На правах рукописи

МИНГАЗОВ Альберт Айдарович

О комплексе Герстена в равнохарактеристическом случае

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2015

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН).

Научный руководитель:	ПАНИН Иван Александрович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией алгебры и теории чисел ФГБУН ПОМИ РАН
Официальные оппоненты:	ТЮРИН Николай Андреевич, доктор физико-математических наук, начальник сектора Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ), г. Дубна ИГНАТЬЕВ Михаил Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВПО Самарский государственный университет
Ведущая организация:	ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится «23» декабря 2015 года в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 в ФГБУН ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «___» ____________ 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета, Малютин А. В.
д.ф.-м.н

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Комплекс Герстена — один из важнейших вычислительных инструментов $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии. Он имеет множество различных вариантов. Объединены они тем, что позволяют вычислять глобальные инварианты схем или многообразий через значения на общих точках неприводимых замкнутых подсхем. Другими словами, зная значения или свойства какого-либо инварианта только на полях, в случае наличия для него резольвенты Герстена мы можем получить его значение или какую-то иную информацию на глобальном уровне. Впервые комплекс Герстена был введен в контексте алгебраической K-теории в статье[1]. Для k-схемы X он имеет вид

$$0 \to (i_\xi)_*(\underline{\underline{K_n(k(X))}}) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} (i_x)_*(\underline{\underline{K_{n-1}(k(x))}}) \to \\ \to \bigoplus_{x\in X^{(2)}} (i_x)_*(\underline{\underline{K_{n-2}(k(x))}}) \to \dots .$$

Через i_x здесь обозначены вложения общих точек соответствующих неприводимых подсхем, ξ — общая точка X, а через $\underline{\underline{K_{n-1}(k(x))}}$ обозначен постоянный пучок на точке $x \in X$. Соответственно, комплекс состоит из прямых сумм пучков-небоскребов. Он позволяет вычислять когомологии пучка $\underline{\underline{K_n}}$, ассоциированного с предпучком, ставящим в соответствие открытому множеству U его K-теорию $K_n(U)$, если для всех локальных колец схемы выполнена гипотеза Герстена.

Гипотеза Герстена. *Пусть $X = Spec\ S$, где S — регулярное локальное кольцо. Тогда комплекс Герстена, вычисленный на $Spec\ S$, является резольвентой группы $K_n(S)$. Другими словами, последовательность*

$$0 \to K_n(S) \to K_n(k(S)) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{n-1}(k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=2} K_{n-2}(k(\mathfrak{p})) \to \dots$$

точна.

Гипотеза Герстена доказана Квилленом[2] для локального кольца простой точки многообразия над полем. Это ключевой шаг в доказательстве форму-

[1] Gersten S. M. Some exact sequences in the higher K-theory of rings. // Algebraic K-theory. I: Higher K-theories: Proc. Conf. Battelle Memorial Inst., Seattle (WA), 1972. Berlin etc.: Springer, 1973, pp. 211–243

[2] Quillen D. Higher algebraic K-theory. I // Albebraic K-Theory. I: Higher K-Theories (Proc. Conf., Seattle Res. Center, Battelle Memorial Inst., 1972), Lecture Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 85–147.

лы Блоха, которая является одним из красивейших приложений алгебраической K-теории к алгебраической геометрии. Формула Блоха гласит следующее. Пусть X — гладкое алгебраическое многообразие над полем k. Тогда когомологии Зарисского $H^n(X, \underline{\underline{K_n}})$ совпадают с группами Чжоу $CH^n(X)$ многообразия X. В статье[3] доказана гипотеза Герстена для произвольного регулярного локального равнохарактеристического кольца, то есть нетерова кольца, характеристика поля вычетов которого совпадает с характеристикой поля частных. В статье[4] был сформулирован и доказан некоторый иной вариант гипотезы Герстена. А именно, для центральной простой алгебры D над полем k и локального кольца S точки гладкого многообразия комплекс

$$0 \to K_n(D \underset{k}{\otimes} S) \to K_n(D \underset{k}{\otimes} k(S)) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{n-1}(D \underset{k}{\otimes} k(\mathfrak{p})) \to \dots .$$

точен. В статье[5] доказывается точность такого комплекса для произвольной алгебры Адзумая над полулокальным регулярным кольцом.

