

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Звонарёва Александра Олеговна

**Производные группы Пикара алгебр, соответствующих
деревьям Брауэра**

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор А. И. Генералов

Санкт-Петербург — 2014

Содержание

Введение	4
1 Предварительные сведения	12
1.1 Производные эквивалентности	12
1.2 Мутации	17
2 Производная группа Пикара	21
2.1 Мутации и производная группа Пикара	21
2.2 Стандартная конструкция дерева	24
2.3 Основной результат	29
2.4 Мутации типа I	33
2.5 Мутации типа II	37
2.6 Случай $t = 1$	47
2.7 Дополнение	49
3 Двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, со- ответствующими деревьям Брауэра	51
3.1 Двучленные наклоняющие комплексы над самоинъективны- ми алгебрами	51
3.2 Двучленные неразложимые частично наклоняющие ком- плексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1	54
3.3 Двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соот- ветствующими деревьям Брауэра с кратностью исключи- тельной вершины 1	56
3.4 Кольца эндоморфизмов	79

3.5	Двучленные наклоняющие комплексы над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра	93
3.6	Геометрическая интерпретация	98
	Список литературы	104

Введение

Данная работа посвящена изучению эквивалентностей производных категорий алгебр, соответствующих деревьям Брауэра. В частности, изучению производной группы Пикара $\mathrm{TrPic}(A)$ алгебры A , то есть группы классов изоморфизмов двусторонних наклоняющих комплексов в $D^b(A \otimes A^{op})$, где произведение классов X и Y – это класс $X \otimes_A Y$, или, что то же самое, группы стандартных автоэквивалентностей $D^b(A)$ по модулю естественных изоморфизмов (глава 2), и изучению двучленных наклоняющих комплексов над алгеброй A – класса наклоняющих комплексов очень интересного с точки зрения комбинаторики (глава 3).

Производная категория была определена Вердье в 1963 году [32], с тех пор она стала неотъемлемой частью изучения теории представлений алгебр. Кратко напомним, что такое ограниченная производная категория $D^b(A)$ алгебры A : пусть A – алгебра над коммутативным кольцом R , под A -модулями мы имеем в виду левые A -модули. Пусть $M = (M^i, d_i : M^i \rightarrow M^{i+1})$ – комплекс A -модулей, для целого числа n обозначим через $M[n]$ комплекс для которого $M[n]^i = M^{n+i}$ с дифференциалом $(-1)^n d$. Объекты категории $D^b(A)$ – это ограниченные комплексы A -модулей. Два комплекса изоморфны, если существует гомоморфизм комплексов, индуцирующий изоморфизм гомологий. Категория $A\text{-Mod}$ вкладывается в $D^b(A)$ как подкатегория комплексов, сосредоточенных в 0. Подробности о производных категориях и других триангулированных категориях можно найти в [15], [25] [32].

Основным способом построения эквивалентностей производных категорий является знаменитая теорема Рикарда и Келлера, она дает необходимое и достаточное условие производной эквивалентности [28], [27], [19].

Оказывается, что алгебры A и B производно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует ограниченный комплекс T , состоящий из конечно порожденных проективных A -модулей, удовлетворяющий некоторым техническим условиям. Такой комплекс называется наклоняющим. Одними из первых примеров наклоняющих комплексов являются наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра, построенные Рикардом [26]. Если $A = B$, то наклоняющий комплекс задает автоэквивалентность, и мы можем рассматривать группу стандартных автоэквивалентностей алгебры, то есть производную группу Пикара. Предварительные сведения о производных эквивалентностях и других используемых понятиях можно найти в главе 1.

Производная группа Пикара алгебры была впервые определена в статье [29] Рукье и Циммерманном. Это очень интересный инвариант производной категории, однако он крайне сложен для вычисления. Заметим, что $\mathrm{TrPic}(A)$ содержит две естественные подгруппы: копию \mathbb{Z} (представленную комплексами вида $A[n]$) и классическую группу Пикара $\mathrm{Pic}(A)$, то есть группу Морита-автоэквивалентностей.

Теорема. (Рукье, Циммерманн, Екутиели [29], [34]) *Пусть алгебра A либо локальна, либо коммутативна, причем $\mathrm{Spec} A$ связно, тогда $\mathrm{TrPic}(A) = \mathrm{Pic}(A) \times \mathbb{Z}$.*

Производная группа Пикара вычислена в очень небольшом числе случаев. В работе Миячи и Екутиели [23] эта группа вычислена для конечномерных наследственных алгебр. Стоит отметить работу Ленцинга и Мельцера [21], в которой описываются группы автоэквивалентностей ограниченной производной категории канонической алгебры, и работу Брумхеда, Паукстцелло и Плоога [12], в которой описываются группы автоэквивалент-

ностей дискретной производной категории. Из теоретических результатов стоит отметить работу Хуисген-Циммерманн и Саорина [17], в которой с помощью геометрических методов доказывалось, что $\text{Out}^0(A)$ – компонента единицы группы внешних автоморфизмов алгебры A , является нормальной подгруппой производной группы Пикара, работу Екутиели [34], в которой доказывалось, что производная группа Пикара классифицирует классы изоморфизмов дуализирующих комплексов, и еще одну работу Екутиели [35], в которой доказывалось, что производная группа Пикара является локально алгебраической.

Алгебры, соответствующие деревьям Брауэра, естественно возникают в модулярной теории представлений для описания блоков групп с циклической группой дефекта, также они являются пересечением класса симметрических специальных биридных алгебр и алгебр конечного типа представления, этот класс алгебр совпадает с классом симметрических алгебр конечного типа представления древесного типа A_n . Рукье и Циммерманн начали изучение производной группы Пикара алгебр, соответствующих деревьям Брауэра [29]. В случае кратности исключительной вершины 1 они построили морфизм из артиновой группы кос на $n + 1$ нитях (где n – число простых A -модулей) в $\text{TrPic}(A)$. Они также показали, что это изоморфизм по модулю некоторой центральной подгруппы, когда $n = 2$. Хованов и Зейдель определили действие группы кос на ограниченной производной категории некоторой алгебры, похожей на алгебру, соответствующую дереву Брауэра; из их результатов следует, что действие группы кос на ограниченной производной категории алгебры, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, точно [20].

Шапс и Закай-Иллоуз построили действие группы кос на аффинной

диаграмме \tilde{A}_{n-1} на ограниченной производной категории алгебры, соответствующей дереву Брауэра с произвольной кратностью исключительной вершины [30]. Мухтади-Аламсиах показала, что это действие точно в случае кратности 1 [24].

Шапс и Закай-Иллоуз также поставили вопрос, порождают ли образы образующих группы кос H_i (см. далее), сдвиг и $\text{Pic}(A)$ производную группу Пикара в случае кратности $\neq 1$, и является ли гомоморфизм из группы кос одно-однозначным. В главе 2, приспособив технику мутаций наклоняющих комплексов, разработанную Аихарой и Иямой [11], [10], для вычисления композиции некоторых производных эквивалентностей симметрических алгебр, мы отвечаем на первый вопрос положительно, а именно:

Теорема 1. *Пусть A – базисная алгебра, соответствующая звезде Брауэра типа (n, t) , $t > 1$, и пусть $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_i$ – разложение алгебры A на неразложимые неизоморфные проективные модули. Тогда $\text{TrPic}(A)$ порождена сдвигом, $\text{Pic}(A)$ и эквивалентностями H_i , где*

$$H_i(P_j) = \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \rightarrow P_j, & j \neq i, i-1 \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow P_{i-1}, & j = i \\ P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{i-1}, & j = i-1. \end{cases}$$

В случае кратности 1 группа $\text{TrPic}(A)$ порождена чуть большим множеством.

Теорема 2. *Пусть A – базисная алгебра, соответствующая звезде Брауэра типа $(n, 1)$. Тогда $\text{TrPic}(A)$ порождена сдвигом, $\text{Pic}(A)$, эквивалентностями H_i и эквивалентностями Q_i , где*

$$Q_i(P_j) = \begin{cases} 0 \rightarrow P_i \rightarrow 0, & j = i \\ 0 \rightarrow P_i \xrightarrow{\beta^{i-j}} P_j, & j \neq i. \end{cases}$$

Теоремы 1 и 2 дают образующие группы Пикара для любых алгебр, соответствующих деревьям Брауэра, так как производная группа Пикара инвариантна под действием производных эквивалентностей. Сопрягая, полученные образующие с помощью эквивалентности между производной категорией алгебры, соответствующей произвольному дереву Брауэра, и производной категорией алгебры, соответствующей звезде Брауэра, можно получить образующие производной группы Пикара алгебры, соответствующей произвольному дереву Брауэра, в явном виде.

Стоит отметить, что техника, разработанная для доказательства этих теорем, должна быть применима для описания образующих производной группы Пикара симметрических алгебр конечного типа представления других древесных типов.

В главе 3 мы изучаем двучленные наклоняющие комплексы над алгеброй, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. Двучленные наклоняющие комплексы являются порождающим множеством производного группоида Пикара, как и элементарные наклоняющие комплексы, рассматриваемые в главе 2. Однако вычисление производной группы Пикара с помощью мутаций наклоняющих комплексов оказалось более простой задачей. Рассмотрим производный группоид Пикара, объекты которого соответствуют алгебрам с деревом Брауэра с n ребрами и кратностью исключительной вершины 1, а морфизмы – стандартные производные эквивалентности между ними. $\text{TrPic}(A)$ является группой эндоморфизмов объекта A в этой категории. По результату Абе и Хошино [6] производный группоид Пикара, соответствующий классу алгебр Брауэра с кратностью исключительной вершины t и с зафиксированным количеством

простых модулей n , порожден одночленными и двучленными наклоняющими комплексами. Таким образом, описав все двучленные наклоняющие комплексы над алгеброй A , мы получим порождающее множество группоида Пикара.

Вычисление группоида Пикара было основной мотивацией исследования двучленных наклоняющих комплексов, однако они также связаны с теорией τ -наклонений [7]. Напомним, что A -модуль M называется τ -жестким (τ -rigid), если $\text{Hom}(M, \tau M) = 0$; τ -наклоняющим (τ -tilting), если он τ -жесткий и число его неизоморфных прямых слагаемых совпадает с рангом группы Гротендика алгебры; τ -наклоняющим с носителем (support τ -tilting), если существует идемпотент e такой, что M – это τ -наклоняющий $(A/\langle e \rangle)$ -модуль. В работе Адачи, Иямы и Райтен [7] в частности доказано, что над симметрической алгеброй над алгебраически замкнутым полем множество классов изоморфизмов базисных τ -наклоняющих модулей с носителем находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством классов изоморфизмов базисных двучленных наклоняющих комплексов. Также из их работы следует, что у почти полного (число его неизоморфных прямых слагаемых равняется рангу группы Гротендика алгебры -1) двучленного частично наклоняющего комплекса существует ровно два дополнения до двучленного наклоняющего комплекса. Это очень важный результат, который обобщает классические результаты о наклоняющих модулях и позволяет развивать теорию мутаций для этого класса объектов.

Мы приводим критерий того, что минимальное проективное представление модуля без проективных прямых слагаемых над самоинъективной алгеброй является частично наклоняющим комплексом. С помощью этого мы описываем все неразложимые частично наклоняющие двучленные ком-

плексы над любой алгеброй Брауэра с кратностью исключительной вершины 1.

Теорема 3. *Пусть A – алгебра, соответствующая дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. Минимальное проективное представление неразложимого непроективного A -модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда M не изоморфен $P/\text{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P .*

Далее мы описываем все двучленные наклоняющие комплексы над такими алгебрами. Для того, чтобы классифицировать все двучленные наклоняющие комплексы T , необходимо и достаточно классифицировать наборы из n (где n – это ранг группы Гротендика алгебры) попарно ортогональных неизоморфных неразложимых двучленных частично наклоняющих комплексов $\{T_1, \dots, T_n\}$ [6]. Комбинаторное условие того, что два неразложимых двучленных частично наклоняющих комплексов ортогональны, приведено в теореме 4. В пункте 3.4 мы описываем кольца эндоморфизмов двучленных наклоняющих комплексов. В пункте 3.6 мы получаем следующую интересную интерпретацию комбинаторного условия из теоремы 4: каждому неразложимому двучленному частично наклоняющему комплексу над алгеброй A мы ставим в соответствие некоторую кривую на плоскости с проколами в вершинах дерева Брауэра алгебры A с точностью до гомотопии, причем концы кривой покрашены в один из двух цветов и совпадают с вершинами дерева Брауэра алгебры A .

Теорема 5. *Пусть T_i и T_j – два двучленных частично наклоняющих комплекса. $T_i \oplus T_j$ является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда кривые, соответствующие T_i и T_j , либо не пересекаются, либо их пересечение состоит из конечной вершины, причем эта вершина от-*

мечена одним и тем же цветом на обеих кривых.

Стоит отметить, что в работе [31] классифицированы все двуограниченные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с произвольной кратностью; этот класс наклоняющих комплексов пересекается с классом двучленных наклоняющих комплексов, а значит и с нашей классификацией в случае кратности исключительной вершины 1. Также в работе [8] классифицированы τ -наклоняющие модули над алгебрами Накаямы. Алгебра, соответствующая звезде Брауэра, является алгеброй Накаямы. Как мы уже упоминали ранее τ -наклоняющие модули связаны с двучленными наклоняющими комплексами; соответствующие классификации пересекаются для звезды Брауэра с кратностью исключительной вершины 1.

Все результаты, представленные в работе, опубликованы в [2], [4], [5], [37].

1 Предварительные сведения

В настоящей главе мы приводим факты о производных эквивалентностях и мутациях наклоняющих комплексов, которые будем использовать в дальнейшем.

1.1 Производные эквивалентности

Пусть A и B – алгебры над коммутативным кольцом R , проективные как модули над R . Под A -модулями мы имеем в виду левые A -модули. Обозначим через $D^b(A)$ ограниченную производную категорию A , через $\text{per-}A$ – полную подкатеорию $D^b(A)$, состоящую из совершенных комплексов, то есть объектов, изоморфных ограниченному комплексу конечно порожденных проективных модулей; через $K^b(\text{proj-}A)$ – гомотопическую категорию ограниченных комплексов конечно порожденных проективных модулей, через $C(A)$ – категорию комплексов A -модулей, $K^b(A)$ – ограниченную гомотопическую категорию категории A -модулей. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие производной эквивалентности A и B .

Теорема. (Рикард, Келлер, [28], [27], [19]) *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) *категории $D^b(A)$ и $D^b(B)$ эквивалентны как триангулированные категории;*
- 2) *категории $K^b(\text{proj-}A)$ и $K^b(\text{proj-}B)$ эквивалентны как триангулированные категории;*
- 3) *существует комплекс $T \in \text{per-}A$, такой что*

- $\text{Hom}(T, T[i]) = 0$ при $i \neq 0$,
- $\text{per-}A$ порождена $\text{add}(T)$ как триангулированная категория,
- $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq B$;

4) существуют ограниченный комплекс $(A \otimes B^{op})$ -модулей X , ограничения которого на A и на B^{op} являются совершенными комплексами, и ограниченный комплекс $(B \otimes A^{op})$ -модулей Y , ограничения которого на B и на A^{op} являются совершенными комплексами, такие что $X \otimes_B Y \simeq A$ в $D^b(A \otimes A^{op})$ и $Y \otimes_A X \simeq B$ в $D^b(B \otimes B^{op})$.

Комплекс T из пункта 3 называется наклоняющим комплексом, X и Y из пункта 4 называются двусторонними наклоняющими комплексами, обратными друг другу. Комплекс X как комплекс A -модулей или как комплекс B^{op} -модулей является наклоняющим комплексом. Взаимно обратные эквивалентности между $D^b(A)$ и $D^b(B)$ задаются $X \otimes_B -$ и $Y \otimes_A -$. Такие эквивалентности называются стандартными.

Пусть T – наклоняющий комплекс, $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq B$. Существует двусторонний наклоняющий комплекс $(A \otimes B^{op})$ -модулей X , ограничение которого на A изоморфно T в $D^b(A)$. Если X' – другой двусторонний наклоняющий комплекс $(A \otimes B^{op})$ -модулей, ограничение которого на A изоморфно T , тогда существует $\sigma \in \text{Aut}(B)$, такой что $X' \simeq X \otimes_B B_\sigma$, где B_σ – это $(B \otimes B^{op})$ -модуль, изоморфный B , но с правым действием, подкрученным на σ [19].

Определение 1. Пусть Γ – дерево с n ребрами и одной отмеченной вершиной, которой приписана кратность $t \in \mathbb{N}$ (эта вершина называется исключительной, t называется кратностью исключительной вершины),

и пусть в Γ зафиксирован циклический порядок ребер, инцидентных каждой вершине (в случае, когда Γ лежит на плоскости, будем считать, что ребра упорядочены по часовой стрелке). В этом случае Γ называется деревом Брауэра типа (n, t) .

В случае, когда дерево – это звезда с исключительной вершиной в центре, оно называется звездой Брауэра.

Каждому дереву Брауэра типа (n, t) можно поставить в соответствие алгебру $A(n, t)$. Алгебра $A(n, t)$ – это алгебра путей колчана с соотношениями. По дереву Брауэра Γ построим колчан Брауэра Q_Γ . Вершины Q_Γ – это ребра Γ ; если ребра i и j инцидентны одной вершине в Γ , и ребро j следует за ребром i в соответствии с циклическим порядком ребер, инцидентных их общей вершине, то из вершины i в вершину j в Q_Γ есть стрелка. Колчан Q_Γ обладает следующими свойствами: Q_Γ является объединением ориентированных циклов, соответствующих вершинам Γ ; каждая вершина Q_Γ лежит ровно на двух циклах. Цикл, соответствующий исключительной вершине, называется исключительным. Стрелки Q_Γ можно разбить на два семейства α и β так, что стрелки, принадлежащие пересекающимся циклам, принадлежат разным семействам. Будем обозначать стрелки, принадлежащие семейству α , через α , а стрелки, принадлежащие семейству β , через β соответственно.

Определение 2. Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Базисная алгебра Брауэра $A(n, t)$, соответствующая дереву Γ типа (n, t) , – это алгебра KQ_Γ/I , где идеал I порожден соотношениями вида:

- 1) $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$ для любых стрелок, принадлежащих семействам α и β , соответственно;

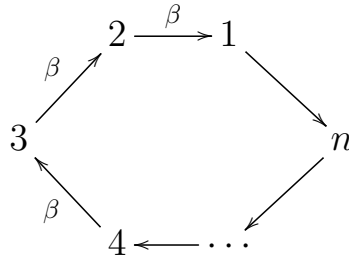
- 2) для любой вершины x , не принадлежащей исключительному циклу, $e_x \alpha^{x_\alpha} e_x = e_x \beta^{x_\beta} e_x$, где x_α , соответственно x_β – длина α -, соответственно β -цикла, содержащего x , а e_x – идемпотент, соответствующий x ;
- 3) для любой вершины x , принадлежащей исключительному α -циклу (соответственно β -циклу), $e_x (\alpha^{x_\alpha})^t e_x = e_x \beta^{x_\beta} e_x$ (соответственно $e_x \alpha^{x_\alpha} e_x = e_x (\beta^{x_\beta})^t e_x$).

Алгебра называется алгеброй Брауэра типа (n, t) , если она Морита-эквивалентна алгебре $A(n, t)$ для некоторого дерева Брауэра Γ типа (n, t) .

Заметим, что идеал I не является допустимым идеалом. Далее для удобства все алгебры предполагаются базисными. Будем также предполагать, что $n > 1$, так как при $n = 1$ алгебра, соответствующая дереву Брауэра, локальна, и по результатам Рукье и Циммерманна [29] производная группа Пикара порождается сдвигом и $\text{Pic}(A)$, на формулировки результатов это ограничение не влияет. Также стоит отметить, что алгебры, соответствующие деревьям Брауэра, симметричны.

Рикард доказал, что две алгебры, соответствующие деревьям Брауэра Γ и Γ' , производно эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы (n, t) и (n', t') совпадают [26], а из результата Габриэля и Ридманн вытекает, что класс алгебр Брауэра замкнут относительно производной эквивалентности [14].

Пусть A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра с n ребрами и кратностью исключительной вершины t . Колчан A имеет вид:



Следуя Шапс и Закай-Иллоуз [31], будем называть наклоняющий комплекс дву-ограниченным (two-restricted), если его неразложимые прямые слагаемые являются сдвигами следующих комплексов:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow P_i \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow P_i \longrightarrow P_j \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где изначально P_i сосредоточен в степени 0, модули P_i и P_j – неразложимые проективные A -модули, а морфизм $P_i \rightarrow P_j$ имеет максимальный ранг (как морфизм над K). Дву-ограниченные наклоняющие комплексы соответствуют некоторым дополнительным комбинаторным данным, сопоставленным деревьям Брауэра, которые называются "расстановкой точек" ("pointing"). При этом соответствии дерево, на котором расставляются точки, является деревом Брауэра кольца эндоморфизмов дву-ограниченного наклоняющего комплекса. Если применить производную эквивалентность, соответствующую одной расстановке точек, а потом применить эквивалентность, обратную к эквивалентности, соответствующей другой расстановке точек на том же дереве, то будет получена автоэквивалентность алгебры, соответствующей звезде Брауэра, эта автоэквивалентность задается некоторым наклоняющим комплексом; будем называть такие комплексы "сложенными" ("refolded"). Шапс и Закай-Иллоуз изучали подгруппу производной группы Пикара, порожденную сложенными наклоняющими комплексами, и показали, что она порождена наклоняющими комплексами H_i , которые

удовлетворяют соотношениям группы кос на аффинной диаграмме \tilde{A}_{n-1} . Будем также обозначать через H_i некоторые стандартные автоэквивалентности $D^b(A)$, соответствующие этим комплексам и действующие на неразложимых проективных модулях следующим образом:

$$H_i(P_j) = \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \rightarrow P_j, & j \neq i, i-1 \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow P_{i-1}, & j = i \\ P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1} \xrightarrow{soc} P_{i-1}, & j = i-1, \end{cases} \quad (1)$$

где soc – морфизм, образ которого равен цоколю P_{i-1} , а P_j сосредоточен в 0.

1.2 Мутации

Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Пусть \mathcal{T} – K -линейная, Ном-конечная, триангулированная категория Крулля-Шмидта. Морфизм $X \xrightarrow{f} M'$ из \mathcal{T} называется левым минимальным, если любой морфизм $g : M' \rightarrow M'$ такой, что $gf = f$, является изоморфизмом. Пусть \mathcal{M} – подкатегория \mathcal{T} , X – объект \mathcal{T} , M' – объект \mathcal{M} , морфизм $X \xrightarrow{f} M'$ называется левой аппроксимацией X по отношению к \mathcal{M} , если $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M', M) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, M)$ сюръективно для любого $M \in \mathcal{M}$. Левый минимальный морфизм, являющийся левой аппроксимацией X по отношению к \mathcal{M} , называется минимальной левой аппроксимацией X по отношению к \mathcal{M} . Правый минимальный морфизм и правая аппроксимацией X по отношению к \mathcal{M} определяются двойственно.

$T \in \mathcal{T}$ называется полунаклоняющим объектом (silting), если $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[i]) = 0$ для любого $i > 0$, и \mathcal{T} порождается $\text{add}(T)$ как триангулированная категория. Будем называть полунаклоняющий объект T

базисным, если T является прямой суммой неразложимых попарно неизоморфных объектов.

Пусть T – базисный полунаклоняющий объект в \mathcal{T} , $T = M \oplus X$, $\mathcal{M} = \text{add}(M)$. Рассмотрим треугольник

$$X \xrightarrow{f} M' \longrightarrow Y \longrightarrow, \quad (2)$$

где f – минимальная левая аппроксимация X по отношению к \mathcal{M} . Заметим, что f единственный с точностью до изоморфизма. Объект $\mu_X^+(T) := M \oplus Y$ называется левой мутацией T по отношению к X . По результатам Аихары и Иямы [11] объект $\mu_X^+(T)$ снова является базисным полунаклоняющим. Если X неразложим, то мутация называется неприводимой. Правые мутации определяются по двойственности и обозначаются $\mu_X^-(T)$. Заметим, что в обозначениях треугольника (2) имеем $\mu_Y^-(\mu_X^+(T)) \simeq T$.

