На правах рукописи

БАСОК МИХАИЛ КОНСТАНТИНОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ ЛОКУСАХ ВЫРОЖДЕНИЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2020

Работа выполнена в лаборатории математических проблем физики Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель	—	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения математического института им. В. А. Стеклова РАН, Зограф Петр Георгиевич;
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Кузнецов Александр Геннадиевич;
	—	доктор физико-математических наук, профессор университета Конкордия (Монреаль, Канада), Короткин Дмитрий Александрович;
Ведущая организация	—	Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики".

Защита состоится "10" марта 2021 года в 17:00 на заседании Диссертационного совета Д 002.202.02 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан "___" __________ 20__ года.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Малютин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Современное представление о пространстве модулей римановых поверхностей $\mathcal{M}_g$ было заложено в работах Мамфорда 1960х годов. В 1965 году вышла книга [30], в которой впервые была описана конструкция $\mathcal{M}_g$ как алгебраического многообразия. На основании этой конструкции были построены многие другие пространства модулей, например, пространство модулей спинорных кривых $\mathcal{S}_g$ или пространство модулей абелевых, и, более общо, k-дифференциалов (см. [3]). Интерес к таким пространствам приходит из попыток лучше понять геометрию самих пространств модулей, а также из различных областей математики и физики, в которых пространства модулей естественным образом возникают (см., например, [12], [22], [20]).

Одним из классических направлений исследования пространств модулей является исследование групп Пикара этих пространств. В качестве причины отдельного интереса к этому бирациональному инварианту можно привести знаменитую работу Харриса и Мамфорда [18], в которой показано, что компактифицированное пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_g$ имеет общий тип при $g \geq 24$, то есть канонический класс этого пространства обилен. Для того, чтобы это показать, авторы представляют канонический класс в виде линейной комбинации некоторых эффективных дивизоров на $\overline{\mathcal{M}}_g$ и класса Ходжа, обильность которого известна. Это становится возможным благодаря существованию дивизора с достаточно маленьким наклоном на $\overline{\mathcal{M}}_g$, построенному авторами в явном виде. Благодаря схожей технике позже удалось доказать, что пространство модулей нечетных спинорных кривых $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ имеет общий тип при $g \geq 12$ (см. [15]), а пространство модулей четных спинорных кривых $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$ имеет общий тип при $g \geq 9$ (см. [14]).

Широкий интерес к пространствам модулей привел к возникновению большого спектра методов их изучения, как алгебраических, так и аналитических. Как правило, для вычислений в группах Пикара пространств модулей применяются алгебраические методы, такие, как теория пересечений (см., например, [18], [1], [15]) или же формулы Портеуса и Гротендика–Римана–Роха. Однако, в течение последних десяти лет Зограф, Короткин и соавторы представили серию работ, в которых различные соотношения в группах Пикара выводятся из асимптотик тау-функции Бергмана (см. [23], [26], [27], [25], [28]). Ключевой идеей этих работ является наблюдение, что модулярные свойства тау-функции Бергмана, построенной как часть голоморфной факторизации дзета-регуляризованного оператора Лапласа [22], позволяют интерпретировать ее как сечение некоторого естественного линейного расслоения на пространстве модулей.

Формулы, полученные в вышеупомянутой серии работ, были ранее неизвестны и потому вызвали к себе интерес со стороны алгебраических геометров. Некоторые соотношения были передоказаны с использованием чисто алгебраических методов, например, в работах [16] и [6].

Результаты диссертации являют собой продолжение исследования в вышеописанном направлении.

Цели и задачи работы. В данной работе решено несколько задач. Во-первых, мы показываем, как, используя методы, разработанные Зографом и Короткиным, можно построить аналитическое доказательство формул, полученных Фаркашем для классов дивизора тэта-характеристик с вырожденными нулями [15] и дивизора тэта-нуль в рациональной группе Пикара $\overline{\mathcal{S}}_g$ [14]. Такое доказательство ранее не было известно и представляет отдельный интерес.

Во-вторых, мы вводим в рассмотрение новые дивизоры на пространстве модулей нечетных спинорных кривых $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$: дивизор каустики и дивизор базовых точек. Для того, чтобы лучше понять их структуру, мы исследуем две серии локусов вырождений над пространством $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$. Мы описываем касательное пространство к этим локусам во внутренних терминах, а также выводим некоторые другие их локальные свойства. В завершение мы анонсируем разложения дивизоров каустики и базовых точек через стандартные образующие $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$.

В третьих, мы исследуем соотношения, полученные в [28], используя алгебро-геометрический подход. В результате мы не только предлагаем чисто алгебраическое доказательство этих соотношений, но получаем новые соотношения, из которых предыдущие немедленно следуют.

Научная новизна. Все основные результаты настоящей диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы для исследования бирациональных свойств пространств модулей, для получения новых соотношений в группах Пикара и для дальнейшего исследования геометрии различных локусов вырождений. Также материалы диссертации могут быть использованы в методических целях.

Методология и методы исследования. Для аналитического вывода формул Фаркаша мы анализируем поведение тау-функции Бергмана на пространстве модулей абелевых дифференциалов с нулями четной кратности. Также мы используем стандартное представление сечений тэта-характеристик как некоторого выражения от тэта-функции Римана с соответствующей характеристикой. Анализируя асимптотики этих объектов, мы получаем заявленные результаты.