В статье[6] Воеводским введен комплекс Герстена для пучков с трансферами и доказан аналог гипотезы Герстена. В этом случае она утверждает, что для гомотопически инвариантного предпучка с трансферами $\mathcal{F}$ и локального кольца S простой точки многообразия над совершенным полем имеется точная последовательность

$$0 \to \mathcal{F}(S) \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} \mathcal{F}_{-1}(k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=2} \mathcal{F}_{-2}(k(\mathfrak{p})) \to \dots .$$

Близким понятием является комплекс Кузена. Ограничимся случаем пучка с трансферами, хотя это понятие гораздо шире. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами (в топологии Зарисского), X — гладкое многообразие; комплексом Кузена называется комплекс вида

$$0 \to H^n_\xi(X, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{n+1}_x(X, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{x \in X^{(2)}} H^{n+1}_x(X, \mathcal{F}) \to \dots ,$$

[3] Panin I. A. The equicharacteristic case of the Gersten conjecture. // Тр. МИАН, 241, Наука, М., 2003, 169–178.

[4] Colliot-Thélène J.-L., Ojanguren M. Espaces principaux homogénes localement triviaux. // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1992, No. 75, 97–122.

[5] Панин И. А., Суслин А. А. Об одной гипотезе Гротендика, касающейся алгебр Адзумайа. // Алгебра и анализ, 9:4, 1997, 215–223.

[6] Voevodsky V. Cohomological Theory of Presheves with Transfers. // Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1999.

дифференциал в котором получается путем перехода к пределу по системе открытых множеств из дифференциала в последовательности тройки. Фактически Воеводский доказывает точность комплекса Кузена и указывает канонический способ отождествления членов комплекса Кузена и членов комплекса Герстена. Эта работа является важнейшим этапом в построении категории мотивов. A posteriori, когда категория мотивов Воеводского уже построена, отождествление членов комплекса Кузена и комплекса Герстена соответствует изоморфизму Гизина для замкнутого вложения в мотивах алгебраических многообразий. Поэтому существенная часть данной диссертационной работы посвящена доказательству некоторых свойств гомоморфизма Гизина. В частности, эти свойства используются в доказательстве теоремы о вычислении дифференциала Герстена с помощью раздутия (теорема 7 в нумерации автореферата). В книге[7] Ф. Мореля доказывается утверждение, близкое упомянутой теореме.

Таким образом, тема диссертационной работы актуальна.

Цель работы. Целью работы является доказательство двух вариантов гипотезы Герстена в случае регулярного локального равнохарактеристического кольца. Целью первой главы является доказательство гипотезы Герстена для K-теории алгебры Адзумая над регулярным локальным равнохарактеристическим кольцом. Целью второй главы — определение канонического дифференциала Герстена для пучков с трансферами в случае регулярной локальной нетеровой k-схемы для поля k характеристики 0 и доказательство гипотезы Герстена для пучков с трансферами в случае регулярного локального равнохарактеристического кольца, содержащего поле k.

Методы исследования. Для доказательства обоих вариантов гипотезы Герстена в равнохарактеристическом случае используются методы уже упоминавшейся ранее статьи Панина[3]. Для построения дифференциала в комплексе Герстена для пучков с трансферами в случае регулярной нетеровой схемы мы используем представление локального кольца точки регулярной нетеровой k-схемы в виде индуктивного предела колец функций гладких многообразий. Для доказательства теоремы о согласованности гомоморфизма Гизина и трансфера (теорема 6 автореферата) мы используем методы теории относительных мотивов.

[7] Morel F. $\mathbb{A}^1$-Algebraic topology over a field. Lecture Notes in Mathematics, 2052, Heidelberg, 2012.

Положения диссертации, выносимые на защиту. В диссертационной работе получены следующие результаты.

- Доказана гипотеза Герстена для алгебр Адзумая для регулярного локального равнохарактеристического кольца (теорема 1 автореферата).