Пусть T, U – базисные полунаклоняющие объекты в \mathcal{T} . Положим $T \geq U$, если $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, U[i]) = 0$ для любого $i > 0$. Отношение \geq задает частичный порядок на множестве классов изоморфизмов базисных полунаклоняющих объектов [11]. Будем говорить, что U связан (связан слева) с T , если U можно получить из T многократными неприводимыми (левыми) мутациями. Триангулированная категория \mathcal{T} называется связной относительно мутаций полунаклоняющих объектов (silting-connected), если все базисные полунаклоняющие объекты в \mathcal{T} связаны друг с другом. \mathcal{T} – сильно связна относительно мутаций полунаклоняющих объектов (strongly silting-connected), если для любых базисных полунаклоняющих объектов T, U таких, что $T \geq U$, U связан слева с T . Известно, что в случае симметрической алгебры любой полунаклоняющий объект в $K^b(\text{proj-}A)$ является наклоняющим комплексом. В этом случае вместо связна относительно мутаций полунаклоняющих объектов будем говорить, что категория связна

относительно мутаций наклоняющих комплексов (tilting-connected).

Теорема. (Аихара, [10]) $K^b(\text{proj-}A)$ связна относительно мутаций наклоняющих комплексов, если A – симметрическая алгебра конечного типа представления.

Заметим, что из [10] (теорема 5.6 и следствие 3.9) также следует, что в случае симметрической алгебры конечного типа представления $K^b(\text{proj-}A)$ сильно связна относительно мутаций наклоняющих комплексов. Поэтому любой наклоняющий комплекс, сосредоточенный в неположительных степенях, может быть получен из A многократными левыми мутациями.

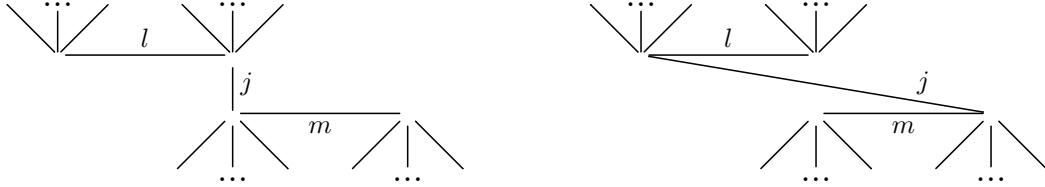
Широко известным примером мутаций наклоняющих комплексов являются мутации графов Брауэра, или, что то же самое, SSB-алгебр. Мы ограничим определение на случай деревьев Брауэра, в частности, мы не будем рассматривать петли.

Рассмотрим алгебру A , соответствующую дереву Брауэра, как наклоняющий комплекс над собой. Пусть $A = (\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n P_i) \oplus P_j$ – разложение на неразложимые проективные модули, где P_i соответствует ребру с меткой i . Рассмотрим левую мутацию

$$\mu_{P_j}^+(A) = \left(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n P_i \right) \oplus (P_j \xrightarrow{f} P_m \oplus P_l)$$

алгебры A по отношению к P_j (соответствующая аппроксимация берется по отношению к $\text{add}(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n P_i)$, P_j сосредоточен в степени -1), где P_m и P_l – проективные модули, соответствующие ребрам в дереве Брауэра, следующим за j в циклическом порядке ребер, инцидентных одной и той же вершине, а $f = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, где α и β соответствуют стрелкам из j в m и из j в l соответственно. Дерево Брауэра алгебры A представлено слева, а дерево Брауэра кольца эндоморфизмов $\mu_{P_j}^+(A)$ – справа; ребро, соответствующее

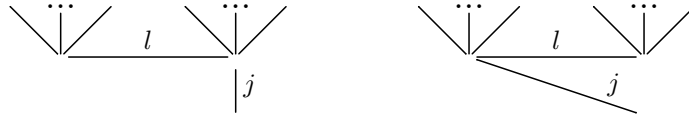
$P_j \xrightarrow{f} P_m \oplus P_l$, также будем обозначать j .



В случае, когда j инцидентно листу в дереве Брауэра A ,

$$\mu_{P_j}^+(A) = \left(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n P_i \right) \oplus (P_j \xrightarrow{\beta} P_l),$$

и на уровне деревьев Брауэра имеем:



Насколько нам известно, эти движения были впервые рассмотрены Кауэрмом [18], также они изучались в работах [1], [9], [13], [22]. Мутация $\mu_{P_j}^-(A)$ определяется по двойственности и соответствует движению в обратном направлении. Наклоняющий комплекс вида $\mu_{P_j}^\pm(A)$, где A – произвольная алгебра, соответствующая дереву Брауэра, будем называть элементарным наклоняющим комплексом. Мутации, действующие лишь одно дополнительное ребро l , будем называть мутациями типа I; мутации, действующие два дополнительных ребра m и l , будем называть мутациями типа II. Заметим также, что такие мутации действуют лишь ребра: исключительная вершина при них не меняется.

2 Производная группа Пикара

В настоящей главе мы показываем, как с помощью мутаций наклоняющих комплексов вычислять композицию эквивалентностей, индуцированных элементарными наклоняющими комплексами. Пользуясь этим, мы вычисляем порождающее множество производной группы Пикара алгебры, соответствующей звезде Брауэра.

2.1 Мутации и производная группа Пикара

Обозначим через $\text{Pic}(A)$ группу Пикара алгебры A , то есть группу классов изоморфизмов обратимых $A \otimes A^{op}$ -модулей, или, что то же самое, группу Морита-автоэквивалентностей A . Группа $\text{Out}(A)$ внешних автоморфизмов A совпадает с $\text{Pic}(A)$ в случае базисной алгебры A и является подгруппой $\text{TrPic}(A)$. Для $\sigma \in \text{Aut}(A)$ существует обратимый $A \otimes A^{op}$ -модуль A_σ , где A_σ – это $(A \otimes A^{op})$ -модуль, изоморфный A как левый модуль, но с правым действием, подкрученным на σ . Бимодуль A_σ изоморфен $A_{\sigma'}$ тогда и только тогда, когда σ совпадает с σ' по модулю подгруппы внутренних автоморфизмов. Рассмотрим автоэквивалентности $F, F' : D^b(B) \rightarrow D^b(A)$. Предположим, что они заданы двусторонними наклоняющими комплексами X, X' , и предположим, что ограничения обоих комплексов на A изоморфны наклоняющему комплексу T ; из [19] следует что, что $X' \simeq X \otimes_B B_\sigma$ для некоторого $\sigma \in \text{Aut}(B)$.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 1. Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} – две триангулированные категории, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – триангулированная эквивалентность, \mathcal{M} – подкатегория \mathcal{A} , $X \in \mathcal{A}$ и пусть $X \xrightarrow{f} M' (M' \xrightarrow{f} X)$ – минимальная левая (соответственно

правая) аппроксимация X по отношению к \mathcal{M} , тогда $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(M')$
 $(F(M') \xrightarrow{F(f)} F(X))$ – минимальная левая (соответственно правая) аппроксимация $F(X)$ по отношению к $F(\mathcal{M})$.

Пусть A – симметрическая алгебра, T – базисный наклоняющий комплекс. Обозначим через F стандартную эквивалентность такую, что $F(B = \text{End}_{D^b(A)}(T)) \simeq T$, где $F : D^b(B) \rightarrow D^b(A)$. Пусть $T = M \oplus X$, где X – неразложим, а $\mu_X^\pm(T)$ – наклоняющий комплекс, полученный из T правой или левой мутацией. Обозначим через $C = \text{End}_{D^b(A)}(\mu_X^\pm(T))$, а через $G : D^b(C) \rightarrow D^b(A)$ – стандартную эквивалентность такую, что $G(C) \simeq \mu_X^\pm(T)$. Рассмотрим B как наклоняющий комплекс над собой. Слагаемые комплексов T и B находятся под действием F во взаимно однозначном соответствии. Обозначим через P_X неразложимый проективный B -модуль, соответствующий X , наклоняющий комплекс $\mu_{P_X}^\pm(B)$ получен из B мутацией относительно P_X .

Лемма 2. $\text{End}_{D^b(B)}(\mu_{P_X}^\pm(B)) \simeq C$.

Доказательство. Рассмотрим только случай правых мутаций. $C = \text{End}_{D^b(A)}(M \oplus Y)$, $\text{End}_{D^b(B)}(\mu_{P_X}^-(B)) \simeq \text{End}_{D^b(B)}(F^{-1}(M) \oplus Y')$, где $Y' \rightarrow N \rightarrow P_X \rightarrow -$ треугольник, а $N \rightarrow P_X$ – минимальная правая аппроксимация P_X по отношению к $\text{add}(F^{-1}(M))$. F^{-1} – триангулированная эквивалентность, и по предыдущей лемме $F^{-1}(Y) \simeq Y'$, поэтому $\text{End}_{D^b(B)}(\mu_{P_X}^-(B)) \simeq \text{End}_{D^b(B)}(F^{-1}(M \oplus Y))$, отсюда получаем требуемое утверждение. \square

Обозначим через $H : D^b(C) \rightarrow D^b(B)$ стандартную эквивалентность такую, что $H(C) \simeq \mu_{P_X}^\pm(B)$.

Лемма 3. Существует $\sigma \in \text{Aut}(C)$ такой, что $G \simeq F \circ H \circ (C_\sigma \otimes_C -)$.

Доказательство. По предыдущей лемме имеется следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} D^b(C) & \xrightarrow{H} & D^b(B) \\ & \searrow G & \swarrow F \\ & & D^b(A) \end{array}$$

Достаточно проверить, что действия G и $F \circ H$ на C совпадают. Рассмотрим лишь случай правых мутаций. По предположению $G(C) = \mu_X^-(T)$. Тогда как $H(C) = \mu_{P_X}^-(B) \simeq F^{-1}(M) \oplus Y'$, следовательно, $F(H(C)) \simeq M \oplus F(Y')$, но $F(Y') \simeq Y$, а значит $F(H(C)) \simeq M \oplus Y = \mu_X^-(T)$. \square

Следующая лемма понадобится нам в ходе вычислений.

Лемма 4. Пусть $V = \dots \rightarrow X'' \xrightarrow{x} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, $W = \dots \rightarrow 0 \rightarrow X' \xrightarrow{g'} Y \xrightarrow{h'} Z' \xrightarrow{z} Z'' \rightarrow \dots$ – два объекта $D^b(A)$. Пусть

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{h} & Z & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow w & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow v & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{g'} & Y & \xrightarrow{h'} & Z' & \xrightarrow{z} & Z'' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

– морфизм $f \in D^b(A)$, тогда $\text{Cone}(f) \simeq \dots \rightarrow X'' \xrightarrow{-x} X \xrightarrow{w} X' \xrightarrow{hg'} Z \xrightarrow{v} Z' \xrightarrow{z} Z'' \rightarrow \dots$, причем Z' сосредоточен в той же степени, что и в W .

Доказательство. По определению конус f равен следующему комплексу.

$$\text{Cone}(f) \simeq \dots \rightarrow X'' \xrightarrow{-x} X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ w \end{pmatrix}} Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ \text{Id} & g' \end{pmatrix}} Z \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} v & h' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{z} Z'' \rightarrow \dots$$

Построим диаграмму прямой суммы $M_1 \xrightleftharpoons[\pi_1]{\iota_1} \text{Cone}(f) \xrightleftharpoons[\pi_2]{\iota_2} M_2$, в которой M_1 равен $\dots \rightarrow X'' \xrightarrow{-x} X \xrightarrow{w} X' \xrightarrow{hg'} Z \xrightarrow{v} Z' \xrightarrow{z} Z'' \rightarrow \dots$, а M_2 изоморфен 0.

Возьмем в качестве ι_1 морфизм $(\dots, \text{Id}, \begin{pmatrix} -g' \\ \text{Id} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Id} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{Id}, \dots)$, а в качестве π_1 морфизм $(\dots, \text{Id}, (0 \text{ Id}), (\text{Id } h), \text{Id}, \dots)$. Пользуясь равенствами

$g'w = g$, $vh = h'$, получаем что ι_1 и π_1 являются цепными отображениями. В качестве M_2 возьмем комплекс $0 \rightarrow Y \xrightarrow{\text{Id}} Y \rightarrow 0$, изоморфный 0 , а в качестве ι_2 и π_2 возьмем морфизмы $(\cdots, 0, \begin{pmatrix} \text{Id} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h \\ \text{Id} \end{pmatrix}, 0, \cdots)$ и $(\cdots, 0, (\text{Id } g'), (0 \text{ Id}), 0, \cdots)$ соответственно. Пользуясь теми же равенствами, получаем цепность ι_2 и π_2 . С помощью прямых вычислений получаем $\pi_1 \iota_1 = \text{Id}_{M_1}$, $\pi_1 \iota_2 = 0$, $\pi_2 \iota_1 = 0$, $\pi_2 \iota_2 = \text{Id}_{M_2}$, $\iota_1 \pi_1 + \iota_2 \pi_2 = \text{Id}_{\text{Cone}(f)}$, то есть выполняются все равенства для диаграммы прямой суммы. Таким образом $\text{Cone}(f)$ действительно изоморфен $\cdots \rightarrow X'' \xrightarrow{-x} X \xrightarrow{w} X' \xrightarrow{hg'} Z \xrightarrow{v} Z' \xrightarrow{z} Z'' \rightarrow \cdots$. \square

2.2 Стандартная конструкция дерева

В этом пункте мы зафиксируем стандартный способ построения дерева из звезды с помощью мутаций. Эта процедура использует только мутации типа I.

Пусть Γ – дерево Брауэра типа (n, t) . Предположим, что корень Γ выбран в исключительной вершине, и дерево Γ расположено на плоскости так, что все некорневые вершины лежат ниже корневой в соответствии со своим уровнем (чем дальше от корня, тем ниже; вершины одного уровня лежат на горизонтальной прямой). Ребра вокруг вершин упорядочены по часовой стрелке.

Пусть A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра. Если соответствующее дерево вложено в плоскость так, как описано выше, будем считать, что его ребра пронумерованы слева направо. $A = \bigoplus_{i=1}^n P_i$, где P_i – неразложимые проективные модули. Мы собираемся проделать некоторую последовательность неприводимых мутаций A , после r -ой мутации мы получим наклоняющий комплекс $T^r = \bigoplus_{i=1}^n T_i^r$, причем слагаемые T^r пронумерова-

ны следующим образом: $T^0 = A$, $T_i^0 = P_i$; каждая мутация изменяет лишь одно слагаемое наклоняющего комплекса T^{r-1} , например T_j^{r-1} , обозначим через T_j^r слагаемое, которое было изменено r -ой мутацией, $T_i^r := T_i^{r-1}$, $i \neq j$. Это позволяет нам записывать композицию мутаций. Обозначим через μ_j^\pm мутацию, изменяющую T_j^{r-1} . Дерево Брауэра кольца эндоморфизмов T^r может быть получено мутацией дерева T^{r-1} , например, по лемме 2.

Заметим также, что кольцо эндоморфизмов T^r – это алгебра, соответствующая дереву Брауэра, поэтому вычисление минимальной левой аппроксимации T_j^r относительно других слагаемых комплекса T^r не составляет труда. Если в дереве Брауэра кольца эндоморфизмов T^r ребро j , соответствующее T_j^r , не инцидентно листу, то пусть T_m^r и T_l^r – слагаемые, соответствующие m и l – ребрам, следующим за ребром j в циклических порядках ребер вокруг концов j , и пусть f – морфизм, соответствующий двум стрелкам в $\text{End}_{D^b(A)}(T^r)$, тогда по лемме 1 морфизм $T_j^r \xrightarrow{f} T_m^r \oplus T_l^r$ – минимальная левая аппроксимация T_j^r относительно других слагаемых T^r . Если j инцидентно листу, то $T_j^r \xrightarrow{f} T_l^r$ – минимальная левая аппроксимация T_j^r , где l – единственное ребро, следующее за j в циклическом порядке, а f – соответствующая стрелка. Будем говорить, что мы мутируем j вдоль ребер m и l или вдоль ребра l соответственно. При этом если компонента f соответствует стрелке, лежащей на неискл. цикле, то в качестве этой компоненты можно взять любой ненулевой морфизм.

Пусть Γ – дерево Брауэра типа (n, t) , предположим, что $n > 1$. Прономеруем ребра дерева Γ следующим образом: поставим метку 1 на самом левом ребре, инцидентном корню. Если ребро с меткой 1 не инцидентно листу, поставим 2 на ребре, инцидентном его неискл. концу,

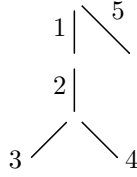
которое предшествует ребру с меткой 1 в циклическом порядке; если ребро с меткой 1 инцидентно листу, поставим 2 на единственном ребре, предшествующем ребру с меткой 1 в циклическом порядке. Предположим, что метка i приписана некоторому ребру, если это ребро не инцидентно листу, поставим метку $i + 1$ на ребре нижнего уровня, которое предшествует ребру с меткой i в циклическом порядке; если ребро с меткой i инцидентно листу, поставим метку $i + 1$ на единственном ребре, предшествующем ребру с меткой i в циклическом порядке; если этому ребру уже приписана метка, найдем ребро l с наибольшей меткой такое, что у его верхнего конца x нашлось инцидентное ребро без метки, поставим метку $i + 1$ на ребре, предшествующем ребру l в циклическом порядке вокруг x . Заметим, что такую же нумерацию можно получить с помощью обхода Грина (Green walk) или обхода дерева в глубину.

Пусть $\phi_\Gamma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n - 1\}$ – функция, которая ставит в соответствие метке i длину кратчайшего пути от этого ребра до исключительной вершины, или, что то же самое, уровень ребра с меткой i (предполагая, что ребра, инцидентные исключительной вершине, принадлежат уровню 0).

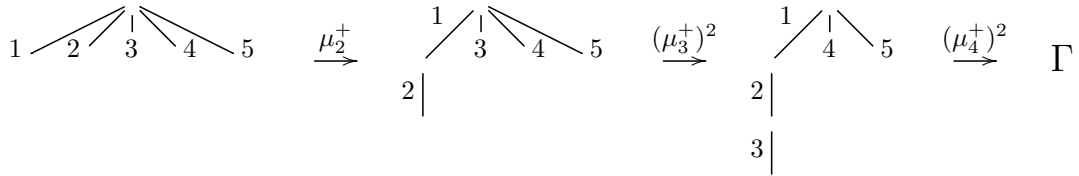
Лемма 5. Пусть Γ – дерево Брауэра типа (n, t) , пронумерованное, как описано выше. Пусть $T = (\mu_n^+)^{\phi_\Gamma(n)} \circ (\mu_{n-1}^+)^{\phi_\Gamma(n-1)} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_\Gamma(1)}(A)$. Тогда Γ – это дерево Брауэра кольца эндоморфизмов T .

Доказательство. Понятно из построения. □

Пример 1. Пусть Γ – дерево Брауэра



$$T = (\mu_4^+)^2 \circ (\mu_3^+)^2 \circ \mu_2^+(A)$$



Слагаемые T – это:

$$\begin{array}{c}
 P_1 \\
 P_2 \xrightarrow{\beta} P_1 \\
 P_3 \xrightarrow{\beta} P_2 \\
 P_4 \xrightarrow{\beta^2} P_2 \\
 P_5.
 \end{array}$$

Вычислим наклоняющий комплекс T из леммы явно. Обозначим через $\psi_\Gamma : \{1, 2, \dots, n\} \setminus \phi_\Gamma^{-1}(0) \rightarrow \{1, \dots, n-1\}$ функцию, которая ставит в соответствие метке i метку ребра высшего уровня, инцидентного ребру i . Мы предполагаем, что в комплексе $0 \rightarrow P_i \rightarrow 0$, соответственно в комплексе $0 \rightarrow P_i \rightarrow P_j \rightarrow 0$, модуль P_i сосредоточен в 0 (мы используем кохомологические обозначения).

Лемма 6. Пусть Γ – дерево Брауэра типа (n, t) , пронумерованное, как описано выше. Пусть T – комплекс из леммы 5, тогда T имеет вид $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$, где

$$T_i \simeq \begin{cases} P_i, & \phi_\Gamma(i) = 0, \\ (P_i \xrightarrow{\beta^{i-\psi(i)}} P_{\psi(i)})[\phi_\Gamma(i)], & \phi_\Gamma(i) \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что стрелки в алгебре, соответствующей звезде Брауэра, обозначались β . Поскольку $T = (\mu_n^+)^{\phi_\Gamma(n)} \circ (\mu_{n-1}^+)^{\phi_\Gamma(n-1)} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_\Gamma(1)}(A)$, то сначала мы мутируем слагаемое с меткой 1, потом с меткой 2 и так далее, следовательно, мы можем вычислять T с помощью индукции по номеру метки. $\phi_\Gamma(1) = 0$, следовательно, $T_1 = P_1$. Если ребро с меткой 1 не инцидентно листу, то 2 стоит на ребре, инцидентном его неисключительному концу, которое предшествует ребру с меткой 1 в циклическом порядке; $\phi_\Gamma(2) = 1$ и мы должны применить μ_2^+ к A . Следовательно, $T_2 \simeq P_2 \xrightarrow{\beta} P_1$, и этот комплекс сосредоточен в степенях -1 и 0 , как и требовалось. Если ребро с меткой 1 инцидентно листу, то 2 стоит на ребре, инцидентном исключительной вершине, $\phi_\Gamma(2) = 0$, следовательно, $T_2 = P_2$.

Предположим, что T_i вычислен. Если ребро с меткой $i+1$ инцидентно исключительной вершине, тогда $\phi_\Gamma(i+1) = 0$, и $T_{i+1} = P_{i+1}$.

Предположим, что ребро с меткой $i+1$ приписано некоторому ребру, не инцидентному исключительной вершине. Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_{\phi_\Gamma(i+1)} = \psi(i+1)$ ребра, принадлежащие кратчайшему пути из исключительной вершины к ребру с меткой $i+1$, проиндексированные числами от 1 до $\phi_\Gamma(i+1)$. По предположению

$$T^r = (\mu_i^+)^{\phi_\Gamma(i)} \circ (\mu_{i-1}^+)^{\phi_\Gamma(i-1)} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_\Gamma(1)}(A) = \bigoplus_{k=1}^i T_k \oplus \bigoplus_{k=i+1}^n P_k.$$

$$T_{x_1} = P_{x_1}, \quad T_{x_k} \simeq (P_{x_k} \xrightarrow{\beta^{x_k - x_{k-1}}} P_{x_{k-1}})[\phi_\Gamma(x_k)].$$

Мы хотим применить $(\mu_{i+1}^+)^{\phi_{\Gamma}(i+1)}$ к T^r , или, что то же самое, промутировать P_{i+1} вдоль $T_{x_1}, T_{x_2}, \dots, T_{x_{\phi_{\Gamma}(i+1)}}$. Понятно, что $T_{i+1}^{r+1} \simeq P_{i+1} \xrightarrow{\beta^{i+1-x_1}} P_{x_1}$. Минимальная левая аппроксимация T_{i+1}^{r+1} относительно других слагаемых T^{r+1} – это морфизм

$$\begin{array}{ccc} P_{i+1} & \xrightarrow{\beta^{i+1-x_1}} & P_{x_1} \\ \downarrow \beta^{i+1-x_2} & & \downarrow \text{Id} \\ P_{x_2} & \xrightarrow{\beta^{x_2-x_1}} & P_{x_1}. \end{array}$$

По лемме 4 $T_{i+1}^{r+2} \simeq (P_{i+1} \xrightarrow{\beta^{i+1-x_2}} P_{x_2})[2]$, применив лемму 4 нужное количество раз, получаем желаемый результат. \square

Замечание 1. *Полученный комплекс дву-ограничен. Похожие комплексы уже изучались в работах Шапс и Закай-Иллоуз (см., например, [31]).*

2.3 Основной результат

Пусть A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра типа (n, t) . Пусть \mathcal{R} обозначает подгруппу производной группы Пикара $\text{TrPic}(A)$, порожденную сдвигом, $\text{Pic}(A)$ и эквивалентностями H_i (см. формулу (1)).

Замечание 2. (а) *Подгруппа \mathcal{R} совпадает с подгруппой, рассматриваемой в [30]. Там же было показано, что на этой подгруппе действует группа кос на диаграмме \tilde{A}_{n-1} , соответствующий гомоморфизм переводит образующие группы кос в H_i . В [24] показано, что это действие точно при $t = 1$.*

(б) *В $\text{Pic}(A)$ имеется автоморфизм, соответствующий повороту звезды Брауэра, он переводит H_i в H_{i+1} сопряжением, поэтому можно определить \mathcal{R} как подгруппу $\text{TrPic}(A)$, порожденную сдвигом, $\text{Pic}(A)$ и эквивалентностью H_1 .*

(с) $H_i(A) \simeq (\mu_i^+)^2(A)$, действительно, для комплекса $P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{i-1}$ существует треугольник $P_i \xrightarrow{f'} M' \rightarrow \text{Cone}(f') \rightarrow$, где $M' = P_{i-1}$, $f' = \beta$ – минимальная левая аппроксимация P_i относительно $\text{add}(\bigoplus_{j=1, j \neq i}^n P_j)$, а $\text{Cone}(f') \simeq P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1}$; и треугольник $\text{Cone}(f') \xrightarrow{f''} M'' \rightarrow \text{Cone}(f'') \rightarrow$, где $M'' = P_{i-1}$, $f'' = (0, \text{soc})$ – минимальная левая аппроксимация $\text{Cone}(f')$ относительно $\text{add}(\bigoplus_{j=1, j \neq i}^n P_j)$, а $\text{Cone}(f'') \simeq (P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{i-1})$.

