .	62
<b>5 Приложение</b>	<b>65</b>
<b>Заключение</b>	<b>70</b>

# Введение

**Актуальность работы.** В теории вероятностей ветвящееся случайное блуждание является стохастическим процессом, который обобщает понятия случайного блуждания и ветвящегося процесса. Возникшая в середине 19-го столетия как теория, пытавшаяся объяснить причины вырождения знаменитых фамилий в Великобритании (задача Гальтона–Ватсона), теория ветвящихся процессов стала в настоящее время разветвленной областью теории вероятностей и мощным инструментом исследования в различных областях математики, таких как теория алгоритмов, теория массового обслуживания, теория случайных отображений, теория просачивания, а также во многих разделах других наук, в число которых входят, в частности, физика, химия и биология [32], [49]. Также случайные блуждания находят применения в экономике [57], [61].

Сам термин «ветвящийся процесс» был впервые предложен А. Н. Колмогоровым и Н. А. Дмитриевым в статье [12], посвященной анализу эволюции популяций вероятностными методами. После первых московских публикаций (работы А. Н. Колмогорова и его учеников) по ветвящимся процессам в 1947–1948 гг. в США также появилось несколько работ на аналогичную тему, часть из которых, по всей видимости, была связана с работами по созданию атомного оружия в Лос–Аламосе (работы С. Улама, Д. Хокинса, К. Дж. Эверетта). Поэтому позднее все

исследования, связанные с ветвящимися процессами, были засекречены (см. [18]).

В настоящее время имеется большое число публикаций, посвященных изучению ветвящихся случайных блужданий (ВСБ). Приведем здесь краткий обзор публикаций, связанных с тематикой настоящего исследования.

В работах [1, 4, 19, 20, 22, 24, 25] рассматривались модели ВСБ на решетке  $\mathbb{Z}^d$  с конечным числом источников ветвления одного типа, при этом интенсивность ветвления характеризовалась положительным числом  $\beta$ , которое связано со средним числом потомков одной частицы. Матрица переходных интенсивностей  $A_0 = (a(v, u))_{v, u \in \mathbb{Z}^d}$  в этих моделях предполагалась однородной, то есть для всех  $u, v \in \mathbb{Z}^d$  элементы матрицы  $a(u, v)$  удовлетворяли соотношению

$$a(v, u) = a(u, v) = a_0(u - v),$$

причем функция  $a_0(u)$  удовлетворяла условиям  $a_0(u) \geq 0$  при  $u \neq 0$ ,  $a_0(0) < 0$ ,  $\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a_0(u) = 0$  и  $\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} \|u\|^2 a_0(u) < \infty$ , где  $\|u\|$  – евклидова норма вектора  $u$  в  $\mathbb{R}^d$ . Из этих условий следует, что соответствующее случайное блуждание симметрично, однородно и имеет конечную дисперсию скачков. Предполагалось также, что случайное блуждание является неприводимым, то есть любая точка  $v \in \mathbb{Z}^d$  достижима (см. [10]).

Размножение и гибель частиц в источнике ветвления задавалось процессом БьенOME–Гальтона–Ватсона (см. [15], [26], [34]). Именно, ветвление в источниках задавалось производящей функцией  $b(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k s^k$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , где  $b_k \geq 0$  при  $k \neq 1$ ,  $b_1 < 0$  и  $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = 0$ . Коэффициент  $b_k$  отвечает за интенсивность деления частицы на  $k$  потомков. Для лю-

бого натурального  $n$  величина  $b^{(n)}(1)$  предполагалась конечной. Через  $\beta$  обозначалась величина  $\beta = b'(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} kb_k$ . Всюду далее величину  $\beta$  будем называть интенсивностью ветвления.

Для такой модели ветвящегося случайного блуждания были найдены условия экспоненциального роста среднего числа частиц в произвольной фиксированной точке решетки при  $t \rightarrow \infty$ . Именно, было показано, что существует критическое значение  $\beta_c$ , такое что при  $\beta > \beta_c$  в спектре оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц, появляется положительное собственное значение. Также было показано, что при  $d = 1$  или  $d = 2$  критическое значение  $\beta_c$  равно нулю, а при  $d \geq 3$  критическое значение  $\beta_c$  строго больше нуля. Кроме того, было показано, что если в спектре оператора существует положительное собственное значение  $\lambda$ , то при  $t \rightarrow \infty$  для локальной (т.е. в фиксированной точке  $u \in \mathbb{Z}^d$ )  $\mu(t, u)$  и полной численностей частиц  $\mu(t)$  справедливы соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t, u) e^{-\lambda t} = \xi \psi(u), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) e^{-\lambda t} = \xi,$$

где  $\psi(u)$  – некоторая функция на  $\mathbb{Z}^d$ , а  $\xi$  – невырожденная случайная величина.

В работе [22] рассматриваются модели ВСБ с источниками ветвления трех типов:

- в источниках первого типа гибель и размножение частиц происходит без нарушения симметричности случайного блуждания,
- в источниках второго типа нарушается симметричность блуждания за счет введения дополнительного параметра, регулирующего степень преобладания ветвления или блуждания в источнике,
- в источниках третьего типа нарушается только симметричность

блуждания (без размножения или гибели частиц) – такие источники называются "псевдо-источниками".

Было показано, что источники третьего типа не могут привести к появлению положительного собственного значения. Как и для ВСБ с одним типом источников были исследованы спектры операторов, описывающих эволюцию средних численностей частиц как в произвольном узле, так и на всей решетке, и найдены условия существования положительного старшего собственного значения, которое приводит к экспоненциальному росту численности частиц. В данных работах использовался аналитический подход, основанный на представлении эволюционных уравнений для моментов численности частиц как уравнений в банаховых пространствах и исследовании спектра операторов, возникающих в правой частях этих уравнений.

В работе [70] была введена другая модель ВСБ – каталитическое ветвящееся случайное блуждание по  $\mathbb{Z}$  с одним источником ветвления в начале координат. Был введен дополнительный параметр, отвечающий за соотношение между «ветвлением» и «блужданием» в источнике ветвления, что привело к тому, что генератор случайного блуждания перестал быть симметричным. В последующих работах [5, 7, 8, 9] было продолжено исследование таких моделей для случая целочисленной решетки произвольной конечной размерности  $\mathbb{Z}^d$ . Отметим также, что в работах [8], [9] было исследовано асимптотическое поведение вероятностей невырождения такого процесса к моменту  $t \rightarrow \infty$  и наличия в нуле хотя бы одной частицы в момент времени  $t \rightarrow \infty$ , а также доказаны условные предельные теоремы для количества частиц, находящихся в момент времени  $t$  в начале координат и вне его. Отметим еще работу [6], в которой обобщаются данные результаты на случай

конечного числа источников ветвления. В данных работах используется другой подход, основанный на представлении ВСБ как ветвящегося процесса с несколькими типами частиц, а также на применении многомерных теорем восстановления.

Далее, были рассмотрены модели ВСБ с бесконечной дисперсией скачков [14], [21], [23], [71]. Для таких ВСБ было показано, что при выполнении дополнительного условия на функцию  $a_0(x)$ , описывающую случайное блуждание,

$$a_0(z) = \frac{H(|z|/z)}{|z|^{d+\alpha}}, \quad \alpha \in (0, 2), \quad z \in \mathbb{Z}^d, \quad z \neq 0,$$

где  $H(z)$  – положительная ограниченная симметричная функция, ВСБ невозвратно в размерности  $d = 1$  при  $\alpha \in (0, 1)$ , а в размерности  $d = 2$  невозвратно при  $\alpha \in (0, 2)$ .

В настоящей диссертации предложен метод, позволяющий исследовать ВСБ на  $\mathbb{Z}^d$  с бесконечным числом источников ветвления в предположении, что интенсивность ветвления  $\beta(v)$ ,  $v \in \mathbb{Z}^d$  является периодической функцией на  $\mathbb{Z}^d$  относительно некоторой  $d$ -мерной решетки  $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ . Предположение об однородности блуждания также заменено на более слабое предположение об инвариантности элементов  $a(u, v)$  матрицы переходных интенсивностей относительно сдвигов на элементы решетки  $\Gamma$ , то есть  $a(v, u) = a(v + g, u + g)$  для любого  $g \in \Gamma$ . Эта конструкция соответствует ВСБ на графе  $G = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$  с множеством вершин  $\mathbb{Z}^d$  и множеством ребер

$$\mathcal{E} = \{(v, u) : a(v, u) > 0, \quad v, u \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Отметим здесь существенное отличие рассматриваемого нами случая от случая ВСБ с конечным числом источников ветвления. Добавление к обычному блужданию конечного числа источников ветвле-

ния может привести к появлению в спектре оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц, конечного числа положительных собственных значений. В рассматриваемом нами случае бесконечного числа источников с периодически меняющимися интенсивностями ситуация совершенно иная – добавление таких источников приводит не к возможному появлению положительных собственных значений конечной кратности, а к возможному возникновению непрерывного спектра в положительной области. Это обстоятельство приводит к необходимости применения новых подходов и методов исследования.

Используемый нами подход основан на разложении оператора, описывающего эволюцию локальной численности частиц, в прямой интеграл операторов (см. гл. XIII.16, [66] и гл. 4, [28]) и дальнейшем исследовании спектров полученных вспомогательных операторов.

Напомним здесь, что разложение в прямой интеграл – это техника исследования периодических операторов, позволяющая свести изучение спектра оператора во всем пространстве к изучению спектров семейства вспомогательных операторов, заданных на пространстве ”меньшей” размерности. Для периодических дифференциальных операторов такое разложение применяется крайне широко (см., например, [3], [13], и упомянутые там работы). В этом случае преобразование, переводящее исходное пространство в прямой интеграл слоев, обычно называют преобразованием Гельфанда, а сама теория называется теорией Флоке–Блоха.

В рассматриваемом нами случае оператор, описывающий эволюцию численности частиц, обычно называют весовым комбинаторным оператором Лапласа на периодическом и, вообще говоря, не локально конечном графе (см. [33]).

Спектр оператора Лапласа  $\sigma(\Delta)$  на локально конечном периодиче-



ском графе широко изучен (см. [38], [40], [52], [65] и упомянутые там работы). Известно, что  $\sigma(\Delta)$  состоит из конечного числа спектральных зон и, возможно, собственных значений бесконечной кратности. В настоящей работе мы пользуемся методами упомянутых работ для исследования спектра весового оператора Лапласа в интересующем нас случае не локально конечного графа.

**Цель диссертационной работы.** Целью настоящей диссертации является изучение асимптотического поведения при  $t \rightarrow \infty$  среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на  $\Gamma$ -периодическом графе в предположении, что интенсивность ветвления также является  $\Gamma$ -периодической функцией.

**Методы исследований.** В данной работе наряду с чисто вероятностными методами используются методы теории операторов, спектральной теории и асимптотической теории.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах теории вероятностей, стохастического анализа и спектральной теории разностных операторов на периодических графах. Результаты и методы работы могут быть востребованы в исследованиях, проводимых в Санкт-Петербургском государственном университете, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Новосибирском государственном университете, институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской ака-

демии наук.

### **Результаты и положения, выносимые на защиту.**

- 1) Показано, что асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$  среднего числа частиц ВСБ на периодическом графе с периодической интенсивностью источников ветвления определяется наибольшим собственным значением  $\lambda_1(0)$  конечной матрицы  $A(0)$ , коэффициенты которой явно выражаются через матрицу интенсивностей переходов и функции интенсивности ветвления.
- 2) В предположении о существовании второго момента у скачков случайного блуждания найден старший член асимптотики среднего числа частиц ВСБ в фиксированной вершине графа.
- 3) В предположении о существовании всех моментов у скачков случайного блуждания получено асимптотическое разложение среднего числа частиц ВСБ в фиксированной вершине графа.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались:

- на Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике ПОМИ (Санкт-Петербург, март 2018 г.);
- на семинаре отдела теории вероятностей и математической статистики МИАН (Москва, март 2018 г.);
- на Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Крым, 17–29 сентября 2018 г.);
- на Санкт-Петербургской зимней молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, 24–26 декабря 2018 г.);

- на семинаре кафедры Высшей математики и математической физики СПбГУ (Санкт-Петербург, ноябрь 2017 г.);
- на «Санкт-Петербургской зимней молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике» (Санкт-Петербург, 19–21 декабря 2017 г.);
- на международной конференции Third Indo-Russian meeting in probability and statistics (Индия, Бангалор, 8–12 января 2018 г.);
- на международной конференции 3rd International Conference on Stochastic Methods (Дивноморское, 3–9 июня 2018 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации содержатся в четырех работах [73, 74, 75, 76], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, приложения и заключения. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем. Вспомогательные утверждения сформулированы в виде лемм.

Общий объем диссертации составляет 79 страницы. Список литературы содержит 76 наименования.

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований. Также приведен исторический обзор литературы по теме диссертации.

**В первой главе** диссертации описывается модель ветвящегося случайного блуждания на  $\mathbb{Z}^d$  с непрерывным временем и периодической функцией интенсивности ветвления. Вводятся вспомогательные обозначения, которые потребуются в дальнейшем. Также приводится

ряд вспомогательных фактов. В частности объясняется, почему рассматриваемая модель описывает случайное блуждание с ветвлением на произвольном периодическом графе. Также, в первой главе приводится обратное уравнение Колмогорова, которому удовлетворяет среднее число частиц в фиксированной точке решетки. Оператор  $\mathcal{A}$ , стоящий в этом уравнении, и является основной целью дальнейших исследований.

**Во второй главе** с помощью разложения в прямой интеграл и некоторых других классических приемов спектральной теории операторов и матричного анализа исследуется спектр оператора  $\mathcal{A}$ . Именно, исследуется положение правого края спектра, а также характер поведения старшей зонной функции в окрестности этого края. Результаты во многом похожи на аналогичные результаты, полученные другими авторами для весового комбинаторного оператора Лапласа на периодическом локально конечном графе. Интересующий нас оператор  $\mathcal{A}$  является весовым оператором Лапласа для некоторого графа, вообще говоря, не локально конечного. Это приводит к ряду дополнительных технических трудностей.

**В третьей главе** приводятся и доказываются основные результаты об асимптотическом поведении среднего числа частиц в фиксированной точке  $\mathbb{Z}^d$  (теорема 3.3) и среднего числа частиц на всем  $\mathbb{Z}^d$  (теорема 3.6). В последнем параграфе рассматривается частный случай вышеописанной конструкции – однородное ВСБ с одинаковой интенсивностью источников ветвления.

**В четвертой главе** диссертации рассматривается ряд примеров: случайное блуждание на  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d = 1, 2$  с возможностью перехода только в соседние точки, случайные блуждания на графах, соответствующих графену и станену.

**В Приложении** для удобства читателя приводится ряд утверждений, заимствованных из цитируемой литературы, используемых по ходу изложения.

**В Заключении** кратко изложены основные результаты диссертации.

### **Благодарности**

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Наталии Васильевне Смородиной за постановку интересных задач, постоянное внимание и поддержку, полезные обсуждения и ценные советы, замечания и комментарии.

## Глава 1

# Ветвящееся случайное блуждание

В этой главе мы подробно опишем рассматриваемую модель ветвящегося случайного блуждания (ВСБ) и введем ряд необходимых вспомогательных объектов. Также в этой главе мы приведем алгоритм построения ветвящегося случайного блуждания на  $\mathbb{Z}^d$  и выведем основное уравнение для средней численности частиц в произвольной фиксированной точке.

### 1.1 Описание модели ветвящегося случайного блуждания

Пусть  $g_1, \dots, g_d \in \mathbb{Z}^d$  – набор линейно независимых (не обязательно ортогональных) векторов с целочисленными координатами. Будем называть решеткой множество

$$\Gamma = \left\{ g \in \mathbb{Z}^d : g = \sum_{j=1}^d n_j g_j, n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, d \right\},$$

а множество  $\{g_j\}_{j=1}^d$  будем называть базисом решетки  $\Gamma$ . Отметим, что различные базисы могут порождать одну и ту же решетку.

Будем обозначать через  $\|g\|$  евклидову норму вектора в  $\mathbb{R}^d$ . Предположим, что случайное блуждание частиц имеет матрицу переходных

интенсивностей  $A_0 = (a(v, u))_{v, u \in \mathbb{Z}^d}$ , для элементов которой выполнены условия

$$(i) \quad a(v, u) \geq 0, \quad v \neq u;$$

$$(ii) \quad a(v, v) < 0;$$

$$(iii) \quad \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v, u) = 0;$$

$$(iv) \quad a(v, u) = a(u, v) = a(v + g, u + g), \quad \forall g \in \Gamma;$$

$$(v) \quad \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} \|u\|^2 |a(v, u)| < \infty, \quad v \in \mathbb{Z}^d;$$

(vi) для любых  $v, u \in \mathbb{Z}^d$  существует путь  $v = u_0, u_1, \dots, u_m = u$ , такой что  $a(u_{i-1}, u_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Условие (iv) означает, что коэффициенты матрицы  $A_0$  являются инвариантными относительно сдвига на любой вектор из  $\Gamma$ . Свойство (v) означает конечность дисперсии скачков случайного блуждания. Условие (vi) означает, что любая точка  $u \in \mathbb{Z}^d$  достижима, то есть соответствующее блуждание неприводимо (см. §6, гл. 3, [10]). Существование данного марковского процесса обеспечивает теорема 2, §3, гл. 7, [10]. Далее мы приведем еще явный алгоритм построения такого процесса.