- Доказана теорема о согласованности гомоморфизма Гизина и трансфера для пучков с трансферами (теорема 6 автореферата).

- Доказана теорема о вычислении дифференциала Герстена с помощью раздутия (теорема 7 автореферата).

- Определен канонический дифференциал Герстена на регулярной локальной нетеровой k-схеме (теорема 9 автореферата).

- Доказана гипотеза Герстена для пучков Зарисского с трансферами в случае регулярного локального равнохарактеристического кольца (теорема 5 автореферата).

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертационной работы получены автором лично.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми и актуальными.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в дальнейших исследованиях в области K-теории и мотивов Воеводского.

Степень достоверности результатов. Результаты диссертационной работы подтверждены строгими математическими доказательствами и опубликованы в рецензируемых журналах.

Апробация работы. Результаты диссертации были изложены на следующих семинарах и конференциях:

1. Семинар кафедры алгебры и геометрии Самарского государственного университета (рук. проф. А. Н. Панов).

2. Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Самара, 2015 г.).

3. Гомотопический семинар факультета математики НИУ ВШЭ (рук. проф. А. Л. Городенцев).

4. Санкт-Петербургский городской алгебраический семинар имени Д. К. Фаддеева.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[5]. Работы [1], [2], [3] опубликованы в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК РФ. Работы [4], [5] опубликованы в сборниках тезисов.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 31 наименование. Первая глава состоит из пяти параграфов, вторая — из девяти параграфов. Нумерация параграфов сквозная. Объём диссертации — 88 страниц.

Содержание диссертации

Во **введении** излагается история вопроса, обосновывается актуальность диссертационного исследования, формулируются цели и задачи работы, даётся обзор методов исследования и основных результатов и описывается структура диссертации.

Глава 1 посвящена доказательству гипотезы Герстена для алгебр Адзумая над равнохарактеристическим кольцом. В **параграфе 1** мы напоминаем основные понятия, касающиеся алгебр Адзумая и алгебраической K-теории. Кроме того, мы определяем комплекс Герстена для алгебры Адзумая на схеме X. Основной результат первой главы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть R — регулярное локальное равнохарактеристическое кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $X = Spec\ R$. Тогда комплекс Герстена для алгебры $\mathcal{A}$*

$$0 \to K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(X)) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=2} K_{*-2}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(\mathfrak{p})) \to \dots$$

является резольвентой $K_*(\mathcal{A})$, то есть он точен во всех членах, кроме нулевого, а ядро первого отображения совпадает с $K_*(\mathcal{A}) \subset K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(X))$.

Данная теорема доказана в **параграфе 5**. Этот результат опубликован в работе [2] автора. Доказательству предшествует подготовительная работа в параграфах 2—4.

В **параграфе 2** мы формулируем известную теорему Попеску и некоторые следствия из нее.

Теорема Попеску. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое локальное кольцо. Тогда существует совершенное поле k, содержащееся в R, и для каждого такого поля k кольцо R представимо в виде направленного индуктивного предела $R = \varinjlim R^\alpha$, где R^α — гладкие конечно порожденные k-алгебры.*

В **параграфе 3** доказывается лемма, которая утверждает, что для алгебры Адзумая $\mathcal{A}$ можно найти алгебру Адзумая $\mathcal{A}^\alpha$ над R^α для некоторого индекса α такую, что $\mathcal{A}^\alpha \otimes_{R^\alpha} R = \mathcal{A}$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — это алгебра Адзумая над регулярным равнохарактеристическим кольцом R. Представим R в виде индуктивного предела* *локальных колец точек гладких многообразий $R = \varinjlim S^\alpha$. Тогда существует индекс α и алгебра Адзумая $\mathcal{A}^\alpha$ такие, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\alpha \otimes_{R^\alpha} R$.*

Это утверждение позволяет распространить пучок $\underline{\underline{K}}_n^{\mathcal{A}}$ на категории схем над $Spec\ R$ (он ассоциирован с предпучком, который ставит в соответствие аффинной схеме $U = Spec\ B$ над $Spec\ R$ группу $K_n(\mathcal{A} \otimes_R B)$) до непрерывного пучка $\underline{\underline{K}}_n^{\mathcal{A}^\alpha}$ на категории схем над R^α.