Теорема 1. Если $t > 1$, то $\text{TrPic}(A) = \mathcal{R}$.

Схема доказательства. Надо проверить, что вложение \mathcal{R} в $\text{TrPic}(A)$ сюръективно. Любой элемент X из $\text{TrPic}(A)$ ограничивается на некоторый наклоняющий комплекс T такой, что $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq A$; любой другой элемент $\text{TrPic}(A)$, ограничивающийся на тот же наклоняющий комплекс, отличается от X на элемент $\text{Pic}(A)$, то есть на элемент \mathcal{R} . Поэтому достаточно показать, что для любого наклоняющего комплекса T существует элемент из \mathcal{R} , который переводит неразложимые проективные A -модули в слагаемые T .

Пусть F – некоторая автоэквивалентность $D^b(A)$, вычислим $F(H_i(P_j))$. Так как $H_i(P_j) = P_j$, при $j \neq i, i-1$, то $F(H_i(P_j)) = F(P_j)$, при $j \neq i, i-1$. $H_i(P_i) = P_{i-1}$, следовательно, $F(H_i(P_i)) = F(P_{i-1})$. Для комплекса $H_i(P_{i-1})$ существуют треугольники $P_i \xrightarrow{f'} M' \rightarrow \text{Cone}(f') \rightarrow$ и $\text{Cone}(f') \xrightarrow{f''} M'' \rightarrow \text{Cone}(f'') \rightarrow$, где f' и f'' – минимальные левые аппроксимации P_i и $\text{Cone}(f')$ относительно $\text{add}(\bigoplus_{j=1, j \neq i}^n P_j)$, следовательно, по лемме 1 для комплекса $F(H_i(P_{i-1}))$ существуют треугольники $F(P_i) \xrightarrow{g'} N' \rightarrow \text{Cone}(g') \rightarrow$ и $\text{Cone}(g') \xrightarrow{g''} N'' \rightarrow \text{Cone}(g'') \rightarrow$, где $g' = F(f')$ и $g'' = F(f'')$ – минимальные левые аппроксимации $F(P_i)$ и $\text{Cone}(g') \simeq F(\text{Cone}(f'))$ относительно $\text{add}(\bigoplus_{j=1, j \neq i}^n F(P_j))$, а $F(H_i(P_{i-1})) \simeq \text{Cone}(g'')$.

Таким образом, $F(H_i(P_{i-1}))$ – это двойная мутация $F(P_i)$ относительно других слагаемых $F(A)$. Рассмотрим автоэквивалентность такую, что

$$H'_i(P_j) = \begin{cases} P_j \rightarrow 0 \rightarrow 0, & j \neq i, i-1 \\ P_i \rightarrow 0 \rightarrow 0, & j = i-1 \\ P_i \xrightarrow{\text{soc}} P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1}, & j = i, \end{cases}$$

Заметим, что $H'_i(A) \simeq (\mu_{i-1}^-)^2(A)$, то есть для $H'_i(P_i)$ существуют два треугольника из определения правой мутации. Аналогично предыдущему рассуждению получаем, что применить некоторую автоэквивалентность к $H'_i(A)$ – это то же самое, что вычислить двойную правую мутацию $G(P_{i-1})$ относительно других слагаемых $G(A)$. Таким образом, $H'_i(H_i(P_j)) = P_j$ и $H_i(H'_i(P_j)) = P_j$ для любого j , и поэтому $(H_i)^{-1}$ действует на проективных A -модулях так же, как H'_i .

Предположим, что некоторый наклоняющий комплекс T можно получить из A , применяя квадраты мутаций, то есть $T = (\mu_{j_q}^\pm)^2 \circ \dots \circ (\mu_{j_1}^\pm)^2(A)$. Индукцией по q получаем, что существует элемент из \mathcal{R} , который переводит проективные A -модули в слагаемые T . Таким образом, если мы докажем, что любой наклоняющий комплекс T можно получить из A , применяя квадраты мутаций и сдвиг, то теорема будет доказана.

Предположим, что T сосредоточен в неположительных степенях. По результатам Аихары [10] $T = \mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A)$ для некоторых $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$. Обозначим через $T^r := \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A)$, а через Γ^r – дерево Брауэра его кольца эндоморфизмов. Заметим, что если звезда Брауэра пронумерована стандартным способом, то Γ^r имеет естественную нумерацию ребер, связанную с последовательностью мутаций $\mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A)$, которая может не совпадать со стандартной.

С использованием леммы 5 получаем, что если A – алгебра, соответству-

ющая звезде Брауэра со стандартной нумерацией, то кольцо эндоморфизмов $(\mu_n^+)^{\phi_{\Gamma^r(n)}} \circ (\mu_{n-1}^+)^{\phi_{\Gamma^r(n-1)}} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_{\Gamma^r(1)}}(A)$ – это алгебра, соответствующая дереву Брауэра Γ^r со стандартной нумерацией. Если естественная нумерация ρ_r дерева Γ^r не стандартна, то существует некоторая перестановка τ_r , которую нужно применить к стандартной нумерации Γ^r , чтобы получить ρ_r . Применив τ_r к стандартной нумерации звезды Брауэра, получим звезду Брауэра с некоторой нумерацией, которую также будем обозначать ρ_r . А применив τ_r к индексам $(\mu_n^+)^{\phi_{\Gamma^r(n)}} \circ (\mu_{n-1}^+)^{\phi_{\Gamma^r(n-1)}} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_{\Gamma^r(1)}}(A)$, получаем последовательность мутаций, применение которой к звезде Брауэра с нумерацией ρ_r дает дерево Γ^r с нумерацией ρ_r . Обозначим эту последовательность мутаций $\tilde{\mu}^r$ для естественной нумерации ρ_r дерева Γ^r . Через $\tilde{\mu}^{-r} := (\tilde{\mu}^r)^{-1}$ будем обозначать последовательность мутаций $(\mu_{\tau_r(1)}^-)^{\phi_{\Gamma^r(\tau_r(1))}} \circ \dots \circ (\mu_{\tau_r(n-1)}^-)^{\phi_{\Gamma^r(\tau_r(n-1))}} \circ (\mu_{\tau_r(n)}^-)^{\phi_{\Gamma^r(\tau_r(n))}}$. Если A^{ρ_r} – алгебра, соответствующая звезде Брауэра с нумерацией ρ_r , а B^r – алгебра, соответствующая дереву Брауэра Γ^r с естественной нумерацией, то $\tilde{\mu}^{-r} \circ \tilde{\mu}^r(A^{\rho_r}) = A^{\rho_r}$ и $\tilde{\mu}^r \circ \tilde{\mu}^{-r}(B^r) = B^r$.

$$\begin{aligned} T &= \mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A) = \\ &= \mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \tilde{\mu}^{r+1} \circ \tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \tilde{\mu}^r \circ \tilde{\mu}^{-r} \circ \mu_{i_r}^+ \circ \tilde{\mu}^{r-1} \circ \tilde{\mu}^{-(r-1)} \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \\ &\quad \circ \tilde{\mu}^2 \circ \tilde{\mu}^{-2} \circ \mu_{i_2}^+ \circ \tilde{\mu}^1 \circ \tilde{\mu}^{-1} \circ \mu_{i_1}^+(A). \end{aligned}$$

Получаем, что представимость в виде композиции квадратов мутаций достаточно проверить для комплексов вида: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \tilde{\mu}^r(A^{\rho_r})$, $\tilde{\mu}^{-1} \circ \mu_{i_1}^+(A)$ и $\mu_{i_s}^+ \circ \tilde{\mu}^{s-1}(A^{\rho_{s-1}})$. Кольца эндоморфизмов этих комплексов изоморфны алгебре, соответствующей звезде Брауэра. Ясно, что $\tilde{\mu}^{-1} \circ \mu_{i_1}^+(A) = A$, а $\mu_{i_s}^+ \circ \tilde{\mu}^{s-1}(A^{\rho_{s-1}}) = (\mu_{i_s}^+)^2(A^{\rho_{s-1}})$, здесь мы используем то, что $t > 1$ и что исключительная вершина выделена кратностью. Остается проверить усло-

вие для комплексов $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \tilde{\mu}^r(A^{\rho_r})$ для любого дерева Γ^r и любой мутации $\mu_{i_{r+1}}^+$. Применив τ_r^{-1} , мы собираемся проделать соответствующую последовательность мутаций со стандартной звездой Брауэра. Этому посвящены следующие пункты. \square

Замечание 3. *Вопрос о соотношениях в \mathcal{R} остается открытым.*

2.4 Мутации типа I

Заметим, что все последующие вычисления верны и при $t = 1$. Часто мы будем опускать степени, в которых сосредоточены комплексы, но будем принимать их во внимание.

Без потери общности будем предполагать, что Γ^r – дерево со стандартной нумерацией, поэтому $\tilde{\mu}^r(A)$ – это последовательность мутаций, описанная в пункте 2.2. Предположим, что $j := i_{r+1}$ – ребро, инцидентное вершине x степени 1 в Γ^r , то есть μ_j^+ – мутация типа I. Для вычисления $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A)$ рассмотрим следующие три случая: 1) x – не корень, и существует ребро того же уровня, что и ребро j , следующее за ребром j в циклическом порядке; 2) x – не корень, и не существует ребра того же уровня, что ребро j , следующего за ребром j в циклическом порядке; 3) x – корень.

1) пусть x – не корень, и пусть существует ребро l того же уровня, что и ребро j , следующее за ребром j в циклическом порядке в Γ^r .

Утверждение: Γ^{r+1} – дерево со стандартной нумерацией, $\mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A)$ изоморфен стандартному наклоняющему комплексу из леммы 6, соответствующему этому дереву, а значит $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq A$.

Доказательство. Понятно, что Γ^{r+1} – дерево со стандартной нумерацией. Предположим, что ребро j не инцидентно корню. Обозначим через q

ребро высшего уровня, инцидентное и ребру j , и ребру l в Γ^r . Поскольку $\phi_{\Gamma^r}(j) = \phi_{\Gamma^r}(l)$, а $\psi(j) = \psi(l) = q$ в Γ^r , то минимальная левая аппроксимация f комплекса T_j^r имеет следующий вид (в качестве минимальной левой аппроксимации мы можем взять любой ненулевой морфизм, так как $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}(T_j^r, T_l^r) = 1$):

$$\begin{array}{ccc} T_j^r \simeq & P_j \xrightarrow{\beta^{j-q}} & P_q \\ \downarrow f & \downarrow \beta^{j-l} & \downarrow \text{Id} \\ T_l^r \simeq & P_l \xrightarrow{\beta^{l-q}} & P_q. \end{array}$$

$T_j^{r+1} \simeq (P_j \xrightarrow{\beta^{j-l}} P_l)[\phi_{\Gamma^r}(j) + 1]$ по лемме 4. Отсюда получаем требуемое, так как $\phi_{\Gamma^{r+1}}(j) = \phi_{\Gamma^r}(j) + 1$ и $\psi(j) = l$ в Γ^{r+1} .

Если ребро j инцидентно корню в Γ^r , то ребро l тоже инцидентно корню в Γ^r , и тогда $T_j^{r+1} \simeq (P_j \xrightarrow{\beta^{j-l}} P_l)[1]$. \square

2) пусть x – не корень, и пусть не существует ребра того же уровня, что ребро j , следующего за ребром j в циклическом порядке (в Γ^r). Для упрощения обозначений положим $\phi_{\Gamma} = \phi_{\Gamma^r}$.

Утверждение: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq (\mu_j^+)^2(A)$.

Доказательство. $T^r = \bigoplus_{i=1}^n T_i$ – наклоняющий комплекс из леммы 6, ребро с индексом j не инцидентно корню. Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_{\phi_{\Gamma}(j)} = \psi(j) = j - 1$ ребра, принадлежащие кратчайшему пути из исключительной вершины к ребру с меткой j , проиндексированные числами от 1 до $\phi_{\Gamma}(j)$. T_j^{r+1} – это конус морфизма (в качестве минимальной левой аппроксимации мы можем взять любой ненулевой морфизм, так как

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}(T_j^r, T_{j-1}^r) = 1)$$

$$\begin{array}{ccccc} P_j & \xrightarrow{\beta} & P_{j-1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \text{soc} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P_{j-1} & \xrightarrow{\beta^a} & P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-1}}, \end{array}$$

где soc – морфизм, образ которого равен цоколю P_{j-1} , а $a = j - 1 - x_{\phi_{\Gamma}(j)-1}$. Поэтому $T_j^{r+1} \simeq (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-1}})$, где $P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-1}}$ сосредоточен в той же степени, что и в T^r . Если ребро $j - 1$ инцидентно корню, то $P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-1}} = 0$, и $T_j^{r+1} \simeq (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1})$. Применим часть последовательности $\tilde{\mu}^{-(r+1)}$, которая содержит мутации с индексами большими j и с индексом $j - 1$. Для соответствующего r' получаем, что $T^{r'} \simeq \bigoplus_{i=1}^{j-2} T_i \oplus (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-1}}) \oplus P_{j-1} \bigoplus_{i=j+1}^n P_i$. Применим $\mu_j^-: T_j^{r'+1}$ – это конус следующего морфизма, сдвинутый на -1 ,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-1}} \xrightarrow{\beta^b} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-2}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Id} \\ P_j & \xrightarrow{\beta} & P_{j-1} & \xrightarrow{\text{soc}} & P_{j-1} & \xrightarrow{\beta^a} & P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-1}} \longrightarrow 0, \end{array}$$

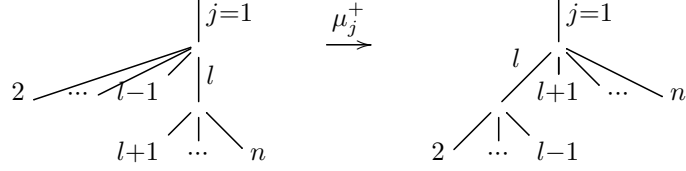
где $b = x_{\phi_{\Gamma}(j)-1} - x_{\phi_{\Gamma}(j)-2}$. По лемме 4 $T_j^{r'+1} \simeq (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1} \xrightarrow{\beta^{a+b}} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-2}})$, где $P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)-2}}$ сосредоточен в той же степени, что и в T^r . Применяя лемму 4 нужное количество раз, получаем $T_j \simeq (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1})$, где P_j сосредоточен в степени -2 (здесь и далее через T будем обозначать комплекс $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A)$, через T_j будем обозначать его слагаемое, соответствующее ребру с индексом j).

Применяя оставшиеся мутации из последовательности $\tilde{\mu}^{-(r+1)}$, получаем, что $T_i \simeq P_i$ для $i < j - 1$, а значит $(\mu_j^+)^2(A)$. \square

3) пусть x – корень, $j = 1$.

Пусть l – ребро, следующее за ребром j в циклическом порядке ребер вокруг некорневого конца ребра j в Γ^r .

$\Gamma = \Gamma^r$ и Γ^{r+1} схематично имеют следующий вид (метки $\{2, \dots, l-1\}$ и $\{l+1, \dots, n\}$ расставлены на произвольных поддеревьях):



Утверждение: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq ((\mu_1^-)^2 \circ (\mu_2^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{l-1}^-)^2(A))[1]$.

Доказательство. Пусть T^r – комплекс из леммы 6, соответствующий дереву Γ^r . Имеем: $T_1^r = P_1$, а $T_l^r \simeq P_l \xrightarrow{\beta^{l-1}} P_1$. Минимальная левая аппроксимация P_1 – это морфизм

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{Id} \\ P_l & \xrightarrow{\beta^{l-1}} & P_1. \end{array}$$

Ее конус – это $P_l[1]$.

В Γ^{r+1} ребра имеют следующие уровни: $\phi_{\Gamma^{r+1}}(2) = \phi_{\Gamma}(2) + 1, \dots, \phi_{\Gamma^{r+1}}(l-1) = \phi_{\Gamma}(l-1) + 1, \phi_{\Gamma^{r+1}}(l+1) = \phi_{\Gamma}(l+1) - 1, \dots, \phi_{\Gamma^{r+1}}(n) = \phi_{\Gamma}(n) - 1$, поэтому последовательность мутаций $\tilde{\mu}^{-(r+1)}$ имеет вид $\mu_l^- \circ (\mu_2^-)^{\phi_{\Gamma}(2)+1} \circ \dots \circ (\mu_{l-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l-1)+1} \circ (\mu_{l+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l+1)-1} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_{\Gamma}(n)-1}$. Применим эту последовательность к комплексу T^{r+1} .

Применение $(\mu_n^-)^{\phi_{\Gamma}(n)-1}$: заметим, что ребро n висячее; если n не инцидентно j , то применив $(\mu_n^-)^{\phi_{\Gamma}(n)-2}$, получим, что n инцидентно j , и ему соответствует комплекс $P_n \xrightarrow{\beta^{n-l}} P_l$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм из $P_l[1]$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{Id}} P_l$, по лемме 4 его конус изоморфен $P_n[2]$, следовательно, $T_n \simeq P_n[1]$.

Аналогично, применяя $(\mu_{l+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l+1)-1} \circ \dots \circ (\mu_{n-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(n-1)-1}$ получаем, что

$$T_{n-1} \simeq P_{n-1}[1], \dots, T_{l+1} \simeq P_{l+1}[1].$$

Применение $(\mu_{l-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l-1)+1}$: заметим, что ребро $l-1$ висячее; если $l-1$ не инцидентно l , то применив $(\mu_{l-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l-1)-1}$, получим, что $l-1$ инцидентно l , и ему соответствует комплекс $P_{l-1} \xrightarrow{\beta^{l-2}} P_j$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм (β, Id) из $P_l \xrightarrow{\beta^{l-1}} P_j$. По лемме 4 его конус изоморфен $P_l \xrightarrow{\beta} P_{l-1}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига этого комплекса – это морфизм из $P_l[1]$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l$, его конус изоморфен $P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta} P_{l-1}$, после сдвига P_{l-1} сосредоточен в 1, следовательно, $T_{l-1} \simeq (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta} P_{l-1})[1]$.

Аналогично, применяя $(\mu_2^-)^{\phi_{\Gamma}(2)+1} \circ \dots \circ (\mu_{l-2}^-)^{\phi_{\Gamma}(l-2)+1}$ получаем, что

$$T_{l-2} \simeq (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^2} P_{l-2})[1],$$

...

$$T_2 \simeq (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^{l-2}} P_2)[1].$$

Применим μ_l^- : минимальная правая аппроксимация $P_l \xrightarrow{\beta^{l-j}} P_j$ – это морфизм из $P_l[1]$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l$, его конус изоморфен $P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^{l-j}} P_j$, после сдвига P_j сосредоточен в 1, следовательно, $T_l \simeq (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^{l-1}} P_j)[1] = (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^{l-1}} P_1)[1]$.

Получаем $T \simeq ((\mu_1^-)^2 \circ (\mu_2^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{l-1}^-)^2(A))[1]$. \square

Заметим, что индексы j и l поменялись местами.

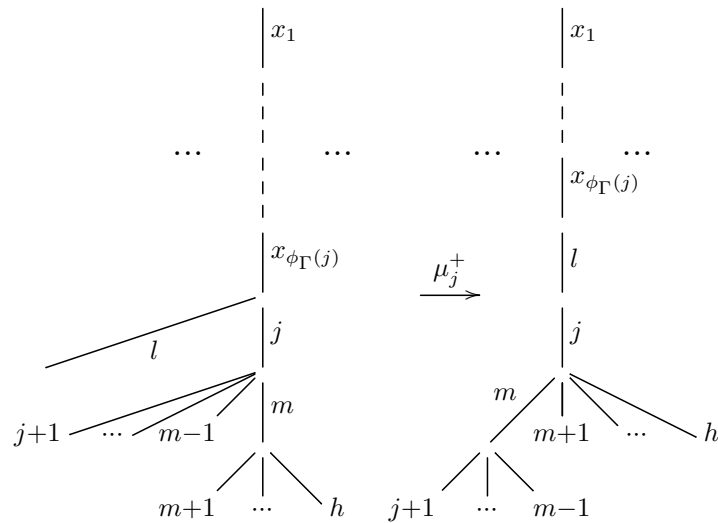
2.5 Мутации типа II

Предположим, что оба конца ребра $j := i_{r+1}$ – вершины степени > 1 в Γ^r , то есть μ_j^+ – мутация типа II. Для вычисления $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A)$ рассмотрим следующие три случая: 1) ребро j не инцидентно корню, и существует

ребро того же уровня, что и ребро j , следующее за ребром j в циклическом порядке; 2) ребро j инцидентно корню; 3) ребро j не инцидентно корню, и не существует ребра того же уровня, что и ребро j , следующего за ребром j в циклическом порядке.

1) пусть ребро j не инцидентно корню, и существует ребро l того же уровня, что и ребро j , следующее за ребром j в циклическом порядке. Ребро нижнего уровня, следующее за ребром j в циклическом порядке, обозначим через m .

$\Gamma = \Gamma^r$ и Γ^{r+1} схематично имеют следующий вид (метки $\{j+1, \dots, m-1\}$ и $\{m+1, \dots, h\}$ расставлены на произвольных поддеревьях, l – не обязательно висячее ребро):



Как и прежде обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_{\phi_\Gamma(j)} = \psi(j)$ ребра, принадлежащие кратчайшему пути из исключительной вершины к ребру j , пронумерованные числами от 1 до $\phi_\Gamma(j)$.

Утверждение: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq (\mu_j^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2(A)$.

Доказательство. Пусть T^r – комплекс из леммы 6, соответствующий дереву Γ^r . Так как $\phi_{\Gamma^r}(j) = \phi_{\Gamma^r}(l)$, $\phi_{\Gamma^r}(m) = \phi_{\Gamma^r}(j) + 1$, а $\psi(j) = \psi(l) =$

$x_{\phi_{\Gamma}(j)}$ в Γ^r , то минимальная левая аппроксимация f слагаемого T_j^r имеет вид (проективный модуль, соответствующий T_j^r , не лежит на исключительном цикле, поэтому морфизм, составленный из ненулевых морфизмов между соответствующими слагаемыми – минимальная аппроксимация):

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P_j & \xrightarrow{\beta^{j-x_{\phi_{\Gamma}(j)}}} & P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \\ \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \beta^{j-l} \end{pmatrix} & & \downarrow \text{Id} \\ P_m & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta^{m-j} \\ 0 \end{pmatrix}} & P_j \oplus P_l & \xrightarrow{(0, \beta^{l-x_{\phi_{\Gamma}(j)})}} & P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}}. \end{array}$$

Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc} P_m & \xrightarrow{-\beta^{m-l}} & P_l & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \begin{pmatrix} \text{Id} \\ -\beta^{m-j} \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Id} \\ -\beta^{l-x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \end{pmatrix} & & \downarrow \\ P_m \oplus P_j & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta^{m-j} & \text{Id} \\ 0 & \beta^{j-l} \\ 0 & -\beta^{j-x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \end{pmatrix}} & P_j \oplus P_l \oplus P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} & \xrightarrow{(0, \beta^{l-x_{\phi_{\Gamma}(j)}}, \text{Id})} & P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \\ \downarrow (\text{Id}, 0) & & \downarrow (-\beta^{j-l}, \text{Id}, 0) & & \downarrow \\ P_m & \xrightarrow{-\beta^{m-l}} & P_l & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

$\text{Cone}(f) =$

поэтому $(P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l) \simeq (P_m \xrightarrow{-\beta^{m-l}} P_l)$ – слагаемое $\text{Cone}(f)$. Ясно, что $\text{Cone}(f)$ гомотопен $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$, так как это неразложимое слагаемое наклоняющего комплекса.