Введем на  $\mathbb{Z}^d$  отношение эквивалентности, именно, точки  $u, v \in \mathbb{Z}^d$  назовем эквивалентными, если  $u - v \in \Gamma$ . Соответствующее факторпространство обозначим через  $\Omega = \mathbb{Z}^d / \Gamma$ . Множество  $\Omega$  всегда конечно (см. лемму 1.1), через  $p = \text{card } \Omega$  обозначим число элементов этого множества. Множество  $\Omega$  будем называть фундаментальным множеством вершин, его можно отождествить с некоторым множеством  $\{v_1, \dots, v_p\}$  попарно неэквивалентных элементов  $\mathbb{Z}^d$ . Конкретный выбор множества  $\{v_1, \dots, v_p\}$  нам удобно сделать позднее (см. лемму 2.8).

До леммы 2.8 рассуждения не зависят от этого выбора. Для фиксированного выбора  $\Omega = \{v_1, \dots, v_p\}$  любая вершина  $u \in \mathbb{Z}^d$  единственным образом представляется в виде

$$u = \omega_u + \gamma_u, \quad (1.1)$$

где  $\omega_u \in \Omega$  и  $\gamma_u \in \Gamma$ . Определим еще проекторы  $\pi_\Omega : \mathbb{Z}^d \rightarrow \Omega$  и  $\pi_\Gamma : \mathbb{Z}^d \rightarrow \Gamma$  формулами

$$\pi_\Omega u = \omega_u, \quad \pi_\Gamma u = \gamma_u. \quad (1.2)$$

Обозначим через  $G = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$  граф с множеством вершин  $\mathbb{Z}^d$  и множеством ребер

$$\mathcal{E} = \{(v, u) : a(v, u) > 0, v, u \in \mathbb{Z}^d\}. \quad (1.3)$$

Заметим, что условие  $(vi)$  равносильно условию связности графа  $G$ . Пусть  $H$  – матрица перехода от базиса  $g_1, \dots, g_d$  к стандартному базису  $\mathbb{Z}^d$ . Обозначим через  $B$  транспонированную к  $H$  матрицу. Тогда граф  $G$  изоморфен графу  $BG = (\mathcal{V}_B, \mathcal{E}_B)$ , где

$$\mathcal{V}_B = \{x \in \mathbb{R}^d : Bx \in \mathbb{Z}^d\}, \quad \mathcal{E}_B = \{(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : (Bx, By) \in \mathcal{E}\}.$$

Граф  $BG$  вложен в  $\mathbb{R}^d$ , является  $\mathbb{Z}^d$ -периодическим, то есть периодический относительно решетки, порожденной стандартным базисом  $\mathbb{Z}^d$ , и содержит конечное число вершин в единичном кубе. Исследуемое случайное блуждание может быть рассмотрено как случайное блуждание на графе  $BG$ . Отметим, что в литературе используются и другие, эквивалентные данному, определения  $\mathbb{Z}^d$ -периодических графов (см., например, [28], [38]).

В качестве примера рассмотрим решетку  $\Gamma$  на  $\mathbb{Z}^2$ , порожденную векторами  $g_1 = (2, 0)$  и  $g_2 = (0, 2)$  (см. рис. 1.1). В этом случае



фундаментальное множество вершин состоит из четырех точек, которые можно выбрать, например, следующим образом:  $v_1 = (0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 0)$ ,  $v_3 = (0, 1)$ ,  $v_4 = (1, 1)$ .

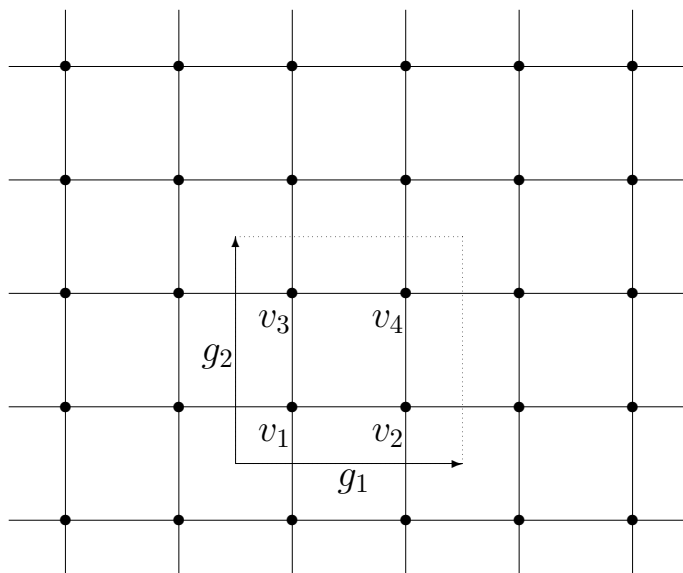


Рис. 1.1: Пример двумерной решетки и фундаментального множества.

Приведем общую формулу для числа  $p$  вершин фундаментального множества. Для этого введем множество

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{j=1}^d x_j g_j, 0 \leq x_j < 1 \right\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.1.** Число элементов  $p$  фундаментального множества  $\Omega$  равно числу элементов множества  $\mathbb{Z}^d \cap \mathcal{C}$ .

**Доказательство.** Так как множество

$$\mathcal{C} + \Gamma = \{ x \in \mathbb{R}^d : x = x_c + g, x_c \in \mathcal{C}, g \in \Gamma \}$$

совпадает со всем  $\mathbb{R}^d$ , то в  $\mathcal{C}$  есть представитель каждого класса из  $\Omega$ . Так как ни один элемент множества  $\mathbb{Z}^d \cap \mathcal{C}$  не может быть получен сдвигом другого элемента на вектора из  $\Gamma$ , то в  $\mathcal{C}$  не более одного представителя каждого класса. Таким образом

$$p = \text{card}(\mathbb{Z}^d \cap \mathcal{C}).$$

□

Источник ветвления в каждой вершине  $v \in \mathbb{Z}^d$  в рассматриваемой нами модели описывается последовательностью коэффициентов  $b_k(v)$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , удовлетворяющих условиям

$$b_1(v) \leq 0, \quad b_k(v) \geq 0 \text{ при } k \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(v) = 0.$$

Данная последовательность коэффициентов однозначно определяется своей производящей функцией

$$B(v, s) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(v) s^k. \quad (1.4)$$

Размножение и гибель частиц в источнике ветвления в вершине  $v \in \mathbb{Z}^d$  задается процессом Бьенеме–Гальтона–Ватсона, где  $b_k(v)$  – интенсивность деления частицы на  $k$  потомков.

Далее мы предполагаем, что для любой  $v \in \mathbb{Z}^d$  выполнено

$$\beta(v) = B'(v, 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k(v) < \infty,$$

то есть число потомков в каждом источнике имеет конечный первый момент. Кроме того, мы предполагаем, что функция  $\beta(v)$  является  $\Gamma$ -периодической, то есть  $\beta(v + g) = \beta(v)$  для любого вектора  $g \in \Gamma$ . Соответственно, на всем  $\mathbb{Z}^d$  у нас имеется  $p$  источников различной интенсивности. Если мы отождествляем  $\Omega$  с множеством  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ,

то соответствующие коэффициенты  $b_k(v_j)$  будем обозначать  $b_{jk}$ , а интенсивность источника  $\beta(v_j)$  будем обозначать  $\beta_j$ . Отметим, что случаю отсутствия источника в вершине  $v_j$  соответствует  $b_{jk} = 0$  для любого  $k$ , и, значит,  $B(v_j, s) \equiv 0$ .

Таким образом, каждая частица, находящаяся в момент времени  $t$  в некоторой точке  $v = v_j + \gamma_v$ ,  $\gamma_v \in \Gamma$ , независимо от остальных частиц в системе, может за время  $[t, t + h)$  перейти с вероятностью  $p(h, v, u) = a(v, u)h + o(h)$  в точку  $u \neq v$ , или произвести  $k \neq 1$  потомков, находящихся в точке  $v$ , с вероятностью  $p_k(h, v) = b_{jk}h + o(h)$ , (при  $k = 0$  считаем, что число потомков равно 0, то есть частица погибает), или сохраниться (то есть никаких изменений не произойдет) с вероятностью

$$1 - \sum_{u \neq v} a(v, u)h - \sum_{k \neq 1} b_{jk}h + o(h).$$

## 1.2 Построение ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$

В этом параграфе мы приведем удобный алгоритм построения ВСБ с любой наперед заданной матрицей переходных интенсивностей и производящей функцией ветвления  $B(v, s)$ . Начнем с построения обычного случайного блуждания (без ветвления).

**Построение случайного блуждания на решетке  $\mathbb{Z}^d$ .** Пусть  $P = \{p(v, u)\}_{v, u \in \mathbb{Z}^d}$  – вероятностная матрица переходов, то есть величины  $p(v, u)$  неотрицательны и для любого  $v \in \mathbb{Z}^d$  справедливо соотношение  $\sum_u p(v, u) = 1$ .

В этом случае для того, чтобы построить случайное блуждание

с матрицей интенсивностей переходов  $A_0 = P - I$  нам понадобится стандартный пуассоновский процесс  $\nu(t)$  (с интенсивностью 1). Опишем подробно алгоритм построения.

Пусть наше случайное блуждание  $\xi_v(t)$  в начальный момент времени  $t = 0$  стартует из точки  $v \in \mathbb{Z}^d$  (т.е.  $\xi_v(0) = v$ ).

В момент времени  $\tau_1$  первого скачка пуассоновского процесса  $\nu$  процесс  $\xi_v(t)$  переходит в какую-либо другую точку  $u \in \mathbb{Z}^d$  с вероятностью  $p(v, u)$  или остается на месте с вероятностью  $p(v, v)$ . Далее мы ждем следующего скачка пуассоновского процесса и повторяем процедуру снова. Построенное таким образом семейство процессов  $\xi_v(t)$ ,  $v \in \mathbb{Z}^d$  является марковским семейством с непрерывным временем и, соответственно, порождает полугруппу операторов

$$P^t f(v) = \mathbb{E}f(\xi_v(t)).$$

Вычислим генератор этой полугруппы (т.е. матрицу интенсивностей переходов). При  $t \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(\xi_v(t)) &= e^{-t}f(v) \\ &+ e^{-t}t(p(v, v)f(v) + \sum_{u \neq v} p(v, u)f(u)) + o(t). \end{aligned}$$

Первое слагаемое соответствует событию, состоящему в том, что за время  $t$  у пуассоновского процесса не произошло скачка. Второе слагаемое соответствует событию состоящему в том, что произошел один скачок, и частица осталась в точке  $v$ . Третье слагаемое – частица перешла в точку  $u \neq v$ . Вероятность события, состоящего в том, что произошло 2 и более скачков, является  $o(t)$ , и при вычислении генератора не нужна.

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(\xi_v(t)) &= f(v)(1 - t + tp(v, v)) \\ &\quad + t \sum_{u \neq v} p(v, u)f(u) + o(t)\end{aligned}$$

и, соответственно, генератором случайного блуждания является оператор  $P - I$ , где  $I$  – тождественный оператор.

В общем случае для матрицы переходных интенсивностей  $\mathcal{A}_0$  справедливо только условие  $\sum_u a(v, u) = 0$ ,  $v \in \mathbb{Z}^d$ , что не гарантирует того, что матрица  $I + \mathcal{A}_0$  является вероятностной.

В этом случае зафиксируем положительное число  $\gamma$ , такое что для любого  $v$  выполнено

$$1 > 1 + a(v, v)\gamma > 0.$$

Заметим, что в рассматриваемом нами периодическом случае это всегда возможно, так как нужно удовлетворить лишь конечному числу неравенств.

Тогда  $I + \gamma\mathcal{A}_0$  является вероятностной матрицей переходов и мы можем осуществить вышеописанную процедуру, но не со стандартным пуассоновским процессом, а с пуассоновским процессом имеющим интенсивность  $\lambda = 1/\gamma$ .

Покажем, что в этом случае оператор  $\mathcal{A}_0$  является генератором соответствующей полугруппы. При  $t \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned}P^t f(v) &= \mathbb{E}f(\xi_v(t)) = e^{-\lambda t} f(v) \\ &\quad + e^{-\lambda t} \lambda t ((1 + \gamma a(v, v))f(v) + \gamma \sum_{u \neq v} a(v, u)f(u)) + o(t) \\ &= f(v)(1 - \lambda t + \lambda t + \lambda \gamma t a(v, v)) + t \sum_{u \neq v} a(v, u)f(u) + o(t).\end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что генератором полугруппы  $P^t$

является оператор  $\mathcal{A}_0 : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ , где

$$\mathcal{A}_0 f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v, u) f(u).$$

**Построение ветвящегося случайного блуждания на  $\mathbb{Z}^d$ .** В этом параграфе мы вкратце опишем алгоритм построения ветвящегося случайного блуждания на  $\mathbb{Z}^d$  с матрицей переходных интенсивностей  $A_0$  и последовательностью коэффициентов  $b_k(v)$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , задающими ветвление.

Выберем сначала положительную константу  $\gamma$ , так чтобы для всех  $v \in \mathbb{Z}^d$  выполнялись неравенства

$$1 > 1 + a(v, v)\gamma > 0,$$

$$1 > 1 + b_1(v)\gamma > 0.$$

Чтобы смоделировать соответствующее ВСБ нам понадобится последовательность независимых пуассоновских процессов  $\{\nu_j(t)\}_{j=1}^\infty$  с интенсивностью  $\lambda = 1/\gamma$  и не зависящая от нее последовательность  $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$  экспоненциально распределенных независимых случайных величин также с параметром  $\lambda = 1/\gamma$ .

Пусть наше ветвящееся случайное блуждание  $\xi_v(t)$  начинается в момент времени  $t = 0$  с единственной частицы, которая находится в точке  $v \in \mathbb{Z}^d$ . До момента времени  $\eta_1$  мы, как и выше, моделируем обычное блуждание одной частицы при помощи процесса  $\nu_1(t)$  и вероятностной матрицы  $I + \gamma A_0$

Пусть в момент времени  $\eta_1$  наша частица находится в некоторой точке  $u \in \mathbb{Z}^d$ . В этот момент мы убираем нашу частицу из точки  $u$ , но вместо нее сажаем в точку  $u$  случайное число новых частиц. Это случайное число частиц мы моделируем, используя вероятностное

распределение на  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  с весами  $q_k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  следующего вида

$$q_0 = \gamma b_0(u), \quad q_1 = 1 + \gamma b_1(u), \quad q_k = \gamma b_k(u) \text{ при } k \geq 2.$$

Далее мы даем каждой новорожденной частице свой пуассоновский процесс и свою экспоненциально распределенную случайную величину (для разных частиц – независимые между собой) и далее моделируем эволюцию каждой из них отдельно в точности также, как для первой частицы.

Построенный таким образом процесс является марковским процессом со значениями в пространстве целочисленных мер на  $\mathbb{Z}^d$ . Семейство таких процессов порождает полугруппу операторов

$$P^t f(v) = \mathbb{E} \sum_{k=1}^{N(t)} f(\xi_v^{(k)}(t)),$$

где через  $\xi_v^{(k)}(t)$  обозначено положение  $k$ -ой частицы в момент  $t$ , а через  $N(t)$  – общее число частиц на  $\mathbb{Z}^d$  в момент времени  $t$ .

Вычислим генератор этой полугруппы. При  $t \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned} P^t f(v) &= \mathbb{E} \sum_{k=1}^{N(t)} f(\xi_v^{(k)}(t)) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda t} f(v) \\ &+ e^{-\lambda t} \lambda t e^{-\lambda t} \left[ (1 + \gamma a(v, v)) f(v) + \gamma \sum_{u \neq v} a(v, u) f(u) \right] \\ &+ e^{-\lambda t} \lambda t f(v) \left[ 1 + \gamma b_1(v) + \gamma \sum_{k \neq 1} k b_k(v) \right] + o(t) \\ &= f(v) \left[ 1 - 2\lambda t + \lambda t + \gamma \lambda t a(v, v) \right. \\ &\quad \left. + \lambda t + \gamma \lambda t b_1(v) + \gamma \lambda t \sum_{k \neq 1} k b_k(v) \right] \\ &+ \gamma \lambda t \sum_{u \neq v} a(v, u) f(u) + o(t). \end{aligned}$$

Тогда генератор  $\mathcal{A} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  имеет вид

$$\mathcal{A}f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v, u) f(u) + \beta(v) f(v).$$

Алгоритм и результаты моделирования ветвящегося случайного блуждания с конечным числом источников ветвления можно найти в работе [11].

