Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

На правах рукописи

Смоленский Андрей Вадимович

Факторизации и ширина групп Шевалле над маломерными кольцами

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, проф.
Вавилов Н. А.

Санкт-Петербург — 2015

Оглавление

Введение 3

1 Основные определения и конструкции 11
- 1.1 Группы Шевалле 11
- 1.2 Представления и уравнения 17
- 1.3 Условия стабильности 20

2 Ширина в элементарных образующих 24
- 2.1 Унитреугольные факторизации 24
  - 2.1.1 Унитарная группа нечетной размерности 25
  - 2.1.2 Группа Судзуки и большая группа Ри 29
  - 2.1.3 Малая группа Ри 32
- 2.2 Ширина главных конгруэнц-подгрупп 35
  - 2.2.1 Относительное разложение Гаусса 35
  - 2.2.2 Относительное разложение Басса—Кольстера 36
  - 2.2.3 Анализ групп малых рангов 39

3 Коммутаторная ширина 44
- 3.1 Фробениусовы клетки и их свойства 44
- 3.2 Построение разложения в коммутаторы 49
- 3.3 Варианты теоремы 3.1 55

4 Подсистемные факторизации 58
- 4.1 Произведения SL_2-подгрупп 58
  - 4.1.1 Классические группы 60
  - 4.1.2 Исключительные группы в микровесовых представлениях 61
  - 4.1.3 Группа типа E_8 63
  - 4.1.4 Исключительные группы с кратными связями 65
- 4.2 Произведения SL_n-подгрупп 66

Заключение 71

Список литературы 72

Введение

В настоящей диссертации изучаются факторизации и ширина линейных групп над маломерными кольцами по отношению к различным системам образующих. Изучаемые в диссертации группы это группы точек групповых схем Шевалле—Демазюра, а также их скрученные аналоги над полями, включая группы Судзуки и Ри.

Факторизацией группы называется разложение ее в произведение каких-либо заданных подгрупп (более общо, подмножеств). Дадим краткий обзор наиболее известных факторизаций линейных групп.

В теории групп Шевалле над полями наиболее важным является *разложение Брюа*

$$\mathrm{G}(\Phi, F) = \mathrm{B}(\Phi, F)\,\mathrm{N}(\Phi, F)\,\mathrm{U}(\Phi, F).$$

Здесь $\mathrm{B}(\Phi, F)$ — стандартная борелевская подгруппа, содержащая максимальный расщепимый тор $\mathrm{T}(\Phi, F)$ и имеющая унипотентный радикал $\mathrm{U}(\Phi, F)$, а $\mathrm{N}(\Phi, F)$ — (алгебраический) нормализатор $\mathrm{T}(\Phi, F)$.

Над полулокальными кольцами аналогом разложения Брюа является *разложение Гаусса* [17], также называемое *треугольной факторизацией* длины 3:

$$\mathrm{G}(\Phi, R) = \mathrm{B}(\Phi, R)\,\mathrm{U}^-(\Phi, R)\,\mathrm{U}(\Phi, R),$$

где $\mathrm{U}^-(\Phi, R)$ — унипотентный радикал стандартной борелевской подгруппы $\mathrm{B}^-(\Phi, R)$, противоположной $\mathrm{B}(\Phi, R)$.

Это разложение в действительности выполнено над произвольным кольцом стабильного ранга 1, но не для всей группы, а для ее элементарной подгруппы $\mathrm{E}(\Phi, R)$, см. [82]. Кроме треугольной факторизации можно также рассматривать *унитреугольную факторизацию* длины 4:

$$\mathrm{E}(\Phi, R) = \mathrm{U}(\Phi, R)\,\mathrm{U}^-(\Phi, R)\,\mathrm{U}(\Phi, R)\,\mathrm{U}^-(\Phi, R),$$

также имеющую место над произвольным кольцом стабильного ранга 1, см. [6].

Над кольцами большей размерности роль треугольных факторизаций выполняют *параболические факторизации*, из которых две наиболее известные это

– *Разложение Басса—Кольстера*

$$\mathrm{G}(\Phi, R) = \mathrm{G}(\Delta, R)\,\mathrm{U}(\Sigma, R)\,\mathrm{U}^-(\Sigma, R)\,\mathrm{U}(\Sigma, R)\,\mathrm{U}^-(\Sigma, R),$$

  где Δ и Σ это симметрическая и специальная части некоторого параболического множества корней $\Delta \cup \Sigma \subset \Phi$. Оно было впервые замечено в основополагающей работе Х. Басса [21] для полной линейной группы, а затем использовалось в вопросах сюръективной стабилизации K_1-функтора в работах М. Стайна [85], Е. Б. Плоткина [71], Л. Н. Васерштейна [7].

– *Разложение Денниса—Васерштейна*

$$\mathrm{G}(\Phi, R) = \mathrm{P}_\alpha \, \mathrm{U}^-_{\alpha\beta} \, \mathrm{P}_\beta,$$

где P_α, P_β — максимальные параболические подгруппы, отвечающие простым корням α и β, а $\mathrm{U}^-_{\alpha\beta}$ — пересечение унипотентных радикалов параболических подгрупп, противоположных P_α и P_β. Оно было впервые использовано К. Деннисом [34] и Л. Н. Васерштейном [9], а затем В. ван дер Калленом [51], А. А. Суслиным и М. С. Туленбаевым [13] для решения задачи о сюръективной стабилизации K_2 и инъективной стабилизации K_1, см. также обобщающую их работу М. Кольстера [54]. Варианты этого разложения исследовались в работах Н. А. Вавилова и С. С. Синчука [3–5, 76].

