Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
имени В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

ЗАТИЦКИЙ Павел Борисович

Масштабирующая энтропийная последовательность как метрический инвариант динамических систем

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2014

Работа выполнена в лаборатории теории представлений и динамических систем ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН).

Научный руководитель: ПЕТРОВ Федор Владимирович
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории теории представлений и динамических систем ФГБУН ПОМИ РАН

Официальные оппоненты:

РЫЖИКОВ Валерий Валентинович
доктор физико-математических наук
профессор кафедры теории функций и функционального анализа ФГБОУ ВПО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

ТИХОНОВ Сергей Викторович
доктор физико-математических наук, доцент
профессор кафедры Высшей математики ФГБОУ ВПО РЭУ им. Г. В. Плеханова

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО "Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В.И. Ульянова (Ленина)"

Защита состоится «22» декабря 2014 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета Д002.202.01 в ФГБУН ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «____» ____________ 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, д. ф.-м. н. А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

Под динамической системой обычно понимается пара (X, T), где X — некоторое пространство, а T — отображение из X в себя. Кроме того, изучаются действия групп преобразований. Представляют интерес динамические системы в разных категориях, то есть на пространстве X заводится некоторая дополнительная структура, а на отображение T накладываются условия сохранения этой структуры. Так, например, изучаются динамические системы в категории пространств с мерой, в категории топологических пространств, гладкие динамические системы.

Метрическая теория динамических систем изучает динамику в категории пространств с мерой. Объектами в данной категории являются пространства с мерой, а на отображение накладывается условие измеримости и сохранения меры. Одним из центральных вопросов теории является проблема изоморфизма: как по двум данным динамическим системам, возможно совершенно разной природы, понять, изоморфны они или нет? Ответ на этот вопрос дают так называемые инварианты. Инвариантом динамической системы называется та или иная ее характеристика, не изменяющаяся при изоморфизмах. Система инвариантов называется полной, если их совпадение у двух динамических систем гарантирует изоморфность этих систем.

Задача о поиске полной системы метрических инвариантов динамических систем исключительно сложна, и, по-видимому, не допускает сколько-нибудь удовлетворительного ответа. Несмотря на это, для некоторых классов динамических систем специального вида найдены полные системы инвариантов.

Спектральные инварианты. В начале 30-х годов 20 века в фундаментальных работах Дж. фон Неймана и Б. Купмана были предложены спектральные инварианты, основанные на спектральной теории унитарных операторов в гильбертовом пространстве. Автоморфизму T пространства с мерой (X, μ) каноническим образом ставится в соответствие унитарный оператор U_T гильбертова пространства $L^2(X, \mu)$, который каждой функции f сопоставляет функцию $U_T f$, заданную формулой $(U_T f)(x) = f(T(x))$. Спектральные характеристики (спектральная мера и функция кратности) оператора U_T приписываются динамической системе (X, μ, T). Определенные таким образом спектральные характеристики являются метрическими инвариантами динамических систем. Однако, система спектральных инвариантов довольно сложна для вычислений, и в то же время не является полной. Так, спектры всех сдвигов Бернулли оказываются одинаковыми.

Метрическая энтропия. Энтропия в качестве метрического инварианта динамических систем появилась в фундаментальных работах А. Н. Колмогорова [4, 5] 1958-59 гг. Важным инструментом для построения энтропийной теории послужила теория измеримых разбиений, разработанная В. А. Рохлиным в 40-е годы (см. [6]). Наиболее удобная форма определения энтропии динамических систем была предложена Я. Г. Синаем в работе [7] 1959 года. Там же была доказана замечательная теорема Колмогорова–Синая, позволяющая в значительной степени упростить вычисление энтропии в конкретных примерах. В работе [8] В. А. Рохлина подробно освещены эти и другие вопросы теории.

Оказалось, что колмогоровская энтропия сдвига Бернулли совпадает с энтропией базового пространства. Таким образом, энтропия смогла сделать то, что не могли сделать спектральные инварианты — различить бернуллиевские сдвиги. Более того, как было показано Д. Орнстейном в серии работ начала 70-х, колмогоровская энтропия является полным инвариантом сдвигов Бернулли.