### 1.3 Вывод основного уравнения

Обозначим через  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$  гильбертово пространство суммируемых с квадратом комплекснозначных функций  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$  с нормой

$$\|f\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}^2 = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} |f(v)|^2 < \infty.$$

Через  $\xi_v(t)$ ,  $t > 0$  обозначим случайное блуждание с непрерывным временем и матрицей переходных интенсивностей  $A_0$ , выходящее в момент времени  $t = 0$  из точки  $v \in \mathbb{Z}^d$ . Для  $f \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  положим

$$P_0^t f(v) = \mathbb{E} f(\xi_v(t)).$$

Так как  $\xi_v(t)$  – марковский процесс, то семейство операторов  $P_0^t$  при  $t \geq 0$  является полугруппой. Вычислим генератор этой полугруппы. При  $t \rightarrow 0$  имеем

$$P_0^t f(v) = f(v)(1 + a(v, v)t) + t \sum_{u \neq v} a(v, u) f(u) + o(t),$$

следовательно, генератор  $\mathcal{A}_0 : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  полугруппы  $P_0^t$  имеет вид

$$\mathcal{A}_0 f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v, u) f(u). \quad (1.5)$$



Далее, рассмотрим соответствующее ветвящееся случайное блуждание, для которого интенсивность  $\beta(v)$  является  $\Gamma$ -периодической, то есть  $\beta(v+g) = \beta(v)$ . Таким образом на всем  $\mathbb{Z}^d$  у нас имеется  $p$  источников различной интенсивности. Если множество  $\Omega$  отождествляется с множеством  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , то будем говорить, что источник с интенсивностью  $\beta_j = \beta(v_j)$  располагается в точках  $v_j + g$ , где  $g \in \Gamma$ . Ветвление в точке  $v_j$  определяется производящей функцией  $B(v_j, s)$ , определенной (1.4).

Пусть  $N_v(t)$  – общее число частиц в момент времени  $t$ , при условии, что в начальный момент времени  $t = 0$  была одна частица в точке  $v$ . Через  $\xi_v^{(k)}(t)$  обозначим положение  $k$ -ой частицы в момент времени  $t$ . Положим

$$P^t f(v) = \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{N_v(t)} f(\xi_v^{(k)}(t)) \right).$$

Вычислим генератор полугруппы  $P^t$ . Если  $v = v_j + g$ , где  $g \in \Gamma$ , то при  $t \rightarrow 0$  имеем

$$P^t f(v) = f(v)(1 + a(v, v)t + b_{j1}t) + t \sum_{u \neq v} a(v, u) f(u) + t f(v) \sum_{k \neq 1} k b_{jk} + o(t),$$

следовательно, генератор  $\mathcal{A} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  полугруппы  $P^t$  имеет вид

$$\mathcal{A}f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v, u) f(u) + (Qf)(v), \quad (1.6)$$

где  $Q : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  – оператор поточечного умножения на функцию  $Q(v)$ , периодическую относительно решетки  $\Gamma$ ,

$$\begin{aligned} (Qf)(v) &= Q(v)f(v), \quad Q(v) = Q(v+g), \quad \forall g \in \Gamma, \\ Q(v_j) &= \beta_j, \quad v_j \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Как и выше, через  $M(v, u, t)$  обозначим среднее число частиц в момент времени  $t$  в точке  $u$ , если в начальный момент времени  $t = 0$

у нас была одна частица, которая находилась в точке  $v$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.2.** При любом фиксированном  $u \in \mathbb{Z}^d$  функция  $M(v, u, t)$ , как функция аргументов  $v, t$ , является единственным решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t}(v, u, t) &= (\mathcal{A}M)(v, u, t), \\ M(v, u, 0) &= \delta_u(v), \end{cases} \quad (1.8)$$

где  $\delta_u(\cdot)$  – индикаторная функция одноточечного множества  $\{u\}$ .

**Доказательство.** Для доказательства достаточно заметить, что

$$M(v, u, t) = (P^t \delta_u)(v),$$

а оператор  $\mathcal{A}$  является генератором полугруппы  $P^t$ . □

## Глава 2

# Спектральный анализ оператора $\mathcal{A}$

В этой главе мы исследуем спектр оператора  $\mathcal{A}$ . В частности мы показываем, что спектр оператора  $\mathcal{A}$  состоит из конечного числа зон, некоторые из которых могут вырождаться. Для поиска асимптотики решений уравнения (1.8) при больших временах наиболее важной является структура спектра около его правого края.

### 2.1 Разложение в прямой интеграл

Оператор  $\mathcal{A}_0$  является линейным самосопряженным ограниченным оператором из пространства  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$  в пространство  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ . Отметим, что если существует только конечное число коэффициентов  $a(v, \cdot)$ , отличных от нуля при каждом  $v \in \mathbb{Z}^d$ , то оператор  $\mathcal{A}_0$  является дискретным оператором Лапласа. Для такого оператора известно, что он неположителен (см., например, [58]). Ниже приведено аналогичное доказательство для случая бесконечного числа ненулевых коэффициентов  $a(v, \cdot)$ .

**Лемма 2.1.** *Если коэффициенты оператора  $\mathcal{A}_0$ , определенного (1.5), удовлетворяют условиям (i)–(iii), то  $\mathcal{A}_0$  неположительный, а для*

его нормы выполнена оценка

$$\|\mathcal{A}_0\| \leq 2 \max_{v \in \mathbb{Z}^d} |a(v, v)|. \quad (2.1)$$

**Доказательство.** Докажем неположительность оператора  $\mathcal{A}_0$ . Перенумеруем произвольным образом все вершины графа  $G$ , определенного (1.3). Введем пространство функций на ребрах  $\ell^2(\mathcal{E}, A_0)$  со следующей нормой

$$\|h\|_{\mathcal{E}}^2 = \sum_{(v_j, v_k) \in \mathcal{E}} |h(v_j, v_k)|^2 a(v_j, v_k).$$

Определим оператор  $d : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathcal{E}, A_0)$ , полагая

$$(df)(v_j, v_k) = \begin{cases} f(v_j) - f(v_k), & j \geq k, \\ f(v_k) - f(v_j), & j \leq k. \end{cases}$$

Сопряженным к нему является оператор  $d^* : \ell^2(\mathcal{E}, A_0) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ , где

$$(d^*h)(v_j) = \sum_{k < j} h(v_j, v_k) a(v_j, v_k) - \sum_{k > j} h(v_j, v_k) a(v_j, v_k).$$

Тогда выполнено равенство  $\mathcal{A}_0 = -d^*d$ . Следовательно оператор  $\mathcal{A}_0$  неположителен.

Докажем оценку (2.1). Оператор  $\mathcal{A}_0$  можно представить в виде суммы

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \quad (\mathcal{A}_1 f)(v) = a(v, v) f(v), \quad (\mathcal{A}_2 f)(v) = \sum_{u \neq v} a(v, u) f(u).$$

Норма оператора  $\mathcal{A}_1$  не превосходит  $\max_{v \in \mathbb{Z}^d} |a(v, v)|$ . Применим к оператору  $\mathcal{A}_2$  лемму Шура (см. лемму 5.1 из Приложения) при  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{Z}^d$  с постоянными функциями  $p = q$ . Отсюда получим оценку  $\|\mathcal{A}_2\| \leq \max_{v \in \mathbb{Z}^d} |a(v, v)|$ . Тогда оценка (2.1) следует из неравенства треугольника.  $\square$

Для исследования спектра оператора  $\mathcal{A}$ , определенного (1.6), мы разложим его в прямой интеграл операторов в слоях. Напомним, что через  $\Omega$  обозначено фундаментальное множество вершин  $\Omega = \mathbb{Z}^d/\Gamma$ , которое мы будем отождествлять с некоторым множеством  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ . Обозначим через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  стандартное скалярное произведение векторов в  $\mathbb{R}^d$ . Будем говорить, что базис  $\{\tilde{g}_j\}_{j=1}^d$  двойственный к  $\{g_j\}_{j=1}^d$ , если  $\langle \tilde{g}_i, g_j \rangle = 2\pi\delta_{ij}$ .

Определим множество  $\tilde{\mathcal{C}}$ , полагая

$$\tilde{\mathcal{C}} = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^d : \theta = \sum_{j=1}^d \theta_j \tilde{g}_j, \ 0 \leq \theta_j < 1, \ j = 1, \dots, d \right\}. \quad (2.2)$$

Далее нам понадобится понятие прямого интеграла гильбертовых пространств. Прямой интеграл  $\mathcal{H}$  гильбертовых пространств  $\ell^2(\Omega)$  – это пространство классов эквивалентности измеримых и квадратично интегрируемых векторных полей, наделенное скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \langle u(\theta), v(\theta) \rangle_{\ell^2(\Omega)} d\theta.$$

Если  $\mathcal{H}$  – прямой интеграл пространств  $\ell^2(\Omega)$ , то пишут

$$\mathcal{H} = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \oplus \ell^2(\Omega) d\theta.$$

Далее, говорят, что оператор  $A$  на  $\mathcal{H}$  разложен в прямой интеграл операторов, если существует функция  $A(\theta)$ ,  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ , принимающая значения в пространстве линейных операторов из  $\ell^2(\Omega)$  в  $\ell^2(\Omega)$ , такая что для всех  $\psi \in \mathcal{H}$  выполнено

$$(A\psi)(\theta) = A(\theta)\psi(\theta), \quad \theta \in \tilde{\mathcal{C}}.$$

В этом случае пишут

$$A = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \oplus A(\theta) d\theta,$$

при этом  $A(\theta)$  называют операторами в слое, а параметр  $\theta$  называют квазиимпульсом. Более подробное изложение можно найти в главе XIII.16 книги [66].

Различные применения данной техники можно найти как для дискретных, так и для непрерывных операторов на периодических структурах. Для дискретного оператора Лапласа разложение в прямой интеграл с явным видом оператора в слое было получено в [52], [54]. Без явного вида оператора в слое это разложение получено в [38], [40]. Аналогичная теория для периодических дифференциальных операторов называется теорией Флоке–Блоха. В этом случае преобразование, переводящее исходное пространство в прямой интеграл слоев, называют преобразованием Гельфанда. Для дифференциальных операторов такое разложение широко встречается в литературе (см., например, [3], [13], и ссылки в них).

Обычно в литературе разложение в прямой интеграл строится для операторов  $\mathcal{A}$ , у которых лишь конечное число коэффициентов  $a(v, \cdot)$ ,  $v \in \mathbb{Z}^d$ , не обращается в нуль. Поэтому мы приведем разложение оператора  $\mathcal{A}$  в прямой интеграл с доказательством.

**Теорема 2.2.** *Оператор  $\mathcal{A} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов, то есть справедливо представление*

$$U\mathcal{A}U^{-1} = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \oplus A(\theta) d\theta, \quad (2.3)$$

где  $U : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \mathcal{H}$  – унитарный оператор. Оператор  $A(\theta) : \ell^2(\Omega) \rightarrow \ell^2(\Omega)$  имеет вид

$$(A(\theta)f)(v) = \sum_{u \in \Omega} \tilde{a}(v, u, \theta)f(u) + \tilde{Q}(v)f(v), \quad v \in \Omega, \theta \in \tilde{\mathcal{C}},$$

где коэффициенты  $\tilde{a}(v, u, \theta)$  и потенциал  $\tilde{Q}$  определяются равенствами

ми

$$\tilde{a}(v, u, \theta) = \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} a(v + g, u), \quad (2.4)$$

$$(\tilde{Q}f)(v) = Q(v)f(v), \quad v \in \Omega.$$

**Доказательство.** Пусть  $\ell_0^2(\mathbb{Z}^d)$  – множество функций из  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ , имеющих конечный носитель. Рассмотрим оператор  $U : \ell_0^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \mathcal{H}$ , определенный равенством

$$(Uf)(v, \theta) = |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1/2} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} f(v + g), \quad v \in \Omega, \quad (2.5)$$

где, как и раньше,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^d$ .

Для нормы функции  $Uf$  имеем

$$\begin{aligned} \|Uf\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \|(Uf)(\cdot, \theta)\|_{\ell^2(\Omega)}^2 d\theta \\ &= |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \left( \sum_{v \in \Omega} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} f(v + g) \sum_{g' \in \Gamma} e^{i\langle g', \theta \rangle} \bar{f}(v + g') \right) d\theta \\ &= |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1} \sum_{v \in \Omega} \sum_{g \in \Gamma} \sum_{g' \in \Gamma} \left( f(v + g) \bar{f}(v + g') \int_{\tilde{\mathcal{C}}} e^{-i\langle g - g', \theta \rangle} d\theta \right) \\ &= \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} |f(v)|^2 = \|f\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор  $U$  сохраняет норму функции из множества  $\ell_0^2(\mathbb{Z}^d)$ , плотного в  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ . Тогда он может быть по непрерывности продолжен до изометрического оператора из  $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$  в  $\mathcal{H}$ . Покажем сюръективность отображения  $U$ , для этого рассмотрим сопряженный оператор  $U^*$ . Пусть  $h = \{h_v\}_{v \in \Omega} \in \mathcal{H}$ , где  $h_v : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ . Определим

$$(U^*h)(v + g) = |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1/2} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} e^{i\langle g, \theta \rangle} h_v(\theta) d\theta, \quad v \in \Omega, g \in \Gamma.$$

Явное вычисление показывает, что  $U^*$  является сопряженным оператором к оператору  $U$ . Более того, из формулы

$$\begin{aligned} \|U^*h\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}^2 &= \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} |(U^*h)(v)|^2 = \sum_{v \in \Omega} \sum_{g \in \Gamma} |(U^*h)(v+g)|^2 \\ &= |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1} \sum_{v \in \Omega} \sum_{g \in \Gamma} \left| \int_{\tilde{\mathcal{C}}} e^{i\langle g, \theta \rangle} h_v(\theta) d\theta \right|^2 = \sum_{v \in \Omega} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} |h_v(\theta)|^2 d\theta = \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

следует, что оператор  $U^*$  является изометрическим. Здесь мы использовали равенство Парсеваля для функции  $h_v(\theta)$ . Тогда оператор  $U$  – унитарный.

Далее, для оператора  $\mathcal{A}_0$  и функции  $f \in \ell_0^2(\mathbb{Z}^d)$  имеем

$$\begin{aligned} (U\mathcal{A}_0f)(v, \theta) &= |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1/2} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} (\mathcal{A}_0f)(v+g) \\ &= |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1/2} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v+g, u) f(u) \\ &= |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1/2} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} \sum_{u \in \Omega} \sum_{g' \in \Gamma} a(v+g, u+g') f(u+g') \\ &= |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1/2} \sum_{u \in \Omega} \sum_{g' \in \Gamma} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g', \theta \rangle} e^{-i\langle g-g', \theta \rangle} a(v+g-g', u) f(u+g') \\ &= |\tilde{\mathcal{C}}|^{-1/2} \sum_{u \in \Omega} \sum_{g' \in \Gamma} e^{-i\langle g', \theta \rangle} f(u+g') \sum_{g'' \in \Gamma} e^{-i\langle g'', \theta \rangle} a(v+g'', u) \\ &= \sum_{u \in \Omega} (Uf)(u, \theta) \tilde{a}(v, u, \theta) = A_0(\theta)(Uf)(v, \theta), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где  $v \in \Omega$ ,  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Через  $A_0(\theta)$  мы обозначили оператор  $\ell^2(\Omega) \rightarrow \ell^2(\Omega)$  вида

$$(A_0(\theta)f)(v) = \sum_{u \in \Omega} \tilde{a}(v, u, \theta) f(u), \tag{2.7}$$

где коэффициенты  $\tilde{a}(v, u, \theta)$  определены равенством (2.4). Для потенциала  $Q$ , определенного формулой (1.7), в силу периодичности имеем

$$(UQf)(v, \theta) = Q(v)(Uf)(v, \theta) = \tilde{Q}(Uf)(v, \theta). \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.8) следует (2.3).  $\square$



Оператор  $A(\theta)$  при каждом  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$  является конечномерным самосопряженным оператором. Это значит, что его спектр состоит из конечного набора вещественных собственных значений

$$\lambda_1(\theta) \geq \dots \geq \lambda_p(\theta),$$

где  $p$  – число точек фундаментального множества  $\Omega$ . Коэффициенты оператора  $A(\theta)$  являются непрерывными функциями  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Тогда собственные значения  $\lambda_j(\theta)$  – непрерывные функции  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$  при всех  $j = 1, \dots, p$ . Отсюда и из теоремы 5.3 из Приложения следует, что спектр оператора  $\mathcal{A}$  состоит из  $p$  спектральных зон (возможно перекрывающихся)

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{j=1}^p \lambda_j(\tilde{\mathcal{C}}),$$

где через  $\lambda_j(\tilde{\mathcal{C}})$  обозначена область значений функции  $\lambda_j(\theta)$ ,  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Так как оператор  $\mathcal{A}_0$  является неположительным, то его спектр тоже неположителен, то есть  $\lambda_j(\theta) \leq 0$  при всех  $j = 1, \dots, p$  и  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Отсюда следует, что оператор  $A_0(\theta)$ , определенный (2.7), также неположителен при всех  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Отметим, что возмущение оператора  $A_0(\theta)$  потенциалом  $\tilde{Q}$  является конечномерным при каждом  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ .

В случае, когда зависимость коэффициентов  $\tilde{a}(v, u, \theta)$  от  $\theta$  аналитическая, про спектр  $\sigma(\mathcal{A})$  удастся сказать больше. Например, из теоремы 1 в [16] следует, что он состоит из абсолютно непрерывных зон и конечного числа собственных значений бесконечной кратности. Коэффициенты  $\tilde{a}(v, u, \theta)$  будут аналитическими, если условие (v) заменить на условие

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} \|u\|^N |a(v, u)| < \infty, \quad v \in \mathbb{Z}^d, \quad (2.9)$$

для любого натурального  $N$ . Последнее условие выполнено, например, если при каждом  $v \in \mathbb{Z}^d$  лишь конечное число коэффициентов  $a(v, u)$

отлично от нуля.

Чтобы исследовать асимптотику числа частиц при больших временах, мы должны понять, как ведет себя правый край спектра оператора  $\mathcal{A}$ . Ниже мы покажем, что максимум спектра оператора  $\mathcal{A}$  совпадает со старшим собственным значением  $\lambda_1(0)$  оператора в слое  $A(0)$ , то есть

$$\max \sigma(\mathcal{A}) = \lambda_1(0),$$

а соответствующая спектральная зона не вырождается. В случае, когда только конечное число коэффициентов  $a(v, \cdot)$ ,  $v \in \mathbb{Z}^d$ , не обращается в нуль, аналогичные утверждения доказаны в работе [69].

## 2.2 Анализ спектра оператора $A(\theta)$

Напомним, что через  $v_1, \dots, v_p$  обозначены точки множества  $\Omega$ . Для краткости обозначим через  $\tilde{a}_{jk}(\theta)$  коэффициенты  $\tilde{a}(v_j, v_k, \theta)$ . Пусть  $\tilde{\delta}_{v_1}, \dots, \tilde{\delta}_{v_p}$  – стандартный базис в пространстве  $\ell^2(\Omega)$ :

$$\tilde{\delta}_{v_j}(v) = \begin{cases} 1, & v = v_j, \\ 0, & v \neq v_j. \end{cases} \quad (2.10)$$

Тогда изображающая матрица оператора  $A(\theta)$  в этом базисе имеет вид

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(\theta) + \beta_1 & \tilde{a}_{12}(\theta) & \cdots & \tilde{a}_{1p}(\theta) \\ \tilde{a}_{21}(\theta) & \tilde{a}_{22}(\theta) + \beta_2 & \cdots & \tilde{a}_{2p}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{p1}(\theta) & \tilde{a}_{p2}(\theta) & \cdots & \tilde{a}_{pp}(\theta) + \beta_p \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Далее нам неоднократно понадобятся собственные вектора  $\psi_j(\theta)$  этой матрицы. Условимся считать, что вектора  $\psi_j(\theta)$  всегда выбраны вещественными.

Матрица  $A(0)$  является наиболее простой для исследования, так как в этом случае коэффициенты  $\tilde{a}_{jk}(0)$  легко пересчитываются через коэффициенты  $a(v, u)$ . Именно,

$$\tilde{a}_{jk}(0) = \sum_{g \in \Gamma} a(v_j + g, v_k).$$

**Теорема 2.3.** *Для правого края спектра оператора  $\mathcal{A}$  справедливы следующие утверждения:*

a) *правый край спектра оператора  $\mathcal{A}$  совпадает с  $\lambda_1(0)$ , то есть*

$$\max \sigma(\mathcal{A}) = \lambda_1(0);$$

b) *расстояние от правого края спектра оператора  $\mathcal{A}$  до правого края второй зоны строго положительно, то есть*

$$\lambda_1(0) - \sup_{\theta \in \tilde{\mathcal{C}}} \lambda_2(\theta) > 0; \quad (2.12)$$

c) *гессиан функции  $\lambda_1(\theta)$  не обращается в нуль при  $\theta = 0$ , то есть*

$$\text{Hess } \lambda_1(0) \neq 0;$$

d) *число  $\lambda_1(0)$  не является собственным значением оператора  $\mathcal{A}$ , то есть правый край спектра не вырожден.*

**Доказательство.** Для доказательства теоремы нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

**Лемма 2.4.** *Для любого вектора  $h \in \Gamma$  существует представление в виде*

$$h = \sum_{s=1}^{n_h} h_s, \quad h_s \in \Gamma, \quad (2.13)$$

где для каждого  $s$  выполнено  $a(v_{j_s}, v_{k_s} + h_s) > 0$  при некоторых  $v_{j_s}, v_{k_s} \in \Omega$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный вектор  $h \in \Gamma$ . Из (vi) следует, что вершины  $0$  и  $h$  соединены путем. Пусть  $0 = u_0, u_1, \dots, u_{n_h} = h$  вершины этого пути. Тогда

$$h = \sum_{s=1}^{n_h} (u_s - u_{s-1}).$$

Положим  $\omega_s = \pi_\Omega u_s$  и  $\gamma_s = \pi_\Gamma u_s$ ,  $s = 1, \dots, n_h$ , где проекторы  $\pi_\Omega$  и  $\pi_\Gamma$  определяются формулами (1.2). Тогда

$$h = \pi_\Gamma h = \sum_{s=1}^{n_h} (\gamma_s - \gamma_{s-1}).$$

По условию  $a(u_{s-1}, u_s) > 0$ , но

$$a(u_{s-1}, u_s) = a(\gamma_{s-1} + \omega_{s-1}, \gamma_s + \omega_s) = a(\omega_{s-1}, \omega_s + h_s),$$

где  $h_s = \gamma_s - \gamma_{s-1}$ . □

**Следствие 2.5.** *Существует набор из  $d$  линейно независимых векторов  $\{g'_m\}_{m=1}^d$  из  $\Gamma$  таких, что при всех  $m = 1, \dots, d$  выполнено  $a(v_{j_m}, v_{k_m} + g'_m) > 0$  для некоторых  $v_{j_m}, v_{k_m} \in \Omega$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\{g_m\}_{m=1}^d$  – некоторый базис, порождающий решетку  $\Gamma$ . По лемме 2.4 для каждого вектора  $g_m$  существует разложение (2.13). Среди векторов из всех разложений можно выбрать  $d$  линейно независимых векторов  $\{g'_m\}_{m=1}^d \in \Gamma$ . Из леммы 2.4 следует, что  $a(v_{j_m}, v_{k_m} + g'_m) > 0$  для некоторых  $v_{j_m}, v_{k_m} \in \Omega$ . □

Через  $A_0(0)$  обозначим матрицу  $A(0)$  при условии, что все коэффициенты  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , равны  $0$ .

**Лемма 2.6.** *Матрица  $A_0(0)$  является вещественной и симметричной. Коэффициенты  $\tilde{a}_{jk}(0)$  матрицы  $A_0(0)$  имеют следующие свойства:*

1) коэффициенты  $\tilde{a}_{jk}(0)$  при  $j \neq k$  неотрицательны

$$\tilde{a}_{jk}(0) \geq 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, p;$$

2) сумма элементов в каждой строке равна нулю

$$\sum_{k=1}^p \tilde{a}_{jk}(0) = 0, \quad j = 1, \dots, p; \quad (2.14)$$

3) граф  $\tilde{G} = (\Omega, \tilde{\mathcal{E}})$  с множеством вершин  $\Omega$  и множеством ребер

$$\tilde{\mathcal{E}} = \{(v_j, v_k) : \tilde{a}_{jk}(0) > 0\} \quad (2.15)$$

является связным;

4) При всех  $j, k = 1, \dots, p$  для коэффициентов  $\tilde{a}_{jk}(0)$  выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{jk}(0) &\geq |\tilde{a}_{jk}(\theta)|, \quad j \neq k, \\ \tilde{a}_{jj}(0) &\geq -|\tilde{a}_{jj}(\theta)|. \end{aligned}$$

Одновременно при всех  $j, k = 1, \dots, p$  равенства достигаются только при  $\theta = 0$ .

**Доказательство.** Из свойств коэффициентов оператора  $\mathcal{A}_0$  следуют вещественность и симметричность матрицы  $A_0(0)$ , а также свойства 1, 2 для коэффициентов  $\tilde{a}_{jk}(0)$ .

Перейдем к доказательству свойства 3. Предположим, что граф  $\tilde{G}$  – несвязный. Обозначим одну из его компонент связности через  $\tilde{G}_1 = (\Omega_1, \tilde{\mathcal{E}}_1)$ . Тогда для любых двух вершин  $v_j \in \Omega_1$ ,  $v_k \in \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$  выполнено

$$\tilde{a}_{jk}(0) = \sum_{g \in \Gamma} a(v_j + g, v_k) = 0.$$

Так как коэффициенты  $a(v, u)$  при  $v \neq u$  неотрицательны, значит при всех  $g \in \Gamma$  коэффициенты  $a(v + g, u)$  равны нулю. Тогда на графе  $G = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$  с множеством ребер, определенным (1.3), нет ни одного ребра, соединяющего вершину из множества  $\Omega_1 + \Gamma$  с вершиной из множества  $\Omega_2 + \Gamma$ . Следовательно, граф  $G = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$  – несвязный, что противоречит свойству  $(vi)$  коэффициентов оператора  $A_0$ .

Покажем справедливость утверждения 4. Из явного вида (2.4) коэффициентов  $\tilde{a}_{jk}(\theta)$  и неравенства треугольника следует, что при всех  $j, k = 1, \dots, p$  для коэффициентов  $\tilde{a}_{jk}(0)$  выполнены неравенства

$$\tilde{a}_{jk}(0) \geq |\tilde{a}_{jk}(\theta)|, \quad j \neq k \quad (2.16)$$

Представим коэффициент  $\tilde{a}_{jj}(\theta)$  в виде суммы

$$\tilde{a}_{jj}(\theta) = a(v_j, v_j) + \sum_{g \in \Gamma \setminus \{0\}} a(v_j, v_j + g) e^{i\langle g, \theta \rangle}.$$

Первое слагаемое отрицательно, все остальные слагаемые являются комплексными числами с аргументами  $\langle g, \theta \rangle$ . Заметим, что когда все аргументы равны нулю, значение суммы наиболее близко к точке нуль. Отсюда следует, что

$$\tilde{a}_{jj}(0) \geq -|\tilde{a}_{jj}(\theta)|. \quad (2.17)$$

Если в неравенствах (2.16), (2.17) равенства достигаются одновременно при всех  $j, k = 1, \dots, p$ , то для любого  $g \in \Gamma$  и всех  $j, k = 1, \dots, p$  выполнено

$$e^{-i\langle \theta, g \rangle} a(v_j + g, v_k) = a(v_j + g, v_k).$$

По лемме 2.4 для вектора  $g \in \Gamma$  существует представление (2.13), при этом  $a(v_j + g_s, v_k) \neq 0$  при  $s = 1, \dots, n_g$ . Отсюда следует, что  $e^{-i\langle \theta, g_s \rangle} = 1$ , а значит, и

$$e^{-i\langle \theta, g \rangle} = \prod_{s=1}^{n_g} e^{-i\langle \theta, g_s \rangle} = 1,$$

для любого вектора  $g \in \Gamma$ . При  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$  последнее равенство возможно, только если  $\theta = 0$ .  $\square$

Из (2.14) следует, что постоянная функция является собственной функцией оператора  $A_0(0)$ , соответствующей нулевому собственному значению. Отсюда следует, что  $0 \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ . Отметим, что доказательство последнего утверждения для оператора Лапласа на достаточно произвольном графе можно найти в [58].

**Лемма 2.7.** *Старшее собственное значение  $\lambda_1(0)$  оператора  $A(0)$  является простым. Соответствующая ему собственная функция  $\psi_1(0)$  может быть выбрана положительной.*

**Доказательство.** Рассмотрим граф  $\tilde{G}$ , определенный (2.15). По лемме (2.6) он является связным. Превратим его в ориентированный граф, считая, что каждому неориентированному ребру соответствуют два ребра противоположной ориентации. Тогда из теоремы 6.2.24 в [37] следует, что матрица  $A(0)$  неразложима. Выберем число  $D$  из условия

$$D > \max_j |a_{jj}(0) + \beta_j|.$$

Все элементы матрицы  $A(0) + DI$  неотрицательны. Тогда оба утверждения леммы следуют из теоремы Перрона–Фробениуса (см. теорему 5.2 из Приложения).  $\square$

**Лемма 2.8.** *Существует такой способ выбрать множество  $\Omega$ , что граф  $G' = (\Omega, \mathcal{E}')$  с множеством ребер*

$$\mathcal{E}' = \{(v_j, v_k) : a(v_j, v_k) > 0\} \quad (2.18)$$

*является связным.*

**Доказательство.** Предположим, что граф  $G'$  – несвязный. Через  $J$  и  $K$  обозначим две его компоненты связности. Так как граф  $\tilde{G}$ , определенный (2.15), связный, то существуют две вершины  $v_j \in J$  и  $v_k \in K$ , такие что  $\tilde{a}_{jk}(0) > 0$ . Тогда для некоторого  $0 \neq g \in \Gamma$  коэффициент  $a(v_j, v_k + g)$  строго положительный. Если в фундаментальном множестве заменить вершины  $K$  на вершины, сдвинутые на вектор  $g$ , то на новом графе  $G'$  все вершины из  $J$  и  $K + g$  лежат в одной компоненте связности. Повторяя эту процедуру конечное число раз, мы получим связный граф  $G'$ .  $\square$

Далее мы будем считать, что граф  $G' = (\Omega, \mathcal{E}')$  является связным. Нас интересует правый край спектра оператора  $\mathcal{A}$ . Следующая лемма показывает, что им является число  $\lambda_1(0)$ .

**Лемма 2.9.** *Существуют постоянные  $r > 0$ ,  $C > 0$ , такие что при всех  $\|\theta\| \leq r$  для старшего собственного значения  $\lambda_1(\theta)$  оператора  $A(\theta)$  выполнено*

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \geq C\|\theta\|^2. \quad (2.19)$$

**Доказательство.** Пусть  $\psi_1$  – нормированная собственная функция, соответствующая старшему собственному значению  $\lambda_1(0)$  оператора  $A(0)$ . Для всех  $j = 1, \dots, p$  имеем

$$A(0)\psi_1(v_j) = \sum_{k=1}^p \tilde{a}_{jk}(0)\psi_1(v_k) + \beta_j\psi_1(v_j) = \lambda_1(0)\psi_1(v_j).$$

Откуда

$$\beta_j\psi_1(v_j) = \lambda_1(0)\psi_1(v_j) - \sum_{k=1}^p \tilde{a}_{jk}(0)\psi_1(v_k).$$

Пусть  $f \in \ell^2(\Omega)$ , обозначим через  $\psi_1 f$  поточечное произведение



функций  $\psi_1$  и  $f$ . Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} & \langle A(\theta)\psi_1 f, \psi_1 f \rangle \\ &= \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^p \tilde{a}_{jk}(\theta) \psi_1(v_k) f(v_k) + \beta_j \psi_1(v_j) f(v_j) \right) \psi_1(v_j) \bar{f}(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \left( \tilde{a}_{jk}(\theta) f(v_k) - \tilde{a}_{jk}(0) f(v_j) \right) \psi_1(v_k) \psi_1(v_j) \bar{f}(v_j) + \lambda_1(0) \langle \psi_1 f, \psi_1 f \rangle. \end{aligned}$$

По лемме 2.7 можно считать, что  $\psi_1(v_j) > 0$  при всех  $j = 1, \dots, p$ . Тогда для любой функции  $h \in \ell^2(\Omega)$  существует представление в виде  $h = \psi_1 f$ ,  $f \in \ell^2(\Omega)$ . Для старшего собственного значения  $\lambda_1(\theta)$  оператора  $A(\theta)$  имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1(\theta) &= \max_{|h|=1} \langle A(\theta)h, h \rangle = \max_{|\psi_1 f|=1} \langle A(\theta)\psi_1 f, \psi_1 f \rangle_{\ell^2(\Omega)} \\ &= \lambda_1(0) + \max_{|\psi_1 f|=1} \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^p (\tilde{a}_{jk}(\theta) f(v_k) - \tilde{a}_{jk}(0) f(v_j)) \psi_1(v_k) \right) \psi_1(v_j) \bar{f}(v_j). \end{aligned}$$