В Γ^{r+1} ребра имеют следующие уровни: $\phi_{\Gamma^{r+1}}(j) = \phi_{\Gamma}(j) + 1$, $\phi_{\Gamma^{r+1}}(j + 1) = \phi_{\Gamma}(j + 1) + 2, \dots$, $\phi_{\Gamma^{r+1}}(m - 1) = \phi_{\Gamma}(m - 1) + 2$, $\phi_{\Gamma^{r+1}}(m) = \phi_{\Gamma}(m) + 1$, $\phi_{\Gamma^{r+1}}(m + 1) = \phi_{\Gamma}(m + 1), \dots$, $\phi_{\Gamma^{r+1}}(h) = \phi_{\Gamma}(h)$, поэтому $\tilde{\mu}^{-(r+1)} = (\mu_2^-)^{\phi_{\Gamma}(2)} \circ \dots \circ (\mu_{j-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(j-1)} \circ (\mu_j^-)^{\phi_{\Gamma}(j)+1} \circ (\mu_m^-)^{\phi_{\Gamma}(m)+1} \circ (\mu_{j+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(j+1)+2} \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(m-1)+2} \circ$

$(\mu_{m+1}^-)^{\phi_\Gamma(m+1)} \circ \dots \circ (\mu_h^-)^{\phi_\Gamma(h)} \circ (\mu_{h+1}^-)^{\phi_\Gamma(h+1)} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_\Gamma(n)}$. Применим эту последовательность мутаций к комплексу T^{r+1} .

Применяя $(\mu_{h+1}^-)^{\phi_\Gamma(h+1)} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_\Gamma(n)}$, очевидно, получаем $T_n \simeq P_n, \dots, T_{h+1} \simeq P_{h+1}$.

Применение $(\mu_h^-)^{\phi_\Gamma(h)}$: заметим, что ребро h висячее; если h не инцидентно j , то применив $(\mu_h^-)^{\phi_\Gamma(h)-\phi_\Gamma(m)-1}$, получим, что h инцидентно j , и ему соответствует комплекс $P_h \xrightarrow{\beta^{h-m}} P_m$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$, индуцированный $P_m \xrightarrow{\text{Id}} P_m$, по лемме 4 его конус изоморфен $P_h \xrightarrow{\beta^{h-l}} P_l$. Минимальная правая аппроксимация сдвига $P_h \xrightarrow{\beta^{h-l}} P_l$ – это морфизм из $P_l \xrightarrow{\beta^{l-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{Id}} P_l$, по лемме 4 его конус изоморфен $P_h \xrightarrow{\beta^{h-l}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$, применяя лемму 4 нужное количество раз, получаем, что $T_h \simeq P_h$.

Аналогично, применяя $(\mu_{m+1}^-)^{\phi_\Gamma(m+1)} \circ \dots \circ (\mu_{h-1}^-)^{\phi_\Gamma(h-1)}$ получаем, что $T_{h-1} \simeq P_{h-1}, \dots, T_{m+1} \simeq P_{m+1}$.

Применение $(\mu_{m-1}^-)^{\phi_\Gamma(m-1)+2}$: заметим, что ребро $m-1$ висячее; если $m-1$ не инцидентно m , то применив $(\mu_{m-1}^-)^{\phi_\Gamma(m-1)-\phi_\Gamma(m)}$, получим, что $m-1$ инцидентно m , и ему соответствует комплекс $P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-j}} P_j$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм (β, Id) из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j$, его конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$ – это морфизм $(\text{soc}, 0)$ из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$, его конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-l} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_l \oplus P_m \xrightarrow{(0, \beta)} P_{m-1}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига этого комплекса – это морфизм из $P_l \xrightarrow{\beta^{l-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{Id}} P_l$, с помощью вычисления, аналогичного лемме 4, получаем, что конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{(0, \beta)} P_{m-1}$.

Применяя оставшиеся степени μ_{m-1}^- , получаем, что

$$T_{m-1} \simeq (P_m \xrightarrow{soc} P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}).$$

Аналогично, применяя $(\mu_{j+1}^-)^{\phi_\Gamma(j+1)+2} \circ \dots \circ (\mu_{m-2}^-)^{\phi_\Gamma(m-2)+2}$, получаем:

$$T_{m-2} \simeq (P_m \xrightarrow{soc} P_m \xrightarrow{\beta^2} P_{m-2}),$$

...

$$T_{j+1} \simeq (P_m \xrightarrow{soc} P_m \xrightarrow{\beta^{m-j-1}} P_{j+1}).$$

Применение $(\mu_m^-)^{\phi_\Gamma(m)+1}$: минимальная правая аппроксимация $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j$ – это морфизм $(soc, 0)$ из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$, аналогично предыдущему случаю получаем, что

$$T_m \simeq (P_m \xrightarrow{soc} P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j).$$

Применение $(\mu_j^-)^{\phi_\Gamma(j)+1}$: минимальная правая аппроксимация $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$ – это морфизм из $P_l \xrightarrow{\beta^{l-x}\phi_\Gamma(j)} P_{x\phi_\Gamma(j)}$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{Id}} P_l$, по лемме 4, получаем, что конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\beta^{m-x}\phi_\Gamma(j)} P_{x\phi_\Gamma(j)}$, применяя лемму 4 нужное количество раз, получаем, что $T_j \simeq P_m$.

Применение $(\mu_2^-)^{\phi_\Gamma(2)} \circ \dots \circ (\mu_{j-1}^-)^{\phi_\Gamma(j-1)}$ дает $T_{j-1} \simeq P_{j-1}$, ..., $T_2 \simeq P_2$, $T_1 \simeq P_1$.

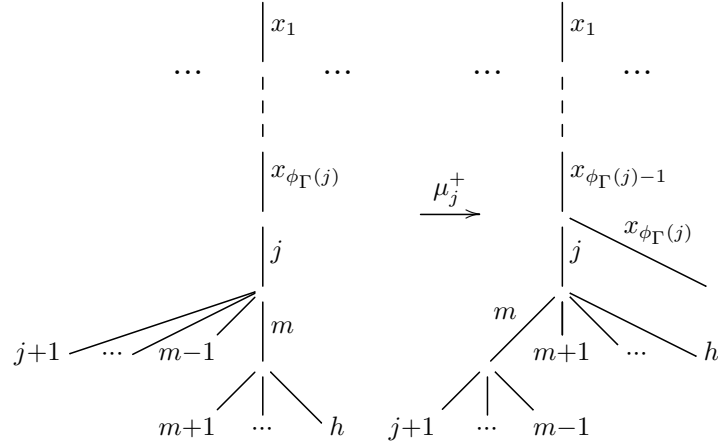
Получаем, что $T \simeq (\mu_j^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2(A)$. \square

Заметим, что индексы m и j поменялись местами.

2) пусть ребро j инцидентно корню. Этот случай аналогичен случаю (1). Положим $P_{x\phi_\Gamma(j)} = 0$ в (1). Понятно, что $T_j^{r+1} \simeq P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$. С помощью вычислений аналогичных случаю (1) получаем, что $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq (\mu_j^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2(A)$. \square

3) пусть ребро j не инцидентно корню, и не существует ребра того же уровня, что и ребро j , следующего за ребром j в циклическом порядке.

$\Gamma = \Gamma^r$ и Γ^{r+1} схематично имеют следующий вид (метки $\{j+1, \dots, m-1\}$ и $\{m+1, \dots, h\}$ расставлены на произвольных поддеревьях):



Как и прежде обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_{\phi_\Gamma(j)} = \psi(j) = j - 1$ ребра, принадлежащие кратчайшему пути из исключительной вершины к ребру j , проиндексированные числами от 1 до $\phi_\Gamma(j)$.

Утверждение: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq F_j(A)$, где определение $F_j(A)$ приведено в дополнении (циклический порядок ребер, соответствующих слагаемым $F_j(A)$, в звезде Брауэра определяется линейным порядком этих слагаемых снизу вверх).

Доказательство. Вычислим T_j^{r+1} . Минимальная левая аппроксимация T_j^r – это

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P_j & \xrightarrow{\beta} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \text{soc} & & \downarrow \\
 P_m & \xrightarrow{\beta^{m-j}} & P_j & \xrightarrow{0} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} & \xrightarrow{\beta^a} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}.
 \end{array}$$

По лемме 4 имеем: $T_j^{r+1} \simeq (P_m \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}})$, где $a = x_{\phi_\Gamma(j)} - x_{\phi_\Gamma(j)-1}$.

В Γ^{r+1} ребра имеют следующие уровни: $\phi_{\Gamma^{r+1}}(j) = \phi_\Gamma(j) - 1$, $\phi_{\Gamma^{r+1}}(j +$

$1) = \phi_\Gamma(j+1), \dots, \phi_{\Gamma^{r+1}}(m-1) = \phi_\Gamma(m-1), \phi_{\Gamma^{r+1}}(m) = \phi_\Gamma(m) - 1, \phi_{\Gamma^{r+1}}(m+1) = \phi_\Gamma(m+1) - 2, \dots, \phi_{\Gamma^{r+1}}(h) = \phi_\Gamma(h) - 2$, поэтому $\tilde{\mu}^{-(r+1)} = (\mu_2^-)^{\phi_\Gamma(2)} \circ \dots \circ (\mu_{j-2}^-)^{\phi_\Gamma(j-2)} \circ (\mu_j^-)^{\phi_\Gamma(j)-1} \circ (\mu_m^-)^{\phi_\Gamma(m)-1} \circ (\mu_{j+1}^-)^{\phi_\Gamma(j+1)} \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^{\phi_\Gamma(m-1)} \circ (\mu_{m+1}^-)^{\phi_\Gamma(m+1)-2} \circ \dots \circ (\mu_h^-)^{\phi_\Gamma(h)-2} \circ (\mu_{x_{\phi_\Gamma(j)}}^-)^{\phi_\Gamma(j)} \circ (\mu_{h+1}^-)^{\phi_\Gamma(h+1)} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_\Gamma(n)}$.

Применим эту последовательность мутаций к комплексу T^{r+1} .

Применяя $(\mu_{x_{\phi_\Gamma(j)}}^-)^{\phi_\Gamma(j)} \circ (\mu_{h+1}^-)^{\phi_\Gamma(h+1)} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_\Gamma(n)}$, очевидно, получаем $T_n \simeq P_n, \dots, T_{h+1} \simeq P_{h+1}, T_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \simeq P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$.

Применение $(\mu_h^-)^{\phi_\Gamma(h)-2}$: заметим, что ребро h висячее; если h не инцидентно j , то применив $(\mu_h^-)^{\phi_\Gamma(h)-\phi_\Gamma(j)-2}$, получим, что h инцидентно j , и ему соответствует комплекс $P_h \xrightarrow{\beta^{h-m}} P_m$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$, индуцированный $P_m \xrightarrow{Id} P_m$, по лемме 4 его конус изоморфен $P_h \xrightarrow{\beta^{h-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига этого конуса – это морфизм из $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\beta^b} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$ (где $b = x_{\phi_\Gamma(j)-1} - x_{\phi_\Gamma(j)-2}$), индуцированный $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{Id} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$, по лемме 4 конус изоморфен $P_h \xrightarrow{\beta^{h-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^{a+b}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$. Применив лемму 4 нужное количество раз, получаем, что $T_h \simeq (P_h \xrightarrow{\beta^{h-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}})$.

Применение $(\mu_{h-1}^-)^{\phi_\Gamma(h-1)-2}, \dots, (\mu_{m+1}^-)^{\phi_\Gamma(m+1)-2}$ полностью аналогично, и мы получаем, что

$$T_{h-1} \simeq (P_{h-1} \xrightarrow{\beta^{h-1-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}),$$

...

$$T_{m+1} \simeq (P_{m+1} \xrightarrow{\beta^{m+1-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}).$$

Применение $(\mu_{m-1}^-)^{\phi_\Gamma(m-1)}$: если $m-1$ не инцидентно m , то применив $(\mu_{m-1}^-)^{\phi_\Gamma(m-1)-\phi_\Gamma(m)}$, получим, что $m-1$ инцидентно m , и ему соответствует комплекс $P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-j}} P_j$. Минимальная правая аппроксимация

$P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-j}} P_j$ – это морфизм (β, Id) из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j$ в $P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-j}} P_j$, по лемме 4 его конус – это $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$. Минимальная правая аппроксимация $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$ – это морфизм $(\text{soc}, 0, 0, 0)$ из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$ в $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$, его конус – это $P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{m-1} \xrightarrow{(-\beta^a, 0)} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига этого комплекса – это морфизм из $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\beta^b} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$, индуцированный $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\text{Id}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$, по лемме 4 его конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{m-1} \xrightarrow{(-\beta^{a+b}, 0)} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$. Применяя лемму 4 нужное количество раз, получаем, что $T_{m-1} \simeq (P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{m-1})$.

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 T_{m-2} &\simeq (P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{m-2}), \\
 &\dots \\
 T_{j+1} &\simeq (P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta^{m-j-1} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{j+1}).
 \end{aligned}$$

Применение $(\mu_m^-)^{\phi_\Gamma(m)-1}$: минимальная правая аппроксимация $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j$ – это морфизм $(\text{soc}, 0, 0, 0)$ из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$ в $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j$, аналогично предыдущему случаю получаем, что

$$T_m \simeq (P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta^{m-j} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_j).$$

Применение $(\mu_j^-)^{\phi_\Gamma(j)-1}$: минимальная правая аппроксимация $P_m \xrightarrow{\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$ – это морфизм из $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\beta^b} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$, индуцированный $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\text{Id}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$, и, применяя лемму 4 нужное количество раз получаем, что $T_j \simeq (P_m \xrightarrow{\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}})$.

Применение $(\mu_2^-)^{\phi_\Gamma(2)} \circ \dots \circ (\mu_{j-2}^-)^{\phi_\Gamma(j-2)}$ очевидно дает $T_{j-2} \simeq P_{j-2}, \dots, T_2 \simeq P_2, T_1 \simeq P_1$. \square

Утверждение: $F_j(A) = (\mu_h^+)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m+1}^+)^2 \circ (\mu_j^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_m^+)^2 \circ (\mu_{m-1}^+)^2 \circ \dots \circ (\mu_j^+)^2(A)$.

Доказательство. Применим к $F_j(A)$ обратную последовательность мутаций, если в результате мы получим A , то утверждение доказано. Вычислим двойную мутацию T_h вдоль $T_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$. Минимальная правая аппроксимация T_h – это морфизм из $T_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$ в T_h , индуцированный $P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{Id}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$, по лемме 4 его конус изоморфен $P_h \xrightarrow{\beta^{h-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$; после применения сдвига компонента $P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$ сосредоточена в той же степени, что и в $T_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$, применяя лемму 4 еще раз, получаем $[(\mu_h^-)^2(F_j(A))]_h \simeq P_h$.

Аналогично,

$$[(\mu_{h-1}^-)^2 \circ (\mu_h^-)^2(F_j(A))]_{h-1} \simeq P_{h-1}$$

...

$$[(\mu_{m+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{h-1}^-)^2 \circ (\mu_h^-)^2(F_j(A))]_{m+1} \simeq P_{m+1}.$$

Обозначим комплекс $(\mu_{m+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{h-1}^-)^2 \circ (\mu_h^-)^2(F_j(A))$ через T^r .

Напомним, что гомотопическая категория может быть определена как стабильная категория некоторой фробениусовой категории, а именно категории комплексов, по отношению к классу коротких точных последовательностей, расщепляющихся в каждой степени. Поэтому треугольники в гомотопической категории соответствуют коротким точным последовательностям в категории комплексов, расщепляющимся в каждой степени [15].

Вычислим двойную мутацию T_m вдоль T_j . Рассмотрим следующую точную последовательность в категории комплексов, расщепляющуюся в каж-

дой степени:

$$\begin{array}{ccccc}
X = & 0 & \xrightarrow{\quad} & P_m & \xrightarrow{\beta^{m-j}} & P_j \\
\downarrow g & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Id} \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Id} \end{pmatrix} \\
T_m = & P_m & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} & P_{x\phi_\Gamma(j)} \oplus P_m & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta^{m-j} \end{pmatrix}} & P_{x\phi_\Gamma(j)} \oplus P_j \\
\downarrow f & \downarrow \text{Id} & & \downarrow (\text{Id}, 0) & & \downarrow (\text{Id}, 0) \\
T_j \simeq & P_m & \xrightarrow{-\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)}} & P_{x\phi_\Gamma(j)} & \xrightarrow{-\text{soc}} & P_{x\phi_\Gamma(j)},
\end{array}$$

где f очевидно является минимальной левой аппроксимацией T_m по отношению к другим слагаемым T^r . Поэтому, $\text{Cone}(f) \simeq (P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j)$ в соответствующей степени. Минимальная левая аппроксимация $\text{Cone}(f)$ по отношению к другим слагаемым T^{r+1} – это морфизм в $T_j = P_m \xrightarrow{\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x\phi_\Gamma(j)}$, индуцированный $(\text{Id}, \beta^{j-x\phi_\Gamma(j)})$, и по лемме 4 его конус изоморфен $[(\mu_m^+)^2(T^r)]_m \simeq P_j \xrightarrow{\beta^{j-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x\phi_\Gamma(j)}$.

Аналогично,

$$[(\mu_{j+1}^+)^2 \circ (\mu_m^+)^2(T^r)]_{j+1} \simeq P_{j+1} \xrightarrow{\beta^{j+1-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x\phi_\Gamma(j)}$$

...

$$[(\mu_{m-1}^+)^2 \circ \dots \circ (\mu_{j+1}^+)^2 \circ (\mu_m^+)^2(T^r)]_{m-1} \simeq P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x\phi_\Gamma(j)}.$$

Поэтому

$$(\mu_{m-1}^+)^2 \circ \dots \circ (\mu_{j+1}^+)^2 \circ (\mu_m^+)^2 \circ (\mu_{m+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{h-1}^-)^2 \circ (\mu_h^-)^2(F_j(A)) \simeq G_j(A),$$

где определение $G_j(A)$ приведено в дополнении (циклический порядок ребер, соответствующих слагаемым $G_j(A)$, в звезде Брауэра определяется линейным порядком этих слагаемых снизу вверх).

Очевидно, применяя $(\mu_j^-)^2$ к G_j , получаем $[(\mu_j^-)^2(G_j)]_j \simeq P_m$.

Аналогично,

$$[(\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_j^-)^2(G_j)]_{m-1} \simeq P_{m-1}$$

...

$$[(\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_j^-)^2(G_j)]_{j+1} \simeq P_{j+1}$$

$$[(\mu_m^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_j^-)^2(G_j)]_m \simeq P_j.$$

Поэтому $(\mu_m^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_j^-)^2(G_j) \simeq A$.

Заметим, что в итоговой копии A циклический порядок проективных модулей стандартный, а нумерация – нет: метки j и m поменялись местами, отсюда получаем требуемое утверждение. \square

На этом заканчивается доказательство теоремы 1.

2.6 Случай $t = 1$

Пусть A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра типа $(n, 1)$. Рассмотрим подгруппу $\tilde{\mathcal{R}}$ производной группы Пикара алгебры A , порожденную сдвигом, $\text{Pic}(A)$, эквивалентностями H_i , и эквивалентностями Q_i , где Q_i – некоторые стандартные автоэквивалентности, действующие на проективных модулях следующим образом:

$$Q_i(P_j) = \begin{cases} 0 \rightarrow P_i \rightarrow 0, & j = i \\ 0 \rightarrow P_i \xrightarrow{\beta^{i-j}} P_j, & j \neq i. \end{cases}$$

Замечание 4. *Группа, порожденная Q_i , рассматривалась Мухтади-Аламсиах в [24]. На ней действует группа кос, которой соответствует группа Коксетера, заданная полным графом на n вершинах, это действие не точно.*

Замечание 5. Понятно, что $Q_i(A) \simeq \mu_{i+1}^- \circ \mu_{i+2}^- \circ \dots \circ \mu_{i-2}^- \circ \mu_{i-1}^-(A)$, эта серия мутаций меняет центральную вершину звезды Брауэра на внешний конец ребра с меткой i . Так же понятно, что Q_i можно получить из Q_{i+1} сопряжением с помощью автоморфизма, соответствующего повороту звезды Брауэра. Заметим также, что Q_i^2 не меняет центральную вершину звезды Брауэра, поэтому $Q_i^2 \in \mathcal{R}$.

Теорема 2. Пусть $t = 1$, тогда $\text{TrPic}(A) = \tilde{\mathcal{R}}$.

Доказательство. Так как $Q_i(A) \simeq \mu_{i+1}^- \circ \mu_{i+2}^- \circ \dots \circ \mu_{i-2}^- \circ \mu_{i-1}^-(A)$, слагаемые $Q_i(A)$ могут быть вычислены как конусы минимальных аппроксимаций проективных модулей. Так же, как в случае вычисления $F(H_i(A))$, легко видеть, что для вычисления $F(Q_i(A))$ для некоторой автоэквивалентности F достаточно применить последовательность мутаций $\mu_{i+1}^- \circ \mu_{i+2}^- \circ \dots \circ \mu_{i-2}^- \circ \mu_{i-1}^-$ к $F(A)$.

Как и раньше, достаточно показать, что для любого наклоняющего комплекса T такого, что $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq A$, существует элемент из $\tilde{\mathcal{R}}$, переводящий неразложимые проективные A -модули в слагаемые T . Предположим, что T сосредоточен в неположительных степенях. По результатам Аихары [10] $T = \mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A)$ для некоторых $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$. Если последовательность мутаций $\mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A)$ не изменяет центральную вершину звезды Брауэра, то, пользуясь вычислениями из предыдущих пунктов, получаем, что стандартная эквивалентность F такая, что $F(A) \simeq T$, принадлежит \mathcal{R} , а значит, и $\tilde{\mathcal{R}}$. Если последовательность мутаций изменяет центральную вершину звезды Брауэра на внешний конец ребра с меткой i , тогда, применив $\mu_{i+1}^- \circ \mu_{i+2}^- \circ \dots \circ \mu_{i-2}^- \circ \mu_{i-1}^-$, получаем наклоняющий комплекс $T' \in \mathcal{R}$. Имеем $T' \simeq F \circ Q_i(A)$, поэтому F принадлежит $\tilde{\mathcal{R}}$. \square

Замечание 6. Как и в случае $t > 1$, вопрос о соотношениях в $\tilde{\mathcal{R}}$ остается открытым.

2.7 Дополнение

$$F_j = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{j-2} \\ T_j \\ T_m \\ T_{j+1} \\ \vdots \\ T_{m-1} \\ T_{m+1} \\ \vdots \\ T_h \\ T_{x\phi_\Gamma(j)} \\ T_{h+1} \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{j-2} \\ P_m \xrightarrow{\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{soc} P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ soc \end{pmatrix}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -soc & 0 \\ 0 & \beta^{m-j} \end{pmatrix}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \oplus P_j \\ P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ soc \end{pmatrix}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -soc & 0 \\ 0 & \beta^{m-j-1} \end{pmatrix}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \oplus P_{j+1} \\ \vdots \\ P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)} \\ soc \end{pmatrix}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -soc & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \oplus P_{m-1} \\ P_{m+1} \xrightarrow{\beta^{m+1-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{soc} P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ \vdots \\ P_h \xrightarrow{\beta^{h-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{soc} P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ P_{h+1} \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

$$G_j = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{j-2} \\ T_m \\ T_{j+1} \\ \vdots \\ T_{m-1} \\ T_j \\ T_{x\phi_\Gamma(j)} \\ T_{m+1} \\ \vdots \\ T_h \\ T_{h+1} \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{j-2} \\ P_j \xrightarrow{\beta^{j-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{soc} P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ P_{j+1} \xrightarrow{\beta^{j+1-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{soc} P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ \vdots \\ P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{soc} P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ P_m \xrightarrow{\beta^{m-x\phi_\Gamma(j)}} P_{x\phi_\Gamma(j)} \xrightarrow{soc} P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ P_{m+1} \\ \vdots \\ P_h \\ P_{h+1} \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

3 Двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра

В этой главе с помощью критерия того, что минимальное проективное представление неразложимого модуля является частично наклоняющим комплексом, мы описываем двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. Также мы вычисляем кольца эндоморфизмов таких наклоняющих комплексов.

3.1 Двучленные наклоняющие комплексы над самоинъективными алгебрами

Пусть A – произвольная самоинъективная конечномерная K -алгебра.

Лемма 7. *Любой двучленный комплекс $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1 \in \text{per-}A$ изоморфен прямой сумме минимального проективного представления некоторого модуля и комплекса, состоящего из проективного модуля, сосредоточенного в 0.*

Доказательство. Обозначим коядро f через M . Минимальное проективное представление M выделяется в T прямым слагаемым. При этом T изоморфен прямой сумме минимального проективного представления M , некоторого возможно нулевого слагаемого P^0 , сосредоточенного в 0, на котором f действует нулем, и комплекса вида $P \xrightarrow{\text{id}} P$, гомотопного 0. \square

Будем считать, что минимальное проективное представление модуля сосредоточено в степенях 0 и 1 в когомологических обозначениях. Для про-

стоты будем рассматривать минимальные проективные представления модулей без проективных прямых слагаемых. Прямые слагаемые, сосредоточенные в степени 1, соответствующие проективным модулям, рассмотрим отдельно в предложении 2.