Для описания касательного пространства к схемам вырождений мы используем отображение Гаусса–Валя. Изначально эта идея была мотивирована некоторыми аналитическими соображениями. Для вычисления геометрической кратности неприведенных компонент рассматриваемых схем вырождений мы используем некоторые общие геометрические леммы, доказанные автором.

Для вычисления коэффициентов разложений компонентов дивизора универсального дискриминанта через стандартные образующие рациональной группы Пикара пространства модулей спектральных накрытий Хитчина мы анализируем дискриминант произвольного монического многочлена. Мы получаем некоторое разложение для этого дискриминанта и, используя это разложение, мы представляем каждую из рассматриваемых компонент как локус нулей некоторого морфизма расслоений. Затем мы вычисляем классы этих расслоений с помощью стандартных фактов из теории пересечений на пространстве модулей. Для того, чтобы связать два класса Ходжа на вышеуказанном пространстве модулей, мы проделываем некоторые вычисления, использующие формулу Гротендика–Римана–Роха.

Положения, выносимые на защиту. Данная диссертация основана на следующих трех результатах:

- *Аналитический вывод соотношений Фаркаша.* При помощи аналитических методов выводятся соотношения для классов $[\overline{\Upsilon}_g]$ и $[\Theta_{\mathrm{null}}]$ в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}})\otimes\mathbb{Q}$ и $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}})\otimes\mathbb{Q}$ соответственно. Первое соотношение выводится из свойств тау-функции Бергмана, второе соотношение выводится при помощи стандартного анализа тэта-функции.

- *Локусы вырождений на пространстве $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$.* Рассматриваются следующие локусы на пространстве модулей нечетных тэта-характеристик с отмеченными точками:

$$X_i = \overline{\{(C,\eta,p)\in\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{odd}} \;\mid\; h^0(C,\eta)=1,\ h^0(C,\eta(-ip))=1\}}$$

$$\begin{aligned} Y_1 = \overline{\{(C,\eta,p,q)\in\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}} \;\mid\; h^0(C,\eta)=1,} \\ \overline{(C,\eta,p)\in X_1,\ h^0(C,\eta(p-q))=2\}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_i = \overline{\{(C,\eta,p,q)\in\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}} \;\mid\; h^0(C,\eta)=1,} \\ \overline{(C,\eta,p)\in X_1,\ h^0(C,\eta(p-iq))=1\}}, \quad i\geq 2. \end{aligned}$$

  Описывается касательное пространство к этим локусам в общей точке, также вычисляется геометрическая кратность диагональных компонент Y_i при $i\geq 2$.

- *Класс универсального дискриминанта на пространстве спектральных накрытий Хитчина.* Классы компонент универсального дискриминанта в рациональной группе Пикара пространства модулей $\mathrm{GL}(n)$ спектральных накрытий Хитчина раскладываются через стандартные образующие группы Пикара. Также выводится формула, связывающая два класса Ходжа в этой группе Пикара.

Достоверность результатов и апробация работы. Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в статьях [5], [6], [7] за авторством соискателя. Каждая из публикаций напечатана в журнале, входящем в список ВАК.

Результаты диссертации докладывались

- на конференции “Integrable Systems and Moduli Spaces”, Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery, Банф, Канада;
- на семинаре “The second St. Petersburg-Moscow Students Meeting”, Высшая Школа Экономики, Москва, Россия;
- на семинарах лаборатории Чебышева и лаборатории “Современная Алгебра и Приложения”.

Список публикаций автора по теме диссертации:

1. Mikhail Basok, Tau Function and Moduli of Spin Curves, International Mathematics Research Notices, 2015(20):10095–10117, 2015.
2. Mikhail Basok, Discriminant and Hodge classes on the space of Hitchin covers, Letters in Mathematical Physics, 110:2659–2674, 2020.
3. Mikhail Basok, On some degeneracy loci in the moduli space of pointed odd spin curves, Алгебра и Анализ, 32(5):1–36, 2020.

Основное содержание работы

В этом разделе мы опишем основные результаты, представленные в диссертации.

Аналитический вывод соотношений Фаркаша

Используя свойства тау-функции Бергмана, мы получаем аналитическое доказательство следующей теоремы, доказанной Г. Фаркашем и А. Верра (см. [15, Теорема 0.5]):

Теорема 1. *Рассмотрим следующий дивизор на* $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$*:*

$$\overline{\Upsilon}_g = \overline{\{(C,\eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \mid \eta = \mathcal{O}_C(2x_1 + x_2 + \cdots + x_{g-2})\}}.$$

Следующее соотношение выполняется в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$*:*

$$[\overline{\Upsilon}_g] = (g+8)\lambda - \frac{g+2}{4}\alpha_0 - 2\beta_0 - \sum_{j=1}^{[g/2]} 2(g-j)\alpha_j - \sum_{j=1}^{[g/2]} 2j\beta_j.$$

В качестве дополнительного результата мы предлагаем аналитическое доказательство следующей теоремы, доказанной Г. Фаркашем (см. [14, Теорема 0.2]):

Теорема 2. *Определим дивизор* $\Theta_{\mathrm{null}} \subset \overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}$ *как*

$$\Theta_{\mathrm{null}} = \overline{\{(C,L) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{even}} \ \mid \ \dim H^0(C,L) > 0\}}.$$

Следующее соотношение выполняется в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}) \otimes \mathbb{Q}$*:*

$$[\Theta_{\mathrm{null}}] = \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{16}\alpha_0^+ - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{[g/2]} \beta_j^+. \qquad (1)$$

Результаты опубликованы в статье [5].