При каждом  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$  обозначим через  $f_\theta$  функцию, на которой достигается максимум. Имеем

$$\begin{aligned} & \lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \\ &= \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^p (\tilde{a}_{jk}(0) f_\theta(v_j) - \tilde{a}_{jk}(\theta) f_\theta(v_k)) \psi_1(v_k) \right) \psi_1(v_j) \bar{f}_\theta(v_j). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Рассмотрим два слагаемых суммы с индексами  $j, k$  и  $k, j$ . С учетом того, что  $\psi_1$  – вещественный вектор, а матрица  $A(\theta)$  – самосопряженная,

имеем

$$\begin{aligned}
& \left( \tilde{a}_{jk}(0)f_\theta(v_j) - \tilde{a}_{jk}(\theta)f_\theta(v_k) \right) \psi_1(v_k)\psi_1(v_j)\overline{f_\theta(v_j)} \\
& + \left( \tilde{a}_{kj}(0)f_\theta(v_k) - \tilde{a}_{kj}(\theta)f_\theta(v_j) \right) \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\overline{f_\theta(v_k)} \\
& = \psi_1(v_j)\psi_1(v_k) \left( \tilde{a}_{jk}(0)|f_\theta(v_j)|^2 + \tilde{a}_{kj}(0)|f_\theta(v_k)|^2 - 2\operatorname{Re} \left( \tilde{a}_{jk}(\theta)f_\theta(v_k)\overline{f_\theta(v_j)} \right) \right) \\
& = \psi_1(v_j)\psi_1(v_k) \left( \tilde{a}_{jk}(0)(|f_\theta(v_j)| - |f_\theta(v_k)|)^2 \right) \\
& + \psi_1(v_j)\psi_1(v_k) \left( 2\tilde{a}_{jk}(0)|f_\theta(v_j)||f_\theta(v_k)| - 2\operatorname{Re} \left( \tilde{a}_{jk}(\theta)f_\theta(v_k)\overline{f_\theta(v_j)} \right) \right) \\
& \geq \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\tilde{a}_{jk}(0)(|f_\theta(v_j)| - |f_\theta(v_k)|)^2.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

На последнем шаге мы воспользовались пункта 4, леммы 2.6. Из формулы (2.21) следует, что

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\tilde{a}_{jk}(0) \left( |f_\theta(v_j)| - |f_\theta(v_k)| \right)^2 \leq \lambda_1(0) - \lambda_1(\theta).$$

Так как  $\lambda_1(\theta)$  – непрерывная функция  $\theta$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое что при  $\|\theta\| < \delta$  выполнено

$$|\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta)| \leq \varepsilon.$$

Тогда для значений функции  $f_\theta$ ,  $\|\theta\| < \delta$  в двух любых различных смежных вершинах  $v_j, v_k$  графа  $\tilde{G}$  выполнено

$$|f_\theta(v_j) - f_\theta(v_k)| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\tilde{a}_{jk}(0)}}.$$

Граф  $\tilde{G}$ , определенный (2.15), является связным, и имеет лишь  $p$  вершин. Тогда на нем существует путь между любой парой вершин, причем длина этого пути не больше, чем  $p - 1$ . Тогда для любой пары различных вершин  $v_j, v_k$  графа  $\tilde{G}$  выполнено

$$|f_\theta(v_j) - f_\theta(v_k)| \leq (p - 1) \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\min_{j \neq k} \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\tilde{a}_{jk}(0)}}. \tag{2.22}$$

В силу условия  $|\psi_1 f_\theta| = 1$ , нормы функций  $f_\theta$  равномерно ограничены снизу. Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  значения функции  $f_\theta$  отделены от нуля. Далее считаем, что  $\|\theta\|$  настолько мал, что это выполнено. Обозначим через  $\phi_{jk}(\theta)$  разность аргументов  $\arg f_\theta(v_j) - \arg f_\theta(v_k)$ . Из (2.20) и (2.21) следует, что

$$\begin{aligned} & \lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \\ & \geq \left( \min_j \psi_1(v_j) \right)^2 \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \left( \tilde{a}_{jk}(0) |f_\theta(v_j)| |f_\theta(v_k)| - 2 \operatorname{Re} \left( \tilde{a}_{jk}(\theta) f_\theta(v_k) \overline{f_\theta(v_j)} \right) \right) \\ & \geq C_1 \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \sum_{g \in \Gamma} a(v_j, v_k + g) \left( 1 - \cos [\langle g, \theta \rangle + \phi_{jk}(\theta)] \right). \end{aligned}$$

Аналогично доказательству (2.22) можно показать, что  $\phi_{jk}(\theta) \rightarrow 0$  при  $\|\theta\| \rightarrow 0$ . Из леммы 2.5 следует, что существует базис  $\{g_s\}_{s=1}^d$ , такой что  $a(v_{j_s}, v_{k_s} + g_s) > 0$  при некоторых  $j_s, k_s$ . Все слагаемые суммы выше неотрицательны. Оставляя слагаемые при  $g = 0$  и слагаемые с индексами  $g_s, j_s, k_s$ , получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) & \geq C_1 \sum_{s=1}^d \left( a(v_{j_s}, v_{k_s} + g_s) (1 - \cos [\langle g_s, \theta \rangle + \phi_{j_s k_s}(\theta)]) \right) \\ & + C_1 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p \sum_{k=1}^p a(v_j, v_k) (1 - \cos \phi_{jk}(\theta)). \end{aligned}$$

Вершины  $v_{j_s}$  и  $v_{k_s}$  связаны на графе  $G'$ , определенном (2.18), путем длины не больше, чем  $p - 1$ . Тогда на этом пути существует по крайней мере одно ребро, такое что разность аргументов функции  $f_\theta$

в его концах по крайней мере  $\phi_{j_s k_s}(\theta)/(p-1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) &\geq C_2 \sum_{s=1}^d (2 - \cos(\phi_{j_s k_s}/(p-1)) - \cos[\langle g_s, \theta \rangle + \phi_{j_s k_s}(\theta)]) \\ &= \frac{C_2}{2} \sum_{s=1}^d \left( \phi_{j_s k_s}(\theta)^2/(p-1)^2 + [\langle g_s, \theta \rangle + \phi_{j_s k_s}(\theta)]^2 + O(\|\theta\|^4) + O(\phi_{j_s k_s}(\theta)^4) \right) \\ &\geq C_3 \sum_{s=1}^d \langle g_s, \theta \rangle^2. \end{aligned}$$

Пусть  $P$  – матрица замены ортонормированного базиса  $\{e_s\}_{s=1}^d$  на базис  $\{g_s\}_{s=1}^d$ . Так как базис  $g_s$  состоит из векторов с целочисленными координатами, то  $|g_s| \geq 1$ . Имеем

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \geq C_3 \sum_{s=1}^d \left\langle \sum_{k=1}^d P e_k, \theta \right\rangle^2 \geq C_4 \|P^* \theta\|^2 \geq C \|\theta\|^2. \quad (2.23)$$

□

Вернемся к доказательству теоремы 2.3. Докажем утверждение пункта *a*. Из формулы (2.21) следует, что

$$\begin{aligned} \lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \psi_1(v_j) \psi_1(v_k) \left( \tilde{a}_{jk}(0) (|f_\theta(v_j)| - |f_\theta(v_k)|)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\tilde{a}_{jk}(0) |f_\theta(v_j)| |f_\theta(v_k)| - 2\operatorname{Re}(\tilde{a}_{jk}(\theta) f_\theta(v_k) \overline{f_\theta(v_j)}) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда  $|f_\theta(v_j)| \neq |f_\theta(v_k)|$  при некоторых  $v_j, v_k \in \Omega$ . Так как граф  $\tilde{G}$  – связный, то на пути, соединяющем эти вершины, функция  $|f_\theta|$  не постоянна, и сумма выше строго положительна. Если функция  $|f_\theta|$  постоянна, то в силу  $|\psi_1 f| = 1$ , она не обращается в нуль. Тогда

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \geq \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \psi_1(v_j) \psi_1(v_k) |f_\theta(v_j)| |f_\theta(v_k)| \left( \tilde{a}_{jk}(0) - |\tilde{a}_{jk}(\theta)| \right).$$

Правая часть последнего равенства обращается в нуль только при  $\theta = 0$  в силу пункта 4 леммы 2.6. Отсюда следует, что

$$\lambda_1(0) > \lambda_1(\theta), \quad \theta \neq 0, \quad (2.24)$$

то есть точка  $\theta = 0$  является точкой глобального максимума и первая частная производная по любому направлению в этой точке обращается в нуль.

Докажем утверждение пункта *b*. По определению функций  $\lambda_j(\cdot)$  неравенство

$$\lambda_1(\theta) \geq \lambda_2(\theta)$$

выполнено при всех  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Из леммы 2.7 следует, что

$$\lambda_1(0) > \lambda_2(0).$$

Учитывая это и неравенство (2.24) получаем

$$\lambda_1(0) > \lambda_2(\theta), \quad \theta \in \tilde{\mathcal{C}},$$

то есть выполнено (2.12).

Докажем утверждение пункта *c*. Отметим, что из условия (*v*) следует, что собственное значение  $\lambda_1(\theta)$  является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в нуле. Предположим, что гессиан обращается в нуль в точке  $\theta = 0$ . Тогда существует такое направление  $\tau$ , что

$$\frac{\partial^2 \lambda_1(0)}{\partial \tau^2} = 0,$$

что противоречит оценке (2.19).

Докажем утверждение пункта *d*. Число  $\lambda_1(0)$  не может быть собственным значением оператора  $\mathcal{A}$  в силу неравенства (2.24) и свойств спектра прямого интеграла операторов (теорема 5.3 из Приложения). Таким образом, теорема 2.3 полностью доказана.  $\square$

## Глава 3

# Асимптотическое поведение среднего числа частиц

В этой главе мы приводим и доказываем основные результаты об асимптотическом поведении среднего числа частиц в фиксированной точке решетки и на всей решетке.

### 3.1 Среднее число частиц в фиксированной точке

Приведем два достаточных условия существования положительного собственного значения  $\lambda_1(0)$  матрицы  $A(0)$ , определенной формулой (2.11). Напомним, что через  $A_0(0)$  мы обозначаем матрицу  $A(0)$  при условии, что все коэффициенты  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  равны 0.

**Предложение 3.1.** Пусть потенциал  $\tilde{Q}$  удовлетворяет одному из следующих условий:

$$a) \sum_{j=1}^p \beta_j > 0;$$

$$b) \beta_{\max} = \max_{1 \leq j \leq p} \beta_j > \|A_0(0)\|,$$

где  $\|A_0(0)\|$  – операторная норма матрицы  $A_0(0)$ . Тогда у оператора  $A(0)$  есть положительное собственное значение.

**Доказательство.** Предположим, что выполнено условие а. Пусть  $\varphi(v_j) = 1$ ,  $j = 1, \dots, p$ , – постоянная функция на фундаментальном множестве  $\Omega$ . Для старшего собственного значения  $\lambda_1(0)$  оператора  $A(0)$  имеем

$$\lambda_1(0) = \sup_{\substack{h \in \ell^2(\Omega) \\ h \neq 0}} \frac{\langle A(0)h, h \rangle_{\ell^2(\Omega)}}{\langle h, h \rangle_{\ell^2(\Omega)}} \geq \frac{\langle A(0)\varphi, \varphi \rangle_{\ell^2(\Omega)}}{\langle \varphi, \varphi \rangle_{\ell^2(\Omega)}} = \sum_{j=1}^p \beta_j / p > 0.$$

Пусть выполнено условие b. Спектр оператора  $\tilde{Q}$ , как оператора  $\mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ , состоит из собственных значений  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ . Из леммы 5.4 из Приложения, следует, что у оператора  $A(0) = A_0(0) + \tilde{Q}$  есть собственное значение, которое не меньше  $\beta_{\max} - \|A_0(0)\| > 0$ .  $\square$

Предположим, что интенсивность источников ветвления увеличилась в  $\mu$  раз, тогда потенциал  $Q$  меняется на потенциал  $\mu Q$ . В этом случае говорят, что константа  $\mu$  является константой связи. Вычислим асимптотическое поведение старшего собственного значения  $\lambda_1(0)$  (или правого края спектра оператора  $\mathcal{A}$ ) при  $\mu \rightarrow 0$  и  $\mu \rightarrow \infty$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_0 + \mu Q$ . Тогда для правого края спектра

a) при  $\mu \rightarrow 0$  выполнено

$$\max \sigma(\mathcal{A}_\mu) = \frac{\mu}{p} \sum_j \beta_j + O(\mu^2), \quad (3.1)$$

где  $p$  – число точек фундаментального множества  $\Omega$ ;

b) при  $\mu \rightarrow \infty$  выполнено

$$\max \sigma(\mathcal{A}_\mu) = \mu \max_j \beta_j + O(1). \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Докажем утверждение пункта a. Нуль является собственным значением оператора  $A_0(0)$ . Из леммы 2.1 следует, что оно является старшим. Тогда по лемме 2.7 это собственное значение

простое. Из конечномерной теории возмущений при малых  $\mu$  (см. лемму 5.5 из Приложения) следует, что

$$\lambda_1(0) = \frac{\mu}{p} \sum_j \beta_j + O(\mu^2).$$

Так как  $\lambda_1(0) = \max \sigma(\mathcal{A}_\mu)$ , отсюда следует (3.1).

Докажем утверждение пункта *b*. Из леммы 5.4 из Приложения следует, что при больших  $\mu$  старшее собственное значение оператора в слое  $A(0)$  удовлетворяет неравенству

$$|\lambda_1(0) - \mu \max_j \beta_j| \leq \|A_0(0)\|.$$

Из последнего неравенства следует (3.2).  $\square$

Напомним, что функция  $M(v, u, t) = (P^t \delta_u)(v)$  описывает среднее число частиц ветвящегося случайного блуждания в момент времени  $t$  в точке  $u$  при условии, что в момент времени  $t = 0$  в системе имелась единственная частица, находящаяся в точке  $v$ .

Как и раньше, через  $\psi_1(0)$  мы обозначаем собственный вектор матрицы  $A(0)$ , отвечающий старшему собственному значению  $\lambda_1(0)$ . Напомним, что данный вектор мы выбрали так, что все его координаты положительны.

Для точек  $v$  и  $u$  воспользуемся представлением (1.1). Через  $\omega_v$  и  $\omega_u$  обозначим действие проектора  $\pi_\Omega$  на  $v$  и  $u$  соответственно, а через  $\gamma_v$  и  $\gamma_u$  обозначим действие проектора  $\pi_\Gamma$  на  $v$  и  $u$ .