Во многих последующих работах В. А. Рохлина, Я. Г. Синая, А. М. Вершика, Л. М. Абрамова, М. С. Пинскера, Д. Орнстейна, А. Б. Катка, А. М. Степина, А. А. Кириллова, В. И. Оселедца, Б. Вейса, Г. Фюрстенберга, Ж.-П. Тувено, С. Ференци и др. изучались свойства метрической энтропии автоморфизмов и потоков, приводились формулы для энтропии конкретных автоморфизмов, изучалась аксиоматика энтропии, ее связи со спектральной теорией, изучались обобщения понятия энтропии на действия различных групп и др. Стоит отметить недавний цикл работ Л. Боуэна (2010-2012), в которых понятие энтропии переносится на действие софических групп.

Топологическая энтропия. Важно упомянуть, что параллельно развивалась теория топологической энтропии динамических систем. Объектами категории являются топологические пространства, а на отображения накладывается условие непрерывности. Р. Адлером, А. Конхеймом и М. МакЭндрю в работе [9] 1965 года был введен схожий инвариант для топологических динамических систем — топологическая энтропия. Независимо Р. Боуэном в работе [10] и Е. И. Динабургом в работе [11] 1971 года было введено иное, более удобное, но по сути эквивалентное определение топологической энтропии динамической системы. Для этого использовались понятия ε-энтропий метрических компактов.

Е. И. Динабург отмечал, что идея связи топологической энтропии, введенной Р. Адлером, А. Конхеймом и М. МакЭндрю, с ε-энтропией метрических компактов принадлежит А. Н. Колмогорову.

Масштабирующая энтропийная последовательность. Хотя для случая сдвигов Бернулли энтропия является полным инвариантом, для динамических систем общего вида вопрос о других инвариантах энтропийного типа открыт. Для метрической классификации динамических систем с нулевой энтропией Вершиком (см., например, [12], [13], [14],[15]) было предложено ввести иной инвариант, нежели энтропия Колмогорова, названный им масштабирующей энтропийной последовательностью. Это понятие основано на динамике полуметрик на фиксированном пространстве с мерой и сочетает в себе идеи колмогоровской энтропии преобразований и ε-энтропии метрических компактов. Стоит отметить, что схожие инварианты изучались в работах Ференци и Катка–Тувено (см., например, [16], [17]).

Цель диссертационной работы. Основная цель данной диссертации — изучить свойства масштабирующей энтропийной последовательности, показать, что она не зависит от выбора исходной полуметрики в классе допустимых суммируемых порождающих полуметрик, и, следовательно, является метрическим инвариантом динамической системы.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. Теорема 14 следует из теоремы 8 и результатов работы [16], однако приведенное доказательство — идейно новое.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть применены в метрической геометрии, а также в общей эргодической теории, гладкой и символической динамике.

Методы исследований. Для изучения свойств пространства допустимых полуметрик и динамики на нем применяются методы функционального анализа и теории меры. Для доказательства критерия чистой точечности спектра используются методы спектральной теории операторов. При изучении подстановочных динамических систем используются комбинаторные методы, а также специальный метод инвариантной метрики, позволяющий контролировать рост масштабирующей энтропийной последовательности.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Доказано, что масштабирующая энтропийная последовательность не зависит от выбора полуметрики в классе допустимых суммируемых порождающих полуметрик. Тем самым масштабирующая энтропийная последовательность является метрическим инвариантом динамической системы.

2. Получен критерий чистой точечности спектра автоморфизма в терминах масштабирующей энтропийной последовательности. А именно, доказано, что автоморфизм стандартного вероятностного пространства имеет чисто точечный спектр тогда и только тогда, когда его масштабирующая энтропийная последовательность ограничена.

3. Вычислена масштабирующая энтропийная последовательность подстановочных динамических систем, соответствующих примитивным инъективным подстановкам постоянной длины.