Параболические факторизации имеют место для колец, удовлетворяющих определенным условиям стабильности, близким к условию стабильного ранга. Для колец стабильного ранга 2 возможны, тем не менее, унитреугольные факторизации большей длины, однако они зависят от арифметических свойств кольца. Так, например, группы Шевалле над $\mathbb{Z}[1/p]$ и $\mathbb{Z}$ удовлетворяют (см. [6, 18, 28, 97])

$$\mathrm{G}(\Phi, \mathbb{Z}[1/p]) = \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}, \qquad \mathrm{G}(\Phi, \mathbb{Z}) = \underbrace{\mathrm{U}\,\mathrm{U}^- \dots \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-}_{40\ \text{множителей}}.$$

Факторизация групп Шевалле над $\mathbb{Z}$ служит первым шагов в получении оценок на константу Каждана в работах М. Бургера [27], Й. Шалома [74], М. Кассабова [53] и У. Хадада [44]. Вычисление константы Каждана используется, в свою очередь, в получении оценки времени работы «алгоритма замены произведений», позволяющего генерировать случайные элементы конечных групп [60].

С другой стороны, для некоторых колец топологического происхождения также известны оценки длины унитреугольных факторизаций. Так, если X — пространство Стейна размерности 1 или 2, то специальная линейная группа степени 2 над кольцом $\mathcal{O}(X)$ функций, голоморфных на X, допускает факторизацию длины 4 или 5 соответственно, и, таким образом, такое разложение имеет место для всех групп Шевалле над этим кольцом [49]. Аналогичные оценки известны и для некоторых других колец функций.

В общем же случае для колец стабильного ранга 2 никаких подобных разложений не существует. Это связано с тем, что существование унипотентной факторизации конечной длины эквивалентно *конечности ширины* по отношению к элементарным образующим $x_\alpha(\xi)$, а классический результат В. ван дер Каллена [52] показывает, что ширина $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}[x])$ бесконечна. Конечность ширины группы G по отношению к набору образующих X здесь понимается в смысле существования такой константы $N = W(G, X)$, что всякий элемент группы G

есть произведение не более чем N образующих из множества X и обратных к ним. Символически это можно записать как

$$G = \left(X \cup X^{-1} \cup \{1\}\right)^N .$$

Естественно рассматривать и другие системы образующих. Так, например, элементарная подгруппа $\mathrm{E}(\Phi, R)$ совершенна (за вычетом отдельных исключений в ранге 1 и 2), что позволяет изучать ее ширину относительно множества всех коммутаторов. К. Сёда показал [75], что каждый элемент специальной линейной группы над алгебраически замкнутым полем является коммутатором. Р. Томпсон установил [91], что над произвольным полем каждый элемент специальной линейной группы является произведением двух коммутаторов, и привел примеры элементов, не являющихся коммутаторами. Аналогичные вопросы исследовались для групп Ли. М. Гото [39] с помощью общего результата о плотных коммутантах в связных компактных топологических группах доказал, что компактные полупростые группы Ли имеют коммутаторную ширину 1. Там же он заметил, что в некомпактном случае множество не-коммутаторов имеет положительную коразмерность. С. Пасьенсье и Х.-Ч. Ванг доказали [70], что в действительности не-коммутаторов нет и в некомпактных полупростых группах Ли, а Р. Ри перенес их доказательство на случай связных полупростых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем [72]. Известно, что коммутаторная ширина вещественных групп Шевалле с полупростой максимальной компактной подгруппой не превосходит 2.

Множество работ посвященно коммутаторам в конечных простых группах типа Ли. Знаменитая гипотеза Оре [68] утверждает, что всякий элемент конечной простой группы является коммутатором. Для спорадических групп это проверяется на компьютере [66]. Для специальной линейной группы это показано еще в работах К.-Ч. Ценга и Ч.-Х. Су [50], Г. Виллари [96] и Р. Томпсона [91], а позже более простое доказательство получено в работе А. Сурура [83]. Для симплектической группы с помощью метода характеров гипотеза Оре доказана в работе Р. Гоу [40]. Позже в работе [41] он развил этот подход для групп других типов, но окончательного доказательства не получил. Завершено доказательство было в работе М. Либека, Э. О'Брайена, А. Шалева и Ф. Х. Тьепа [69]. Впоследсвие они перенесли этот результат и на некоторые квазипростые группы типа Ли [32].

Нельзя не отметить, что применять к данной задаче метод характеров, требующий во многих случаях весьма сложных компьютерных вычислений (авторы работы [69] сообщают, что им потребовалось несколько суток процессорного времени), требуется только для групп над маленькими полями. Для полей, содержащих по крайней мере 8 элементов, гипотеза Оре, как и связанная с ней гипотеза Томпсона о произведениях классов сопряженности, доказана в работах Э. Эллерса и Н. Л. Гордеева [35], развивающих идею А. Сурура [83]. Там доказано, более того, что в односвязных группах Шевалле над полем коммутатором является уже всякий нецентральный элемент, что сразу же дает коммутаторную ширину $\leqslant 2$. То, что центральный элемент не обязательно является коммутатором, известно в случае специальной линейной группы еще из работы Р. Томпсона [91]. Для конечных квазипростых групп Х. Блау указал полный список случаев, когда в группе есть центральный элемент, не являющийся коммутатором [25]. После работ Э. Эллерса и Н. Л. Гордеева [30, 35] основным техническим средством в таких вопросах выступает разложение Гаусса с предписанной полупростой частью. Позже в работах Н. Л. Гордеева и Я. Саксла [38] и Н. Авни, Т. Геландера, М. Кассабова и А. Шалева [98] было обнаружено, что заменяя центр группы на полную конгруэнц-подгруппу, такой же результат можно получить и для групп над произвольным локальным.