**Теорема 3.3.** *При  $t \rightarrow \infty$  для функции  $M(v, u, t)$  старший член асимптотики имеет вид*

$$M(v, u, t) = e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \frac{(2\pi)^{d/2} \psi_1(\omega_v, 0) \psi_1(\omega_u, 0)}{|\tilde{\mathcal{C}}| \sqrt{|\det \lambda_1''(0)|}} \left(1 + O(t^{-1})\right). \quad (3.3)$$



**Доказательство.** Из уравнения (1.8) следует, что

$$M(v, u, t) = e^{At}M(v, u, 0) = e^{At}\delta_u(v), \quad v \in \mathbb{Z}^d, \quad u \in \mathbb{Z}^d.$$

Тогда

$$M(v, u, t) = \langle M(\cdot, u, t), \delta_v(\cdot) \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}.$$

В силу унитарности преобразования  $U$ , определенного (2.5), имеем

$$\begin{aligned} M(v, u, t) &= \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \langle Ue^{At}\delta_u(\cdot, \theta), U\delta_v(\cdot, \theta) \rangle_{\ell^2(\Omega)} d\theta \\ &= \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \langle e^{A(\theta)t}U\delta_u(\cdot, \theta), U\delta_v(\cdot, \theta) \rangle_{\ell^2(\Omega)} d\theta. \end{aligned}$$

Тогда для  $w \in \Omega$  имеем

$$U\delta_v(w, \theta) = |\tilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} \delta_v(w + g) = |\tilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\langle \gamma_v, \theta \rangle} \tilde{\delta}_{\omega_v}(w),$$

$$U\delta_u(w, \theta) = |\tilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} \delta_u(w + g) = |\tilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\langle \gamma_u, \theta \rangle} \tilde{\delta}_{\omega_u}(w),$$

где  $\tilde{\delta}_{\omega_v}(w)$  и  $\tilde{\delta}_{\omega_u}(w)$  определены формулой (2.10). Разложим функции  $U\delta_{\omega_v}(\cdot, \theta)$  и  $U\delta_{\omega_u}(\cdot, \theta)$  по собственным функциям оператора  $A(\theta)$  при каждом  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$

$$U\delta_{\omega_v}(w, \theta) = \sum_{j=1}^p c_j^{\omega_v}(\theta) \psi_j(w, \theta), \quad U\delta_{\omega_u}(w, \theta) = \sum_{j=1}^p c_j^{\omega_u}(\theta) \psi_j(w, \theta),$$

где

$$\begin{aligned} c_j^{\omega_v}(\theta) &= \langle U\delta_{\omega_v}(\cdot, \theta), \psi_j(\cdot, \theta) \rangle_{\ell^2(\Omega)} = |\tilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} \bar{\psi}_j(\omega_v, \theta), \\ c_j^{\omega_u}(\theta) &= \langle U\delta_{\omega_u}(\cdot, \theta), \psi_j(\cdot, \theta) \rangle_{\ell^2(\Omega)} = |\tilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} \bar{\psi}_j(\omega_u, \theta). \end{aligned}$$

Имеем

$$e^{A(\theta)t}U\delta_{\omega_u}(w, \theta) = \sum_{j=1}^p e^{\lambda_j(\theta)t} c_j^{\omega_u}(\theta) \psi_j(w, \theta).$$

Отсюда следует, что

$$M(v, u, t) = \frac{1}{|\tilde{\mathcal{C}}|} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \sum_{j=1}^p e^{\lambda_j(\theta)t} e^{i\langle \gamma_v - \gamma_u, \theta \rangle} \bar{\psi}_j(\omega_u, \theta) \psi_j(\omega_v, \theta) d\theta.$$

При  $t \rightarrow \infty$  основной вклад в интеграл дает экспонента с наибольшим собственным значением  $\lambda_1(\theta)$  в показателе. Тогда

$$M(v, u, t) = \frac{1}{|\tilde{\mathcal{C}}|} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} e^{\lambda_1(\theta)t} e^{i\langle \gamma_v - \gamma_u, \theta \rangle} \bar{\psi}_1(\omega_u, \theta) \psi_1(\omega_v, \theta) d\theta \left(1 + O(e^{-\varepsilon t})\right) \quad (3.4)$$

для любого  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_1$  определяется формулой (2.12). Асимптотика старшего члена в интеграле (3.4) может быть вычислена с помощью метода Лапласа (см. теорему 5.6 из Приложения и замечание после нее). Так как мы показали, что ноль является невырожденной точкой максимума функции  $\lambda_1(\theta)$  на  $\tilde{\mathcal{C}}$ , то основной вклад в интеграл вносят значения функции в окрестности нуля. Тогда при  $t \rightarrow \infty$  справедливо

$$M(v, u, t) = e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \frac{(2\pi)^{d/2} \psi_1(\omega_v, 0) \psi_1(\omega_u, 0)}{|\tilde{\mathcal{C}}| \sqrt{|\det \lambda_1''(0)|}} \left(1 + O(t^{-1})\right).$$

□

Для удобства читателя напомним некоторые известные определения. Последовательность  $\{\varphi_k(t)\}$  называется асимптотической при  $t \rightarrow \infty$ , если при любом целом  $k \geq 0$

$$\varphi_{k+1}(t) = o(\varphi_k(t)).$$

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t),$$

вообще говоря, расходящийся, называется асимптотическим рядом функции  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , если для любого натурального  $n$  справедливо неравенство (см. §3, гл. 1, [17])

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(t) \right| = o(\varphi_n(t)).$$

В этом случае также говорят, что функция  $f(t)$  разлагается в асимптотический ряд при  $t \rightarrow \infty$  и пишут

$$f(t) \stackrel{as}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t).$$

Следующее утверждение относится к случаю, когда выполнено условие (2.9), а значит, коэффициенты  $\tilde{a}(v, u, \theta)$  – аналитичны по переменной  $\theta$ .

**Теорема 3.4.** *При выполнении условия (2.9) справедливо асимптотическое разложение*

$$M(v, u, t) \stackrel{as}{=} e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(v, u) t^{-k}.$$

Все коэффициенты  $c_k(v, u)$  могут быть вычислены явно.

**Доказательство.** Доказательство теоремы следует из теоремы 4.1, §4, гл. 2, [17]. □

## 3.2 Среднее число частиц на всей решетке

Заметим, что коэффициенты  $\tilde{a}_{jk}(0)$  сами могут играть роль переходных интенсивностей некоторого случайного блуждания на конечном графе  $\tilde{G} = (\Omega, \tilde{\mathcal{E}})$  с множеством вершин  $\Omega$ . Напомним, что множеством ребер графа  $\tilde{G}$  является

$$\tilde{\mathcal{E}} = \{(v_j, v_k) : \tilde{a}_{jk}(0) > 0\}$$

и, в силу пункта 3) леммы 2.6, граф  $\tilde{G}$  является связным. Обозначим через  $N(v, u, t)$  среднее число частиц ветвящегося случайного блуждания в точке  $u$  при условии, что в начальный момент времени  $t = 0$  существовала одна частица в точке  $v$ , с матрицей переходных интенсивностей  $A(0)$ , и источником ветвления с производящей функцией  $B(v, s)$  в вершине  $v \in \Omega$ . Нам понадобится следующая техническая лемма.

**Лемма 3.5.** *Среднее число частиц  $N(v, u, t)$  ветвящегося случайного блуждания на графе  $\tilde{G}$  при всех  $t$  удовлетворяет равенству*

$$N(v, u, t) = \sum_{j=1}^p d_j(u) e^{\lambda_j(0)t} \psi_j(v, 0),$$

где

$$d_j(u) = \langle \delta_u(\cdot), \psi_j(\cdot, 0) \rangle = \psi_j(u, 0).$$

**Доказательство.** Аналогично тому как было показано, что  $M(v, u, t)$  является решением задачи Коши (1.8) на  $\mathbb{Z}^d$ , можно показать, что  $N(v, u, t)$  является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t}(v, u, t) &= (A(0)N)(v, u, t), \\ N(v, u, 0) &= \delta_u(v), \end{cases}$$

где  $v, u \in \Omega$  – две вершины графа  $\tilde{G}$ . Отсюда получаем

$$N(v, u, t) = e^{A(0)t} N(v, u, 0) = e^{A(0)t} \delta_u(v), \quad v, u \in \Omega.$$

Разложим начальное данное  $\delta_u(v)$  по собственным функциям матрицы  $A(0)$

$$\delta_u(v) = \sum_{j=1}^p \langle \delta_u(\cdot), \psi_j(\cdot, 0) \rangle \psi_j(v, 0).$$

Отсюда имеем

$$N(v, u, t) = e^{A^{(0)}t} \delta_u(v) = \sum_{j=1}^p \langle \delta_u(\cdot), \psi_j(\cdot, 0) \rangle e^{\lambda_j^{(0)}t} \psi_j(v, 0).$$

□

Обозначим среднее число частиц исходного ВСБ на всем  $\mathbb{Z}^d$  через  $M(v, t)$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.6.** *Для любых  $v \in \mathbb{Z}^d$  и  $t > 0$  справедлива формула*

$$M(v, t) = \sum_{j=1}^p D_j e^{\lambda_j^{(0)}t} \psi_j(v, 0),$$

где

$$D_j = \sum_{u \in \Omega} \psi_j(u, 0).$$

**Доказательство.** Так как нас интересует среднее число частиц на всей решетке, то без ограничения общности можно считать  $v \in \Omega$ . Тогда для доказательства достаточно заметить, что

$$N(v, u, t) = \sum_{g \in \Gamma} M(v, u + g, t), \quad v, u \in \Omega,$$

и применить результат леммы 3.5. □

### 3.3 Однородное случайное блуждание

В данном параграфе мы рассмотрим частный случай вышеописанной конструкции, именно однородное ветвящиеся случайное блуждание.

Напомним, что случайное блуждание называется однородным, если коэффициенты матрицы переходных интенсивностей удовлетворяют соотношению  $a(v, u) = a(v - u, 0) = a_0(v - u)$  для всех  $v, u \in \mathbb{Z}^d$ .

В наших обозначениях это означает, что для матрицы переходных интенсивностей  $\Gamma = \mathbb{Z}^d$  и в качестве векторов  $g_j$  могут быть выбраны стандартные базисные вектора  $\mathbb{Z}^d$ . Более того, мы предположим, что источники ветвления находятся в каждой точке  $\mathbb{Z}^d$  и имеют одинаковую интенсивность  $\beta$ .

В этом случае фундаментальное множество вершин  $\Omega$  состоит из единственного элемента ( $p = 1$ ), а  $|\tilde{\mathcal{C}}| = (2\pi)^d$ . Преобразование  $U$ , определенное (2.5), является дискретным  $d$ -мерным преобразованием Фурье, и оно полностью диагонализует оператор  $\mathcal{A}$ . Оператором в слое  $A(\theta) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  при фиксированном  $\theta \in \tilde{\mathcal{C}} = [0, 2\pi]^d$  является оператор умножения на число

$$\begin{aligned} A(\theta)f(v) &= f(v) \left( \sum_{g \in \mathbb{Z}^d} a(v+g, v) e^{-i\langle g, \theta \rangle} + \beta \right) \\ &= f(v) \left( \sum_{g \in \mathbb{Z}^d} a(v+g, v) \cos \langle g, \theta \rangle + \beta \right) \\ &= f(v) \left( \sum_{g \in \mathbb{Z}^d} a_0(g) \cos \langle g, \theta \rangle + \beta \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор  $A(0)$  является умножением на число  $\beta$ . В этом случае

$$\lambda_1(\theta) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^d} a_0(g) \cos \langle g, \theta \rangle + \beta,$$

а значит

$$\left\{ \frac{\partial^2 \lambda_1(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \Big|_{\theta=0} \right\}_{j,k=1}^d = \left\{ - \sum_{g \in \mathbb{Z}^d} g^j g^k a_0(g) \right\}_{j,k=1}^d, \quad (3.5)$$

где  $g^j = \frac{\partial \langle g, \theta \rangle}{\partial \theta_j} \Big|_{\theta=0}$  —  $j$ -ая координата вектора  $g$ . Из этой формулы, в частности, видно, что вторая частная производная по любому направлению строго меньше нуля. Тогда определитель  $\det \lambda_1''(0)$  меньше нуля.

Отсюда следует, что формула (3.3) имеет вид

$$M(v, w, t) = e^{\beta t} (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{-\det \lambda_1''(0)}} (1 + O(t^{-1})),$$

для любых  $v, w \in \mathbb{Z}^d$ , где  $\lambda_1''(0)$  – это матрица, определенная (3.5).

## Глава 4

# Примеры

В данной главе мы приводим несколько примеров случайных блужданий с ветвлением на периодических графах. Некоторые из этих графов могут представлять отдельный интерес для физиков в связи со свойствами соответствующих этим графам кристаллических структур [27].

### 4.1 Случайное блуждание на оси

Рассмотрим оператор  $A_0$  на  $\mathbb{Z}^1$  с коэффициентами

$$a(v, u) = \begin{cases} -2, & v = u, \\ 1, & |v - u| = 1, \\ 0, & |v - u| \geq 2. \end{cases}$$

В этом случае оператор  $-A_0$  называют оператором Лапласа на  $\mathbb{Z}^1$ . Рассмотрим потенциал  $V$ , периодический относительно решетки  $\Gamma$  с базисным вектором  $g = 2$ . Решетка  $\Gamma$  изображена на рисунке 4.1, жирным выделены точки, в которых потенциал не обращается в нуль. Такой потенциал соответствует одному источнику ветвления на периоде. Обозначим интенсивность этого источника через  $\beta$ . В этом случае фундаментальное множество точек состоит из двух точек  $v_1, v_2$ . Изоб-



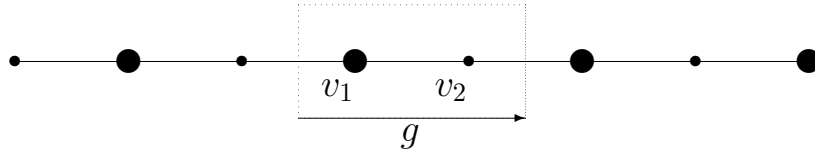


Рис. 4.1: Решетка в примере 1.

ражающая матрица оператора  $A_\beta(\theta)$  в слое имеет следующий вид

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} -2 + \beta & 1 + e^{2i\theta} \\ 1 + e^{-2i\theta} & -2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения  $\lambda_{1,2}(\theta)$  матрицы  $A_\beta(\theta)$  равны

$$\lambda_{1,2}(\theta) = \frac{\beta - 4 \pm \sqrt{\beta^2 + 16 \cos^2 \theta}}{2}.$$

При  $\theta = 0$  нормированный собственный вектор  $\psi_1$

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 16}}{\sqrt{2\beta^2 + 32 + \beta\sqrt{2\beta^2 + 32}}} \\ \frac{4}{\sqrt{2\beta^2 + 32 + \beta\sqrt{2\beta^2 + 32}}} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Вычислим вторую производную  $\lambda_1(\theta)$  в точке  $\theta_0 = 0$

$$\lambda_1''(0) = -\frac{8}{\sqrt{(\beta^2 + 16)}} < 0.$$

Тогда при  $t \rightarrow \infty$  асимптотика  $M(v_j + \gamma_{v_j}, v_k + \gamma_{v_k}, t)$ ,  $j, k = 1, 2$  имеет следующий вид

$$\begin{aligned} M(v_j + \gamma_{v_j}, v_k + \gamma_{v_k}, t) \\ = e^{t \frac{\beta - 4 + \sqrt{\beta^2 + 16}}{2}} \frac{\sqrt[4]{\beta^2 + 16}}{\sqrt{4\pi t}} \psi_1(v_k, 0) \psi_1(v_j, 0) \left(1 + O(t^{-1})\right), \end{aligned}$$

где  $j, k = 1, 2$ ,  $\gamma_{v_j}, \gamma_{v_k} \in \Gamma$ ,  $\psi(v_j, 0)$  – это  $j$ -ая компонента вектора  $\psi_1$ , определенного (4.1).

## 4.2 Случайное блуждание в плоскости

Рассмотрим оператор  $A_0$  на  $\mathbb{Z}^2$  с коэффициентами

$$a(v, u) = \begin{cases} -4, & v = u, \\ 1, & \|v - u\| = 1, \\ 0, & \|v - u\| \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

В этом случае оператор  $-A_0$  называется оператором Лапласа на  $\mathbb{Z}^2$ . Рассмотрим потенциал  $V$ , периодический относительно решетки  $\Gamma$  с базисными векторами  $g_1 = (2, 0)$ ,  $g_2 = (0, 2)$ . Соответствующая решетка изображена на рисунке (4.2), жирным выделены точки, в которых потенциал не обращается в нуль. Такой потенциал соответствует одному источнику ветвления на периоде. Обозначим интенсивность этого источника через  $\beta$ . Фундаментальное множество точек состоит из четырех точек  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Если занумеровать их как показано на рисунке, то изображающая матрица оператора  $A(\theta)$  в слое имеет следующий вид

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} -4 + \beta & 1 + e^{2i\theta_1} & 1 + e^{2i\theta_2} & 0 \\ 1 + e^{-2i\theta_1} & -4 & 0 & 1 + e^{2i\theta_2} \\ 1 + e^{-2i\theta_2} & 0 & -4 & 1 + e^{2i\theta_1} \\ 0 & 1 + e^{-2i\theta_2} & 1 + e^{-2i\theta_1} & -4 \end{pmatrix}.$$

Для старшего собственного значения  $\lambda_1(0)$  матрицы  $A(0)$  получаем выражение

$$\lambda_1(0) = \begin{cases} -4 + \frac{\beta}{3} + \frac{2\sqrt{\beta^2+48}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arctan \frac{6\sqrt{6}\sqrt{\beta^4+26\beta^2+512}}{\beta^3-36\beta}\right), & \beta \leq 6, \\ -4 + \frac{\beta}{3} + \frac{2\sqrt{\beta^2+48}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{6\sqrt{6}\sqrt{\beta^4+26\beta^2+512}}{\beta^3-36\beta}\right), & \beta > 6. \end{cases}$$

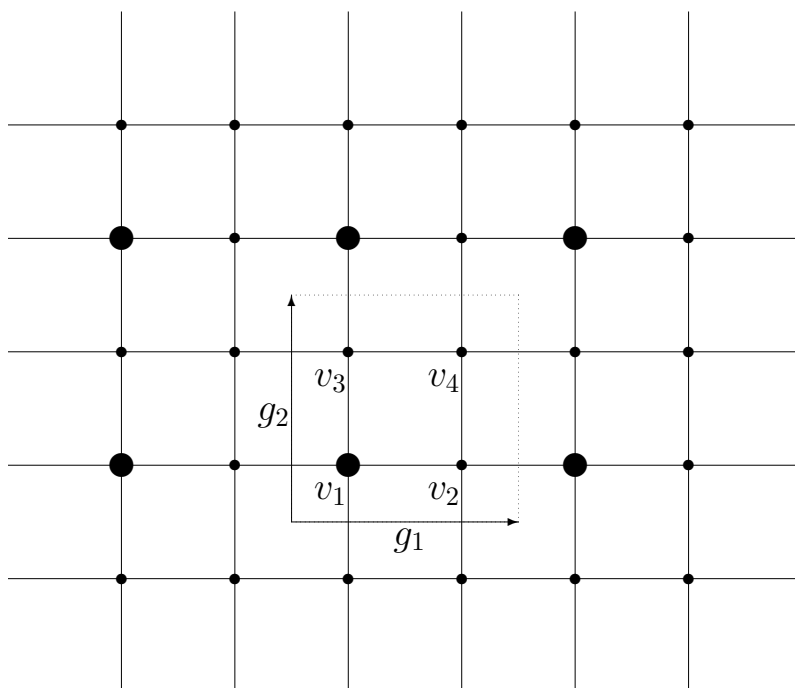


Рис. 4.2: Решетка в примере 2.