4. Доказана теорема об исправлении почти метрик до полуметрик.

5. Изучена геометрия пространства суммируемых полуметрик (с метрикой, задаваемой специально введенной m-нормой). Доказано, что топология на множестве допустимых полуметрик, задаваемая этой метрикой, совпадает с топологией, индуцированной из пространства L^1.

6. Получены критерии предкомпактности в m-норме: для произвольного семейства суммируемых допустимых полуметрик и для выпуклого семейства суммируемых допустимых полуметрик.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, представленные в работе, являются достоверными, математически строго доказанными фактами. Основные результаты докладывались на Санкт-Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам, на коллоквиуме лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, на семинаре по теории вероятностей и эргодической теории в МГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 печатных работах в рецензируемых журналах [1–3] из Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 86 страниц. Библиография включает 22 наименования на 3 страницах.

Содержание работы

Во введении приведена краткая история развития инвариантов динамических систем энтропийного типа, обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель исследований, приведено описание структуры диссертации.

В первой главе изучаются свойства допустимых полуметрик на фиксированном стандартном вероятностном пространстве (X, μ). На все изучаемые полуметрики накладывается условие измеримости (как функций двух переменных).

В разделе 1.1 определены базовые понятия. Полуметрика ρ на вероятностном пространстве (X, μ) называется допустимой, если она сепарабельна на некотором подмножестве полной меры (в таком случае тройку (X, μ, ρ) тоже называют допустимой). Почти метрикой называется измеримая функция двух переменных, которая неотрицательна и удовлетворяет свойствам полуметрики (симметричность и неравенство треугольника) лишь почти всюду. Такие функции возникают естественным образом при предельном переходе. Две измеримые функции (возможно, нескольких переменных) мы называем μ-эквивалентными, если они совпадают на множестве полной меры (соответствующей степени меры μ). Для почти метрик вводится аналог понятия допустимости. Почти метрика ρ на пространстве (X, μ) называется существенно сепарабельной, если для любого $\varepsilon > 0$ пространство X может быть представлено в виде счетного объединения $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, так что для каждого $i \in I$ для μ^2-почти всех $(x, y) \in X_i^2$ выполнено неравенство $\rho(x, y) \le \varepsilon$.

В разделе 1.2 доказывается следующая теорема об исправлении (теорема 1):

Теорема 1. 1) *Пусть* (X, μ) *— стандартное вероятностное пространство,* ρ *— почти метрика на* (X, μ)*. Тогда* ρ *можно исправить до всюду конечной полуметрики на* X*, то есть найдется* μ*-эквивалентная ей полуметрика* $\tilde{\rho}$ *на* (X, μ)*.*

2) *Если при этом почти метрика* ρ *была существенно сепарабельной, то исправленную полуметрику* $\tilde{\rho}$ *можно выбрать допустимой.*

В разделе 1.3 доказываются теоремы о борелевских сигма-алгебрах, порожденных допустимыми полуметриками (теоремы 2, 3):

Теорема 2. *Пусть* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *— некоторое полное вероятностное пространство (не обязательно стандартное), а* ρ *— допустимая полуметрика на нем. Тогда мера* μ *является борелевской относительно топологии, задаваемой полуметрикой* ρ*. Иными словами, борелевская сигма-алгебра, порожденная полуметрикой* ρ*, является подалгеброй сигма-алгебры* $\mathfrak{A}$ *пространства* (X, μ)*.*

Теорема 3. *Пусть* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *— стандартное вероятностное пространство, а* ρ *— допустимая метрика на нем. Тогда пополненная по мере* μ *борелевская сигма-алгебра* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\rho)$*, порожденная метрикой* ρ*, совпадает с сигма-алгеброй* $\mathfrak{A}$ *пространства* (X, μ)*.*

В разделе 1.4 приводятся определение ε-энтропии полуметрической тройки (определение 9), некоторые оценки ε-энтропии (леммы 2, 3, 4, 5), критерии допустимости полуметрики (теорема 4).