Параграф 4 посвящен вычислению когомологий пучка $\underline{\underline{K}}_n^{\mathcal{A}}$ на схеме X_f, где $X = Spec\ R$, а $f \in R$ — локальный параметр. Это ключевой факт, позволяющий доказать гипотезу Герстена в равнохарактеристическом случае.

Лемма 3. *Пусть $X = Spec\ R$, где R — регулярное локальное равнохарактеристическое кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $f \in R$ — локальный параметр. Тогда*

$$H^p_{Zar}(X_f, \underline{\underline{K}}_*^{\mathcal{A}}) = \begin{cases} 0 & \text{для } p \geq 1, \\ K_*(\mathcal{A}_f) & \text{для } p = 0. \end{cases}$$

Для этого сначала вычисляются когомологии пучка $\underline{\underline{K}}_n^{\mathcal{A}_\alpha}$ на схеме $X^\alpha_{f_\alpha}$, где X^α — спектр локального кольца точки гладкого многообразия над полем k, а f_α — локальный параметр. Это утверждение оказывается следствием гипотезы Герстена для алгебры Адзумая в геометрическом случае, которая была доказана в статье[5]. Применение теоремы Гротендика о предельном переходе позволяет получить аналогичный результат в равнохарактеристическом случае.

Теорема Гротендика. *Пусть A — кольцо и Sch/A — категория нетеровых схем над A. Пусть F — предпучок абелевых групп на Sch/A, перестановочный с проективными пределами нетеровых аффинных схем, то есть каноническое отображение $\varinjlim F(S^\alpha) \to F(\varinjlim S^\alpha)$ является изоморфизмом для каждой индуктивной системы нетеровых A-алгебр с пределом $S = \varinjlim S^\alpha$. Пусть $\widetilde{F}$ — пучок на сайте Зарисского, ассоциированный с F. Тогда для индуктивного предела нетеровых A-алгебр R^β с нетеровым пределом $R = \varinjlim R^\beta$ и любого целого $p \geq 0$ каноническое отображение $\varinjlim H^p_{Zar}(X^\beta, \widetilde{F}) \to H^p_{Zar}(X, \widetilde{F})$ является изоморфизмом (здесь $X^\beta = Spec\ S^\beta$ и $X = Spec\ S$).*

Глава 2 посвящена определению канонического дифференциала Герстена для гомотопически инвариантных непрерывных пучков с трансферами на категории регулярных нетеровых k-схем и доказательству гипотезы Герстена в этом случае. В **параграфе 6** мы напоминаем основные понятия и определения, которые нам потребуются. Мы определяем комплекс Кузена, а также напоминаем основные факты о мотивах Воеводского и гомоморфизмах Гизина, поскольку это позволяет определить комплекс Герстена.

Классическое определение Воеводского пучка с трансферами не совсем подходит к нашей ситуацией, поскольку мы работаем не с гладкими многообразиями, а с регулярными k-схемами, поэтому в **параграфе 7** мы вводим понятие непрерывного пучка с трансферами, определенного на категории регулярных нетеровых k-схем. Напомним, что согласно Воеводскому предпучок с трансферами — это функтор $\mathcal{G}\colon (Cor_k)^{op} \to Ab$, где Cor_k — категория конечных соответствий Воеводского, объектами которой являются гладкие многообразия над полем k, а морфизмами из X в Y — элементы свободной абелевой группы, порожденной замкнутыми подмногообразиями $Z \subset X \times Y$, конечными и сюръективными над X.