В работе Л. Н. Васерштейна и Э. Уэланд [94] было показано, что над [не обязательно коммутативным] кольцом R стабильного ранга 1 всякий элемент $\mathrm{E}(n, R)$ является произведением двух коммутаторов элементов из $\mathrm{GL}(n, R)$, а в работе Ф. Арлингхауса, Л. Н. Васерштейна и Хонг Ю [19] аналогичные результаты были доказаны для четных гиперболических унитарных групп (включают симплектическую и четную ортогональную группу) при чуть более сильном предположении на кольцо.

Как и в случае ширины по отношению к элементарным образующим, для колец стабильного ранга 2 в общем никаких подобных оценок не существует. Это показано в работе К. Денниса и Л. Н. Васерштейна [33]. В действительности это связано с тем, что над произвольным коммутативным кольцом в группе Шевалле чрезвычайно мало коммутаторов. А именно, в работах А. В. Степанова и А. С. Сиватского [78], А. В. Степанова и Н. А. Вавилова [88] и А. В. Степанова [87] (см. также обзор [31]) показано, что всякий коммутатор вида $[x, y]$, где $x \in \mathrm{G}(\Phi, R)$, а $y \in \mathrm{E}(\Phi, R)$, представляется в виде произведения не более N элементарных образующих, где константа N зависит только от системы корней Φ, но не от кольца R.

Основой для получения оценок коммутаторной ширины в работах [19, 94] служат треугольные факторизации. После работы О. И. Тавгеня [14] стало ясно, что треугольные факторизации являются одной из техник редукции к группам меньшего ранга, наравне с параболическими факторизациями. Естественным образом встает вопрос о том, нельзя ли исключить в редукционных теоремах множители, не лежащие в подсистемных подгруппах. Исследованию подсистемных факторизаций посвящено на удивление мало работ, отметим некоторые результаты:

- По всей видимости, первым утверждением про подсистемные факторизации является теорема об углах Эйлера, которая устанавливает разложение компактной группы Ли $\mathrm{SO}(3)$ в произведение трех копий $\mathrm{SO}(2)$. Аналогичные разложения (длины не более 5) установлены в работе Т. Миясаки, О. Сюкудзавы и И. Йокоты [65] для $\mathrm{SU}(3)$, $\mathrm{Sp}(3)$ и компактных групп типов F_4, E_6 и E_7.

- В работе М. Либека, Н. Николова и А. Шалева [58] в связи с приложениями к построению однородных семейств графов-экспендеров исследуются так называемые SL_2-факторизации конечных простых групп типа Ли, то есть разложения в произведение подгрупп типа $\mathrm{SL}(2, R) \cong \mathrm{G}(\mathsf{A}_1, R)$. Обычно рассматриваются *фундаментальные* SL_2, то есть отвечающие корневым подгруппам. Для групп нормальных (нескрученных) типов в работе [58] установлена оценка в $5\,|\Phi^+|$ множителей. В работе Н. А. Вавилова и Е. И. Ковача [2] замечено, что в действительности из разложения Брюа сразу следует оценка $3\,|\Phi^+|$ множителей. Чуть более подробный анализ показывает, что правильным контекстом для таких вопросов являются группы над областями Безу. В той же работе доказано, что для $\mathrm{SL}(n, R) \cong \mathrm{G}(\mathsf{A}_{n-1}, R)$ имеет место факторизация длины $2\,|\Phi^+|$, и намечен путь для получения такой же оценки в остальных случаях, что для некоторых классических групп проделано в дипломной работе Е. И. Ковача [12].

– В работе Н. Николова [67] исследуются факторизации в терминах подгрупп типа A_n максимального ранга и для классических групп над конечными полями доказывается оценка в 200 множителей.

Целью работы является получение аналогов известных результатов о ширине и факторизациях для групп Шевалле над маломерными кольцами, обобщение таких результатов на исключительные групп и конгруэнц-подгруппы, а также уточнение существующих оценок ширины и длин факторизаций.

Актуальность исследования проявляется в большом количестве работ многих известных математиков, посвященных вербальной ширине, факторизациям и связанным с этими вопросами приложениями.

Методы исследования. В работе используются методы линейной алгебры, техника весовых диаграмм и вычислений с элементарными образующими, а также явные уравнения на орбиту вектора старшего веса.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы в дальнейшем исследовании структуры линейных групп, в вопросах теории конечных и арифметических групп.

Положения, выносимые на защиту.

1. Доказано, что всякая конечная простая группа типа Ли в характеристике p есть произведение четырех своих силовских p-подгрупп.

2. Получены оценки ширины главных конгруэнц-подгрупп групп Шевалле над различными кольцами относительно множества образующих типа z_α.

3. Получены близкие к оптимальным оценки ширины групп Шевалле над кольцами стабильного ранга 1 по отношению к множеству коммутаторов.

4. Построены факторизации групп Шевалле над эрмитовыми кольцами в терминах подгрупп, изоморфных SL_2, более короткие, чем все известные ранее.

5. Показано, что четная спинорная группа $\mathrm{Epin}(2\ell, R)$ над кольцом R стабильного ранга 2 есть произведение 9 своих подгрупп, изоморфных $\mathrm{E}(\ell, R)$.