Локусы вырождений на пространстве $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$

Результат состоит в описании локальных свойств некоторых схем вырождений в пространстве модулей $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$, определяемых в терминах нулей тэта-характеристик. Представленные результаты опубликованы в статье [7].

Напомним, что $\mathcal{S}_{g,k}^{\mathrm{odd}}$ обозначает пространство модулей нечетных спинорных кривых с k отмеченными точками. Для любого целого $i \geq 0$ определим локус $X_i \subset \mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{odd}}$ как

$$X_i = \overline{\{(C,\eta,p) \ \mid \ h^0(C,\eta)=1,\ h^0(C,\eta(-ip))>0\}}, \tag{2}$$

т.е. $(C,\eta,p) \in X_i$, если η имеет ноль порядка не менее i в отмеченной точке p. Поскольку в случае общей кривой $h^0(C,\eta)=1$, ожидаемая коразмерность локуса X_i в $\mathcal{S}_{g,1}^{\mathrm{odd}}$ равна i. Например, локус X_2 проецируется на дивизор $\Upsilon_g \subset \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$, параметризующий неприведенные тэта-характеристики.

Предположим, что $(C,\eta,p) \in X_1$ и $h^0(C,\eta)=1$, тогда $h^0(C,\eta(p))=2$ по формуле Римана–Роха, так, что линейная система $|\eta+p|$ одномерна. В общем случае эта линейная система не имеет базовых точек и имеет только простые ветвления. Вторая серия рассматриваемых нами локусов параметризирует точки в $\mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}}$, в которых нарушается это поведение $|\eta+p|$: для любого $i>0$ мы определяем локус $Y_i \subset \mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}}$ как

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \overline{\{(C,\eta,p,q) \in \mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}} \ \mid \ h^0(C,\eta(-p))=1,\ h^0(C,\eta(p-q)) \geq 2\}},\\
Y_i &= \overline{\{(C,\eta,p,q) \in \mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}} \ \mid \ h^0(C,\eta(-p))=1,\ h^0(C,\eta(p-iq))>0\}}, \quad i \geq 2.
\end{aligned}$$

Заметим, что для любого i локус Y_i параметризует те $(C,\eta,p,q) \in \mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}}$, для которых размерность $h^0(C,\eta(p-iq))$ больше ожидаемой.

Можно показать, что над открытым подмножеством $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$, соответствующим (C,η) с $h^0(C,\eta)=1$, определенные выше множества X_i и Y_i можно отождествить с множествами точек схем вырождений некоторых морфизмов между расслоениями; это индуцирует на X_i, Y_i естественную схемную структуру. Описать эти морфизмы можно следующим образом.

Пусть $(C,\eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$ такова, что $h^0(C,\eta)=1$. Рассмотрим естественный морфизм

$$H^0(C,\eta) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathrm{J}_{i-1}(\eta),$$

где $\mathrm{J}_{i-1}(\eta)$ — пучок $(i-1)$-джетов η. Тогда над точкой (C,η) локус X_i является локусом вырождений для этого морфизма. Повторив это рассуждение для универсального семейства нечетных спинорных кривых мы получим описание X_i как схемы вырождений.

Точно так же, зафиксируем отмеченную нечетную спинорную кривую $(C,\eta,p) \in X_1$, такую, что $h^0(C,\eta(-p))>0$, и предположим дополнительно, что $h^0(C,\eta) = 1$. Над точкой (C,η,p) локус Y_i соответствует схеме вырождений естественного морфизма

$$H^0(C,\eta(p)) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathrm{J}_{i-1}(\eta(p)),$$

где $\mathrm{J}_{i-1}(\eta(p))$ — пучок $(i-1)$-джетов $\eta(p)$. Повторив это рассуждение для универсального семейства отмеченных нечетных спинорных кривых над X_1 мы получим описание Y_i как схемы вырождений.

Пусть V — схема, а $\mathcal{F} \to V$ — линейное расслоение. Морфизм Гаусса–Валя (см. [32], [13])

$$d_\Lambda : \Lambda^2 H^0(V,\mathcal{F}) \to H^0(V,\mathcal{F}^{\otimes 2} \otimes \Omega_V)$$

определяется как

$$d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = d\sigma_1 \otimes \sigma_2 - \sigma_1 \otimes d\sigma_2 = d\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2.$$

Если $V = C$ — гладкая кривая и $\mathcal{F} = \eta(d_1p_1 + \cdots + d_np_n)$ — тэта-характеристика, подкрученная на дивизор $d_1p_1 + \cdots + d_np_n$, тогда $d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ — это глобальное сечение $\eta(d_1p_1 + \cdots + d_np_n)^{\otimes 2} \otimes \omega_C$. Используя тот факт, что $\eta^{\otimes 2} \cong \omega_C$ по определению, мы можем идентифицировать $d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ с сечением $\omega_C^{\otimes 2}(2d_1p_1 + \cdots + 2d_np_n)$, которое будем интерпретировать как мероморфный квадратичный дифференциал на C. Будем говорить, что сечение w пучка $\omega_C^{\otimes 2}(2d_1p_1 + \cdots + 2d_np_n)$ имеет простые полюса, если $p_i \neq p_j$ и w приходит из сечения $\omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n)$ при естественном вложении

$$\omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n) \hookrightarrow \omega_C^{\otimes 2}(2d_1p_1 + \cdots + 2d_np_n).$$

Если $p_i \neq p_j$, то глобальные сечения $\omega_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n)$ образуют кокасательное пространство к $\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{odd}}$ в $(C,\eta,p_1,\ldots,p_n)$. Таким образом, если $d_\Lambda(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ имеет простые полюса, мы можем рассматривать его как кокасательный вектор к $\mathcal{S}_{g,n}^{\mathrm{odd}}$ в точке $(C,\eta,p_1,\ldots,p_n)$.