Определение 4. *Непрерывным пучком с трансферами на категории Sch_k регулярных нетеровых схем над k мы будем называть пучок Зарисского $\mathcal{F}\colon (Sch_k)^{op} \to Ab$, удовлетворяющий следующим двум условиям:*

1) *для представления кольца в виде направленного индуктивного предела $S = \varinjlim S^\alpha$ выполнено $\mathcal{F}(Spec\ S) = \varinjlim \mathcal{F}(Spec\ S^\alpha)$,*

2) *существует пучок Зарисского с трансферами $\mathcal{G}\colon Cor_k \to Ab$ такой, что ограничение $\mathcal{F}$ на категорию Sm_k гладких многообразий над k совпадает с ограничением $\mathcal{G}$ на ту же категорию.*

Непрерывный пучок с трансферами на категории регулярных нетеровых k-схем мы будем называть гомотопически инвариантным, если отображение $p^*\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X \times_k \mathbb{A}^1)$, индуцированное проекцией $p\colon X \times_k \mathbb{A}^1 \to X$, является изоморфизмом для любой k-схемы X.

Основным результатом главы 2 является следующая теорема, доказанная в **параграфе 14**. Ее доказательство опубликовано в печатных работах автора [3] и [4].

Теорема 5. *Пусть R — регулярное локальное равнохарактеристическое кольцо, содержащее поле k характеристики 0, $\mathcal{F}$ — гомотопически инва-*

риантный непрерывный пучок с трансферами, определенный на категории регулярных нетеровых k-схем. Тогда комплекс Герстена для $\mathcal{F}$

$$0 \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} \mathcal{F}_{-1}(k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=2} \mathcal{F}_{-2}(k(\mathfrak{p})) \to \dots$$

является резольвентой $\mathcal{F}(R)$, то есть он точен во всех членах, кроме нулевого, а ядро первого отображения совпадает с $\mathcal{F}(R) \subset \mathcal{F}(K)$.

Пучок $\mathcal{F}_{-n}$ для непрерывного пучка с трансферами, определенного на категории регулярных нетеровых k-схем, определяется как в случае пучков с трансферами на категории гладких многообразий. То есть для произвольной схемы X группа $\mathcal{F}_{-1}(X)$ — это фактор $\mathcal{F}(X \times_k \mathbb{G}_m)/\mathcal{F}(X)$, а $\mathcal{F}_{-n-1} = (\mathcal{F}_{-n})_{-1}$.

Построению дифференциалов в этом комплексе и проверке свойства $\partial^2 = 0$ посвящены параграфы 7—13. В **параграфе 7** помимо определения непрерывного пучка с трансферами, определенного на категории регулярных нетеровых k-схем, мы доказываем существование канонических прямых образов (трансферов) для таких пучков для конечного расширения полей, содержащих поле k. В **параграфе 8** мы доказываем несколько технических следствий теоремы Попеску, позволяющих представить раздутие регулярной локальной равнохарактеристической схемы в виде предела раздутий спектров локальных колец точек гладких k-многообразий.

В **параграфе 9** мы строим канонический дифференциал Герстена для равнохарактеристического кольца дискретного нормирования с помощью деформации к нормальному расслоению. Дифференциал для регулярного локального равнохарактеристического кольца определяется в параграфе 13 после предварительной технической работы, выполненной в параграфах 10—11, которые содержат теоремы о свойствах гомоморфизма Гизина. В **параграфе 10** сформулированы теоремы, которые аналогичны уже доказанным в статье[8], где гомоморфизмы Гизина появляются в контексте ориентированных теорий когомологий. **Параграф 11** посвящен доказательству теоремы о согласованности гомоморфизма Гизина в мотивах и трансфера, которое опубликовано в статье автора [1] и в сборнике тезисов [5].

[8] Levine M. Oriented cohomology, Borel-Moore homology and algebraic cobordism. // Michigan Math. J., Volume 57, 2008, 523–572.

Теорема 6. *Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм гладких многообразий над полем k характеристики 0, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами. Обозначим через $G(f)\colon M(Y) \to M(X)$ гомоморфизм Гизина для морфизма f, через $Tr(f)$ обозначим отображение, действующее из $\mathcal{F}(X)$ в $\mathcal{F}(Y)$, задаваемое транспонированным графиком $(\Gamma_f)^t$ морфизма f. Тогда отображения*

$$\mathcal{F}(G(f)), Tr(f)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$$

совпадают.