Теорема 4. *Пусть* ρ *— полуметрика на* (X, μ)*. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *Тройка* (X, μ, ρ) *допустима;*
2) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *полуметрика* ρ *имеет конечную* ε*-энтропию:* $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) < \infty$;
3) *Для* μ*-почти всех* $x \in X$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *шар* $B(x, \varepsilon) = \{y \in$

$X\colon \rho(x,y) < \varepsilon\}$ имеет положительную меру: $\mu(B(x,\varepsilon)) > 0$;

4) *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k \in \mathbb{N}$, такое что пространство X можно представить в виде объединения множеств $X_0, X_1, \dots X_k$, таких что $\mu(X_0) < \varepsilon$, и для любого $j = 1, \dots, k$ для μ^2-почти всех $(x,y) \in X_j^2$ выполнено неравенство $\rho(x,y) \le \varepsilon$;*

5) *Для любого μ-измеримого множества $A \subset X$ положительной меры существенный инфимум функции ρ на $A \times A$ равен нулю.*

В разделе 1.5 на подпространстве пространства $L^1(X^2,\mu^2)$ вводится специальная m-норма (определение 10), которая позволяет контролировать ε-энтропии полуметрик. Там же изучаются простые свойства этой нормы, пространства $\mathbb{M}$ функций с конечной m-нормой, конуса суммируемых допустимых полуметрик.

Определение 10. Для функции $f \in L^1(X^2,\mu^2)$ определим конечную или бесконечную норму

$$\|f\|_m = \inf\{\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)}\colon \rho - \text{измеримая полуметрика на } (X,\mu),$$
$$\rho(x,y) \ge |f(x,y)| \text{ для } \mu^2\text{-п. в. } (x,y) \in X^2\}.$$

Очевидно, что эта норма мажорирует норму пространства $L^1(X^2,\mu^2)$. Доказывается, что подпространство $\mathbb{M}$ функций из пространства $L^1(X^2,\mu^2)$, имеющих конечную m-норму, полно в m-норме (лемма 6), и что конус $\mathcal{A}dm$, состоящий из суммируемых допустимых полуметрик, замкнут в банаховом пространстве $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$ (лемма 7, следствие 2).

В разделе 1.6 доказывается, что допустимая полуметрика аппроксимируется своими срезками в m-норме (лемма 10). Теорема 5 устанавливает, в частности, что топология на конусе $\mathcal{A}dm$, задаваемая m-нормой, совпадает с топологией, задаваемой нормой пространства $L^1(X^2,\mu^2)$.

Теорема 5. *Пусть последовательность суммируемых полуметрик ρ_n сходится к допустимой полуметрике ρ в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$. Тогда* *эта последовательность сходится и в m-норме к тому же пределу.*

В разделе 1.7 приводятся критерии предкомпактности семейства допустимых полуметрик в пространстве $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$ (теорема 6).

Теорема 6. *Пусть $M \subset \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — некоторое множество суммируемых допустимых полуметрик на пространстве (X, μ). Тогда M предкомпактно в m-норме тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1) *(равномерная интегрируемость) полуметрики из M равномерно интегрируемы на (X^2, μ^2);*
2) *(равномерная допустимость) для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение множества X на конечное количество измеримых множеств $X_1, \ldots, X_k$, такое что для каждой полуметрики $\rho \in M$ существует множество $A \subset X$, такое что $\mu(A) < \varepsilon$ и диаметр каждого из множеств $X_j \setminus A$, $j = 1, \ldots, k$, в полуметрике ρ меньше ε.*

Оказывается, что замыкания в m-норме и в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$ предкомпактного множества $M \subset \mathcal{A}dm$ суммируемых допустимых полуметрик совпадают, и для любого $\varepsilon > 0$ ε-энтропии полуметрик из M равномерно ограничены (следствие 5). Теорема 7 дает критерий предкомпактности для выпуклых подмножеств $M \subset \mathcal{A}dm$.