Достоверность результатов и апробация работы. Достоверность результатов обеспечивается их строгим математическим доказательством.

Результаты работы были изложены на следующих семинарах и конференциях: на Петербургском семинаре по алгебраическим группам (рук. проф. Н. А. Вавилов), на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре имени Д. К. Фаддеева, на Московско-Петербургском семинаре по маломерной математике (рук. С. В. Дужин), на международных конференциях «Ischia Group Theory» (2012, 2014).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [6, 77, 79–82]. В том числе одна работа [79] опубликована в международном журнале, входящем в базу данных Web of Science, и одна работа [6] опубликована до 30.11.2015 в отечественном журнале, входящем в список ВАК (перечень от 19 февраля 2010 г. № 6/6).

Результаты написанных в соавторстве работ [6, 82] получены совместно с Н. А. Вавиловым, которому также принадлежит общее руководство работой и введение, кроме результатов, относящихся к группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, которые получены Сури Б.

Работа [77] написана в соавторстве. В ней автору принадлежат разделы 4.2, 4.3 и 5.1, а результаты разделов 3.2 и 5.2 получены совместно.

Содержание работы. Кратко опишем содержание работы и приведем формулировки основных теорем.

В главе 1 кратко напоминаются основные определения и конструкции, связанные с группами Шевалле и их фундаментальными представлениями. В разделе 1.3 содержатся определения и основные факты, касающиеся понятия стабильного ранга, а также вводится новое понятие *относительного абсолютного стабильного ранга*, естественным образом возникающее при изучении конгруэнц-подгрупп ортогональных групп.

Глава 2 посвящена изучению ширины групп Шевалле и их скрученных аналогов по отношению к «элементарным образующим». В разделе 2.1, установлено существование унитреугольных факторизаций длины 4 для скрученных групп Шевалле над конечным полем. Это позволяет сформулировать следующий результат:

Теорема 2.2. *Всякая конечная простая группа типа Ли в характеристике p есть произведение четырех своих силовских p-подгрупп.*

Ранее М. Либеком и Л. Пибером [59] были получены факторизации длины 13 (также в работе Л. Бабаи, Н. Николова и Л. Пибера [20] была анонсирована оценка

5 множителей). Кроме того, сразу же после публикации препринта [81] появился препринт [64], где дается единообразное доказательство того же результата в терминах теории групп с BN-парой. Представленное там доказательство сводит задачу построения короткой унитреугольной факторизации к предложению 4.1 работы [30], доказательство которого, как и доказательство теоремы 2.2, состоит в анализе частных случаев и явном вычислении с матрицами.

В разделе 2.2 изучаются относительные версии параболических факторизаций Гаусса и Басса—Кольстера и их приложения к вопросам ограниченного порождения главных конгруэнц-подгрупп. А именно, доказывается

Теорема 2.5. *Пусть Φ — система корней, а I — идеал кольца R.*

1. *Если $\mathrm{sr}(I) = 1$, то $W(\mathrm{E}(\Phi, R, I), \mathcal{Z}(\Pi)) \leqslant 3|\Phi^+| + 2\,\mathrm{rk}(\Phi) - 1$;*

2. *Пусть p — простое число, $R = \mathbb{Z}[1/p]$, а Φ одна из классических систем корней. В предположении Обобщенной Гипотезы Римана имеют место оценки*

$$W(\mathrm{E}(\Phi, R, I), \mathcal{Z}(\Sigma_\ell^-)) \leqslant 3|\Phi^+| + 2\,\mathrm{rk}(\Phi) + 1, \text{ если } \Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{C}_\ell,$$
$$W(\mathrm{E}(\Phi, R, I), \mathcal{Z}(\Sigma_\ell^-)) \leqslant 4|\Phi^+| + \mathrm{rk}(\Phi) + 1, \quad \text{если } \Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{D}_\ell;$$

3. *Пусть $\mathcal{O}_S$ — дедекиндово кольцо арифметического типа в глобальном поле k, имеющем вещественное вложение. Предположим, что Φ классическая ранга $\geqslant 2$, тогда $W(\mathrm{G}(\Phi, \mathcal{O}_S, I), \mathcal{Z}(\Sigma_\ell^-))$ конечна.*

Здесь $\mathcal{Z}$ это определенное множество образующих вида $x_\alpha(\xi)$ или $z_\alpha(s,\xi)$.

Третье утверждение теоремы 2.5 является аналогом недавнего результата У. Хадада и Д. В. Морриса [45, теорема 1.6], который утверждает, что ширина $W(\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}, I), \mathcal{Z}(\Pi))$ конечна для любого идеала $I \trianglelefteq \mathbb{Z}$ и при любом $n \geqslant 3$. Доказательство в работе [45] имеет теоретико-модельный характер и не дает возможности установить явные оценки, но, с другой стороны, дает универсальную оценку для всех идеалов.

В главе 3 треугольные факторизации применяются для изучения ширины групп Шевалле по отношению к коммутаторам. А именно, доказывается следующая

Теорема 3.1. *Пусть Φ — система корней ранга $\geqslant 2$, а R — коммутативное кольцо стабильного ранга 1. Тогда элементарная группа Шевалле $E(\Phi, R)$ имеет коммутаторную ширину N, где*

– $N = 3$ *в случае* $\Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{F}_4$;

– $N = 4$ *в случае* $\Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{C}_\ell, \mathsf{D}_\ell, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$, $\ell \geqslant 3$;

– $N = 4$ *в случае* $\Phi = \mathsf{C}_2, \mathsf{G}_2$, *если 1 равна сумме двух обратимых элементов кольца R;*

– $N = 5$ *в случае* $\Phi = \mathsf{E}_6$.