Введем следующее определение.

Определение 1. Гладкая нечетная спинорная кривая (C,η) — “хорошая” если

$$|\operatorname{Aut}(C)| = 1, \qquad h^0(C,\eta) = 1.$$

Предположим, что (C,η) хорошая. Тогда нетрудно проверить, что

1. если $h^0(C,\eta(-ip))>0$, то $h^0(C,\eta(ip))=i+1$,
2. если $h^0(C,\eta(p-iq))>0$ и $h^0(C,\eta(-iq))=0$, то $h^0(C,\eta(iq-p))=i$,
3. если $h^0(C,\eta(p-q))=2$, то $h^0(C,\eta(p+q))=3$;

эти равенства определяют размерности пространств из следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $(C,\eta)\in\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$ — хорошая нечетная спинорная кривая рода $g\geq 3$. Тогда имеет место следующее:*

1. *Пусть $(C,\eta,p)\in X_i$ и пусть $\sigma_0\in H^0(C,\eta(ip))$ — сечение, соответствующее ненулевому глобальному сечению $\eta(-ip)$. Тогда дифференциалы из $d_\Lambda(\sigma_0\wedge H^0(C,\eta(ip)))$ имеют простые полюсы и индуцированный морфизм*
$$\sigma_0\wedge H^0(C,\eta(ip))\xrightarrow{d_\Lambda}\left(N^*_{X_i/\mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_{g,1}}\right)_{C,\eta,p}$$
в конормальное пространство к X_i в точке (C,η,p) — это изоморфизм. В частности, схема X_i — гладкая в точке (C,η,p) и имеет коразмерность i в этой точке.

2. *Пусть $i\geq 2$ и пусть $(C,\eta,p,q)\in Y_i$ такова, что $p\neq q$ и $h^0(C,\eta(-iq))=0$. Пусть $\sigma_0\in H^0(C,\eta(p+iq))$ — сечение, соответствующее глобальному ненулевому сечению $\eta(p-iq)$. Тогда дифференциалы из $d_\Lambda(\sigma_0\wedge H^0(C,\eta(p+iq)))$ имеют простые полюсы и индуцированный морфизм*
$$\sigma_0\otimes H^0(C,\eta(iq-p))\hookrightarrow\sigma_0\wedge H^0(C,\eta(p+iq))\xrightarrow{d_\Lambda}\left(N^*_{Y_i/\mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_{g,2}}\right)_{C,\eta,p,q}$$
в конормальное пространство Y_i при (C,η,p,q) — это изоморфизм. В частности, Y_i — гладкая и имеет коразмерность i в точке (C,η,p,q).

3. *Если $(C,\eta,p,q)\in Y_1$, то дифференциалы из $d_\Lambda(\Lambda^2H^0(C,\eta(p+q)))$ имеют простые полюсы и индуцированный морфизм*
$$\Lambda^2H^0(C,\eta(p+q))\xrightarrow{d_\Lambda}\left(N^*_{Y_1/\mathcal{S}^{\mathrm{odd}}_{g,2}}\right)_{C,\eta,p,q}$$
в конормальное пространство Y_1 при (C,η,p,q) — это изоморфизм. В частности, Y_1 — гладкая и имеет коразмерность 3 в точке (C,η,p,q).

В дополнение к Теореме 3 мы доказываем, что геометрическая кратность схемы Y_i вдоль любой "диагональной" компоненты равна $i-1$ при всех $i \geq 2$:

Предложение 1. *Пусть $\Delta_g \subset \mathcal{S}_{g,2}^{\mathrm{odd}}$ обозначает подмножество точек вида (C, η, p, p). Пусть $i \geq 2$ — целое число и $\mathcal{U}$ — компонента Y_i^{red}, такая, что $\mathcal{U} \subset \Delta_g$. Тогда геометрическая кратность Y_i^{nice} вдоль $\mathcal{U}$ равна $i-1$.*

Далее мы предлагаем одно применение Теоремы 3, которое послужило мотивом для этой работы. Заметим, что проекции Y_1 и Y_3 на $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$ являются дивизорами на $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$, как показывают вычисления их размерностей, проделанные в Теореме 3. Образ Y_1 можно описать как

$$\mathrm{W}_g = \{(C, \eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \ \mid \ \exists p \in \mathrm{supp}(\eta), q \in C \text{ и} h^0(C, \eta(p-q)) \geq 2\}, \tag{3}$$

где $\mathrm{supp}(\eta)$ — это множество точек $p \in C$, таких, что $h^0(C, \eta(-p)) > 0$. Если $h^0(C, \eta) = 1$, то $h^0(C, \eta(p-q)) \geq 2$ означает, что линейная система $|\eta + p|$ имеет базовую точку. Исходя из этого, мы называем W_g "дивизором базовых точек".