Отметим, что несмотря на кусочную запись, эта функция является непрерывной функцией параметра  $\beta$ .

Матрица вторых производных при  $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T = (0, 0)^T$  имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_1''(0) &= \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_1(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \Big|_{\theta=0} \right\}_{j,k=1}^2 \\ &= - \frac{16(\lambda_1(0) + 4)^2 - 8\beta(\lambda_1(0) + 4) + 32}{4(\lambda_1(0) + 4)^3 - 3\beta(\lambda_1(0) + 4)^2 - 32(\lambda_1(0) + 4) + 8\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициент перед единичной матрицей не обращается в ноль, а значит, и гессиан не обращается в ноль. Ненормированный собственный вектор  $\psi_1$  при  $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T = (0, 0)^T$  может быть

выбран следующим образом

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1(0)+4-\beta}{4} \\ \frac{\lambda_1(0)+4-\beta}{4} \\ \frac{\lambda_1(0)+4-\beta}{\lambda_1(0)+4} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Таким образом, формула (3.3) принимает вид

$$M(v_j + \gamma, v_k, t) = e^{\lambda_1(0)t} \frac{2}{\pi t \sqrt{|\det \lambda_1''(0)|}} \frac{\psi_1(v_k, 0) \psi_1(v_j, 0)}{\|\psi_1(0)\|_{\ell_2(\Omega)}^2} (1 + O(t^{-1})),$$

где  $j, k = 1, 2, 3, 4$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\psi_1(v_j, 0)$  – это  $j$ -ая компонента вектора (4.2).

### 4.3 Случайное блуждание на графеновой решетке

Графен [62] – двумерная аллотропная модификация углерода, образованная слоем атомов углерода толщиной в один атом, соединенных в гексагональную двумерную кристаллическую решетку. Его можно представить как одну плоскость графита, отделенную от объемного кристалла.

Обычно графен изображается как шестиугольная решетка (см. рис (4.3)). Соответствующая решетка периодов  $\Gamma$  порождается, например, базисными векторами  $g_1 = (1, 0)$ ,  $g_2 = (0, 2)$ . Фундаментальное множество вершин состоит из двух элементов  $v_1 = (0, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$ . Коэффициенты матрицы переходных интенсивностей определяется равенствами

$$a(v_1, v_1) = a(v_2, v_2) = -3,$$

$$a(v_1, v_2) = a(v_1, v_2 - g_1) = a(v_1, v_2 - g_2) = 1$$

для всех остальных вершин  $u$  выполнено  $a(v_1, u) = 0$ .

Предположим, что в точках  $v = v_1 + \Gamma$  находится источник с интенсивностью  $\beta_1$ , а в точках  $v = v_2 + \Gamma$  – источник с интенсивностью  $\beta_2$ . Соответствующая решетка изображена на рисунке (4.3).

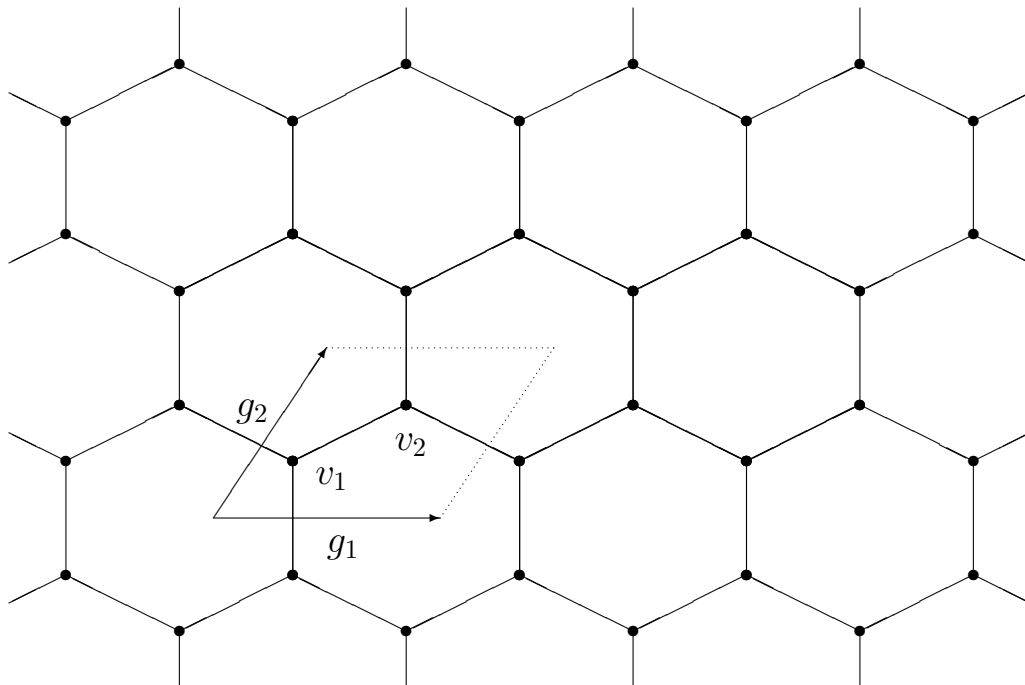


Рис. 4.3: Графеновая решетка.

Вспомогательная матрица  $A(\theta)$  в этом случае имеет следующий вид

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} -3 + \beta_1 & 1 + e^{-i\theta_1} + e^{-2i\theta_2} \\ 1 + e^{i\theta_1} + e^{2i\theta_2} & -3 + \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Для старшего собственного значения  $\lambda_1(0)$  матрицы  $A(0)$  получаем выражение

$$\lambda_1(0) = \frac{1}{2} \left( -6 + \beta_1 + \beta_2 + \sqrt{36 + (\beta_1 - \beta_2)^2} \right).$$

Матрица вторых производных при  $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T = (0, 0)^T$  имеет вид

$$\lambda_1''(0) = \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_1(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \Big|_{\theta=0} \right\}_{j,k=1}^2 = \frac{4}{\sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + 36}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\sqrt{|\det \lambda_1''(0)|} = \sqrt{\frac{48}{(\beta_1 - \beta_2)^2 + 36}}.$$

Ненормированный собственный вектор  $\psi$  при  $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$  может быть выбран следующим образом:

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \left( \beta_1 - \beta_2 + \sqrt{36 + (\beta_1 - \beta_2)^2} \right) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Таким образом, формула (3.3) принимает вид

$$M(v_j + g, v_k + h, t) = \frac{c_0(v_j, v_k)}{t} e^{(-6 + \beta_1 + \beta_2 + \sqrt{36 + (\beta_1 - \beta_2)^2})t/2} (1 + O(t^{-1})),$$

где  $j, k = 1, 2$ ,  $g, h \in \Gamma$ . Коэффициент  $c_0(v_j, v_k)$  равен

$$c_0(v_j, v_k) = \sqrt{\frac{(\beta_1 - \beta_2)^2 + 36}{48}} \frac{\psi_j \psi_k}{\pi \|\psi\|},$$

где  $\psi_j$  – это  $j$ -ая координата вектора (4.3).

#### 4.4 Случайное блуждание на станеновой решетке

Станен [68] является двумерным материалом и двумерным топологическим изолятором. Он состоит из атомов олова, расположенных в одном гексагональном слое, аналогично графену.

Удобно изображать станеновую решетку в виде шестиугольников с дополнительными вершинами. Решетка с фундаментальным множеством изображены на рисунке 4.4. Решетка  $\Gamma$  для станина порождается, например, базисными векторами  $g_1 = (2, 0)$ ,  $g_2 = (0, 2)$ . Фундаментальное множество вершин состоит из четырех элементов  $v_1 = (0, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$ ,  $v_3 = (1, 0)$ ,  $v_4 = (1, 1)$ . Коэффициенты матрицы переход-

ных интенсивностей определяется равенствами

$$a(v_1, v_1) = a(v_2, v_2) = -4,$$

$$a(v_3, v_3) = a(v_4, v_4) = -1,$$

$$a(v_1, v_2) = a(v_1, v_2 - g_1) = a(v_1, v_2 - g_2) = a(v_1, v_3) = a(v_2, v_4) = 1$$

для всех остальных вершин  $u$  выполнено  $a(v_1, u) = 0$ .

В случае графеновой решетки мы рассматривали источники общего вида. В данном случае ответы для источников общего вида крайне громоздкие и для простоты мы рассмотрим только случай, когда  $\beta_1 = \beta_2$ ,  $\beta_3 = \beta_4$ . Обозначим  $\beta_1 = \alpha$ ,  $\beta_3 = \beta$ . Также мы не приводим значения  $\lambda_1''(0)$  в связи с техническими сложностями данного вычисления.

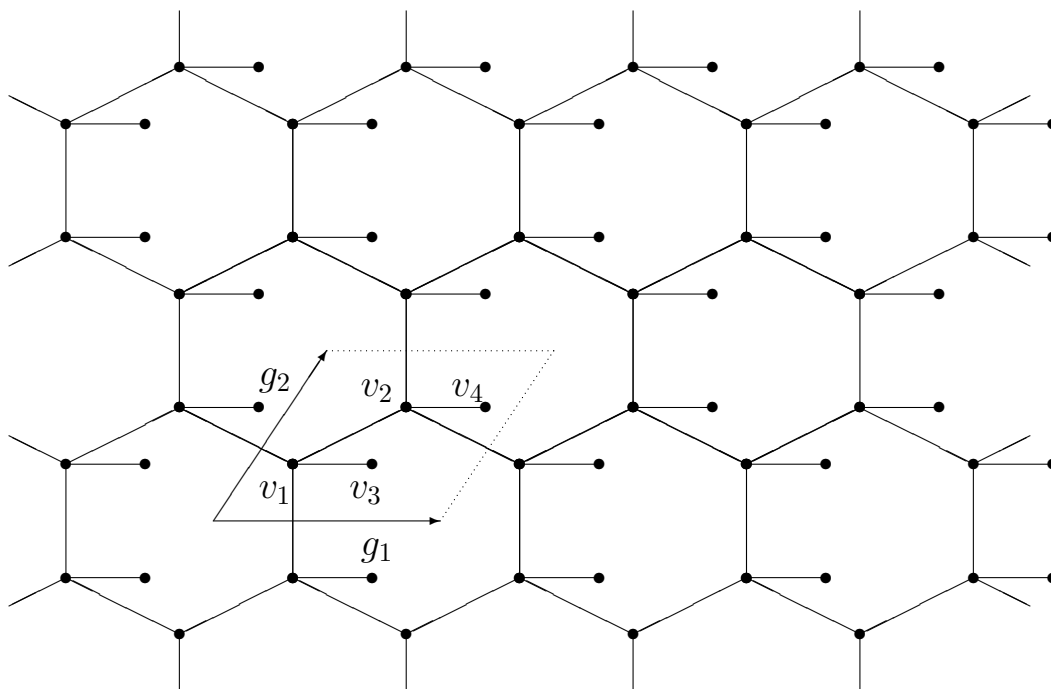


Рис. 4.4: Станеновая решетка.

Вспомогательная матрица  $A(\theta)$  в этом случае имеет следующий

вид

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} -4 + \alpha & 1 + e^{-i\theta_1} + e^{-2i\theta_2} & 1 & 0 \\ 1 + e^{i\theta_1} + e^{2i\theta_2} & -4 + \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 + \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 + \beta \end{pmatrix}.$$

Для старшего собственного значения  $\lambda_1(0)$  матрицы  $A(0)$  получаем выражение

$$\lambda_1(0) = \frac{\alpha + \beta - 2 + \sqrt{4 + (\alpha - \beta)^2}}{2}$$

Ненормированный собственный вектор  $\psi$  при  $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$  может быть выбран следующим образом

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \sqrt{4 + (\alpha - \beta)^2} \\ \alpha - \beta + \sqrt{4 + (\alpha - \beta)^2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, формула (3.3) принимает вид

$$M(v_j + g, v_k + h, t) = \frac{c_0(v_j, v_k)}{t} e^{(\alpha + \beta - 2 + \sqrt{4 + (\alpha - \beta)^2})t/2} (1 + O(t^{-1})),$$

где  $j, k = 1, 2$ ,  $g, h \in \Gamma$ , а коэффициент  $c_0(v_j, v_k)$  при конкретных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  может быть рассчитан численно.



## Глава 5

# Приложение

**Теорема 5.1** (см. теорему 5.2, [35]). Пусть  $k$  – измеримое неотрицательное ядро, а  $p$  и  $q$  – строго положительные измеримые функции на  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  соответственно. Предположим, что существуют положительные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , такие что

$$\int_{\mathcal{Y}} k(x, y)q(y)dy \leq \alpha p(x), \text{ при почти всех } x \in \mathcal{X},$$

$$\int_{\mathcal{X}} k(x, y)p(x)dx \leq \beta q(y), \text{ при почти всех } y \in \mathcal{Y}.$$

Тогда квадрат нормы оператора с ядром  $k$  ограничен числом  $\alpha\beta$ .

Пусть  $A$  – квадратная матрица  $p \times p$ , а  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , – ее собственные значения с учетом кратностей. Обозначим через  $\rho(A)$  спектральный радиус матрицы  $A$ , то есть наибольший модуль собственного значения  $A$

$$\rho(A) = \max_j |\lambda_j|.$$

**Теорема 5.2** (см. теорему 8.4.4, [37]). Предположим, что  $A$  неразложима и все ее элементы неотрицательны. Тогда

(a)  $\rho(A) > 0$ ;

- (b)  $\rho(A)$  – собственное значение матрицы  $A$ ;
- (c) для некоторого положительного вектора  $\psi$  выполнено  $A\psi = \rho(A)\psi$ ;
- (d)  $\rho(A)$  – алгебраически (а значит, и геометрически) простое собственное значение матрицы  $A$ .

Отметим, что в случае самосопряженной матрицы  $A$  все собственные значения вещественны, а спектральный радиус равен либо наибольшему, либо минус наименьшему из них. Тогда, применяя теорему 5.2 к матрице  $A + DI$  при некотором достаточно большом  $D > 0$ , можно получить все утверждения теоремы 5.2 для старшего собственного значения.

Пусть задана функция  $A(\cdot)$  из пространства с мерой  $\langle M, \mu \rangle$  во множество самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}'$ . Она называется измеримой тогда и только тогда, когда измерима функция  $(A(\cdot) + iI)^{-1}$ . По этой функции можно определить оператор  $A$  в пространстве  $\mathcal{H} = \int_M \oplus \mathcal{H}'(m) d\mu(m)$  соотношением

$$(A\psi)(m) = A(m)\psi(m),$$

с областью определения

$$D(A) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \psi(m) \in D(A(m)) \text{ п.в.}, \int_M \|A(m)\psi(m)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(m) < +\infty \right\}.$$

Обычно используют обозначение  $A = \int_M \oplus A(m) d\mu(m)$ .

**Теорема 5.3** (см. теорему XIII.85 [66]). Пусть  $A = \int_M \oplus A(m) d\mu(m)$ , где  $A(\cdot)$  – измерима и  $A(m)$  – самосопряженный оператор для каждого  $m$ . Тогда

(a) оператор  $A$  – самосопряженный оператор;

(b) самосопряженный оператор  $A$  в  $\mathcal{H}$  имеет вид  $\int_M \oplus A(t) d\mu(t)$  тогда и только тогда, когда  $(A + iI)^{-1}$  есть ограниченный разложимый оператор;

(c) для любой борелевской функции  $F$  на  $\mathbb{R}$

$$F(A) = \int_M \oplus F(A(t)) d\mu(t);$$

(d)  $\lambda \in \sigma(A)$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{t \in M \mid \sigma(A(t)) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq \emptyset\}) > 0;$$

(e)  $\lambda$  есть собственное значение оператора  $A$  тогда и только тогда, когда

$$\mu(\{t \in M \mid \lambda \text{ есть собственное значение оператора } A(t)\}) > 0;$$

(f) если спектр каждого  $A(t)$  содержит только абсолютно непрерывную часть, то таков же и спектр оператора  $A$ ;

(g) предположим, что  $B = \int_M \oplus B(t) d\mu(t)$ , причем каждый  $B(t)$  самосопряжен. Если  $B$  ограничен относительно  $A$  и его  $A$ -грань равна  $a$ , то  $B(t)$  почти всюду  $A(t)$ -ограничен и его  $A(t)$ -грань  $a(t) \leq a$ . Если  $a < 1$ , то

$$A + B = \int_M \oplus (A(t) + B(t)) d\mu(t)$$

самосопряжен на  $D(A)$ .