Представленное доказательство почти единообразно и использует мало явных матричных вычислений, что позволяет обобщить результаты работ [19, 94] на спинорные и исключительные группы, для которых ранее не было известно никаких естественных оценок коммутаторной ширины.

Оценка ширины в случае E_6 выглядит неоптимальной, но как и в других случаях, на данный момент не видно способов ее улучшить. Получение более точных оценок является непростой задачей даже для конкретных локальных колец, таких как кольцо целых p-адических чисел, для которых имеются лишь частичные результаты [98]. В работе [98] также показано, что существует такое конечное локальное кольцо R, что группа $\mathrm{SL}(n, R)$ имеет коммутаторную ширину ровно 2. В действительности центральный элемент не обязательно является коммутатором уже над полем [91].

В главе 4 изучаются подсистемные факторизации. Сначала из параболических факторизаций в предположении на стабильный ранг выводятся оценки на длину SL_2-факторизаций. Затем в разделе 4.1 изучаются SL_2-факторизации над кольцами Безу.

Теорема 4.2. *Пусть* Φ *— система корней,* R *— эрмитово кольцо, и в случае* $\Phi \neq \mathsf{A}_\ell, \mathsf{C}_\ell$ *предположим дополнительно, что* R *является областью целостности. Тогда* $\mathrm{G}(\Phi, R)$ *есть произведение не более* $|\Phi| - \mathrm{rk}\,\Phi$ *фундаментальных* $\mathrm{SL}(2, R)$.

Наконец, в разделе 4.2 доказывается значительно более точный и более общий аналог теоремы Николова в случае D_ℓ.

Теорема 4.3. *Предположим, что* $\mathrm{sr}(I) \leqslant 2$. *Тогда элементарная спинорная группа* $\mathrm{Epin}_{2\ell}(R, I) = \mathrm{E}(\mathsf{D}_\ell, R, I)$ *является произведением* 9 *своих подгрупп типа* $\mathsf{A}_{\ell-1}$.

Результаты раздела 4.2 и лемма 1.8 получены совместно с С. С. Синчуком.

1. Основные определения и конструкции

В данной главе напоминаются основные определения и конструкции, связанные с группами Шевалле, их представлениями и условиями стабильности. В разделе 1.1 определяются группы Шевалле, элементарные подгруппы и различные их элементы, конгруэнц-подгруппы и их элементарные аналоги. В разделе 1.2 даются определения, связанные с представлениями групп Шевалле, фиксируется нумерация весов представлений, даются явные формулы для элементарных корневых унипотентов в векторных представлениях классических групп, а также напоминаются уравнения на элемент орбиты старшего веса. В разделе 1.3 определяется условие стабильного ранга, вводится новое условие относительного абсолютного стабильного ранга, а также напоминаются определение эрмитовых колец и их свойства.

1.1. Группы Шевалле

Пусть $\Phi \subset \mathbb{R}^\ell$ — приведенная неприводимая система корней ранга ℓ, в которой выделен набор простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$, занумерованных как в [26]. Мы обозначаем коэффициенты в разложении по простым корням через m_i, то есть $\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} m_i(\alpha)\alpha_i$. Как обычно, $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$, где (α, β) — скалярное произведение на $\mathbb{R}^\ell$. Простые отражения σ_α определяются формулой $\beta \mapsto \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$, а порожденная ими группа называется группой Вейля системы корней Φ и обозначается $\mathrm{W}(\Phi)$.

Обозначим через $\varpi_1, \ldots, \varpi_\ell$ фундаментальные веса Φ, то есть векторы, определяемые условием $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$, где $\alpha^\vee = \frac{\alpha}{2(\alpha,\alpha)}$. Определим решетку весов как $P(\Phi) = \mathbb{Z}\varpi_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\varpi_\ell$ и подрешетку корней как $Q(\Phi) = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\alpha_\ell$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли типа Φ, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, а $g = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ — корневое разложение. Для любого элемента $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ можно выбрать $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ так, что тройка x, y и $h_\alpha = [x, y] \in \mathfrak{h}$ образуют стандартный базис подалгебры $\mathfrak{sl}_2$. В $\mathfrak{g}$ можно выбрать *базис Шевалле*, то есть набор векторов $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$, и $h_i = h_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}$, $i = 1, \ldots, \ell$, для которого выполнены соотношения

1. $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$ для любого $\alpha \in \Phi$,

2. Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, $[e_\alpha, e_\beta] = c_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$, то $c_{\alpha\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$.

Для такого базиса автоматически все структурные константы являются целыми числами.

Пусть $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}(V)$ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$. Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ определим весовое подпространство как

$$V^\lambda = \{v \in V \mid \pi(h)v = \lambda(h)v \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Если $V^\lambda \neq 0$, λ называется весом представления π, а размерность весового подпространства — кратностью данного веса $\mathrm{mult}(\lambda)$. Обозначим через $\Lambda(\pi)$ мультимножество весов, где каждый вес λ появляется в этом наборе $\mathrm{mult}(\lambda)$ раз. Множество ненулевых весов будем обозначать $\Lambda^*(\pi)$.

Пусть $P = P(\pi)$ — решетка весов данного представления, то есть подрешетка $P(\Phi)$, порожденная $\Lambda(\pi)$. В частном случае присоединенного представления $\pi = \mathrm{ad}$ имеем $P = Q(\Phi)$.