Теорема 7. *Пусть $M \subset \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — равномерно интегрируемое выпуклое семейство допустимых полуметрик. Тогда M предкомпактно в m-норме тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) \colon \rho \in M\}$ ограничено.*

Во второй главе изучаются свойства автоморфизма T стандартного вероятностного пространства (X, μ) путем рассмотрения задаваемой им динамики допустимых полуметрик в пространстве $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$.

В разделе 2.1 вводится понятие масштабирующей последовательности полуметрики (определение 19) и, используя результаты главы 1, доказывается основная теорема (теорема 8), утверждающая, что масштабирующая последовательность не зависит от выбора полуметрики в классе суммируемых допустимых порождающих полуметрик. На основании теоремы 8 определяется инвариант динамической системы — класс масштабирующих энтропийных последовательностей (определение 20). Устанавливается связь введенного инварианта с колмогоровской энтропией (теорема 9). Вычисляется масштабирующая энтропийная последовательность сдвига Бернулли (теорема 10).

Определение 19. Пусть T — автоморфизм стандартного вероятностного пространства (X, μ), а ρ — допустимая полуметрика на (X, μ). Последовательность положительных чисел $\{h_n\}$ называется масштабирующей для полуметрики ρ, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\overline{\lim\limits_n} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho)}{h_n} < +\infty$, а при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $0 < \underline{\lim\limits_n} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho)}{h_n}$. Класс всех масштабирующих последовательностей для полуметрики ρ обозначим символом $\mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$.

Полуметрика ρ на пространстве (X, μ) называется порождающий для автоморфизма T, если ее сдвиги $T^n\rho, n \in \mathbb{Z}$, разделяют точки некоторого подмножества $X_1 \subset X$ полной меры.

Теорема 8. *Пусть $\rho, \tilde{\rho} \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — суммируемые допустимые порождающие полуметрики на (X, μ). Тогда $\mathcal{H}(X, \mu, T, \rho) = \mathcal{H}(X, \mu, T, \tilde{\rho})$.*

Определение 20. Последовательность $h = \{h_n\}$ положительных чисел называется масштабирующей энтропийной последовательностью метрической динамической системы (X, μ, T), если $h \in \mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$ для некоторой (а тогда и любой) суммируемой допустимой порождающей полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Класс масштабирующих энтропийных последовательностей динамической системы (X, μ, T) обозначим $\mathcal{H}(X, \mu, T)$.

Из теоремы 8 следует, что класс масштабирующих энтропийных последовательностей $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ является метрическим инвариантом динамической системы (X, μ, T).

Теорема 9. *Пусть T — апериодический автоморфизм пространства*

(X,μ). *Тогда*:

1) *если колмогоровская энтропия* $h_\mu(T)$ *конечна и положительна, то последовательность* $h_n = n$ *является масштабирующей энтропийной последовательностью системы* (X,μ,T);

2) *если* h_n *— масштабирующая энтропийная последовательность системы* (X,μ,T), *то* $h_\mu(T) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $h_n = o(n)$, $n \to +\infty$.

Теорема 10. *Пусть* (A,ν) *— стандартное вероятностное пространство (возможно, мера* ν *имеет точечные нагрузки). Пусть* $X = A^{\mathbb{Z}}$ *— пространство двусторонних последовательностей,* $\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$ *— продакт-мера на* X, *а* $T\colon X \to X$ *— левый сдвиг. Если мера* ν *не сосредоточена в одной точке, то последовательность* $h_n = n$ *является масштабирующей энтропийной последовательностью сдвига Бернулли* (X,μ,T).

В разделе 2.2 приводится критерий, дающий характеризацию динамических систем с чисто точечным спектром в терминах масштабирующей энтропийной последовательности (теорема 11), приводится оценка масштабирующей энтропийной последовательности через последовательностную энтропию Кушниренко (теорема 13; определение A-энтропии см. в работе [18]).

Теорема 11. *Пусть* T *— автоморфизм пространства* (X,μ). *Тогда равносильны следующие утверждения*:

1) *спектр системы* (X,μ,T) *чисто точечный*;

2) *множество* $\mathcal{H}(X,\mu,T)$ *состоит из положительных ограниченных отделенных от нуля последовательностей.*

Напомним определение последовательностной энтропии (A-энтропии) Кушниренко (см. [18]; символ $H(\xi)$ означает энтропию измеримого разбиения ξ).