Образ Y_3 совпадает с локусом

$$\{(C, \eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \ \mid \ \exists p \in \mathrm{supp}(\eta), q \in C \text{ и} h^0(C, \eta(p-3q)) > 0\}.$$

Если мы подставим $p = q$, то приведенное выше условие будет определять дивизор Υ_g:

$$\Upsilon_g = \{(C, \eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \ \mid \ \exists p \in \mathrm{supp}(\eta) \text{ и} h^0(C, \eta(-2p)) > 0\}. \tag{4}$$

В случае $p \neq q$ мы получаем еще один дивизор

$$\mathrm{Cau}_g = \overline{\{(C, \eta) \in \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}} \mid \ \exists p \in \mathrm{supp}(\eta), q \neq p \text{ и} h^0(C, \eta(p-3q)) > 0\}}. \tag{5}$$

Заметим, что если $h^0(C, \eta) = 1$, то $h^0(C, \eta(p-3q)) > 0$ означает, что линейная система $|\eta + p|$ имеет точку ветвления порядка 2 или больше. Следуя терминологии из [29], развитой в аналогичной ситуации для пространств Гурвица, мы называем Cau_g "дивизором каустики".

Пусть $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ обозначает компактифицированное пространство модулей (см. [9]) нечетных спинорных кривых, и пусть $\overline{\Upsilon}_g$, $\overline{\mathrm{W}}_g$ и $\overline{\mathrm{Cau}}_g$ обозначают замыкания Υ_g, W_g и Cau_g в $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$ соответственно. Как известно, $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$

является $\mathbb{Q}$-факториальным, так что мы можем говорить о классах $\overline{\Upsilon}_g$, $\overline{\mathrm{Cau}}_g$ и $\overline{\mathrm{W}}_g$ в рациональной группе Пикара $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$ пространства $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$. Также хорошо известно (см. [17, Следствие 1.3]), что при $g \geq 9$ группа $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$ порождается над $\mathbb{Q}$ классом Ходжа λ и классами граничных дивизоров $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1}$ (наши обозначения немного отличаются от используемых в [15]: если $j > g/2$, то наш класс α_j равен классу β_{g-j}, первоначально введенному Корналбой). Естественным образом возникает вопрос о вычислении коэффициентов разложений классов $\overline{\Upsilon}_g$, $\overline{\mathrm{Cau}}_g$ и $\overline{\mathrm{W}}_g$ через эти образующие. В случае $\overline{\Upsilon}_g$ ответ был получен Г. Фаркашем и А. Верра [15, Теорема 0.5], как мы уже упоминали выше.

Применяя формулу Портеуса, можно вычислить классы замыканий схем вырождений Y_1 и Y_3 в группе Чжоу $\overline{\mathcal{S}}_{g,2}^{\mathrm{odd}}$. Теорема 3 вместе с Предложением 1 позволяет вычислить геометрические кратности замыканий Y_1 и Y_3 в $\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}$, что в конечном итоге приводит к следующим формулам в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$ для любого $g \geq 3$:

$$
\begin{aligned}
2[\overline{\mathrm{W}}_g] = \frac{g^2+11g-6}{2}\lambda - \frac{g^2+3g-2}{8}\alpha_0 - (2g-2)\beta_0 - \\
- \sum_{j=1}^{g-1}(g-j)(g+3j-3)\alpha_j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\overline{\mathrm{Cau}}_g] = \frac{9g^2+179g-134}{2}\lambda - \frac{9g^2+59g-50}{8}\alpha_0 - (24g-22)\beta_0 - \\
- \sum_{j=1}^{g-1}(g-j)(9g+27j-19)\alpha_j.
\end{aligned}
$$

Детали этого вычисления еще не опубликованы.

Класс универсального дискриминанта на пространстве спектральных накрытий Хитчина

Результаты, представленные в этом разделе, опубликованы в статье [6].

Интегрируемые системы Хитчина возникают в результате размерной редукции самодвойственного уравнения Янга–Милса, см. [19], [20], [2]. Гамильтонианы системы Хитчина закодированы в так называемом *спектральном накрытии* $\widehat{\Sigma}$ (см. [10], [11]), которое представляет собой n-листное накрытие (гладкой или, более общо, стабильной) комплексной проективной кривой Σ, определяемой как подмногообразие $T^*\Sigma$:

$$\widehat{\Sigma} = \{(x,v) \in T^*\Sigma \ | \ P(v,x) = 0\}, \tag{6}$$

где

$$P(v,x) = v^n + q_1(x)v^{n-1} + \cdots + q_n(x), \tag{7}$$

q_j — это j-дифференциал на Σ (т.е. голоморфное сечение $K_\Sigma^{\otimes j}$). В терминах работы [10] уравнение, определяющее $\widehat{\Sigma}$, задается характеристическим многочленом $P(v,x) = \det(\Phi(x) - vI)$ так называемого поля Хиггса Φ на Σ.