Предложение 1. Пусть A – самоинъективная K -алгебра, M – модуль без проективных прямых слагаемых, и пусть $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1$ – минимальное проективное представление модуля M . Комплекс T является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда $\text{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0$ и $\text{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0$.

Доказательство. Пусть существует $h : P^1 \rightarrow P^0$ такой, что $hf = 0 = fh$, то есть h задает морфизм $T \rightarrow T[-1]$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(f) & \xrightarrow{i} & P^0 & \longrightarrow & P^1 & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker}(f) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & \swarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(f) & \xleftarrow{\quad} & P^0 & \xleftarrow{\quad} & P^1 & \longrightarrow & \text{Coker}(f) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Условие $hf = 0$ означает $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(h)$, следовательно, h пропускается через $\text{Coker}(f)$, то есть существует $h' \in \text{Hom}_A(\text{Coker}(f), P^0)$ такой, что $h = h'\pi$, но π – сюръекция, значит $\text{Im}(h) = \text{Im}(h')$.

Условие $fh = 0$ влечет $\text{Im}(h') = \text{Im}(h) \subseteq \text{Ker}(f)$, следовательно, h' пропускается через $\text{Ker}(f)$, то есть существует h'' такой, что $h' = ih''$, $h = ih''\pi$. Заметим, что $h = 0$ тогда и только тогда, когда $h'' = 0$, так как π – сюръекция, а i – вложение.

Также, имея некоторый ненулевой $h'' \in \text{Hom}_A(\text{Coker}(f), \text{Ker}(f))$, мы можем построить по нему $h = ih''\pi$, задающий ненулевой морфизм $T \rightarrow T[-1]$. Получаем, что

$$\text{Hom}_{D^b(A)}(T, T[-1]) = 0 \Leftrightarrow \text{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0. \quad (*)$$

Теперь проверим, что

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, T[1]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0. \quad (**)$$

Имеем $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, T[1]) = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, P_\bullet) = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, M)$, где P_\bullet – проективная резольвента M . Так как T состоит из проективных модулей, имеем $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, M) = \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T, M)$. \square

С помощью следующего замечания Хаппеля [16] получаем следствие.

Замечание 7. Пусть B – конечномерная алгебра над полем K , $\mathrm{proj}\text{-}B$, $\mathrm{inj}\text{-}B$ – категории конечнопорожденных проективных и инъективных B -модулей, $K^b(\mathrm{proj}\text{-}B)$, $K^b(\mathrm{inj}\text{-}B)$ – соответствующие ограниченные гомотопические категории, D – двойственность относительно K . Тогда функтор Накаямы ν индуцирует эквивалентность триангулированных категорий $K^b(\mathrm{proj}\text{-}B) \rightarrow K^b(\mathrm{inj}\text{-}B)$, и существует естественный изоморфизм $D\mathrm{Hom}(P, -) \rightarrow \mathrm{Hom}(-, \nu P)$, $P \in K^b(\mathrm{proj}\text{-}B)$.

Следствие 1. Пусть A – симметрическая K -алгебра, M – модуль без проективных прямых слагаемых, и пусть $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1$ – минимальное проективное представление модуля M . Комплекс T является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0$.

Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 1.

Предложение 2. Пусть A – самоинъективная алгебра, M – модуль без проективных прямых слагаемых, и пусть минимальное проективное представление модуля M является частично наклоняющим комплексом.

Сумма проективного модуля P , сосредоточенного в 0, и минимального проективного представления модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_A(M, P) = 0 = \mathrm{Hom}_A(P, M)$.

Сумма проективного модуля P , сосредоточенного в 1, и минимального проективного представления модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда $\text{Hom}_A(\Omega^2 M, P) = 0 = \text{Hom}_A(P, \Omega^2 M)$.

3.2 Двучленные неразложимые частично наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1

Далее в этом разделе мы будем рассматривать только алгебры Брауэра A , соответствующие деревьям Брауэра Γ таким, что кратность исключительной вершины Γ равняется 1. Зафиксируем некоторый A -модуль M , обозначим через $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1$ его минимальное проективное представление. В силу того, что алгебра A симметрична, для $T \in \text{per-}A$ условие $\text{Hom}_{D^b(A)}(T, T[1]) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\text{Hom}_{D^b(A)}(T, T[-1]) = 0$.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 8. Пусть M – неразложимый непроективный A -модуль. Условие $\text{Hom}_A(P^0, M) = 0$ влечет $\text{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0$, а значит и $\text{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0$.

Лемма 9. Пусть M – непроективный A -модуль такой, что $\dim(\text{top}(M)) = 1$. Минимальное проективное представление модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда M не изоморфен $P/\text{soc}(P)$ ни для какого неразложимого

проективного модуля P .

Доказательство. Из условия $\dim(\text{top}(M)) = 1$ следует, что $M \simeq P^1/U$, где P^1 – неразложимый.

Если $U = \text{soc}(P^1)$, то $P^0 \simeq P^1$ в силу симметричности A . Это значит, что $\Omega^2 M$ вкладывается в P^1 , следовательно, $\text{soc}(\Omega^2 M) = \text{soc}(P^1) = \text{top}(P^1) = \text{top}(M)$, а значит, $\text{Hom}_A(M, \Omega^2 M) \neq 0$. Пользуясь (*), получаем $\text{Hom}_{D^b(A)}(T, T[-1]) \neq 0$.

Предположим, что $U \neq \text{soc}(P^1)$, обозначим через I множество индексов, соответствующих композиционным факторам $\text{top}(U)$. Проективное накрытие модуля U изоморфно $\bigoplus_{i \in I} Ae_i$. Так как $U \neq \text{soc}(P^1)$, то I не содержит индекса, соответствующего $\text{soc}(P^1)$, а также индексов, соответствующих композиционным факторам P^1/U (над алгеброй, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, у неразложимого проективного модуля нет изоморфных композиционных факторов кроме верхушки и цоколя), поэтому $\text{Hom}_A(P^0, M) = 0$. По лемме 8 и предложению 1 минимальное проективное представление P^1/U – частично наклоняющий комплекс. \square

Обозначим через $CF(L)$ множество композиционных факторов модуля L .

Лемма 10. *Для любого неразложимого непроективного A -модуля M такого, что $\dim(\text{top}(M)) \geq 2$, имеем $\text{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0$.*

Доказательство. Заметим, что условие $\dim(\text{top}(M)) \geq 2$ влечет $CF(\text{top}(P^0)) \cap CF(M) \subseteq \text{soc}(M)$. Действительно, над алгеброй, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, у неразложимого непроективного модуля нет изоморфных композиционных факторов, поэтому $CF(\text{top}(P^0)) \cap CF(M) \subseteq \text{soc}(M)$. Следовательно,

для любого морфизма $h : P^0 \rightarrow M$ имеем: $\text{Im}(h) \subseteq \text{soc}(M)$, а значит $\text{Ker}h \supseteq \text{rad}(P^0) \supseteq \text{Ker}f$, поэтому h пропускается через f , и $h = 0$ в $K^b(A)$. \square

Окончательно получаем следующий результат.

Теорема 3. *Минимальное проективное представление неразложимого непроективного модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда M не изоморфен $P/\text{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P .*

Доказательство. Случай $\dim(\text{top}(M)) = 1$ рассмотрен в лемме 9; в случае $\dim(\text{top}(M)) \geq 2$ нужный результат получаем с помощью леммы 10, утверждения (**) и замечания 7. \square

3.3 Двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1

Как и в предыдущем пункте будем предполагать, что рассматриваемая алгебра имеет кратность исключительной вершины 1.

Для того, чтобы классифицировать все базисные двучленные наклоняющие комплексы $T = \bigoplus_{i=1}^s T_i$, необходимо и достаточно классифицировать наборы из s попарно ортогональных неизоморфных неразложимых двучленных частично наклоняющих комплексов $\{T_1, \dots, T_s\}$ (см., например: [6]).

Пусть $T_i = P_0 \xrightarrow{f} P_1 \in \text{per-}A$ – минимальное проективное представление неразложимого непроективного модуля M , и пусть модуль M не изоморфен $P/\text{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P . В силу

известной классификации неразложимых A -модулей ([3], [33]), диаграмма модуля M является зигзагом. Пусть $P_0 = \bigoplus_{l \in L} Ae_l$, $P_1 = \bigoplus_{l \in J} Ae_l$. Заметим, что в силу того, что у M нет повторяющихся композиционных факторов, и того, что M не изоморфен $P/\text{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P , каждый индекс может встречаться только один раз и только в одном из множеств. Двучленному комплексу $T = P_0 \xrightarrow{f} P_1$ сопоставим следующую диаграмму на колчане алгебры A .

Определение 3. *Отметим на колчане алгебры A вершины, соответствующие множеству $L \cup J$. Также отметим на колчане алгебры A путь из l в j , $l \in L$, $j \in J$, если у f есть ненулевая компонента между соответствующими прямыми слагаемыми P_0 и P_1 . Полученную диаграмму будем называть диаграммой проективного представления $T = P_0 \xrightarrow{f} P_1$. Вершины, соответствующие множеству $L \cup J$, будем называть выделенными вершинами диаграммы.*

Полученная диаграмма представляет собой связный путь без самопересечений, меняющий цикл и ориентацию в каждой из вершин множества $L \cup J$. Это выполнено в силу того, что для любого индекса $j \in J$ существует не более двух индексов из L таких, что соответствующие компоненты f ненулевые, и наоборот: для любого индекса $l \in L$ существует не более двух индексов из J таких, что соответствующие компоненты f ненулевые. Следовательно, любому связному пути Θ без самопересечений, меняющему ориентацию при каждой смене цикла и состоящему больше чем из одной вершины, можно поставить в соответствие двучленный частично наклоняющий комплекс следующим образом: положим множество L множеством индексов, соответствующих истокам Θ , J – множеством индексов, соответствующих стокам Θ . Тогда $P_0 = \bigoplus_{l \in L} Ae_l$, $P_1 = \bigoplus_{l \in J} Ae_l$, а f составле-

но из морфизмов, соответствующих направленным подпутям из истоков в стоки. (Проективные модули, соответствующие соседним стоку и истоку, лежат на одном цикле, и, с точностью до обратимой константы, между ними существует единственный морфизм. Выбор коэффициента не имеет значения, будем считать, что в качестве морфизма мы всегда выбираем до-множение на соответствующий путь.) Таким образом мы получили взаимно однозначное соответствие между минимальными проективными представлениями непроективных модулей, неизоморфных $P/\text{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P , и связными путями Θ на колчане алгебры A такими, что Θ – путь без самопересечений, меняет ориентацию при каждой смене цикла и состоит больше чем из одной вершины.

Диаграмму, соответствующую минимальному проективному представлению, и само минимальное проективное представление мы часто будем обозначать одинаково.

Определение 4. Пусть T_i и T_j – диаграммы двух минимальных проективных представлений, пересекающиеся больше, чем по одной вершине так, что пересечение состоит из одной компоненты связности. Сужение T_i относительно T_j – это пересечение диаграммы T_i и объединения тех циклов алгебры, на которых лежит хотя бы одна выделенная вершина T_j . Будем обозначать сужение T_i относительно T_j через $T_i|_{T_j}$.

Диаграмму, состоящую больше чем из одной вершины и полностью лежащую на одном цикле, будем называть струной. Будем обозначать такую диаграмму (k, \dots, l) , где k – сток, а l – исток струны.

Замечание 8. Определение сужения подобрано так, что между проективными слагаемыми компонент T_i и T_j , которые соответствуют вершинам, не попавшим в сужения, нет ненулевых морфизмов.

Теорема 4. Пусть T_i и T_j – неразложимые неизоморфные двучленные частично наклоняющие комплексы. Комплекс $T_i \oplus T_j$ является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий.

В предположении, что T_i и T_j – минимальные проективные представления некоторых модулей, являющиеся неразложимыми двучленными частично наклоняющими комплексами.

а) Диаграммы, соответствующие T_i и T_j , не пересекаются, причем не существует цикла Υ такого, что на Υ лежит исток степени один диаграммы T_j (соответственно T_i) и сток степени один диаграммы T_i (соответственно T_j), и эти вершины – единственные вершины T_i и T_j , лежащие на Υ .

б) Диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются по вершине k , причем либо k не является выделенной вершиной ни T_i , ни T_j , либо k является стоком степени один и T_i , и T_j , либо k является истоком степени один и диаграммы T_i , и диаграммы T_j .

в) Пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются так, что одна крайняя вершина пересечения является стоком, а другая истоком. Кроме того, $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$ или $T_j|_{T_i} \subseteq T_i|_{T_j}$.

г) Пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются так, что обе крайние вершины пересечения являются стоками, при этом либо диаграммы T_i и T_j имеют общую вершину степени один, либо $T_i|_{T_j} \not\subseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \not\subseteq T_i|_{T_j}$.

д) Пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются так, что обе крайние вершины пересечения являются истоками, при этом либо диаграммы T_i и T_j имеют общую вершину степени один, либо $T_i|_{T_j} \not\subseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \not\subseteq T_i|_{T_j}$.

В предположении, что T_i – минимальное проективное представление некоторого модуля, которое является неразложимым двучленным частично наклоняющим комплексом, T_j – неразложимый комплекс, состоящий из проективного неразложимого модуля P .

е) P сосредоточен в 0, и либо вершина, соответствующая P , совпадает с истоком степени один диаграммы T_i , либо вершина, соответствующая P , не лежит на диаграмме T_i , и не существует цикла Υ такого, что на Υ лежит вершина, соответствующая P , и сток степени один диаграммы T_i так, что этот сток является единственной вершиной T_i , которая лежит на Υ .

ж) P сосредоточен в 1, и либо вершина, соответствующая P , совпадает со стоком степени один диаграммы T_i , либо вершина, соответствующая P , не лежит на диаграмме T_i , и не существует цикла Υ такого, что на Υ лежит вершина, соответствующая P , и исток степени один диаграммы T_i так, что этот исток является единственной вершиной T_i , которая лежит на Υ .

В предположении, что T_i, T_j – два неразложимых комплекса, каждый из которых сосредоточен в одной степени.

з) Либо вершины, соответствующие T_i и T_j , не лежат на одном цикле, либо вершины, соответствующие T_i и T_j , лежат на одном цикле, и T_i, T_j сосредоточены в одной и той же степени.

Доказательству этой теоремы посвящена оставшаяся часть раздела 3.3.

Как мы уже отмечали ранее, для того, чтобы классифицировать все базисные двучленные наклоняющие комплексы, необходимо и достаточно классифицировать наборы из s неизоморфных неразложимых двучленных частично наклоняющих комплексов $\{T_1, \dots, T_s\}$ таких, что $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[1]) = 0 = \text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$ (см. [6]). В силу симметричности алгебры достаточно проверить лишь одно из этих условий, например, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$.

Если Ae_j, Ae_i – проективные модули, лежащие на одном цикле, то будем обозначать через $Ae_j \rightarrow Ae_i$ комплекс (сосредоточенный в двух соседних степенях), в котором дифференциал индуцирован домножением на путь из j в i .

Сначала рассмотрим случай двух минимальных проективных представлений некоторых непроективных модулей.

Лемма 11. *Пусть не существует цикла, содержащего вершины диаграмм T_i и T_j , тогда $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$.*

Доказательство. Следует из того, что между слагаемыми компонент T_i и T_j нет ненулевых морфизмов. □

Лемма 12. *Пусть существует цикл Υ такой, что Υ содержит вершины T_i и T_j , но диаграммы, соответствующие T_i и T_j , не пересекаются. Тогда условие $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 = \text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ выполнено во всех случаях кроме случая, когда на Υ лежит исток степени один диаграммы T_j (соответственно T_j) и сток степени один диаграммы T_i (соответственно T_i), и эти вершины – единственные вершины T_i и T_j , лежащие на Υ .*

Доказательство. Заметим, что если диаграммы T_i и T_j проходят по одному циклу Υ , но не пересекаются, то они не проходят одновременно ни по какому другому циклу, так как Γ – дерево. Эта ситуация может реализовываться в случаях, когда на Υ лежит струна T_i и струна T_j ; струна T_i и вершина T_j ; вершина T_i и вершина T_j .

1) На Υ лежит струна (i_1, \dots, i_2) , принадлежащая T_i , и струна (j_1, \dots, j_2) , принадлежащая T_j , но эти струны не пересекаются. Докажем, что между T_i и $T_j[-1]$ не может быть ненулевого цепного отображения. Понятно, что ненулевые морфизмы существуют только между теми прямыми слагаемыми компонент T_i и T_j , вершины которых лежат на Υ (то есть между Ae_{i_1} , Ae_{i_2} , Ae_{j_1} , Ae_{j_2}), так как все остальные проективные слагаемые компонент T_i и T_j лежат на разных циклах. Следовательно, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Hom}_{D^b(A)}(Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}, (Ae_{j_2} \rightarrow Ae_{j_1})[-1]) = 0$. Последнее верно, так как струны (i_1, \dots, i_2) и (j_1, \dots, j_2) не пересекаются.

2) На Υ лежит струна (i_1, \dots, i_2) , принадлежащая T_i , и вершина, принадлежащая T_j и не являющаяся отмеченной вершиной диаграммы T_j . $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$, так как проективные слагаемые компонент T_i и T_j лежат на разных циклах. $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$ по тем же причинам.

3) На Υ лежит струна (i_1, \dots, i_2) , принадлежащая T_i , и вершина (j_1) принадлежащая T_j , являющаяся стоком степени один. Тогда из Ae_{i_1} нет ненулевых морфизмов в компоненту $T_j[-1]$, сосредоточенную в степени 1, то есть $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. Имеем: $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Hom}_{D^b(A)}(0 \rightarrow Ae_{j_1}, (Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1})[-1]) = 0$. Последнее верно, так как струна (i_1, \dots, i_2) не содержит (j_1) .

4) На Υ лежит струна (i_1, \dots, i_2) , принадлежащая T_i , и вершина (j_1) , принадлежащая T_j и являющаяся истоком степени один. Этот случай ана-

логичен предыдущему.

5) На Υ лежит вершина (i_1) , принадлежащая T_i , и вершина (j_1) , принадлежащая T_j , обе являются истоками степени один, и эти вершины – единственные вершины T_i и T_j , лежащие на Υ . Модули Ae_{i_1} и Ae_{j_1} – единственные проективные слагаемые компонент T_i и T_j , между которыми существуют ненулевые морфизмы, они сосредоточены в одной степени, значит после сдвига ненулевых морфизмов нет.

6) На Υ лежит вершина (i_1) , принадлежащая T_i , и вершина (j_1) , принадлежащая T_j , обе являются стоками степени один, и эти вершины – единственные вершины T_i и T_j , лежащие на Υ . Доказательство аналогично предыдущему.

7) На Υ лежит сток степени один диаграммы T_i и неотмеченная вершина, принадлежащая T_j , эти вершины – единственные вершины T_i и T_j , лежащие на Υ . $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$, так как проективные слагаемые компонент T_i и T_j лежат на разных циклах. $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$ по тем же причинам.

8) На Υ лежит исток степени один диаграммы T_i и неотмеченная вершина, принадлежащая T_j , эти вершины – единственные вершины T_i и T_j , лежащие на Υ . Этот случай аналогичен предыдущему.

9) На Υ лежит неотмеченная вершина диаграммы T_i и неотмеченная вершина, принадлежащая T_j , эти вершины – единственные вершины T_i и T_j , лежащие на Υ . Этот случай аналогичен предыдущему.

10) На Υ лежит вершина (i_1) , принадлежащая T_i , являющаяся стоком степени один, и вершина (j_1) , принадлежащая T_j , являющаяся истоком степени один. В этом случае Ae_{i_1} и Ae_{j_1} – проективные слагаемые компонент T_i и T_j , сосредоточенных в разных степенях, после сдвига они сосредото-

точены в одной степени, и между ними существует ненулевой морфизм, индуцирующий цепное отображение. Имеем $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) \neq 0$. \square

Лемма 13. *Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j , имеют пересечение, состоящее более чем из одной компоненты связности. Тогда хотя бы одно из пространств $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ ненулевое.*

Доказательство. Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j , имеют пересечение, состоящее хотя бы из трех компонент связности. Тогда одна из них является изолированной вершиной k (в силу того, что Γ – дерево, с одного цикла на другой можно попасть только пройдя по единственной вершине, так как диаграммы имеют пересечение, состоящее хотя бы из трех компонент связности, они рядом с этой вершиной имеют разную ориентацию). Следовательно, для одной из диаграмм эта вершина является стоком (например, T_i), для другой – истоком (например, T_j). Из Ae_k в себя существует ненулевой морфизм, образ которого является цоколем Ae_k , он индуцирует ненулевой морфизм из $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$.

Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j , имеют пересечение, состоящее из двух компонент связности. Обе компоненты лежат на одном цикле, так как Γ – дерево. Пусть (i_1, \dots, i_2) , (j_1, \dots, j_2) – подструны T_i и T_j , соответствующие ограничениям T_i и T_j на этот цикл, их вершины на цикле упорядочены следующим образом i_1, i_2, j_1, j_2 , причем i_1 может совпадать с j_2 , а j_1 может совпадать с i_2 . Из Ae_{i_1} в Ae_{j_2} существует ненулевой морфизм (в случае, когда i_1 совпадает с j_2 , – это морфизм, образ которого является цоколем Ae_{i_1}), он индуцирует цепное отображение. \square

Лемма 14. *Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются по вершине k , тогда условие $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 =$*

$\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ выполнено тогда и только тогда, когда либо k не является выделенной вершиной ни T_i , ни T_j , либо k является стоком степени один и T_i , и T_j , либо k является истоком степени один и T_i , и T_j .

Доказательство. Заметим, что не существует цикла, одновременно пересекающегося с T_i и T_j , но не содержащего вершину k (так как Γ – дерево). Вершина k может быть стоком степени один, истоком степени один или невыделенной вершиной как T_i , так и T_j , а значит необходимо рассмотреть 6 случаев.

1) Пусть k не является выделенной вершиной ни T_i , ни T_j . Тогда выделенные вершины T_i и выделенные вершины T_j лежат на разных циклах и между соответствующими проективными модулями нет ненулевых морфизмов.

2) Пусть k является стоком степени один и T_i , и T_j . Пространство $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$ нулевое тогда и только тогда, когда $\text{Hom}_{D^b(A)}(Ae_{i_2} \rightarrow Ae_k, (Ae_{j_2} \rightarrow Ae_k)[-1]) = 0$ (где i_2, j_2 – соседние с k выделенные вершины диаграмм T_i и T_j , соответственно), но это верно, так как единственный (с точностью до константы) ненулевой морфизм из $\text{Hom}_A(Ae_k, Ae_{j_2})$ не индуцирует цепное отображение. $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$ по тем же причинам.

3) Случай, когда k – исток степени один и T_i , и T_j , аналогичен предыдущему.

Проверим, что во всех остальных случаях хотя бы одно из пространств $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]), \text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ не равно нулю.

4) Случай, когда k – исток T_i и сток T_j : гомоморфизм $Ae_k \rightarrow Ae_k$, образом которого является цоколь Ae_k , аннулирует любой необратимый гомоморфизм между неразложимыми проективными модулями, поэтому

он индуцирует ненулевое цепное отображение из $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$.

5) Случай, когда k является истоком T_i , но не является выделенной вершиной T_j . Пусть (j_1, \dots, j_2) – подструна T_j , содержащая k , (i_1, \dots, k) – подструна T_i , а соответствующие вершины расположены на одном цикле в порядке j_2, k, j_1 . Морфизм $Ae_{j_1} \rightarrow Ae_k$ индуцирует цепное отображение из $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$.

6) Случай, когда k является стоком T_i , но не является выделенной вершиной T_j , аналогичен предыдущему. \square

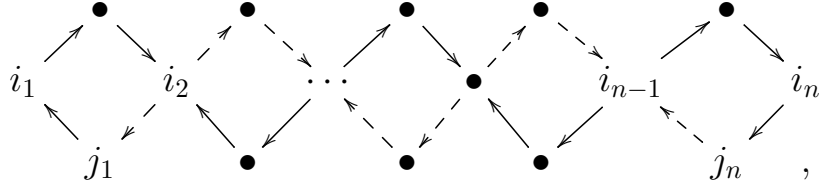
Если T_i и T_j пересекаются больше, чем по одной вершине, то возможны следующие типы пересечения: пересечение, у которого одна крайняя вершина (вершина степени один) является стоком, а другая истоком; пересечение, у которого обе крайние вершины являются стоками; пересечение, у которого обе крайние вершины являются истоками.

Лемма 15. Пусть пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Предположим, что диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются так, что одна крайняя вершина пересечения является стоком, а другая истоком. $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 = \text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ тогда и только тогда, когда $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$ или $T_j|_{T_i} \subseteq T_i|_{T_j}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случаи, когда крайние вершины пересечения совпадают с выделенными вершинами лишь одной из диаграмм (случаи 1 и 2), после этого рассмотрим случаи, когда крайние вершины пересечения совпадают с выделенными вершинами обеих диаграмм (случаи 3, 4, 5).