Определение 21. Пусть $A = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть T — автоморфизм пространства (X,μ), а $\xi \in Z(X,\mu)$ — измеримое разбиение с конечной энтропией. Определим $h_A(T,\xi) = \varlimsup_n \frac{H(\bigvee_{i=1}^n T^{a_i}\xi)}{n}$, $h_A(T) = \sup_{\xi\in Z} h_A(T,\xi)$. Число $h_A(T)$ называется последовательностной энтропией оператора T, отвечающей последовательности A (A-энтропией).

Теорема 13. *Пусть $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, такая что $h_A(T) > 0$, а h_n — масштабирующая энтропийная последовательность системы (X,μ,T). Тогда $\varliminf_n \frac{h_{a_n}}{\log\log n} > 0$.*

В разделе 2.3 приводится пример вычисления масштабирующей энтропийной последовательности для подстановочных динамических систем, отвечающих подстановкам постоянной длины (теорема 14; необходимые определения см., например, в монографии [19]). В качестве элементарного следствия теорем 11 и 14 получен критерий, описывающий подстановочные динамические системы с чисто точечными спектрами, доказанный ранее в работах [20, 21], однако сформулированный несколько иначе.

Теорема 14. *Пусть ξ — инъективная примитивная подстановка постоянной длины на алфавите A, $|A| > 1$. Тогда последовательность $h_n = 1 + (\mathrm{c}(\xi) - h(\xi))\log n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью динамической системы (X_ξ, μ^ξ, T).*

В заключении кратко изложены основные результаты диссертации, приводятся интересующие автора вопросы.

Список публикаций

1. Затицкий П. Б., Петров Ф. В. Об исправлении метрик // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Т. 390. С. 201–209.

2. Vershik A. M., Zatitskiy P. B., Petrov F. V. Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces // Central European Journal of Mathematics. 2013. Vol. 11, no. 3. P. 379–400.

3. Затицкий П. Б. О масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48, № 4. С. 70–74.

Цитированная литература

4. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119. С. 861–864.

5. Колмогоров А. Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 754–755.

6. Рохлин В. А. Об основных понятиях теории меры // Матем. сб. 1949. Т. 25(67). С. 107–150.

7. Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 768–771.

8. Рохлин В. А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1967. Т. 22, № 5 (137). С. 3–56.

9. Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H. Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 114. P. 309–319.

10. Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 153. P. 401–414.

11. Динабург Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 324–366.

12. Вершик А. М. Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры // УМН. 2000. Vol. 55, no. 4(334). P. 59–128.

13. Вершик А. М., Горбульский, А. Д. Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр // ТВП. 2007. Vol. 52, no. 3. P. 446–467.

14. Vershik A. M. Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants // Markov Process. Related Fields. 2010. Vol. 16, no. 1. P. 169–184.

15. Вершик А. М. Масштабированная энтропия и автоморфизмы с чисто точечным спектром // Алгебра и Анализ. 2011. Vol. 23, no. 1. P. 111–135.

16. Ferenczi S. Measure-theoretic complexity of ergodic systems // Israel J. Math. 1997. Vol. 100. P. 189–207.

17. Katok A., Thouvenot J.-P. Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 1997. Vol. 33, no. 3. P. 323–338.

18. Кушниренко А. Г. О метрических инвариантах типа энтропии // УМН. 1967. Т. 22, № 5 (137). С. 57–65.

19. Queffélec M. Substitution dynamical systems—spectral analysis. Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Vol. 1294 of Lecture Notes in Mathematics. P. xvi+351. ISBN: 978-3-642-11211-9.

20. Kamae T. A topological invariant of substitution minimal sets // J. Math. Soc. Japan. 1972. Vol. 24. P. 285–306.

21. Dekking F. M. The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. 1977/78. Vol. 41, no. 3. P. 221–239.