Мы рассматриваем пространство модулей $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ спектральных накрытий Хитчина в случае $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ систем Хитчина, в котором все дифференциалы q_j считаются произвольными. Точка из $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ параметризует пару $(\Sigma, [P])$, где Σ — это кривая рода g, а P — многочлен вида (7), рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевую константу ξ, заданного правилом $(\xi \cdot P)(v,x) = \xi^n P(\xi^{-1}v, x)$. Как пространство $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ — это расслоение над компактификацией Деліня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_g$ пространства модулей кривых рода g. Слои этого расслоения изоморфны взвешенному проективному пространству.

Заметим, что если $n = 1$, то $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ совпадает с тотальным пространством проективизированного расслоения Ходжа над $\overline{\mathcal{M}}_g$, которое можно рассматривать как замыкание пространства модулей абелевых дифференциалов (рассматриваемых с точностью до мультипликативной константы) на гладких проективных кривых рода g. А. Кокотов и Д. Короткин [22] построили тау-функцию на этом пространстве модулей, названную тау-функцией Бергмана. В дальнейшем конструкция тау-функции Бергмана была обобщена на случай пространства модулей n-дифференциалов (см.[27] для $n = 2$ и [25] для $n > 2$). Это обобщение позволило получить новые соотношения в рациональной группе Пикара $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ для любого n [28] с помощью рассмотрения прообраза тау-функции Бергмана на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ при дискриминантном отображении; а именно, исследование свойств тау-функции Бергмана на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ позволило выразить класс полного дискриминантного локуса в рациональной группе Пикара $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ через набор стандартных образующих (см. Теорему 4). Используя стандартные методы алгебраической геометрии, мы уточняем этот результат следующим образом.

Пусть Σ — гладкая кривая рода g, а P — многочлен вида (7). Тогда дискриминант $W(x) = \mathrm{Discr}(P(\cdot, x))$ является $n(n-1)$-дифференциалом на Σ, а дивизор W равен дивизору ветвления спектрального накрытия $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$, ассоциированного с P. При общем выборе параметров все нули W оказываются простыми, что означает, что $\widehat{\Sigma}$ гладкая, а накрытие $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ имеет лишь простые ветвления. Когда два нуля W склеиваются, локальная структура отображения $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ изменяется одним из следующих трех способов (мы следуем терминологии [28] в этом описании):

1) Нодальная особенность (нормальное самопересечение $\widehat{\Sigma}$) возникает в точке ветвления $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ над двойным нулем W. Локус, параметризующий такие накрытия, мы называем **"траничным локусом"**.

2) Две различные точки ветвления $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ возникают в прообразе двойного нуля W. Мы называем локус таких накрытий **"стратом Максвелла"**.

3) Две точки ветвления $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ склеиваются, образуя точку ветвления порядка 3 над нулем W кратности два. Мы называем локус таких накрытий **"каустикой"**.

Мы используем терминологию "страт Максвелла" и "каустика" в соответствии с терминологией, традиционной для школы В. Арнольда, см., например, [29].

Соответствие $P \mapsto \mathrm{Discr}(P)$ определяет отображение $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ в пространство модулей пар (Σ, W), где W — $n(n-1)$-дифференциал на Σ, рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевую константу. Пусть $P\overline{D}_W$ обозначает прообраз дивизора, состоящего из тех W, у которых есть хотя бы один кратный ноль. Носитель $P\overline{D}_W$ состоит из объединения трех компонент $P\overline{D}_W^{(b)} \cup P\overline{D}_W^{(m)} \cup P\overline{D}_W^{(c)}$ в соответствии с тремя возможностями, описанными выше. Мы называем дивизор $P\overline{D}_W$ *полным дискриминантным локусом.* Класс дивизора $P\overline{D}_W$ в рациональной группе Пикара $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$ называется *классом универсального дискриминанта Хитчина.* Следующая теорема доказана в [28, Теорема 3.2]:

Теорема 4. *Дивизор $P\overline{D}_W$ удовлетворяет соотношению*

$$P\overline{D}_W = P\overline{D}_W^{(b)} + 2P\overline{D}_W^{(m)} + 3P\overline{D}_W^{(c)},$$

а класс $P\overline{D}_W$ в $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ выражается через стандартные образу-

ющие $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ *следующим образом:*

$$[P\overline{D}_W] = n(n-1)\Big((n^2-n+1)(12\lambda-\delta) - 2(g-1)(2n^2-2n+1)\phi\Big).$$

Здесь $\delta = \sum_{j=0}^{[g/2]} \delta_j$ — это прообраз класса границы Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_g$, класс ϕ — это тавтологический класс, связанный с естественным действием $\mathbb{C}^*$ на $\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$, а λ — это прообраз класса Ходжа с $\overline{\mathcal{M}}_g$. Напомним, что если $\nu : \overline{\mathcal{M}}_{g,1} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ — универсальная кривая, то класс Ходжа определяется как $c_1(\nu_*\omega_\nu)$, где ω_ν — относительный дуализирующий пучок.