1) Предположим, что $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$, крайние вершины пересечения T_i и T_j не совпадают с выделенными вершинами T_j . Соответствующие сужения

на колчане алгебры A расположены следующим образом:



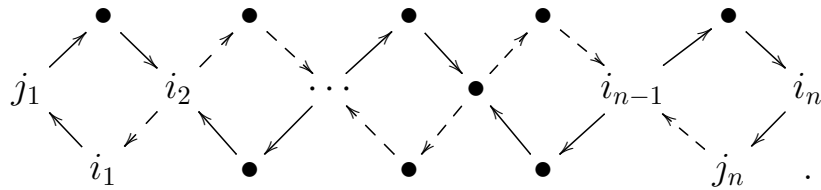
где i_1, i_2, \dots, i_n – выделенные вершины T_i (содержащиеся в сужении), причем вершины с нечетными индексами – истоки, а вершины с четными индексами – стоки; $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n$ – выделенные вершины T_j (содержащиеся в сужении), причем вершины с нечетными индексами – истоки, а вершины с четными индексами – стоки ($i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$). Дифференциалы на сужениях T_i и T_j индуцированы морфизмами из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$ и в $Ae_{i_{k+1}}$ для нечетных $k = 3, \dots, n-3$, а также морфизмами из Ae_{i_1} в Ae_{i_2} , из Ae_{j_1} в Ae_{i_2} , из $Ae_{i_{n-1}}$ в $Ae_{i_{n-2}}$ и Ae_{i_n} , из $Ae_{i_{n-1}}$ в $Ae_{i_{n-2}}$ и Ae_{j_n} . Соответствующие морфизмы заданы домножением на единственные ненулевые пути в колчане алгебры A . Как было замечено ранее, между проективными слагаемыми компонент T_i и T_j , не попавшими в сужения, нет ненулевых морфизмов.

Предположим, что из сужения T_j в сужение T_i , сдвинутое на -1 , существует ненулевое цепное отображение g . Оно должно быть ненулевым на некотором проективном слагаемом компоненты T_j (сконцентрированной в степени 1). Пусть g , суженное на Ae_{i_k} , не равняется нулю, где k четно. Если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$, композиция g и дифференциала должна быть равна нулю, а композиция $Ae_{i_k} \rightarrow Ae_{i_{k-1}} \rightarrow Ae_{i_k}$ (где $Ae_{i_k} \rightarrow Ae_{i_{k-1}}$ – соответствующая ненулевая компонента g , а $Ae_{i_{k-1}} \rightarrow Ae_{i_k}$ – соответствующая компонента дифференциала) не равна нулю. Следовательно, у g должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k+1}}$, но тогда для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{k+1}} \rightarrow Ae_{i_k} \rightarrow Ae_{i_{k+1}}$ не

равна нулю. Следовательно, у g должна быть ненулевая компонента из $Ae_{i_{k+2}}$ в $Ae_{i_{k+1}}$. Продолжая таким образом, получаем, что у g должна быть ненулевая компонента из Ae_{j_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но тогда для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{j_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ не равна нулю. Следовательно, если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$, то g не может быть цепным отображением. Если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k+1}}$, то доказательство того, что g не может быть цепным отображением, проводится аналогично.

Перейдем к $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$. Предположим, что из сужения T_i в сужение T_j , сдвинутое на -1 , существует ненулевое цепное отображение g . Оно должно быть ненулевым на некотором проективном слагаемом компоненты T_i (сконцентрированной в степени 1). Пусть g , суженное на Ae_{i_k} , не равняется нулю, где k четно. Если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$, композиция g и дифференциала должна быть равна нулю, а для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{k-1}} \rightarrow Ae_{i_k} \rightarrow Ae_{i_{k-1}}$ не равна нулю. Следовательно, у g должна быть ненулевая компонента из $Ae_{i_{k-2}}$ в $Ae_{i_{k-1}}$, но тогда для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{k-2}} \rightarrow Ae_{i_{k-1}} \rightarrow Ae_{i_{k-2}}$ не равна нулю. Следовательно, у g должна быть ненулевая компонента из $Ae_{i_{k-2}}$ в $Ae_{i_{k-3}}$. Таким образом, получаем, что у g должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_2} в Ae_{j_1} , но тогда для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{j_1}$ не равна нулю. Следовательно, если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k-1}}$, то g не может быть цепным отображением. Аналогично доказывается, что если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_k} в $Ae_{i_{k+1}}$, то g не может быть цепным отображением. Если у g есть ненулевая компонента из Ae_{i_2} в Ae_{j_1} , то сразу получаем, что g не может быть цепным отображением.

2) Рассмотрим случай, когда $T_i|_{T_j} \not\subseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \not\subseteq T_i|_{T_j}$, причем $i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$. Это выполнено, если исток степени один сужения T_i не лежит в пересечении, а сток степени один T_i лежит в пересечении (либо то же выполнено для T_j , но этот случай полностью аналогичен). Соответствующие поддиаграммы на колчане алгебры A расположены следующим образом (в обозначениях из пункта 1):

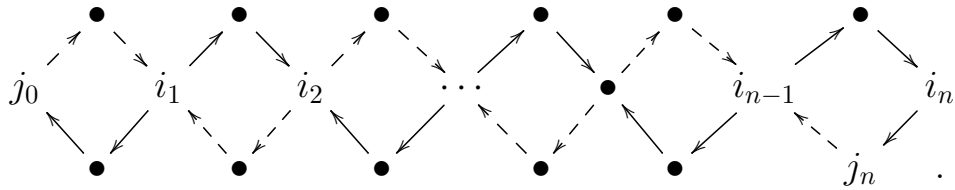


Построим ненулевой морфизм из $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$. Опишем, как этот морфизм действует на компонентах: выберем произвольный ненулевой морфизм $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{j_1}$. Заметим, что композиция $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{j_1}$ (где первая стрелка – ненулевая компонента дифференциала T_i , а вторая – соответствующий ненулевой морфизм) равна нулю. Выберем морфизм $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_3}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{j_1} \rightarrow Ae_{i_2}$ равнялась композиции $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_3} \rightarrow Ae_{i_2}$ с противоположным знаком. Выберем морфизм $Ae_{i_4} \rightarrow Ae_{i_3}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_3} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_3}$ равнялась композиции $Ae_{i_3} \rightarrow Ae_{i_4} \rightarrow Ae_{i_3}$ с противоположным знаком; будем продолжать строить морфизм таким образом, пока не дойдем до $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}}$, который подобран так, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_{n-2}} \rightarrow Ae_{i_{n-1}}$ равняется композиции $Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}}$ с противоположным знаком. Видим, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{j_n}$ равняется нулю. Таким образом построено ненулевое цепное отображение из $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$.

3) Пусть теперь $i_1 = j_1$, а $i_n \neq j_n$, предположим, что i_n лежит в сужении T_j , как и ранее мы используем обозначения из пункта 1. Возможны следующие три варианта: а) вершина i_1 является истоком степени один и у T_i , и у T_j ; б) вершина i_1 является истоком степени один у T_i , но не у T_j ; в) вершина i_1 является истоком степени один у T_j , но не у T_i .

а) Вершина i_1 является истоком степени один и у T_i , и у T_j . Как и раньше видим, что если из сужения T_j в сужение T_i , сдвинутое на -1 , существует ненулевое цепное отображение g , то оно должно иметь ненулевую компоненту из Ae_{i_2} в $Ae_{j_1} = Ae_{i_1}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{j_1} = Ae_{i_1}$ не равна нулю, следовательно, g не может быть цепным отображением, а значит $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$. Понятно, что $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$ по тем же причинам.

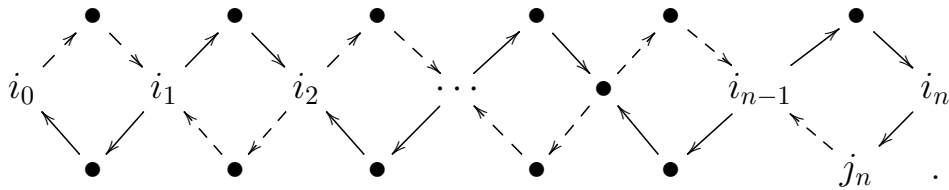
б) Вершина i_1 является истоком степени один у T_i , но не у T_j . Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j , соседняя с j_1 , но отличная от i_2 . На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



Как и раньше видим, что если из сужения T_i в сужение T_j , сдвинутое на -1 , существует ненулевое цепное отображение g , то оно должно иметь ненулевую компоненту из Ae_{i_2} в Ae_{i_1} , но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}$ не равна нулю, следовательно, g не может быть цепным отображением, а значит $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. Перейдем к $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$. Если из сужения T_j в сужение T_i , сдвинутое на -1 , существует ненулевое цепное отображение g , то оно должно иметь

ненулевую компоненту из Ae_{j_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{j_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, g не может быть цепным отображением.

в) Вершина i_1 является истоком степени один у T_j , но не у T_i . Пусть i_0 – отмеченная вершина T_i , соседняя с i_1 , но отличная от i_2 . На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



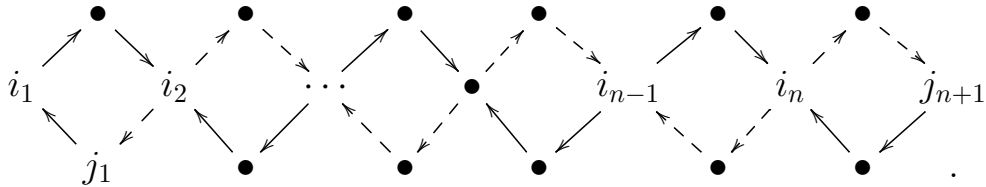
Построим ненулевой морфизм из $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$. Этот морфизм строится аналогично случаю, когда $T_i|_{T_j} \not\subseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \not\subseteq T_i|_{T_j}$, но $i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$. Построение морфизма на компонентах необходимо начать с морфизма $Ae_{i_0} \rightarrow Ae_{i_1}$. Будем строить морфизм описанным ранее образом, пока не дойдем до $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}}$, который подобран так, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_{n-2}} \rightarrow Ae_{i_{n-1}}$ равняется композиции $Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}}$ с противоположным знаком. Видим, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{j_n}$ равняется нулю. Таким образом построено ненулевое цепное отображение из $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1])$.

4) Пусть теперь $i_n = j_n, i_1 \neq j_1$, как и ранее мы используем обозначения из пункта 1. Предположим, что i_1 лежит в сужении T_j . Возможны следующие три варианта: а) вершина i_n является стоком степени один и у T_i , и у T_j ; б) вершина i_n является стоком степени один у T_i , но не у T_j ; в) вершина i_n является стоком степени один у T_j , но не у T_i .

а) Вершина i_n является стоком степени один и у T_i , и у T_j . У мор-

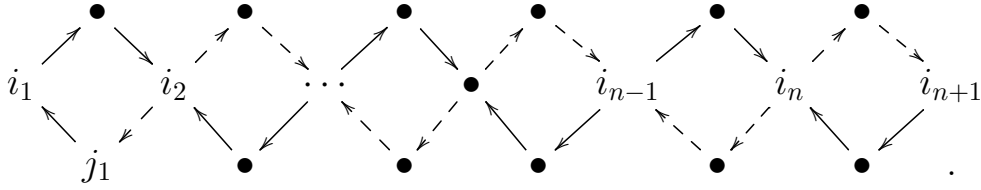
физма из сужения T_i в сужение T_j , сдвинутое на -1 , должна быть ненулевой компонентой из Ae_{i_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{j_n} = Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. По тем же причинам, что и раньше, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$.

б) Вершина i_n является стоком степени один у T_i , но не у T_j . Пусть j_{n+1} – отмеченная вершина T_j , соседняя с i_n , но отличная от i_{n-1} . На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



У морфизма из сужения T_i в сужение T_j , сдвинутое на -1 , должна быть ненулевой компонентой из Ae_{i_2} в Ae_{j_1} , но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{j_1}$ не равна нулю, следовательно, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. Если из сужения T_j в сужение T_i , сдвинутое на -1 , существует ненулевое цепное отображение g , то оно должно иметь ненулевую компоненту из Ae_{i_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, g не может быть цепным отображением.

в) Вершина i_n является стоком степени один у T_j , но не у T_i . Пусть i_{n+1} – отмеченная вершина T_i , соседняя с i_n , но отличная от i_{n-1} . На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



Построим ненулевой морфизм из $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$. Этот морфизм строится аналогично случаю, когда $T_i|_{T_j} \not\subseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \not\subseteq T_i|_{T_j}$, причем $i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$. Начнем построение морфизма на компонентах с отображения $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}$. Будем строить морфизм описанным ранее образом, пока не дойдем до $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}}$, который подобран так, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_{n-2}} \rightarrow Ae_{i_{n-1}}$ равняется композиции $Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}}$ с противоположным знаком. Видим, что для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ не равняется нулю. Выберем морфизм $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n+1}}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n+1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ равнялась композиции $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ с противоположным знаком. Таким образом построено ненулевое цепное отображение из $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$.

5) Наконец, рассмотрим случай $i_1 = j_1, i_n = j_n$, как и ранее мы используем обозначения из пункта 1. Возможны следующие подслучаи: а) i_1 – исток степени один T_i , но не T_j , i_n – сток степени один T_i , но не T_j ; б) i_1 – исток степени один T_i , но не T_j , i_n – сток степени один и T_i , и T_j ; в) i_1 – исток степени один и T_i , и T_j , i_n – сток степени один T_i , но не T_j ; г) i_1 – исток степени один T_i , но не T_j , i_n – сток степени один T_j , но не T_i .

а) Вершина i_1 – исток степени один T_i , но не T_j , i_n – сток степени один T_i , но не T_j . Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j , соседняя с i_1 , но отличная от i_2 , а j_{n+1} – отмеченная вершина T_j , соседняя с i_n , но отличная от i_{n-1} . У ненулевого морфизма из сужения T_i в сужение T_j , сдвинутое на -1 ,

должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_2} в Ae_{i_1} , но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}$ не равна нулю, следовательно, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. У ненулевого морфизма из сужения T_j в сужение T_i , сдвинутое на -1 , должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$.

б) Вершина i_1 – исток степени один T_i , но не T_j , i_n – сток степени один и T_i , и T_j . Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j , соседняя с i_1 , но отличная от i_2 . Как и в предыдущем случае, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$. У морфизма из сужения T_j в сужение T_i , сдвинутое на -1 , должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_n} в $Ae_{i_{n-1}}$, но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ не равна нулю, следовательно, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$.

в) Вершина i_1 – исток степени один и T_i , и T_j , i_n – сток степени один T_i , но не T_j . По тем же причинам, что и в случае (а), имеем $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) = 0$. У морфизма из сужения T_i в сужение T_j , сдвинутое на -1 , должна быть ненулевая компонента из Ae_{i_2} в Ae_{i_1} , но для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}$ не равна нулю, следовательно, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0$.

г) Вершина i_1 – исток степени один T_i , но не T_j , i_n – сток степени один T_j , но не T_i . Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j , соседняя с i_1 , но отличная от i_2 , а i_{n+1} – отмеченная вершина T_i , соседняя с i_n , но отличная от i_{n-1} . Начнем построение ненулевого отображения из T_j в $T_i[-1]$ с произвольного ненулевого морфизма $Ae_{j_0} \rightarrow Ae_{i_1}$. Выберем морфизм $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{j_0} \rightarrow Ae_{i_1}$ равнялась композиции $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}$ с противоположным знаком. Как и прежде

будем строить морфизм из T_j в $T_i[-1]$ так, чтобы его композиция с дифференциалами T_j и $T_i[-1]$ равнялась 0. Закончим построение, выбрав морфизм $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n+1}}$ так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n-1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ равнялась композиции $Ae_{i_n} \rightarrow Ae_{i_{n+1}} \rightarrow Ae_{i_n}$ с противоположным знаком. Таким образом, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1]) \neq 0$. \square

Лемма 16. Пусть пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Предположим, что диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются так, что обе крайние вершины пересечения являются стоками. $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 = \text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: 1) $T_i|_{T_j} \not\subseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \not\subseteq T_i|_{T_j}$; 2) диаграммы T_i и T_j имеют общую вершину степени один.

Лемма 17. Пусть пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины. Предположим, что диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются так, что обе крайние вершины пересечения являются истоками. $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, T_j[-1]) = 0 = \text{Hom}_{D^b(A)}(T_j, T_i[-1])$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: 1) $T_i|_{T_j} \not\subseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \not\subseteq T_i|_{T_j}$; 2) диаграммы T_i и T_j имеют общую вершину степени один.

Доказательство. Доказательство лемм 16 и 17 проводится полностью аналогично доказательству леммы 15. \square

Замечание 9. Из лемм 15, 16 и 17 видно, что вне зависимости от типа пересечения, если две диаграммы имеют общий сток или исток степени один, то прямая сумма соответствующих комплексов является частично наклоняющим комплексом.

Теперь разберем случай, когда хотя бы один из рассматриваемых комплексов сосредоточен в одной степени. Заметим, что если P – неразложимый комплекс, состоящий из проективного модуля, сосредоточенного в 0, а комплекс T_i сосредоточен в степенях 0 и 1, то условие $\text{Hom}_{D^b(A)}(P, T_i[-1]) = 0$ выполнено автоматически. Аналогично, если P сосредоточен в степени 1, то $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$.

Лемма 18. Пусть T_i – неразложимый частично наклоняющий комплекс, соответствующий минимальному проективному представлению некоторого модуля, P – неразложимый комплекс, состоящий из проективного модуля, сосредоточенного в 0. $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: 1) вершина, соответствующая P , совпадает с истоком степени один диаграммы T_i ; 2) вершина, соответствующая P , не лежит на диаграмме T_i , и не существует цикла Υ такого, что на Υ лежит вершина, соответствующая P , и сток степени один диаграммы T_i так, что этот сток является единственной вершиной T_i , которая лежит на Υ .

Доказательство. Нужно рассмотреть следующие случаи: 1) вершина, соответствующая P , не лежит на диаграмме T_i ; 2) вершина, соответствующая P , совпадает с истоком T_i ; 3) вершина, соответствующая P , совпадает со стоком T_i ; 4) вершина, соответствующая P , совпадает с невыделенной вершиной T_i .

1) Если вершина, соответствующая P , не лежит ни на одном из циклов, по которым проходит T_i , то очевидно имеем $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$. Если же вершина, соответствующая P , лежит на некотором цикле, по которому проходит T_i , причем на этом цикле лежит подструна T_i , то любой ненулевой морфизм из стока T_i , лежащего на том же цикле, в P не индуцирует

цепное отображение. Следовательно, $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$. Если вершина, соответствующая P , лежит на некотором цикле, по которому проходит T_i , причем на этом цикле лежит лишь исток T_i , то из $(T_i)^1$ в P вообще нет ненулевых морфизмов. В случае, когда вершина, соответствующая P , лежит на некотором цикле, по которому проходит T_i , причем на этом цикле лежит лишь сток T_i , ненулевой морфизм из этого стока T_i в P индуцирует ненулевое цепное отображение.

2) Пусть вершина, соответствующая P , совпадает с истоком i_1 степени один диаграммы T_i . Пусть i_2 – выделенная вершина T_i , соседняя с i_1 . Пространство $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1])$ нулевое тогда и только тогда, когда $\text{Hom}_{D^b(A)}(Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2}, Ae_{i_1}[-1]) = 0$. Это выполнено, так как любой ненулевой морфизм $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}$ не индуцирует цепное отображение. Пусть вершина, соответствующая P , совпадает с истоком i_2 степени 2 диаграммы T_i . Пусть i_1, i_3 – соседние с i_2 выделенные вершины T_i , тогда построим ненулевой морфизм $T_i \rightarrow P[-1]$ следующим образом. Выберем произвольное ненулевое ограничение этого морфизма на $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2}$, а ограничение на $Ae_{i_3} \rightarrow Ae_{i_2}$ выберем так, чтобы для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2}$ равнялась композиции $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_3} \rightarrow Ae_{i_2}$ с противоположным знаком, остальные компоненты положим равными нулю. Получаем, что $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) \neq 0$.

3) Если вершина, соответствующая P , совпадает со стоком i_1 диаграммы T_i , то отображение $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_1}$, образом которого является цоколь Ae_{i_1} , индуцирует ненулевое цепное отображение, и $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) \neq 0$.

4) Осталось рассмотреть случай, когда вершина k , соответствующая P , совпадает с неотмеченной вершиной диаграммы T_i . Пусть i_1, i_2 – исток и сток подструны T_i , содержащей k . $\text{Hom}_{D^b(A)}(T_i, P[-1]) = 0$ тогда и только

тогда, когда $\text{Hom}_{D^b(A)}(Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2}, Ae_k[-1]) = 0$. Понятно, что ненулевой морфизм $Ae_{i_2} \rightarrow Ae_k$ индуцирует цепное отображение, так как для соответствующих морфизмов композиция $Ae_{i_1} \rightarrow Ae_{i_2} \rightarrow Ae_k$ равна нулю. \square

Лемма 19. Пусть T_i – неразложимый частично наклоняющий комплекс, соответствующий минимальному проективному представлению некоторого модуля, P – неразложимый комплекс, состоящий из проективного модуля, сосредоточенного в 1. $\text{Hom}_{D^b(A)}(P, T_i[-1]) = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: 1) вершина, соответствующая P , совпадает со стоком степени один диаграммы T_i ; 2) вершина, соответствующая P , не лежит на диаграмме T_i , и не существует цикла Υ такого, что на Υ лежит вершина, соответствующая P , и исток степени один диаграммы T_i так, что этот исток является единственной вершиной T_i , которая лежит на Υ .

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 18. \square

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 20. Пусть P_i, P_j – два неразложимых комплекса, состоящих из проективных модулей, сосредоточенных в одной степени. $\text{Hom}_{D^b(A)}(P_i, P_j[-1]) = 0 = \text{Hom}_{D^b(A)}(P_j, P_i[-1])$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: 1) вершины, соответствующие P_i и P_j , не лежат на одном цикле, 2) вершины, соответствующие P_i и P_j , лежат на одном цикле, при этом P_i и P_j сосредоточены в одной и той же степени.

Таким образом, доказательство теоремы 4 завершено.

3.4 Кольца эндоморфизмов

В предыдущем пункте мы описали все двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, как суммы из s неразложимых частично наклоняющих комплексов, которые попарно удовлетворяют некоторым условиям. В этом пункте мы опишем кольца эндоморфизмов таких комплексов. Хорошо известно, что они изоморфны алгебрам, соответствующим некоторым деревьям Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. Пусть T – двучленный наклоняющий комплекс, для того, чтобы описать его кольцо эндоморфизмов достаточно определить разбиение вершин колчана $\text{End}_{K^b(A)}(T)$ на циклы, или, что то же самое, описать то, какие ребра дерева Брауэра $\text{End}_{K^b(A)}(T)$ инцидентны одной и той же вершине, и циклический порядок ребер вокруг вершин в дереве Брауэра. Вершинам колчана $\text{End}_{K^b(A)}(T)$ соответствуют неразложимые слагаемые T , две вершины i, j лежат на одном цикле тогда и только тогда, когда для соответствующих им слагаемых T_i, T_j выполнено $\text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) \neq 0$. Это условие легко проверить с помощью хорошо известной формулы Хаппеля [15]: пусть $Q = (Q^r)_{r \in \mathbb{Z}}, R = (R^s)_{s \in \mathbb{Z}} \in \text{per-}A$, тогда

$$\sum_i (-1)^i \dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(Q, R[i]) = \sum_{r,s} (-1)^{r-s} \dim_K \text{Hom}_A(Q^r, R^s). \quad (3)$$

Заметим, что если $\text{Hom}_{K^b(A)}(Q, R[i]) = 0, i \neq 0$ (например, в случае, когда Q, R – слагаемые наклоняющего комплекса), то левая часть равенства превращается в $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(Q, R)$.

Напомним, что удобно считать, что в колчане алгебры A каждая вершина лежит на двух циклах. То есть, если у какой-то вершины степень 2, то мы считаем, что в ней имеется формальная петля, равная циклу, кото-

рый проходит через эту вершину, и эта петля – второй цикл, содержащий эту вершину.

Предложение 3. Пусть T_i, T_j – минимальные проективные представления неизоморфных неразложимых непроективных A -модулей такие, что их прямая сумма – частично наклоняющий комплекс. $\text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) \neq 0$ тогда и только тогда, когда стоки степени один диаграмм T_i и T_j лежат на одном цикле, и это – единственные вершины T_i и T_j , которые лежат на этом цикле, либо истоки степени один диаграмм T_i и T_j лежат на одном цикле, и это – единственные вершины T_i и T_j , которые лежат на этом цикле.