В силу леммы инъективности Воеводского отображение $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(k(X))$ является вложением для неприводимого многообразия X. Благодаря этому теорему можно доказывать только для достаточно малых открытых подмножеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ и конечного этального морфизма $f\colon U \to V$. Идея состоит в том, чтобы доказать совпадение гомоморфизма Гизина и трансфера не в категории мотивов Воеводского $DM(k)$, а в категории относительных мотивов $D_{\mathcal{M}}(V)$, а потом построить функтор $\Theta\colon D_{\mathcal{M}}(V) \to DM(k)$, который переводит относительный мотив в мотив многообразия, гомоморфизм Гизина в категории относительных мотивов — в обычный гомоморфизм Гизина в $DM(k)$ и трансфер — в трансфер. В категории $D_{\mathcal{M}}(V)$ доказательство совпадения гомоморфизма Гизина и трансфера основано на том, что для конечного этального морфизма $f\colon U \to V$ существует многообразие Z над V такое, что морфизм $f \times_V Z\colon U \times_V Z \to Z$ расщепим.

В **параграфе 12** доказывается следующая

Теорема 7. *Пусть X — гладкое многообразие над полем k характеристики 0, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами. Пусть также $Z \subset Y \subset X$ — неприводимые подмногообразия,* $\operatorname{codim}_X Z = i+1$, $\operatorname{codim}_X Y = i$. *Пусть $p\colon \widetilde{X} \to X$ — раздутие X в подмногообразии Z, $\widetilde{Y}$ — собственный прообраз Y, $\widetilde{Z}$ — пересечение $\widetilde{Y}$ с исключительным дивизором. Кроме того, пусть $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(Y-Z) \to \mathcal{F}_{-i-1}(Z)$ — дифференциал Герстена на X, $\widetilde{\partial}\colon \mathcal{F}_{-i}(\widetilde{Y}-\widetilde{Z}) \to \mathcal{F}_{-i-1}(\widetilde{Z})$ — дифференциал*

Герстена на $\widetilde{X}$. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{-i}(\widetilde{Y} - \widetilde{Z}) \arrow[r, "\tilde{\partial}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}_{-i-1}(\widetilde{Z}) \arrow[d, "Tr(p|_{\widetilde{Z}})"] \\
\mathcal{F}_{-i}(Y - Z) \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{F}_{-i-1}(Z)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство этой теоремы использует свойства гомоморфизма Гизина в мотивах Воеводского алгебраических многообразий из параграфов 10 и 11.

В **параграфе 13** мы определяем дифференциал Герстена для регулярного равнохарактеристического кольца в общем случае. Мы делаем это с помощью следующей конструкции.

Пусть R — произвольное регулярное равнохарактеристическое кольцо, $X = Spec\ R$ и $Z \subset Y \subset X$ — неприводимые подсхемы, $\operatorname{codim}_X Y = i$, $\operatorname{codim}_X Z = i + 1$. Определим дифференциал $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(Z))$ для гомотопически инвариантного непрерывного пучка с трансферами на категории регулярных k-схем следующим образом. Локализуем X и Y в Z и разрешим особенности кривой Y_Z внутри X_Z с помощью раздутий в замкнутых точках, обозначим разрешение $\widetilde{Y_Z} \subset \widetilde{X_Z}$ и проекцию $p\colon \widetilde{X_Z} \to X_Z$. Обозначим через $z_1, \ldots, z_n$ точки пересечения $\widetilde{Y_Z}$ с исключительным дивизором, и через $Tr_j\colon \mathcal{F}_{-i-1}(z_j) \to \mathcal{F}_{-i-1}(z)$ — трансферы для конечных отображений $p|_{z_i}$. Локализуя $\widetilde{Y_Z}$ в каждом z_j (чтобы Y_Z стало локальным) и пользуясь определением для кольца дискретного нормирования, получим дифференциал $\partial_j\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(z_j))$. Определим дифференциал Герстена $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(Z))$ как сумму композиций $Tr_1 \circ \partial_1 + \ldots + Tr_n \circ \partial_n$.

При таком определении дифференциала не очевидно, что выполнено свойство $\partial^2 = 0$, а также что определение не зависит от разрешения особенностей. Обе проблемы решаются путем доказательства совпадения определенного так дифференциала с некоторым предельным дифференциалом, который получается с помощью теоремы Попеску. В следующей теореме сформулировано точное утверждение.