Мы обобщаем этот результат, выражая класс каждой из трех компонент полного дискриминантного дивизора через набор образующих $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$:

Теорема 5. *Пусть* $n \geq 3$ *и* $g \geq 1$*. В* $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ *имеют место следующие соотношения:*

$$[P\overline{D}_W^{(b)}] = n(n-1)\Big((n+1)(12\lambda-\delta) - 2(g-1)(2n+1)\phi\Big),$$
$$[P\overline{D}_W^{(m)}] = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}\Big(12\lambda-\delta-4(g-1)\phi\Big),$$
$$[P\overline{D}_W^{(c)}] = n(n-1)(n-2)\Big(12\lambda-\delta-4(g-1)\phi\Big).$$

В качестве второго результата мы выводим соотношение, связывающее два класса Ходжа на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$. Заметим, что, поскольку степень накрытия $\widehat{\Sigma} \to \Sigma$ равна n, а степень дивизора ветвления равна $\deg \mathrm{div}(W) = 2n(n-1)(g-1)$, род $\widehat{\Sigma}$ равен $\widehat{g} = g(\widehat{\Sigma}) = n^2(g-1)+1$. Таким образом, у нас есть два морфизма $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ и $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)} \to \overline{\mathcal{M}}_{\widehat{g}}$, где первый морфизм сопоставляет $(\Sigma,[P])$ модули кривой Σ, а второй сопоставляет $(\Sigma,[P])$ модули $\widehat{\Sigma}$. Поднимая класс Ходжа вдоль второго морфизма, мы получаем второй класс Ходжа $\widehat{\lambda}$ на $P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}$.

Теорема 6. *Пусть* $n \geq 3$ *и* $g \geq 1$*. В* $\mathrm{Pic}(P\overline{\mathfrak{M}}_g^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}$ *выполняется следующее соотношение:*

$$\widehat{\lambda} = n(2n^2-1)\lambda - \frac{n(n-1)(4n+1)(g-1)}{6}\phi - \frac{n(n^2-1)}{6}\delta.$$

Заключение

Сформулируем еще раз основные результаты, представленные в диссертации, и кратко обсудим возможные пути дальнейшего развития.

Аналитический вывод соотношений Фаркаша. В качестве первого основного результата представлен аналитический вывод соотношений для классов $[\overline{\Upsilon}_g]$ и $[\Theta_{\mathrm{null}}]$ в $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{odd}}) \otimes \mathbb{Q}$ и $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{S}}_g^{\mathrm{even}}) \otimes \mathbb{Q}$ соответственно. Последнее соотношение выводится при помощи стандартного применения теории тэта-функций, первое же соотношение выводится из свойств тау-функции Бергмана. Идея использовать тау-функцию для вывода соотношений в группах Пикара принадлежит Зографу и Короткину; с использованием этого метода было получено немало различных результатов. Заметим, что тау-функция Бергмана строится аналитически, как решение некоторого дифференциального уравнения, хотя сечение, которое получается из тау-функции, алгебраическое. Возникает естественный вопрос, нельзя ли найти альтернативное алгебраическое определение тау-функции Бергмана. Это, среди прочего, мотивирует изучать тау-функцию Бергмана как сечение детерминантного расслоения — возможно, такой подход позволит использовать формализм [21]. Как минимум, автор уверен, что интерпретации тау-функции Бергмана, как сечения детерминантного расслоения Сегала–Вилсона, можно придать строгий смысл, если правильно переделать аргументацию Палмера [31]. Подтверждением этому в частности являются эвристики, представленные автором, некоторый аналог которых работает для изомонодромной тау-функции.

Локусы вырождений на пространстве $\mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$. Как уже упоминалось, описание локальной геометрии локусов X_i и Y_i мотивировано изучением дивизоров каустики и базовых точек. Отметим, что с аналитической точки зрения локусы X_i и Y_i, $i \geq 2$, соответствуют некоторым стратам в пространствах модулей голоморфных и мероморфных дифференциалов соответственно. В терминах, введенных в основном тексте диссертации, локус X_i совпадает с замыканием образа $\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}(2i, 2, \ldots, 2) \to \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$, а локус Y_i — с замыканием образа $\mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}(2(i-1), 2 \ldots, 2) \cup \mathcal{H}_g^{\mathrm{odd}}(-2, 2i, 2, \ldots, 2) \to \mathcal{S}_g^{\mathrm{odd}}$.

Из этого наблюдения, например, следует, что дивизор каустики неприводим — действительно, все упомянутые выше страты связны, как мы знаем благодаря работам [8], [24], так что неприводимость следует из Теоремы 3. Несмотря на это, мы не можем ничего сказать про дивизор базовых точек, поскольку Y_1 не имеет такой интерпретации, как выше. Однако, вполне вероятно, что его неприводимость тоже можно доказать, используя теорию плоских поверхностей и явное описание конормального пространства, полученное автором.

Также отметим, что вопрос о коразмерностях локусов $\mathcal{S}_g^r$ все еще остается открытым.

Класс универсального дискриминанта на пространстве спектральных накрытий Хитчина. Наконец, мы выводим соотношения в рациональной группе Пикара пространства модулей спектральных накрытий Хитчина для компонент универсального дискриминанта. Это делается алгебраическими методами; до этого соотношение для полного класса универсального дивизора было получено Зографом и Короткиным [28] с помощью тау-функции Бергмана. Отметим, что все вышеупомянутые формулы получены в случае $\mathrm{GL}(n)$ спектральных накрытий. Также, результаты Короткина и Зографа были обобщены на случай $\mathrm{Sp}(2n)$ в работе [4]; мы не сомневаемся, что и результаты соискателя тоже могут быть легко обобщены на этот случай. Представляет интерес дальнейшее обобщение этих формул на случай других линейных групп. Отметим, что в произвольном случае даже сама классификация компонент класса универсального дискриминанта может представлять интерес.

Литература

[1] Enrico Arbarello and Maurizio Cornalba. The Picard groups of the moduli spaces of curves. *Topology*, 26(2):153–171, 1987.