Доказательство. Заметим, что условие: стоки степени один диаграмм T_i и T_j лежат на одном цикле, и это – единственные вершины T_i и T_j , которые лежат на этом цикле, выполнено в следующих случаях: диаграммы T_i и T_j не пересекаются, их стоки степени один лежат на одном цикле, и это – единственные вершины T_i и T_j , которые лежат на этом цикле; T_i и T_j пересекаются и имеют общий сток степени один. Случай истоков рассматривается аналогично.

По предположению прямая сумма T_i и T_j – частично наклоняющий комплекс, вычислим размерность пространства $\text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j)$ для случаев, описанных в теореме 4. Заметим также, что, в силу замечания 7, условие $\text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) \neq 0$ или условие $\text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$ симметрично по i и j .

1) Пусть диаграммы T_i и T_j не проходят по одному циклу, легко видеть $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

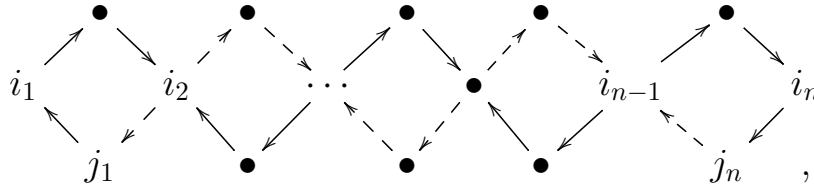
2) Пусть диаграммы T_i и T_j не пересекаются, но проходят по одному циклу Υ . Пусть на Υ лежит струна (i_1, \dots, i_2) , принадлежащая T_i , и

струна (j_1, \dots, j_2) , принадлежащая T_j , но эти струны не пересекаются. Следовательно, $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = \dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}, Ae_{j_2} \rightarrow Ae_{j_1}) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ по формуле (3). Пусть теперь на Υ лежит струна (i_1, \dots, i_2) , принадлежащая T_i , и вершина, принадлежащая T_j , но не являющаяся отмеченной вершиной диаграммы T_j . Получаем $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$, так как проективные слагаемые компонент T_i и T_j не лежат на одном цикле. Если на Υ лежит сток степени один, принадлежащий T_i , и вершина, принадлежащая T_j , но не являющаяся отмеченной вершиной диаграммы T_j ; или исток степени один, принадлежащий T_i , и вершина, принадлежащая T_j , но не являющаяся отмеченной вершиной диаграммы T_j , то $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$ по тем же причинам. Пусть на Υ лежит струна (i_1, \dots, i_2) , принадлежащая T_i , и вершина (j_1) , принадлежащая T_j , являющаяся стоком степени один. Тогда $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = \dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}, 0 \rightarrow Ae_{j_1}) = -1 + 1 = 0$. Случай, когда на Υ лежит струна (i_1, \dots, i_2) , принадлежащая T_i , и вершина (j_1) , принадлежащая T_j , являющаяся истоком степени один, аналогичен предыдущему. Пусть теперь на Υ лежит вершина (i_1) , принадлежащая T_i , и вершина (j_1) , принадлежащая T_j , и пусть они обе являются истоками степени один. Тогда $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = \dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_1} \rightarrow 0, Ae_{j_1} \rightarrow 0) = 1$. Случай, когда на Υ лежит сток степени один (i_1) , принадлежащий T_i , и сток степени один (j_1) , принадлежащий T_j , аналогичен.

3) Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются по одной вершине k . Пусть k не является выделенной вершиной T_i и T_j , тогда выделенные вершины T_i и выделенные вершины T_j лежат на разных циклах, и между соответствующими проективными модулями нет ненулевых морфизмов, $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$. Пусть k является стоком степени один

T_i и T_j , тогда $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = \dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_2} \rightarrow Ae_k, Ae_{j_2} \rightarrow Ae_k) = -1 - 1 + 2 = 0$, где i_2 – исток T_i , соседний с k , j_2 – исток T_j , соседний с k , причем i_2 и j_2 лежат на разных циклах. Случай, когда k – исток степени один и T_i , и T_j , аналогичен предыдущему.

4) Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются так, что одна крайняя вершина пересечения является стоком, а другая истоком (пересечение содержит больше одной вершины). Не умаляя общности, предположим, что $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$. Соответствующие поддиаграммы на колчане алгебры A расположены следующим образом (в случае, когда $i_1 \neq j_1, i_n \neq j_n$):

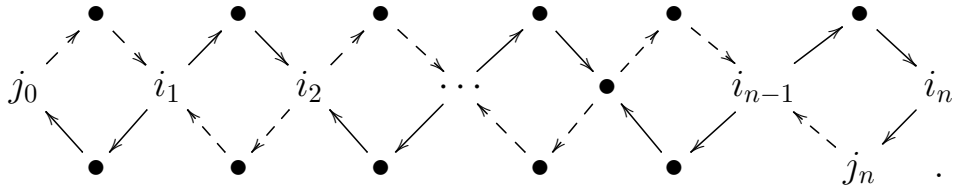


где i_1, i_2, \dots, i_n – выделенные вершины T_i (содержащиеся в сужении), вершины с нечетными индексами – истоки, вершины с четными индексами – стоки; $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, j_n$ – выделенные вершины T_j (содержащиеся в сужении), вершины с нечетными индексами – истоки, вершины с четными индексами – стоки. Между следующими проективными модулями пространство гомоморфизмов одномерно: Ae_{i_k} и $Ae_{i_{k-1}}, Ae_{i_{k+1}}$ для $k = 2, 3, \dots, n-1$; между $Ae_{i_1}, Ae_{i_2}, Ae_{j_1}$, а также между $Ae_{i_{n-1}}$ и $Ae_{i_{n-2}}$, и между $Ae_{i_n}, Ae_{i_{n-1}}$ и Ae_{j_n} . Как было замечено ранее, между проективными слагаемыми компонент T_i и T_j , не попавшими в сужения T_j и T_i , нет ненулевых морфизмов. Легко видеть, что $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n-1$, следовательно, по формуле (3) получаем $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

Пусть теперь $i_1 = j_1, i_n \neq j_n$, тогда i_n лежит в сужении T_j , вершина i_1

является истоком степени один и у T_i , и у T_j . Тогда $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = n$, $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n - 1$, следовательно, по формуле (3) получаем $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 1$.

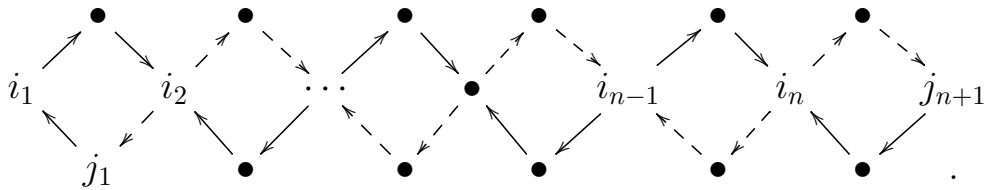
Пусть вершина i_1 является истоком степени один у T_i , но не у T_j . Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j , соседняя с j_1 , но отличная от i_2 . На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



Имеем $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = n$, $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n - 1$, следовательно, по формуле (3) получаем $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

Пусть теперь $i_n = j_n$, $i_1 \neq j_1$, тогда i_1 лежит в сужении T_j , а вершина i_n является стоком степени один и у T_i , и у T_j . Тогда $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = n - 1$, $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n$, следовательно, по формуле (3) получаем $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 1$.

Пусть теперь вершина i_n является стоком степени один у T_i , но не у T_j . Пусть j_{n+1} – отмеченная вершина T_j , соседняя с i_n , но отличная от i_{n-1} . На колчане алгебры A сужения T_i и T_j расположены следующим образом:



Тогда, $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = n - 1$,

$\dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n$, следовательно, по формуле (3) получаем $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

Наконец, рассмотрим случай $i_1 = j_1$, $i_n = j_n$. Пусть вершина i_1 – исток степени один T_i , но не T_j , i_n – сток степени один T_i , но не T_j . Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j , соседняя с i_1 , но отличная от i_2 , а j_{n+1} – отмеченная вершина T_j , соседняя с i_n , но отличная от i_{n-1} . Тогда $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n$, следовательно, по формуле (3) получаем $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 0$.

Пусть теперь вершина i_1 – исток степени один T_i , но не T_j , i_n – сток степени один и T_i , и T_j . Пусть j_0 – отмеченная вершина T_j , соседняя с i_1 , но отличная от i_2 . Тогда $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n$, $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = n - 1$, следовательно, по формуле (3) получаем $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 1$.

Пусть вершина i_1 – исток степени один и T_i , и T_j , i_n – сток степени один T_i , но не T_j . Тогда $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^0) = \dim_K \text{Hom}_A(T_i^1, T_j^1) = n$, $\dim_K \text{Hom}_A(T_i^0, T_j^1) = n - 1$, следовательно, по формуле (3) получаем $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j) = 1$.

Как мы замечали ранее, возможны следующие типы пересечений двух диаграмм: пересечение, у которого одна крайняя вершина является стоком, а другая истоком (этот случай мы только что разобрали); пересечение, у которого обе крайние вершины являются стоками; пересечение, у которого обе крайние вершины являются истоками. Случай, когда обе крайние вершины являются стоками, или обе крайние вершины являются истоками, разбираются аналогично пункту 4. \square

Предложение 4. Пусть T_i – минимальное проективное представление неразложимого непроективного A -модуля, P – неразложимый комплекс,

сосредоточенный в степени 0, и пусть $T_i \oplus P$ – частично наклоняющий комплекс. $\text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) \neq 0$ тогда и только тогда, когда исток степени один диаграммы T_i и вершина, соответствующая P , лежат на одном цикле, и этот исток – единственная вершина T_i , лежащая на этом цикле.

Доказательство. Обозначим через j вершину, соответствующую P . Понятно, что если j и диаграмма T_i не лежат на одном цикле, то $\text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) = 0$. Пусть j и диаграмма T_i лежат на одном цикле Υ , но не пересекаются. Возможны следующие варианты: 1) на Υ лежит (i_1, \dots, i_2) – подструна T_i , 2) на Υ лежит лишь исток T_i степени один, обозначим его через k . В первом случае $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) = \dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(Ae_{i_2} \rightarrow Ae_{i_1}, Ae_j) = 0$. Во втором случае $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) = \dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(Ae_k, Ae_j) = 1$.

Пусть теперь j лежит на диаграмме T_i , то есть j совпадает с истоком степени один T_i . Обозначим через k выделенный сток T_i , соседний с j . Тогда $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) = \dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(Ae_j \rightarrow Ae_k, Ae_j) = 2 - 1 = 1$. \square

Предложение 5. Пусть T_i – минимальное проективное представление неразложимого непроективного A -модуля, P – неразложимый комплекс, сосредоточенный в степени 1, и пусть $T_i \oplus P$ – частично наклоняющий комплекс. $\text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, P) \neq 0$ тогда и только тогда, когда сток степени один диаграммы T_i и вершина, соответствующая P , лежат на одном цикле, и этот сток – единственная вершина T_i , лежащая на этом цикле.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 4. \square

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 21. Пусть P_i, P_j – комплексы, состоящие из неразложимых проективных модулей, сосредоточенные в одной степени, и пусть $P_i \oplus P_j$ – частично наклоняющий комплекс. $\text{Hom}_{K^b(A)}(P_i, P_j) \neq 0$ тогда и только тогда, когда P_i и P_j сосредоточены в одной и той же степени, и вершины, соответствующие P_i и P_j , лежат на одном цикле.

Из описания $\dim_K \text{Hom}_{K^b(A)}(T_i, T_j)$ получаем, что в $\text{End}_{K^b(A)}(T)$ существует два типа циклов: циклы, соответствующие истокам, и циклы, соответствующие стокам. В циклы, соответствующие истокам, входят все неразложимые частично наклоняющие комплексы такие, что истоки степени один их диаграмм лежат на некотором зафиксированном цикле Υ алгебры A таким образом, что это единственные вершины этих диаграмм на Υ , а также все неразложимые комплексы, соответствующие проективным модулям, сосредоточенным в 0, таким, что вершины, соответствующие этим проективным модулям, лежат на Υ . В циклы, соответствующие стокам, входят все неразложимые частично наклоняющие комплексы такие, что стоки степени один их диаграмм лежат на некотором зафиксированном цикле Υ алгебры A таким образом, что это единственные вершины этих диаграмм на Υ , а также все неразложимые комплексы, соответствующие проективным модулям, сосредоточенным в 1, таким, что вершины, соответствующие этим проективным модулям, лежат на Υ .

Опишем циклический порядок на неразложимых слагаемых T , лежащих на цикле Υ , соответствующем истокам. Для этого введем некоторое подобие циклического лексикографического порядка. Зафиксируем некоторую вершину на Υ и будем считать ее наибольшей (вершину, в которую идет стрелка из зафиксированной вершины, будем считать меньше, следующую еще меньше, и так далее), а остальные вершины Υ будем считать

упорядоченными линейно. Диаграмме с истоком степени один на Υ поставим в соответствие упорядоченный набор вершин колчана A следующим образом: первая вершина – это исток степени один, лежащий на Υ , дальше берем все выделенные вершины диаграммы по порядку. Комплексу, состоящему из неразложимого проективного модуля, поставим в соответствие набор, состоящий из вершины, соответствующей этому модулю. Далее рассмотрим обычный лексикографический порядок на наборах вершин (за исключением того, что пустое место на четной позиции мы считаем наименьшим, а на нечетной – наибольшим): если первая вершина набора, соответствующего T_i , меньше первой вершины набора, соответствующего T_j , то $T_i < T_j$; если эти вершины равны, то вторые вершины наборов, соответствующих T_i и T_j , лежат на одном цикле, первая вершина наборов тоже лежит на этом цикле, будем считать первую вершину наибольшей (среди вершин) на этом цикле, тогда на нем можно рассмотреть линейный порядок (так же, как выше), и если вторая вершина набора, соответствующего T_i , меньше второй вершины набора, соответствующего T_j , то $T_i < T_j$. Если все вершины от первой до i -ой наборов, соответствующих T_i и T_j , совпадают, а $i + 1$ -ые различны, то i -ая вершина обоих наборов и $i + 1$ -ые вершины лежат на одном цикле. Считая i -ую вершину наибольшей (среди вершин, т.е. без учета пустого места, которое может быть бóльшим), можем сравнить $i + 1$ -ые. Описанный линейный порядок индуцирует циклический порядок стандартным способом.

Напомним, что мы отождествляем неразложимые слагаемые T и ребра дерева Брауэра $\text{End}_{K^b(A)}(T)$.

Предложение 6. *В дереве Брауэра алгебры $\text{End}_{K^b(A)}(T)$ циклический порядок ребер, инцидентных вершине, соответствующей циклу истоков,*

совпадает с введенным циклическим порядком.

Доказательство. Пусть Υ – некоторый цикл алгебры A . Обозначим цикл $\text{End}_{K^b(A)}(T)$, соответствующий истокам, лежащим на Υ , через Ψ . Допустим, что на цикле Ψ лежит r вершин. Тогда для того, чтобы установить циклический порядок на Ψ , достаточно построить r морфизмов между соответствующими слагаемыми T так, чтобы их последовательная композиция не была гомотопна 0. Сначала построим морфизмы, идущие из большего слагаемого в меньшее для линейного порядка, из которого склеен циклический, после чего построим морфизм из наименьшего слагаемого в наибольшее.

Построим морфизм $\alpha_{j,i}$ комплексов по наборам, соответствующим слагаемым T_i, T_j , у которых совпадают первые k вхождений, а $k+1$ -ые вхождения отличаются, $T_i < T_j$. Обозначим через P_{i_1}, \dots, P_{i_k} проективные модули, которые соответствуют первым k вершинам из наборов T_i, T_j , обозначим через $P_{i_{k+1}}$ модуль, соответствующий $k+1$ -ой вершине из набора T_i , через $P_{i_{k+2}}$ – модуль, соответствующий $k+1$ -ой вершине из набора T_j . Теперь зададим морфизм $\alpha_{j,i} : T_j \rightarrow T_i$ так, что на совпадающих модулях P_{i_1}, \dots, P_{i_k} – это тождественный морфизм, а $\alpha_{j,i}|_{P_{i_{k+2}} \rightarrow P_{i_{k+1}}}$ – домножение на единственный путь в колчане A между соответствующими вершинами. Все остальные компоненты нулевые. Проверим, что отображение, полученное таким образом, является цепным. Коммутативность квадрата

$$\begin{array}{ccc} T_j^0 & \longrightarrow & T_j^1 \\ \downarrow \alpha_{j,i}^0 & & \downarrow \alpha_{j,i}^1 \\ T_i^0 & \longrightarrow & T_i^1 \end{array}$$

можно проверять отдельно для квадратов, составленных из прямых слагаемых $T_j^0, T_j^1, T_i^0, T_i^1$. Квадраты, на сторонах которых стоят только тожде-

ственные отображения или только нулевые отображения, коммутативны.

Пусть k нечетно, квадрат вида

$$\begin{array}{ccc} P_{i_k} & \longrightarrow & P_{i_{k+2}} \\ \downarrow 1 & & \downarrow \alpha_{j,i}^1 \\ P_{i_k} & \longrightarrow & P_{i_{k+1}} \end{array}$$

коммутативен, так как в алгебре A путь из вершины, соответствующей P_{i_k} , в вершину, соответствующую $P_{i_{k+1}}$, проходит через вершину, соответствующую $P_{i_{k+2}}$. Если $P_{i_{k+1}} = 0$, то квадрат остается коммутативным.

Пусть k четно, квадрат вида

$$\begin{array}{ccc} P_{i_{k+2}} & \longrightarrow & P_{i_k} \\ \downarrow \alpha_{j,i}^0 & & \downarrow 1 \\ P_{i_{k+1}} & \longrightarrow & P_{i_k} \end{array}$$

коммутативен, так как в алгебре A путь из вершины, соответствующей $P_{i_{k+2}}$, в вершину, соответствующую P_{i_k} , проходит через вершину, соответствующую $P_{i_{k+1}}$. Если $P_{i_{k+2}} = 0$, то квадрат остается коммутативным. Второй квадрат, содержащий $\alpha_{j,i}|_{P_{i_{k+2}} \rightarrow P_{i_{k+1}}}$, коммутативен, так как модули, которые в него входят, лежат на разных циклах и композиции равны 0.

Построим морфизм из наименьшего слагаемого T в наибольшее, $\alpha_m : T_{min} \rightarrow T_{max}$. Проективные модули, соответствующие первым вершинам из наборов T_{min}, T_{max} , обозначим P_{min}, P_{max} соответственно. Если $P_{min} \neq P_{max}$, то в качестве компоненты $\alpha_m|_{P_{min} \rightarrow P_{max}}$ возьмем соответствующий единственный путь, а все остальные компоненты положим равными нулю. Если $P_{min} = P_{max}$, то в качестве компоненты $\alpha_m|_{P_{min} \rightarrow P_{max}}$ возьмем домножение на длинный путь, то есть отображение, образом которого является цоколь P_{max} , а все остальные компоненты положим равными нулю.

Коммутативность

$$\begin{array}{ccc} T_{min}^0 & \longrightarrow & T_{min}^1 \\ \downarrow \alpha_m^0 & & \downarrow \alpha_m^1 \\ T_{max}^0 & \longrightarrow & T_{max}^1 \end{array}$$

следует из коммутативности

$$\begin{array}{ccc} P_{min} & \longrightarrow & P_{m_1} \\ \downarrow \alpha_m^0 & & \downarrow 0 \\ P_{max} & \longrightarrow & P_{m_2}, \end{array}$$

где P_{m_1}, P_{m_2} – модули, соответствующие вторым вхождениям наборов T_{min}, T_{max} соответственно (заметим, что P_{m_1}, P_{m_2} могут быть равны 0). Если $P_{min} \neq P_{max}$, то P_{min} и P_{m_2} лежат на разных циклах, следовательно, композиция $P_{min} \rightarrow P_{max} \rightarrow P_{m_2}$ равна 0. Если $P_{min} = P_{max}$, то композиция $P_{min} \rightarrow P_{max} \rightarrow P_{m_2}$ равна 0, так как образом $P_{min} \rightarrow P_{max}$ является цоколь P_{max} .

Цикл Ψ состоит из r вершин, нам осталось проверить, что последовательная композиция r построенных морфизмов не гомотопна 0. То есть, что для любого неразложимого слагаемого T (обозначим его T_i) композиция $\alpha_{i,i} : T_i \rightarrow T_i$ не гомотопна 0. Пусть P_{i_1} – модуль, соответствующий первой вершине набора T_i . Легко видеть, что $\alpha_{i,i}|_{P_{i_1} \rightarrow P_{i_1}}$ – это домножение на длинный путь, то есть отображение, образом которого является цоколь P_{i_1} , все остальные компоненты $\alpha_{i,i}$ равны нулю.

Проверим, что этот морфизм не гомотопен 0. Если $T_i = P_{i_1}$, то проверять нечего. Предположим, что $T_i \neq P_{i_1}$, так же для определенности предположим, что в наборе, соответствующем T_i четное число элементов (i_1, i_2, \dots, i_k) , обозначим через d дифференциал T_i . Предположим, что существует гомотопия $h : T_i^1 \rightarrow T_i^0$ такая, что $hd|_{T^0 \rightarrow T^0} = \alpha_{i,i}|_{T^0 \rightarrow T^0}$, $dh|_{T^1 \rightarrow T^1} = \alpha_{i,i}|_{T^1 \rightarrow T^1}$. Тогда $hd|_{P_{i_1} \rightarrow P_{i_1}}$ – это домножение на длинный путь,

$hd|_{P_j \rightarrow P_j} = 0$, где $j = i_3, i_5, \dots, i_{k-1}$, $dh|_{P_j \rightarrow P_j} = 0$, где $j = i_2, i_4, \dots, i_k$.
Условие $dh|_{P_{i_k} \rightarrow P_{i_k}} = 0$ влечет $h|_{P_{i_k} \rightarrow P_{i_{k-1}}} = 0$. Условия $h|_{P_{i_k} \rightarrow P_{i_{k-1}}} = 0$ и $hd|_{P_{i_{k-1}} \rightarrow P_{i_{k-1}}} = 0$ влекут $h|_{P_{i_{k-2}} \rightarrow P_{i_{k-1}}} = 0$. По индукции получаем, что $h|_{P_{i_2} \rightarrow P_{i_1}} = 0$, а это противоречит условию, что $hd|_{P_{i_1} \rightarrow P_{i_1}}$ – это домножение на длинный путь. \square

Опишем циклический порядок на неразложимых слагаемых T , лежащих на цикле, соответствующем стокам. Он отличается от порядка на цикле, соответствующем истокам, только тем, что диаграммам соответствует упорядоченный набор вершин, начинающийся со стока степени один, лежащего на Υ , и тем, что пустое место на нечетной позиции мы считаем наименьшим, а на четной – наибольшим. А именно, зафиксируем некоторую вершину Υ и будем считать ее наибольшей, а остальные вершины Υ будем считать упорядоченными линейно. Диаграмме со стоком степени один на Υ поставим в соответствие упорядоченный набор вершин колчана A следующим образом. Первая вершина – это сток степени один, лежащий на Υ , дальше берем все выделенные вершины диаграммы по порядку. Комплексу, состоящему из неразложимого проективного модуля, поставим в соответствие набор, состоящий из вершины, соответствующей этому модулю. Далее рассмотрим лексикографический порядок на наборах вершин (за исключение того, что пустое место на нечетной позиции мы считаем наименьшим, а на четной наибольшим) так же, как в предыдущем случае, этот линейный порядок индуцирует циклический. Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 6.