Пусть  $A = A^*$ ,  $B = B^*$  – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  с одинаковой областью определения. Пусть

их разность  $V = B - A$  является ограниченным оператором. Обозначим через  $E_A(\alpha, \beta)$  спектральный проектор оператора  $A$  на интервал  $(\alpha, \beta)$ .

**Лемма 5.4** (см §9.4, гл. 9, [2]). *Если  $\sigma(V) \subset [v_-, v_+]$ , то для любого интервала  $(\alpha, \beta)$*

$$\dim E_A(\alpha, \beta)\mathcal{H} \leq \dim E_B(\alpha + v_-, \beta + v_+)\mathcal{H}.$$

Эта лемма в частности показывает, что никакое собственное значение не может сдвинуться сильнее, чем на норму оператора возмущения.

Пусть  $H_0 = H_0^*$  – самосопряженный оператор,  $V = V^*$  – самосопряженное ограниченное возмущение. Пусть  $H(\beta) = H_0 + \beta V$ , а  $\lambda(0)$  – простое собственное значение оператора  $H_0$ . Тогда при малых  $\beta$  и  $\varepsilon$  в круге  $|\lambda(0) - \lambda| < \varepsilon$  существует единственное собственное значение оператора  $H(\beta)$  равное  $\lambda(\beta)$ . Пусть  $\psi_0$  – собственный вектор оператора  $H_0$  соответствующий собственному значению  $\lambda(0)$ .

**Лемма 5.5** (см. [66], стр. 17–18). *Для собственного значения  $\lambda(\beta)$  выполнено*

$$\lambda(\beta) = \lambda(0) + \beta(\psi_0, V\psi_0).$$

Пусть  $\mathcal{C}$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$ ,  $t$  – вещественный параметр,  $S(x)$  – вещественная функция. Рассмотрим интеграл Лапласа

$$F(t) = \int_{\Omega} f(x)e^{tS(x)} dx.$$

**Теорема 5.6** (см. §4, гл. 2, [17]). *Пусть выполнены условия:*

1.  $f(x), S(x) \in C(\bar{\mathcal{C}})$ ;

2. максимум функции  $S(x)$  достигается в точке  $x_0 \in \mathcal{C}$ ;
3.  $f(x), S(x) \in C^\infty$  в окрестности точки  $x_0$ ;
4.  $x_0$  – невырожденная точка максимума.

Тогда при  $t \rightarrow \infty$  выполнено

$$F(t) \stackrel{as}{=} e^{tS(x_0)} t^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}. \quad (5.1)$$

Это разложение можно дифференцировать по  $t$  любое число раз. Коэффициенты асимптотики имеют вид

$$c_k = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{|\det S''(x_0)|}} \frac{1}{2^k k!} \left( L_S \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right)^k f(x) e^{tS(x, x_0)} \Big|_{x=x_0},$$

где

$$L_S = \langle (S''_{xx}(x_0))^{-1} \nabla, \nabla \rangle,$$

$$S(x, x_0) = S(x) - S(x_0) - \frac{1}{2} \langle S''_{xx}(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle.$$

**Замечание.** Если условие 3. в теореме 5.6 заменить на условие:

- 3.1  $f(x)$  – вещественнозначная функция, а  $S(x) \in C^2$  в окрестности точки  $x_0$ ,

то старший член и поправка в асимптотическом разложении  $F(t)$  имеют вид

$$F(t) \stackrel{as}{=} \frac{(2\pi)^{d/2} f(x_0)}{\sqrt{|\det S''(x_0)|}} e^{tS(x_0)} t^{-d/2} (1 + O(t^{-1})).$$

# Заключение

В диссертации изучено асимптотическое поведение среднего числа частиц (в фиксированной вершине и общего) ветвящегося случайного блуждания на периодическом графе, который может быть погружен в  $\mathbb{Z}^d$ . Источники ветвления расположены в каждой вершине графа, а их интенсивность является периодической функцией. Основные результаты состоят в следующем:

- 1) Показано, что асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$  среднего числа частиц ВСБ на периодическом графе с периодической интенсивностью источников ветвления определяется наибольшим собственным значением  $\lambda_1(0)$  конечной матрицы  $A(0)$ , коэффициенты которой явно выражаются через матрицу интенсивностей переходов и функции интенсивности ветвления.
- 2) В предположении о существовании второго момента у скачков случайного блуждания найден старший член асимптотики среднего числа частиц ВСБ в фиксированной вершине графа.
- 3) В предположении о существовании всех моментов у скачков случайного блуждания получено асимптотическое разложение среднего числа частиц ВСБ в фиксированной вершине графа.

## Литература

- [1] Антоненко Е. А., Яровая Е. Б. Расположение положительных собственных значений в спектре эволюционного оператора в ветвящемся случайном блуждании. // Современные проблемы математики и механики – 2015, т. 10, № 3, с. 9–22.
- [2] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – ЛГУ, 1980.
- [3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения. // Алгебра и анализ. – 2003, т. 15, № 5, с. 1–108.
- [4] Богачев Л. В., Яровая Е. Б. Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником. // Докл. РАН. – 1998, т. 363, № 4, с. 439–442.
- [5] Булинская Е. Вл. Каталитическое ветвящееся случайное блуждание по двумерной решетке. // Теория вероятн. и ее примен. – 2010, т. 55, № 1, с. 142–148.
- [6] Булинская Е. Вл. Полная классификация каталитических ветвящихся процессов. // Теория вероятн. и ее примен. – 2014, т. 59, № 4, 639–666.
- [7] Ватутин В. А., Топчий В. А. Предельная теорема для критических

- каталитических ветвящихся случайных блужданий. // Теория вероятн. и ее примен. – 2004, т. 49, № 3, с. 461–484.
- [8] Ватутин В. А., Топчий В. А., Ху Ю. Ветвящееся случайное блуждание по решетке  $\mathbb{Z}^4$  с ветвлением лишь в начале координат. // Теория вероятн. и ее примен. – 2011, т. 56, № 2, 224–247.
- [9] Ватутин В. А., Топчий В. А. Каталитические ветвящиеся случайные блуждания на  $\mathbb{Z}^d$  с ветвлением в нуле. // Матем. труды. – 2011, т. 14, № 2, 28–72.
- [10] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – Москва: Наука, 1965, т. 3.
- [11] Ермишкина Е. М., Яровая Е. Б. Моделирование ветвящихся случайных блужданий по многомерной решетке. // Фундамент. и прикл. матем. – 2018, т. 22, № 3, с. 35–53.
- [12] Колмогоров А. Н., Дмитриев Н. А. Ветвящиеся случайные процессы. // Докл. АН СССР. – 1947, т. 56. №. 1. с. 7–10.
- [13] Кучмент П. А. Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных. // Успехи матем. наук. – 1982, т. 37, № 4(226), с. 3–52.
- [14] Рытова А. И., Яровая Е. Б. Многомерная лемма Ватсона и ее применение. // Матем. заметки. – 2016, т. 99, № 3, С. 395–403.
- [15] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. – Наука, М., 1971.
- [16] Соболев А. В., Филонов Н. Д. Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals. // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2004, v. 318, p. 298–307.



- [17] Федорюк М. В. Метод перевала. – Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1977.
- [18] Ширяев А. и др. (ред.). Колмогоров в воспоминаниях учеников. – Litres, 2017.
- [19] Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. // ЦПИ при мехмате Моск. ун-та, М. – 2007, т. 104.
- [20] Яровая Е. Б. Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий. // Теория вероятн. и ее примен. – 2010, т. 55. №. 4. с. 705–731.
- [21] Яровая Е. Б. Симметричные ветвящиеся блуждания с тяжелыми хвостами. // Современные проблемы математики и механики, Изд-во Моск. ун-та, М., – 2011, т. 7, С. 77–84.
- [22] Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий. // Матем. заметки. – 2012, т. 92, № 1, с. 123–140.
- [23] Яровая Е. Б. Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания. // Теория вероятн. и ее примен. – 2017, т. 62, № 3. с. 518–541.
- [24] Яровая Е. Б. Ветвящееся случайное блуждание с разбегающимися источниками. // Успехи матем. наук. – 2018, т. 73, № 3(441), с. 181–182.
- [25] Albeverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. – 1998, v. 326, № 8, p. 975–980.

- [26] Athreya K. B., Ney P. E. Branching processes. – Courier Corporation, 2004.
- [27] Balendhran S., Walia S., Nili H., Sriram S., Bhaskaran M. Elemental analogues of graphene: silicene, germanene, stanene, and phosphorene. // *Small*. – 2015, v. 11, № 6, p. 640–652.
- [28] Berkolaiko Gr., Kuchment P. Introduction to quantum graphs. – American Mathematical Society. 2013, v. 186.
- [29] Chahrour A. On the spectrum of the Schrödinger operator with periodic surface potential. // *Lett. Math. Phys.* – 2000, v. 52, № 3, p. 197–209.
- [30] Chahrour A., Sahbani J. On the spectral and scattering theory of the Schrödinger operator with surface potential. // *Rev. Math. Phys.* – 2000, v. 12, № 4, p. 561–573.
- [31] Colquitt D. J., Nieves M. J., Jones I. S., Movchan A. B., Movchan N. V. Localization for a line defect in an infinite square lattice. // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* – 2013, v. 469, 20120579.
- [32] Cranston M., Koralov L., Molchanov S., Vainberg B. A solvable model for homopolymers and self-similarity near the critical point. // *Rand. Oper. Stoch. Eq.* – 2010, v. 18. № 1. p. 73–95.
- [33] Cvetkovic D. M., Doob M., Sachs, H. Spectra of graphs: theory and application. – v. 87, Academic Press., 1980.
- [34] Dawson D. A. Introductory Lectures on Stochastic Population Systems. – preprint: arXiv:1705.03781, 2017.

- [35] Halmos P. R., Sunder V. S. Bounded integral operators on  $L^2$  spaces / – Springer Science & Business Media, v. 96, 2012.
- [36] Fiedler M. Algebraic connectivity of graphs. // Czech. Math. J. – 1973, v. 23, № 2, p. 298–305.
- [37] Horn R. A., Johnson C. R. Matrix analysis. – Cambridge University Press., 2012.
- [38] Higuchi Y., Nomura Y. Spectral structure of the Laplacian on a covering graph. // European J. Combin. – 2009, v. 30, № 2, p. 570–585.
- [39] Higuchi Y., Shirai T. The spectrum of magnetic Schrödinger operators on a graph with periodic structure. // J. Funct. Anal. – 1999, v. 169, p. 456–480.
- [40] Higuchi Y., Shirai T. Some spectral and geometric properties for infinite graphs. // Contemp. Math. – 2004, v. 347, p. 2–56.
- [41] Higuchi Y., Shirai T. Weak Bloch property for discrete magnetic Schrödinger operators. // Nagoya Math. J. – 2001 v. 161, p. 127–154.
- [42] Hong Y., Zhang X. D. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees. // Discrete Math. – v. 296, № 2–3, p. 187–197.
- [43] Iantchenko A., Korotyaev E. Schrödinger operator on the zigzag half-nanotube in magnetic field. // Math. Model. Nat. Phenom. – 2010, v. 5, № 4, p. 175–197.
- [44] Jakšić V., Last Y. Scattering from subspace potentials for Schrödinger

- operators on graphs. // *Markov Process. Related Fields.* – 2003, v. 9, p. 661–674.
- [45] Jakšić V., Molchanov S. On the surface spectrum in dimension two. // *Helv. Phys. Acta.* – 1998, v. 71, p. 629.
- [46] Jakšić V., Molchanov S. Localization of surface spectra. // *Comm. Math. Phys.* – 1999, v. 208, № 1, p. 153–172.
- [47] Jakšić V., Last Y. Corrugated surfaces and ac spectrum. // *Rev. Math. Phys.* – 2000, v. 12, № 11, p. 1465–1503.
- [48] Jakšić V., Last Y. Surface states and spectra. // *Comm. Math. Phys.* – 2001, v. 218, № 3, p. 459–477.
- [49] Kimmel M., Axelrod D. E. *Branching Processes in Biology.* – *Interdisciplinary Applied Mathematics*, 2002.
- [50] Korotyaev E., Kutsenko A. Zigzag nanoribbons in external electric fields. // *Asympt. Anal.* – 2010, v. 66, № 3–4, p. 187–206.
- [51] Korotyaev E., Kutsenko A. Zigzag nanoribbons in external electric and magnetic fields. // *Int. J. Comput. Sci. Math.* – 2010, v. 3, № 1–2, p. 168–191.
- [52] Korotyaev E., Saburova N. Schrödinger operators on periodic discrete graphs. // *J. Math. Anal. Appl.* – 2014, v. 420, № 1, p. 576–611.
- [53] Korotyaev E., Saburova N. Schrödinger operators with guided potentials on periodic graphs. // *Proc. AMS.* – 2017, v. 145, p. 4869–4883.

- [54] Korotyaev E., Saburova N. Schrödinger operators with guided potentials on periodic graphs. // Proc. AMS. – 2017, v. 145, № 11, p. 4869–4883.
- [55] Kutsenko A. Wave propagation through periodic lattice with defects. // Comput. Mech. – 2014, v. 54, № 6, p. 1559–1568.
- [56] Kutsenko A. Algebra of 2D periodic operators with local and perpendicular defects. // J. Math. Anal. Appl. – 2016, v. 442, № 2, p. 796–803.
- [57] Malkiel B. G., McCue K. A random walk down Wall Street. – New York: Norton, 1985.
- [58] Mohar B. Some relations between analytic and geometric properties of infinite graphs. // Discrete Math. – 1991, v. 95, № 1, p. 193–219.
- [59] Mohar B. Laplace eigenvalues of graphs – a survey. // Discrete Math. – 1992, v. 109, № 1–3, c. 171–183.
- [60] Moliterno J. Applications of combinatorial matrix theory to Laplacian matrices of graphs. – Chapman and Hall/CRC, 2016.
- [61] Nelson C. R., Plosser C. R. Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications. // J. Monet. Econ. – 1982, v. 10, № 2, p. 139–162.
- [62] Neto A., Guinea F., Peres N., Novoselov K., Geim A. The electronic properties of graphene. // Rev. Mod. Phys. – 2009, v. 81, № 1, p. 109.
- [63] Osharovich G., Ayzenberg-Stepanenko M. Wave localization in stratified square-cell lattices: The antiplane problem. // J. Sound Vib. – 2012, v. 331, № 6, p. 1378–1397.

- [64] Parra D., Richard S. Spectral and scattering theory for Schrödinger operators on perturbed topological crystals. // *Rev. Math. Phys.* – 2018, v. 30, № 04, p. 1850009.
- [65] Rabinovich V., Roch S. Essential spectra of difference operators on  $\mathbb{Z}^n$ -periodic graphs. // *J. Phys. A.* – 2007, v.40, № 33, p. 10109–10128.
- [66] Reed M., Simon B. IV: Analysis of Operators, v. 4. – Elsevier, 1978.
- [67] Sasaki I., Suzuki A. Essential spectrum of the discrete Laplacian on a perturbed periodic graph. // *J. Math. Anal. Appl.* – 2017, v. 446, № 2, p. 1863–1881.
- [68] Saxena S., Chaudhary R. P., Shukla S. Stanene: atomically thick free-standing layer of 2D hexagonal tin. // *Sci. Rep.* – 2016, v. 6. p. 31073.
- [69] Sy P. W., Sunada T. Discrete Schrödinger operators on a graph. // *Nagoya Math. J.* – 1992, v. 125, p. 141–150.
- [70] Topchii V., Vatutin V., Yarovaya E. Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. // *Theory Probab. Math. Stat.* – 2004, v. 69, p. 1–15.
- [71] Yarovaya E. Branching random walks with heavy tails. // *Comm. Statist. Theory Methods.* 2013, v. 42, № 16, p. 3001–3010.
- [72] Yu A., Lu M., Tian F. On the spectral radius of graphs. // *Lin. Algebra Appl.* – 2004, v. 387, p. 41–49.

## Публикации автора по теме диссертации

- [73] Платонова М. В., Рядовкин К. С. Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке  $\mathbb{Z}^d$  с периодическими источниками ветвления. // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2017, т. 466, с. 234–256.
- [74] Платонова М. В., Рядовкин К. С. О среднем числе частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке с периодическими источниками ветвления. // Докл. РАН. – 2018, т. 479, № 3, с. 250–253.
- [75] Платонова М. В., Рядовкин К. С. Ветвящиеся случайные блуждания на  $\mathbb{Z}^d$  с периодически расположенными источниками ветвления. // Теория вероятн. и ее примен. – 2019, т. 64, № 2.
- [76] Рядовкин К. С. Асимптотическое поведение ветвящихся случайных блужданий на некоторых двумерных решетках. // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2018, т. 474, с. 213–221.