Вес $\lambda \in \Lambda(\pi)$ называется *старшим весом*, а вектор $v^+ \in V^\lambda$, если $\pi(e_\alpha)v^+ = 0$ для любого $\alpha \in \Phi^+$.

Неприводимое представление π называется *базисным*, если группа Вейля $\mathrm{W}(\Phi)$ действует транзитивно на множестве ненулевых весов $\Lambda^*(\pi)$. Это условие эквивалентно следующему: для каждой пары весов λ, μ, разность которых $\alpha = \lambda - \mu$ является простым корнем, выполнено $\mu = \sigma_\alpha(\lambda)$. Ненулевые веса базисных представлений имеют кратность 1, а кратность нулевого веса равна числу элементов множества $\Delta(\pi) = \Lambda(\pi) \cap \Pi$. По этой причине мы будем обозначать нулевые веса через $\widehat{\alpha}_i$, $\alpha_i \in \Delta(\pi)$. Если у представления нет нулевых весов, оно называется *микровесовым*.

Теорема Шевалле—Ри утверждает, что в каждом конечномерном $\mathfrak{g}$ модуле V можно выбрать $\mathbb{Z}$-подмодуль $V_\mathbb{Z}$, инвариантный относительно действия $\pi\left(e_\alpha^m/m!\right)$, $\alpha \in \Phi$, $m \in \mathbb{N}$, и раскладывающийся в прямую сумму своих весовых компонент $V_\mathbb{Z} \cap V^\lambda$. Такая решетка называется *допустимой формой* модуля V, а базис v^λ модуля $V_\mathbb{Z}$, для которого любой вектор $\pi\left(e_\alpha^m/m!\right) v^\lambda$ является целочисленной линейной комбинацией базисных, называется *допустимым базисом*.

Пусть теперь R — коммутативное кольцо, положим $V_R = V_\mathbb{Z} \otimes R$. Свободный R-модуль V_R является $\mathfrak{g}_R$-модулем и называется *модулем Вейля*.

Пусть $G = G_\mathbb{C}$ — связная полупростая адгебраическая группа над $\mathbb{C}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и решеткой весов P, а $\mathbb{C}[G]$ — аффинная алгебра G. Групповая страктура на G индукцирует структуру алгебры Хопфа на $\mathbb{C}[G]$. Для представления $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ (ему отвечает дифференциал $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$) выбор допустимого базиса позволяет отождествить $V \cong \mathbb{C}^n$, а тогда ограничения стандартных координатных функций порождают подкольцо $\mathbb{Z}[G] < \mathbb{C}[G]$, также являющееся алгеброй Хопфа. Определим *групповую схему Шевалле—Демазюра*

$$\mathrm{G}_P(\Phi, \cdot\,) \coloneqq \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}[G], \cdot\,).$$

Значение $\mathrm{G}_P(\Phi, R)$ на коммутативным кольце R называется *группой Шевалле* типа Φ над R. С точностью до изоморфизма этот функтор не зависит от представления π. Мы будем опускать в обозначениях P, имея в виду, что $P = P(\Phi)$, то есть будем рассматривать односвязные группы.

Зафиксируем расщепимый максимальный тор $\mathrm{T}_P(\Phi, \cdot\,)$, действующий диагонально на v_λ, тогда

$$\mathrm{T}_P(\Phi, R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_\ell, \lambda_\ell^{-1}], R) \cong \mathrm{Hom}(P, R^*),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ — некоторый базис решетки P.

Поскольку каждый из операторов $\pi(e_\alpha)$ нильпотентен, можно определить для каждого $\xi \in \mathbb{C}$

$$x_\alpha(\xi) = \exp(\xi\pi(e_\alpha)) = 1 + \xi\pi(e_\alpha) + \xi^2\frac{\pi(e_\alpha^2)}{2!} + \xi^3\frac{\pi(e_\alpha^3)}{3!} + \dots$$

Так как базис v_λ является допустимым, таким же образом можно определить $x_\alpha(\xi) \in \mathrm{GL}(V_R)$ для каждого $\xi \in R$. Такое преобразование называется *элементарным корневым унипотентом* и определяет морфизм групповых схем $\mathrm{X}_\alpha\colon \mathbb{G}_a \to \mathrm{G}(\Phi, \cdot\,)$. Мы будем часто обозначать $\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_\alpha(R) = \langle x_\alpha(\xi), \xi \in R\rangle$ и называть эту подгруппу *корневой подгруппой*. Подгруппу, порожденную всеми X_α, будем называть *элементарной подгруппой* группы Шевалле $\mathrm{G}(\Phi, R)$ и обозначать $\mathrm{E}(\Phi, R)$.

Элементарные корневые унипотенты, кроме аддитивности, удовлетворяют также *коммутационной формуле Шевалле*: для любых таких корней α, β, что $\alpha \neq -\beta$, выполнено

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\zeta)] = \prod_{\substack{i\alpha+j\beta\in\Phi\\ i,j>0}} x_{i\alpha+j\beta}\left(N_{\alpha\beta ij}\cdot\xi^i\zeta^j\right), \quad \xi, \zeta \in R.$$

Целые числа $N_{\alpha\beta ij}$ не зависят от ξ, ζ. Для систем корней с простыми связями (A_ℓ, D_ℓ, E_ℓ) эти числа всегда равны ±1, а для систем с двойными связями (B_ℓ, C_ℓ, F_4) они также могут быть равны ±2 (и ±2 или ±3 для G_2).