Предложение 7. *В дереве Брауэра алгебры $\text{End}_{K^b(A)}(T)$ циклический порядок ребер, инцидентных вершине, соответствующей циклу стоков, совпадает с введенным циклическим порядком.*

Предложение 8. *Над любой алгеброй A , соответствующей дереву Брауэра, существует двучленный наклоняющий комплекс T такой, что алгебра $\text{End}_{K^b(A)}(T)$ изоморфна алгебре, соответствующей звезде Брауэра.*

Доказательство. Зафиксируем некоторый цикл Υ алгебры A . Для каждой вершины x алгебры A построим двучленный неразложимый частично наклоняющий комплекс T_x так, чтобы сумма по всем вершинам давала искомый T . Все слагаемые T будут лежать на цикле $\text{End}_{K^b(A)}(T)$, соответствующем истокам. Если вершина x лежит на цикле Υ , то в качестве T_x возьмем комплекс, состоящий из одного проективного модуля, соответствующего x , сосредоточенного в 0. Если вершина x не лежит на цикле Υ , то рассмотрим диаграмму такую, что один ее конец – это x , а другой – некоторая вершина y , лежащая на Υ , причем y – единственная вершина этой диаграммы лежащая на Υ , и y – исток. Поскольку граф Брауэра алгебры A – дерево, то такая диаграмма существует и она единственная; в качестве T_x возьмем неразложимый комплекс, соответствующий этой диаграмме. Из построения видно, что $T := \bigoplus_{x \in A} T_x$ является наклоняющим комплексом: во-первых, в T нужное количество неизоморфных прямых слагаемых, во-вторых, T является частично наклоняющим. Если диаграммы, соответствующие различным вершинам x и y , не пересекаются, то пользуемся леммой 12, если пересекаются, то замечанием 9, если одна из вершин лежит на Υ , то леммой 18, если обе вершины лежат на Υ , то леммой 20. \square

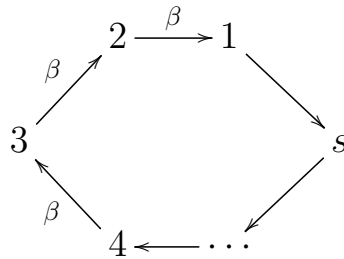
Замечание 10. *Понятно, что аналогично построению из предложения 8 мы могли бы построить наклоняющий комплекс T такой, что алгебра $\text{End}_{K^b(A)}(T)$ изоморфна алгебре, соответствующей звезде Брауэра и все слагаемые T лежат на цикле $\text{End}_{K^b(A)}(T)$, соответствующем стокам.*

Замечание 11. *Над алгеброй A , соответствующей дереву Брауэра с s ребрами, существует ровно $2(s + 1)$ неизоморфных базисных двучленных комплексов T таких, что алгебра $\text{End}_{K^b(A)}(T)$ изоморфна алгебре, соответствующей звезде Брауэра. Каждый цикл из $s + 1$ цикла алгебры A может породить комплекс T , все слагаемые которого лежат на цикле $\text{End}_{K^b(A)}(T)$, соответствующем стокам или истокам.*

3.5 Двучленные наклоняющие комплексы над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра

В этом пункте в качестве примера разберем случай алгебры, соответствующей звезде Брауэра с кратностью 1. Стоит отметить, что результаты верны и в более общем случае произвольной кратности.

Рассмотрим колчан Q :



Любая диаграмма проективного представления над этой алгеброй является струной. Если даны две диаграммы T_i, T_j такие, что их пересечение состоит из одной компоненты связности, и содержит больше, чем одну вершину, то в качестве одной крайней вершины пересечение всегда имеет сток, а в качестве другой – исток. Следовательно, комплекс $T_i \oplus T_j$ является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$ или $T_j|_{T_i} \subseteq T_i|_{T_j}$. Заметим, что в этом случае ограничение совпадает со всей диаграммой.

Пользуясь теоремой, опишем все двучленные наклоняющие комплексы над алгеброй A , сосредоточенные в степенях 0 и 1.

Будем называть интервалом множество вершин s -угольника, идущих по порядку, с отмеченным началом и концом. Покрытием W s -угольника выделенными интервалами будем называть следующую структуру: s -угольник с разбиением множества вершин на непересекающиеся интервалы (назовем их внешними), в каждом интервале может быть от 1 до s вершин. В каждом внешнем интервале, состоящем из r вершин, $r > 1$, дополнительно выделено $r - 2$ внутренних интервала, в каждом из которых больше 1 вершины, внутренние интервалы либо не пересекаются, либо содержатся один внутри другого. Также в каждом внешнем интервале $(l, l + 1, \dots, m)$, длина которого больше 1, выделим внутренний интервал длины 1 следующим образом: одновременно для всех внешних интервалов это либо начало, либо конец. Заметим, что покрытие содержит ровно s интервалов. Такому покрытию W можно следующим образом поставить в соответствие двучленный наклоняющий комплекс T_W .

Рассмотрим 2 случая.

1) Всем внешним интервалам $(l, l + 1, \dots, m) \in W$, длина которых больше 1, соответствуют внутренние интервалы длины 1, состоящие из вершины (m) . Построим наклоняющий комплекс следующим образом: каждому интервалу $(l, l + 1, \dots, m)$, количество вершин в котором больше 1, поставим в соответствие частично наклоняющий комплекс $Ae_m \rightarrow Ae_l$. Каждому интервалу, состоящему из 1 вершины, поставим в соответствие проективный модуль, соответствующий единственной вершине этого интервала, сосредоточенный в 0. Получаем s слагаемых.

2) Всем внешним интервалам $(l, l + 1, \dots, m) \in W$, длина которых больше

1, соответствуют внутренние интервалы длины 1, состоящие из вершины (l) . Также, каждому интервалу $(l, l + 1, \dots, m)$, количество вершин в котором больше 1, поставим в соответствие модуль $Ae_m \rightarrow Ae_l$. Каждому интервалу, состоящему из 1 вершины, поставим в соответствие проективный модуль, соответствующий единственной вершине из этого интервала, сосредоточенный в 1.

Тривиальному покрытию, состоящему лишь из интервалов длины 1, соответствуют два наклоняющих комплекса: A и $A[-1]$.

Из предыдущих построений вытекает следующее утверждение.

Предложение 9. *Множество базисных двучленных наклоняющих комплексов, неизоморфных A или $A[-1]$, над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра с s ребрами и с кратностью исключительной вершины 1, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством нетривиальных покрытий n -угольника выделенными интервалами.*

Замечание 12. *В [8] Адачи доказал, что мощность, описанного множества, равна C_{2s}^s .*

Из предыдущего пункта легко получаем описание кольца эндоморфизмов наклоняющего комплекса. В случае, когда все проективные модули, являющиеся прямыми слагаемыми наклоняющего комплекса, сосредоточены в 0, в алгебре $\text{End}_{K^b(A)}(T_W)$ бывают следующие типы циклов: а) цикл, состоящий из проективных модулей; б) цикл, состоящий из двучленных комплексов, у которых совпадают 0-ые компоненты; в) цикл, состоящий из неразложимого проективного модуля P , сосредоточенного в 0, и из двучленных комплексов, у которых P является нулевой компонентой; г) цикл, состоящий из двучленных комплексов, у которых совпадают компоненты, сосредоточенные в 1.

Циклический порядок из пункта 3.4 легко описывается на этих циклах:

а) на цикле, состоящем из проективных модулей, этот порядок совпадает с порядком в A ; б) на цикле, состоящем из двучленных комплексов, у которых совпадают 0-ые компоненты, циклический порядок индуцирован циклическим порядком на компонентах, сосредоточенных в 1; в) на цикле, состоящем из неразложимого проективного модуля P , сосредоточенного в 0, и из двучленных комплексов, у которых P является нулевой компонентой, циклический порядок такой же, как в пункте (б), за исключением того, что комплекс, соответствующий P , расположен между самым большим и самым маленьким интервалами (интервалы можно считать упорядоченными по включению); г) на цикле, состоящем из двучленных комплексов, у которых совпадают компоненты, сосредоточенные в 1, циклический порядок индуцирован порядком на 0-ых компонентах.

В случае, когда все проективные модули, являющиеся прямыми слагаемыми наклоняющего комплекса, сосредоточены в 1, можно получить аналогичное описание.

Замечание 13. *Двучленный наклоняющий комплекс T_W , неизоморфный A и $A[-1]$, над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра с s ребрами и с кратностью исключительной вершины 1, задает производную автоэквивалентность тогда и только тогда, когда покрытие s -угольника W имеет следующий вид:*

$$(j, j + 1, \dots, j - 1), (j, j + 1, \dots, j - 2), \dots, (j, j + 1), (j), j = 1, \dots, n$$

или

$$(j + 1, j + 2, \dots, j), (j + 2, j + 3, \dots, j), \dots, (j - 1, j), (j), j = 1, \dots, n.$$

Подгруппа производной группы Пикара, порожденная этими автоэквивалентностями, была изучена в статье [24].

Предложение 10. Для любой алгебры B , соответствующей дереву Брауэра Γ с s ребрами и кратностью исключительной вершины 1, существует двучленный наклоняющий комплекс T_W над алгеброй A такой, что $B \simeq \text{End}_{K^b(A)}(T_W)$.

Доказательство. Будем предполагать, что у дерева Γ корень выбран в исключительной вершине, и оно расположено на плоскости так, что все некорневые вершины лежат ниже корневой в соответствии со своим уровнем. Ребра вокруг вершины упорядочены по часовой стрелке.

Пронумеруем ребра дерева Γ так как было описано в пункте 2.2.

По дереву Γ с метками построим наклоняющий комплекс над алгеброй A . Предположим, что у корневой вершины Γ имеется l детей, на ребрах, инцидентных корневой вершине, стоят метки $\{n_1, n_2, \dots, n_l\}$. В качестве слагаемых наклоняющего комплекса, соответствующих этим ребрам, возьмем $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_l}$, сосредоточенные в 0. Рассмотрим вершину нечетного уровня. Предположим, что на ребре, которое соединяет ее с вершиной верхнего уровня, стоит метка j , а на остальных ребрах, инцидентных этой вершине, стоят метки j_1, j_2, \dots, j_h , где h – число детей этой вершины. В наклоняющем комплексе этим ребрам будут соответствовать следующие слагаемые: $P_j \rightarrow P_{j_1}, P_j \rightarrow P_{j_2}, \dots, P_j \rightarrow P_{j_h}$.

Рассмотрим вершину четного уровня. Предположим, что на ребре, которое соединяет ее с вершиной верхнего уровня, стоит метка g , а на остальных ребрах, инцидентных этой вершине, стоят метки g_1, g_2, \dots, g_d , где d – число детей этой вершины. В наклоняющем комплексе этим ребрам будут соответствовать слагаемые: $P_{g_1} \rightarrow P_g, P_{g_2} \rightarrow P_g, \dots, P_{g_d} \rightarrow P_g$. Понятно, что

таким образом мы получим нужное число слагаемых. В силу построения, этот комплекс действительно наклоняющий, а дерево, соответствующее его кольцу эндоморфизмов – это дерево Γ .

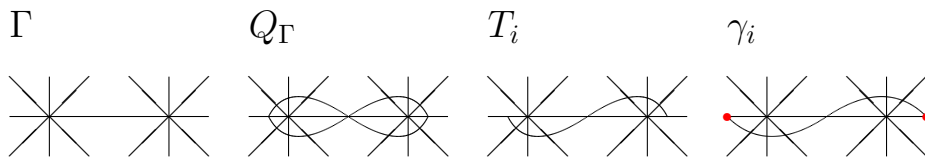
Аналогично можно построить наклоняющий комплекс, в котором все прямые слагаемые, состоящие из проективных модулей, будут сосредоточены в 1. \square

3.6 Геометрическая интерпретация

В этом пункте мы проинтерпретируем условия из теоремы 4 в терминах пересечений некоторых кривых. Будем считать, что колчан алгебры A нарисован на той же плоскости, что и соответствующее дерево Брауэра, причем вершины колчана нарисованы в серединах ребер, которым они соответствуют, а в вершинах дерева Брауэра находятся проколы. Формальные петли рисовать не будем. Будем рассматривать кривые γ на плоскости \mathbb{R}^2 такие, что концы γ – это вершины дерева Брауэра, γ – кривая без самопересечений, γ не содержит никаких вершин дерева Брауэра, кроме своих концов. Кривую γ будем рассматривать с точностью до гомотопии в классе таких кривых. Будем предполагать, что, имея набор гомотопических классов таких кривых, мы всегда выбираем представителей с минимально возможным числом точек пересечения.

Пусть T_i – диаграмма минимального проективного представления модуля M , такая что соответствующий двучленный комплекс является частично наклоняющим. T_i состоит из некоторых стрелок колчана A , обозначим α_1, α_2 стрелки, выходящие из концов диаграммы T_i , принадлежащие T_i . Сопоставим T_i кривую γ_i следующим образом: кривая γ_i совпадает с T_i везде кроме α_1, α_2 , конец T_i , из которого выходит α_1 подви-

нем вдоль ребра в ту вершину дерева Брауэра A , которая не соответствует циклу, на котором лежит α_1 , то же сделаем со вторым концом T_i . Если конец T_i соответствует стоку, отметим его на γ_i красным цветом, истоку – синим. Если T_i – неразложимый проективный модуль, сопоставим ему кривую, совпадающую с соответствующим ребром, если T_i сосредоточен в 0 , отметим оба конца, соответствующего ребра синим, если в 1 – красным.



Заметим, что кривую γ_i , соответствующую частично наклоняющему комплексу, можно выбрать так, чтобы она не имела самопересечений и не являлась петлей, так как Γ – дерево.

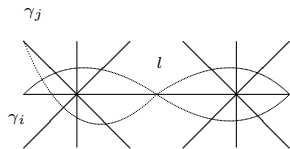
Теорема 5. Пусть T_i и T_j – два двучленных частично наклоняющих комплекса. $T_i \oplus T_j$ является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда кривые, соответствующие T_i и T_j , либо не пересекаются, либо их пересечение состоит из конечной вершины, причем эта вершина отмечена одним и тем же цветом на обеих кривых.

Доказательство. Так как мы предполагаем, что пересечение наборов кривых минимально возможное, то кривая γ_i не пересекает те ребра дерева Γ , которые не пересекает T_i . Доказательство будем вести параллельно леммам 10-20. Если не существует цикла, содержащего вершины диаграмм и T_i , и T_j , то γ_i и γ_j можно выбрать так, чтобы они не пересекались.

Пусть существует цикл Υ такой, что Υ содержит вершины и T_i , и T_j , но диаграммы, соответствующие T_i и T_j , не пересекаются. Если на Υ лежат струна, принадлежащая T_i , и струна, принадлежащая T_j , но эти струны не пересекаются; или на Υ лежат струна, принадлежащая T_i , и вершина, при-

надлежащая T_j ; или на Υ лежат вершина T_i и неотмеченная вершина, принадлежащая T_j , то γ_i и γ_j можно выбрать так, чтобы они не пересекались. Если на Υ лежат вершина, принадлежащая T_i , и вершина, принадлежащая T_j , обе являются истоками (соответственно стоками) степени один, и эти вершины – единственные вершины T_i и T_j , лежащие на Υ , то пересечение γ_i и γ_j состоит из конечной вершины, причем эта вершина отмечена красным (соответственно синим) на обеих кривых. Если же на Υ лежат вершина, принадлежащая T_i , являющаяся стоком степени один, и вершина, принадлежащая T_j , являющаяся истоками степени один, то пересечение γ_i и γ_j состоит из конечной вершины, но на γ_i она отмечена красным, а на γ_j – синим. Последний случай - единственный, не удовлетворяющий условиям теоремы.

Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j , имеют пересечение, состоящее более чем из одной компоненты связности. Если пересечение состоит из трех компонент связности, тогда одна из них является изолированной вершиной k колчана алгебры, то есть серединой некоторого ребра l графа Γ , будем считать, что l лежит на координатной оси, тогда можно считать, что γ_i сначала положительно, а потом отрицательно, а γ_j сначала отрицательно, а потом положительно, поэтому они пересекаются.

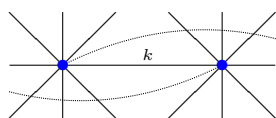


Если диаграммы, соответствующие T_i и T_j , имеют пересечение, состоящее из двух компонент связности, то обе компоненты лежат на одном цикле. Понятно, что кривые γ_i и γ_j тоже пересекаются. Если пересечение состоит из крайней вершины, то она окрашена в разные цвета на γ_i и γ_j .

Пусть диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются по вершине

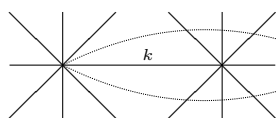
k . Если k не является выделенной вершиной ни T_i , ни T_j , то γ_i и γ_j можно выбрать так, чтобы они не пересекались.

Если k является истоком степени один и T_i , и T_j , γ_i и γ_j можно выбрать так, чтобы они не пересекались:

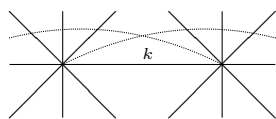


Случай, когда k – сток степени один и T_i , и T_j , аналогичен предыдущему.

Во всех остальных случаях условие теоремы не выполняется. Случай k – исток T_i и сток T_j : если подструны T_i и T_j , содержащие k , лежат на одном цикле, то имеем:

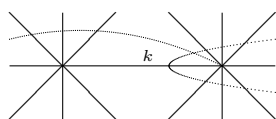


пересечение γ_i и γ_j состоит из конечной вершины, но на одной кривой она отмечена красным, а на другой – синим. Если подструны T_i и T_j , содержащие k , лежат на разных циклах, то имеем:



кривые γ_i и γ_j пересекаются.

Случай k является истоком T_i , но не является выделенной вершиной T_j . Кривые γ_i и γ_j пересекаются:

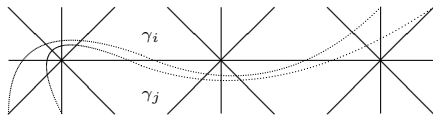


Случай k является стоком T_i , но не является выделенной вершиной T_j

аналогичен предыдущему.

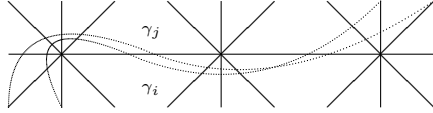
Перейдем к случаю, когда пересечение диаграмм T_i и T_j имеет ровно одну компоненту связности, и она состоит более, чем из одной вершины, диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются так, что одна крайняя вершина пересечения является стоком, а другая истоком. Рассмотрим случаи, когда крайние вершины пересечения совпадают с выделенными вершинами лишь одной из диаграмм (случаи 1 и 2 из леммы 15), случаи, когда крайние вершины пересечения совпадают с выделенными вершинами обеих диаграмм (случаи 3, 4, 5 леммы 15) рассматриваются аналогично. Там, где кривые заканчиваются на иллюстрациях, приведенных ниже, они могут уходить на другие циклы, однако это не влияет на пересечение кривых. Также иллюстрации приведены для конкретного числа циклов, на котором лежит пересечение диаграмм, однако значимым является нечетность этого числа.

1) Предположим, что $T_i|_{T_j} \subseteq T_j|_{T_i}$, крайние вершины пересечения T_i и T_j не совпадают с выделенными вершинами T_j . В силу того, что одна крайняя вершина пересечения диаграмм является стоком, а другая истоком, пересечение лежит на нечетном количестве циклов, следовательно, кривые можно выбрать так, чтобы они не пересекались:



2) Рассмотрим случай, когда $T_i|_{T_j} \not\subseteq T_j|_{T_i}$ и $T_j|_{T_i} \not\subseteq T_i|_{T_j}$, причем крайние вершины пересечения совпадают с выделенными вершинами лишь одной из диаграмм. Это выполнено, если исток степени один сужения T_i не лежит в пересечении, а сток степени один T_i лежит в пересечении (либо то же выполнено для T_j , но этот случай полностью

аналогичен). Как и в предыдущем случае, пересечение диаграмм лежит на нечетном количестве циклов, следовательно, кривые пересекаются:



Заметим, что если у диаграмм общий сток или исток степени 1, а их пересечение состоит больше, чем из одной вершины, то у кривых общий конец, окрашенный в один и тот же цвет, и их можно выбрать так, чтобы они не пересекались нигде, кроме этого конца.

Случай, когда диаграммы, соответствующие T_i и T_j , пересекаются так, что обе крайние вершины пересечения являются стоками или обе крайние вершины пересечения являются истоками, рассматриваются аналогично. \square

Список литературы

- [1] Антипов, М. А. (2007). Производная эквивалентность симметрических специальных бирядных алгебр. Записки научных семинаров ПОМИ, 343, 5–32.
- [2] Антипов М.А., Звонарева А.О. (2013). Частично наклоняющие двучленные комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра. Записки научных семинаров ПОМИ, 413, 5–25.
- [3] Гельфанд, И. М., Пономарев, В. А. (1968). Неразложимые представления группы Лоренца. Успехи математических наук, 23.2 (140), 3–60.
- [4] Звонарева А.О. (2014). Двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра. Записки научных семинаров ПОМИ, 423, 132–165.
- [5] Звонарева А.О. (2014). О производной группе Пикара алгебры, соответствующей звезде Брауэра. Препринты ПОМИ РАН, препринт 09/2014, 1–31.
- [6] Abe, H., Hoshino, M. (2006). On derived equivalences for selfinjective algebras. Communications in Algebra, 34(12), 4441–4452.
- [7] Adachi, T., Iyama, O., Reiten, I. (2012). τ -tilting theory. arXiv preprint arXiv:1210.1036.
- [8] Adachi, T. (2013). τ -tilting modules over Nakayama algebras. arXiv preprint arXiv:1309.2216.
- [9] Aihara, T. (2010). Mutating Brauer trees. arXiv preprint arXiv:1009.3210.

- [10] Aihara, T. (2013). Tilting-connected symmetric algebras. *Algebras and Representation Theory*, 16(3), 873–894.
- [11] Aihara, T., Iyama, O. (2012). Silting mutation in triangulated categories. *Journal of the London Mathematical Society*, 85(3), 633–668.
- [12] Broomhead, N., Pauksztello, D., Ploog, D. (2013). Discrete derived categories I: homomorphisms, autoequivalences and t-structures. arXiv preprint arXiv:1312.5203.
- [13] Dugas, A. (2014). Tilting mutation of weakly symmetric algebras and stable equivalence. *Algebras and Representation Theory*, 17(3), 863–884.
- [14] Gabriel, P., Riedtmann, C. (1979). Group representations without groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 54(1), 240–287.
- [15] Happel, D. (1988). *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras* (Vol. 119). Cambridge University Press.
- [16] Happel, D. (1991). Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 112(3), 641–648.
- [17] Huisgen-Zimmermann, B., Saorín, M. (2001). Geometry of chain complexes and outer automorphisms under derived equivalence. *Transactions of the American Mathematical Society*, 353(12), 4757–4777.
- [18] Kauer, M. (1998). Derived equivalence of graph algebras. *Contemporary Mathematics*, 229, 201–214.
- [19] Keller, B. (1993). A remark on tilting theory and DG algebras. *Manuscripta mathematica*, 79(1), 247–252.

- [20] Khovanov, M., Seidel, P. (2002). Quivers, Floer cohomology, and braid group actions. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(1), 203–271.
- [21] Lenzing, H., Meltzer, H. (2000). The automorphism group of the derived category for a weighted projective line. *Communications in Algebra*, 28(4), 1685-1700.
- [22] Marsh, R. J., Schroll, S. (2013). The geometry of Brauer graph algebras and cluster mutations. arXiv preprint arXiv:1309.4239.
- [23] Miyachi, J. I., Yekutieli, A. (2001). Derived Picard groups of finite-dimensional hereditary algebras. *Compositio Mathematica*, 129(03), 341–368.
- [24] Muchtadi-Alamsyah, I. (2008). Braid Action on Derived Category Nakayama Algebras. *Communications in Algebra*, 36(7), 2544–2569.
- [25] Neeman, A. (2001). *Triangulated categories* (No. 148). Princeton University Press.
- [26] Rickard, J. (1989). Derived categories and stable equivalence. *Journal of pure and applied Algebra*, 61(3), 303–317.
- [27] Rickard, J. (1991). Derived equivalences as derived functors. *J. London Math. Soc.*(2), 43(1), 37–48.
- [28] Rickard, J. (1989). Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc.*(2), 39(3), 436–456.

- [29] Rouquier, R., Zimmermann, A. (2003). Picard groups for derived module categories. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 87(01), 197–225.
- [30] Schaps, M., Zakay-Ilouz, E. (2002). Braid group action on the refolded tilting complex of the Brauer star algebra, *Proceedings ICRA IX (2)*, 434–449.
- [31] Schaps, M., Zakay-Ilouz, E. (2001). Pointed brauer trees. *Journal of Algebra*, 246(2), 647–672.
- [32] Verdier, J. L. (1996). Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, 239.
- [33] Wald, B., Waschbüsch, J. (1985). Tame biserial algebras. *Journal of Algebra*, 95(2), 480–500.
- [34] Yekutieli, A. (1999). Dualizing complexes, Morita equivalence and the derived Picard group of a ring. *Journal of the London Mathematical Society*, 60(3), 723–746.
- [35] Yekutieli, A. (2004). The derived Picard group is a locally algebraic group. *Algebras and representation theory*, 7(1), 53–57.
- [36] Zimmermann, A. (2001). Self-equivalences of the derived category of Brauer tree algebras with exceptional vertex. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius*, 9(1), 139–148.
- [37] Zvonareva A. (2012) Two-term tilting complexes over Brauer tree algebras. *Workshop and International Conference on Representations of Algebras (ICRA 2012) Abstracts*. 87.