Теорема 8. *Пусть $X = Spec\ R$, где R — регулярное локальное равнохарактеристическое кольцо, пусть z — замкнутая точка на X, Y — кривая на X, $R = \varinjlim R^\alpha$ — представление R в виде предела локальных колец то-*

чек гладких k-многообразий, $\varphi_{\alpha\beta}\colon R^\alpha \to R^\beta$ — связывающие гомоморфизмы в индуктивном пределе, $X^\alpha = Spec\ R^\alpha$. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — набор образующих идеала Y. Обозначим прообразы $f_1^{\alpha_0}, \ldots, f_n^{\alpha_0}$ в R^{α_0} для некоторого α_0, положим $f_i^\alpha = \varphi_{\alpha_0\alpha}(f_i^{\alpha_0})$, где $\mathfrak{p}_\alpha = (f_1^\alpha, \ldots, f_n^\alpha)$ и $Y^\alpha = Spec\ (R^\alpha/\mathfrak{p}_\alpha)$. С помощью аналогичной процедуры определим Z^α. В этом случае $k(z) = \varinjlim\ k(Z^\alpha)$, $Spec\ k(Y) = \varprojlim\ (Y^\alpha - Z^\alpha)$, поскольку $Spec\ k(Y) = Y - z$. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(k(Y)) \arrow[r, "\partial_{Y,z}"] & \mathcal{F}_{-1}(z) \\
\varinjlim \mathcal{F}(Y^\alpha - Z^\alpha) \arrow[u] \arrow[r, "\varinjlim \partial_{Y^\alpha, Z^\alpha}"] & \varinjlim \mathcal{F}_{-1}(Z^\alpha), \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

в которой $\partial_{Y,z}$ — дифференциал Герстена на X, а $\partial_{Y^\alpha, Z^\alpha}$ — дифференциал Герстена на X^α, коммутативна.

Для случая, когда кривая Y неособа в точке z, утверждение тривиально. Для случая особой кривой используются теорема 7 и представление раздутия регулярной локальной равнохарактеристической схемы в виде предела раздутий спектров локальных колец точек гладких многообразий.

Поскольку дифференциал Герстена для многообразий удовлетворяет условию $\partial^2 = 0$, из предыдущей теоремы получаем следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть $X = Spec\ R$, где R — регулярное локальное равнохарактеристическое кольцо, $Z \subset Y \subset W$ — последовательность замкнутых подмножеств в X, причем $\operatorname{codim}_Y Z = 1$, $\operatorname{codim}_W Y = 1$, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный непрерывный пучок с трансферами, определенный на категории регулярных k-схем. Тогда композиция*

$$\partial_{Y,Z} \circ \partial_{W,Y}\colon \mathcal{F}(k(W)) \to \mathcal{F}_{-2}(k(Z))$$

в комплексе Герстена нулевая.

Данная теорема показывает, что «комплекс» из теоремы 5 автореферата, действительно, является комплексом, то есть $\partial^2 = 0$.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ:

[1] Мингазов А. А. Согласованность гомоморфизма Гизина и трансфера. // Алгебра и анализ, 27 (2015), №4, 59—73.

[2] Мингазов А. А. Точность комплекса Герстена для алгебр Адзумая в равнохарактеристическом случае. // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер., № 3 (114), 2014, 67—75.

[3] Мингазов А. А. Комплекс Герстена для пучков с трансферами для нетеровых схем. // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер., № 6 (128), 2015, 97—100.

Другие публикации:

[4] Мингазов А. А. Равнохарактеристический случай гипотезы Герстена для пучков с трансферами. // Четвертая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Москва, Россия, 27 января – 1 февраля 2014 г. Тезисы докладов. — Издательство Московского университета, 2014, с. 30.

[5] Мингазов А. А. Совпадение гомоморфизма Гизина и трансфера для пучков с трансферами. // Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Самара, Россия, 22–27 июня 2015 г. Тезисы докладов. — Самара: Издательство «Самарский университет», 2015, с. 30.