Для $\varepsilon \in R^*$ определим $w_\alpha(\varepsilon) = x_\alpha(\varepsilon)x_{-\alpha}(-\varepsilon^{-1})x_\alpha(\varepsilon)$. При $\mathrm{rk}(\Phi) \geqslant 2$ выполнены следующие соотношения:

$$w_\alpha(\varepsilon)x_\beta(\xi)w_\alpha(\varepsilon)^{-1} = x_{\sigma_\alpha\beta}\left(\eta_{\alpha,\beta}\cdot\varepsilon^{-\langle\beta,\alpha\rangle}\xi\right), \tag{1.1}$$

$$w_\alpha(\varepsilon) = w_{-\alpha}(-\varepsilon^{-1}), \tag{1.2}$$

где коэффициенты $\eta_{\alpha,\beta} = \pm1$ (см. [95, §13] для детального обсуждения $\eta_{\alpha,\beta}$).

Определим также $h_\alpha(\varepsilon) = w_\alpha(\varepsilon)w(-1)$. Тогда

$$w_\alpha(\varepsilon)h_\beta(\omega)w_\alpha(\varepsilon)^{-1} = h_{\sigma_\alpha\beta}(\omega), \tag{1.3}$$
$$h_\alpha(\varepsilon)x_\beta(\xi)h_\alpha(\varepsilon)^{-1} = x_\beta\left(\varepsilon^{\langle\beta,\alpha\rangle}\xi\right), \tag{1.4}$$
$$h_\alpha(\varepsilon)w_\beta(\omega)h_\alpha(\varepsilon)^{-1} = w_\beta\left(\varepsilon^{\langle\beta,\alpha\rangle}\omega\right). \tag{1.5}$$

Обозначим $\mathrm{H}(\Phi, R) = \langle h_\alpha(\varepsilon) \mid \alpha \in \Phi,\ \varepsilon \in R^*\rangle$ элементарную часть тора, которая в односвязном случае совпадает со всем тором $\mathrm{T}(\Phi, R)$. В общем же случае $\mathrm{H}_P(\Phi, R) = \mathrm{T}_P(\Phi, R) \cap \mathrm{E}_P(\Phi, R)$.

Определим также $\mathrm{N}_0(\Phi, R) = \langle w_\alpha(\varepsilon) \mid \alpha \in \Phi,\ \varepsilon \in R^*\rangle$. В односвязном случае эта группа совпадает с группой точек алгебраического нормализатора тора $\mathrm{N}(\Phi, R)$. Вообще же она может быть строго меньше, но в любом случае

$$\mathrm{N}(\Phi, R)/\,\mathrm{T}(\Phi, R) \cong \mathrm{N}_0(\Phi, R)/\,\mathrm{H}(\Phi, R) \cong \mathrm{W}(\Phi).$$

Расширенной группой Вейля $\widetilde{\mathrm{W}}(\Phi)$ называется подгруппа $\mathrm{G}(\Phi, R)$, порожденная всеми $w_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$. Если $2 \neq 0$ в кольце R, она совпадает с $\mathrm{N}(\Phi, \mathbb{Z})$. Это в точности расширение $C_2^\ell \hookrightarrow \mathrm{N}(\Phi, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{W}(\Phi)$, и действие образующих на ядре описывается формулой (1.3).

Мы называем множество корней $S \subseteq \Phi$ замкнутым, если для любых $\alpha, \beta \in S$, сумма которых является корнем, также $\alpha + \beta \in S$. Приведем два важных примера замкнутых множеств корней. Положим

$$\Sigma_k = \{\alpha \in \Phi \mid m_k(\alpha) \geqslant 1\}, \quad \Delta_k = \{\alpha \in \Phi \mid m_k(\alpha) = 0\}.$$

Множества Σ_k унипотентны (т.е. $S \cap -S = \varnothing$), а Δ_k симметричны (т.е. $S = -S$). Аналогичным образом вводятся обозначения $\Sigma_k^{=n}$, $\Sigma_k^{\leqslant n}$ и $\Sigma_k^{\geqslant n}$ (все они являются подмножествами Σ_k).

Более общо, каждому множеству простых корней $J \subseteq \Pi$ сопоставим множества корней

$$\Delta_J = \bigcap_{i \in J} \Delta_i, \quad \Sigma_J^\pm = \bigcup_{i \in J} \Sigma_i^\pm.$$

Мы часто опускаем фигурные скобки в обозначениях выше, так, например $\Delta_k = \Delta_{\{k\}}$ и $\Sigma_{i,j} = \Sigma_{\{i,j\}}$.

Множества всех положительных и всех отрицательных корней Φ^+ и Φ^- также являются замкнутыми и унипотентными.

Замкнутому множеству корней S сопоставим подгруппу

$$\mathrm{E}(S, R) = \langle x_\alpha(\xi) \mid \alpha \in S,\ \xi \in R\rangle$$

Кольцо R обычно ясно из контекста, поэтому мы будем опускать его в обозначениях. Если S унипотентно, мы будем иногда писать $\mathrm{U}(S)$ вместо $\mathrm{E}(S)$.

Унитреугольные подгруппы $\mathrm{U}\left(\Phi^{\pm}\right)$ обозначаются просто $\mathrm{U}^{\pm}$.

Для замкнутого унипотентного множества S группа $\mathrm{U}(S)$ раскладывается в произведение $\mathrm{U}(S) = \prod_{\alpha\in S} \mathrm{X}_\alpha$ своих корневых подгрупп в любом заранее выбранном порядке.