[2] Michael F. Atiyah. Riemann surfaces and spin structures. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Ser. 4, 4(1):47–62, 1971.

[3] Matt Bainbridge, Dawei Chen, Quentin Gendron, Samuel Grushevsky, and Martin Moeller. Strata of k-differentials. *Algebraic Geometry*, 6(2):196–233, 2019.

[4] Michael Lee Baker. Class of discriminant for $\mathrm{Sp}(2n)$ Hitchin spectral covers. arXiv:2005.05644.

[5] Mikhail Basok. Tau Function and Moduli of Spin Curves. *International Mathematics Research Notices*, 2015(20):10095–10117, 2015.

[6] Mikhail Basok. Discriminant and Hodge classes on the space of Hitchin covers. *Letters in Mathematical Physics*, 110:2659–2674, 2020.

[7] Mikhail Basok. On some degeneracy loci in the moduli space of pointed odd spin curves. *Алгебра и Анализ*, 32(5):1–36, 2020.

[8] Corentin Boissy. Connected components of the strata of the moduli space of meromorphic differentials. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 90(2):255–286, 2015.

[9] Maurizio Cornalba. Moduli of curves and theta-characteristics. In *Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987)*, pages 560–589. World Sci. Publ., 1989.

[10] Ron Donagi. Spectral covers. In *Volume 28 of MSRI Series*, pages 65–86. Cambridge University Press, 1995.

[11] Ron Donagi and Eyal Markman. Spectral covers, algebraically completely integrable, hamiltonian systems, and moduli of bundles. In Mauro Francaviglia and Silvio Greco, editors, *Integrable Systems and Quantum Groups: Lectures given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993*, pages 1–119. Springer Berlin Heidelberg, 1996.

[12] Alex Eskin, Maxim Kontsevich, and Anton Zorich. Sum of Lyapunov exponents of the Hodge bundle with respect to the Teichmüller geodesic flow. *Publ.math.IHES*, 120:207–333, 2014.

[13] Gavril Farkas. Gaussian maps, Gieseker-Petri loci and large theta-characteristics. *J. reine angew. Math.*, 581:151–173, 2005.

[14] Gavril Farkas. The birational type of the moduli space of even spin curves. *Advances in Mathematics*, 223:433–443, 2010.

[15] Gavril Farkas and Alessandro Verra. The geometry of the moduli space of odd spin curves. *Annals of Mathematics*, 180(3):927–970, 2014.

[16] Gerard Geer and Alexis Kouvidakis. The Hodge bundle on Hurwitz spaces. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 7(4):1297–1308, 2011.

[17] John Harer. The rational Picard group of the moduli space of Riemann surfaces with spin structure. In *Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces (Gottingen, 1991/Seattle, WA, 1991)*, volume 150, pages 107–136. Contemp. Math., 1993.

[18] Joe Harris and David Mumford. On the Kodaira dimension of the moduli space of curves. *Inventiones mathematicae*, 67(1):23–86, 1982.

[19] Nigel Hitchin. The self-duality equations on a Riemann surface. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3-55(1):59–126, 1987.

[20] Nigel Hitchin. Stable bundles and integrable systems. *Duke Math. J.*, 54(1):91–114, 1987.

[21] Finn Knudsen and David Mumford. The projectivity of the moduli space of stable curves I: Preliminaries on “det” and “div”. *Mathematica Scandinavica*, 39:19–55, 1976.

[22] Aleksey Kokotov and Dmitry Korotkin. Tau-functions on spaces of Abelian differentials and higher genus generalizations of Ray–Singer formula. *J. Differential Geom.*, 82(1):35–100, 2009.

[23] Alexey Kokotov, Dmitry Korotkin, and Peter Zograf. Isomonodromic tau function on the space of admissible covers. *Advances in Mathematics*, 227:586–600, 2011.

[24] Maxim Kontsevich and Anton Zorich. Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities. *Invent. math.*, 153:631–678, 2003.

[25] Dmitry Korotkin, Adrien Sauvaget, and Peter Zograf. Tau functions, Prym-Tyurin classes and loci of degenerate differentials. *Math. Ann.*, 375:213–246, 2019.

[26] Dmitry Korotkin and Peter Zograf. Tau function and moduli of differentials. *Math. Res. Lett.*, 18(03):447–458, 2011.

[27] Dmitry Korotkin and Peter Zograf. Tau function and the Prym class. In Pierce VU Dzhamay A, Maruno K, editor, *Aalgebraic and geometric aspects of integrable systems and random matrices*, pages 241–261. American Mathematical Society, 2013.

[28] Dmitry Korotkin and Peter Zograf. Tau functions, Hodge classes, and discriminant loci on moduli spaces of Hitchin's spectral covers. *Journal of Mathematical Physics*, 59(9):091412, 2018.

[29] Sergei Lando and Alexander Zvonkin. *Graphs on Surfaces and Their Applications*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[30] David Mumford, John Fogarty, and Kirwan Frances. *Geometric Invariant Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, third edition, 1994.

[31] John Palmer. Determinants of Cauchy–Riemann operators as τ-functions. *Acta Applicandae Mathematica*, 18:199–223, 1990.

[32] Jonathan Wahl. Gaussian maps on algebraic curves. *J. Differential Geom.*, 32(1):77–98, 1990.