Каждому симметричному множеству корней $\Delta \subseteq \Phi$ отвечает, кроме элементарной подгруппы $\mathrm{E}(\Delta, R)$, также полупростая подгруппа $\mathrm{G}(\Delta, R) \leqslant \mathrm{G}(\Phi, R)$. Подгруппу, отвечающую подмножеству $\{\alpha, -\alpha\}$ типа A_1, мы будем обозначать G_α или, если $\alpha = \alpha_k$, просто G_k.

Подгруппа $\mathrm{U}(\Sigma_k)$ является унипотентным радикалом соответствующей параболической подгруппы P_k и элементарной параболической подгруппы $\mathrm{E}(\Delta_k \cup \Sigma_k)$. Разложение Леви утверждает, что $\mathrm{E}(\Delta_k \cup \Sigma_k)$ является полупрямым произведением своей подгруппы Леви $\mathrm{E}(\Delta_k)$ и своей нормальной подгруппы $\mathrm{U}(\Sigma_k)$.

Пусть теперь $I \trianglelefteq R$ — идеал в кольце. Каноническая проекция $R \to R/I$ индукцирует гомоморфизм $\mathrm{G}(\Phi, R) \to \mathrm{G}(\Phi, R/I)$. Его ядро называется *главной конгруэнц-подгруппой* и обозначается $\mathrm{G}(\Phi, R, I)$. Вопреки обозначению, эта группа не зависит от объемлющего кольца R, а зависит только от самого идеала I, рассматриваемого как кольцо без единицы.

Определим также $\mathrm{E}(\Phi, I) = \langle x_\alpha(\xi) \mid \alpha \in \Phi,\, \xi \in I\rangle$. Эта подгруппа не является нормальной в $\mathrm{E}(\Phi, R)$, поэтому она не может считаться правильным элементарным аналогом главной конгруэнц-подгруппы. Поэтому обычно рассматривается ее нормальное замыкание $\mathrm{E}(\Phi, R, I) = \mathrm{E}(\Phi, I)^{\mathrm{E}(\Phi, R)}$, называемое *относительной элементарной группой*.

Обозначим $z_\alpha(s, \xi) = x_\alpha(s)^{x_{-\alpha}(\xi)}$. Следующий результат Л. Н. Васерштейна и Ж. Титса описывает образующие $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$ (см., например, [93, Теорема 2]).

Теорема 1.1. *Пусть Φ — система корней ранга $\geqslant 2$, тогда относительная элементарная группа $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$ порождается элементами $z_\alpha(s, \xi)$, $\alpha \in \Phi$, $s \in I$, $\xi \in R$.*

Для замкнутого множества корней Σ положим

$$\begin{aligned} &\mathcal{X} = \{x_\alpha(s) \mid \alpha \in \Phi,\, s \in I\},\\ &\mathcal{Z}(\Sigma) = \mathcal{X} \cup \{z_\alpha(s, \xi) \mid \alpha \in \Sigma,\, s \in I,\, \xi \in R\}. \end{aligned}$$

Теорему 1.1 можно уточнить следующим образом.

Теорема 1.2 ([86, Теорема 3.4])**.** *Пусть Φ система корней ранга $\geqslant 2$, а $J \subseteq \Pi$ — некоторое множество простых корней. Тогда $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$ как абстрактная группа порождается $\mathcal{Z}(\Sigma_J)$.*

Обозначим

$$\mathrm{H}(\Phi, R, I) = \mathrm{H}(\Phi, R) \cap \mathrm{G}(\Phi, R, I) = \langle h_\alpha(\varepsilon),\, \alpha \in \Phi,\, \varepsilon \in R^* \cap (1 + I)\rangle.$$

Лемма 1.1. $\mathrm{H}(\Phi, R, I)$ *является подгруппой* $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$.

Доказательство. Положим $\varepsilon = 1 + s$ для какого-то $s \in I$, и перепишем

$$h_\alpha(1+s) = x_\alpha\left(-1\right) x_{-\alpha}\bigl(-s\bigr)\, x_\alpha\bigl((1+s)^{-1}\bigr)\, x_{-\alpha}\bigl(s(1+s)\bigr) = \\ = x_\alpha\left((1+s)^{-1}-1\right) z_{-\alpha}\bigl(-s, (1+s)^{-1}\bigr)\, x_{-\alpha}\bigl(s(1+s)\bigr)\,.$$

Остается заметить, что $(1+s)^{-1} \in 1+I$, так что все множители лежат в $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$. $\square$

Отметим также следующий классический результат (см., например, [86, следствие 3.3]).

Лемма 1.2. *Пусть* Φ *— система корней ранга* $\geqslant 2$*,* R *— коммутативное кольцо, а* $I \trianglelefteq R$ *— его идеал. Если* $\Phi \neq \mathsf{C}_\ell$*, то* $\mathrm{E}\left(\Phi, R, I^2\right) \leqslant \mathrm{E}(\Phi, I)$*, в противном случае* $\mathrm{E}\left(\Phi, R, II^{\boxed{2}}\right) \leqslant \mathrm{E}(\Phi, I)$.

Здесь $I^{\boxed{2}}$ обозначает идеал, порожденный квадратами a^2, где $a \in I$. Идеал I^2 же порождается произведениями вида ab по всем $a, b \in I$. Таким образом, $II^{\boxed{2}}$ порождается элементами вида a^2b для $a, b \in I$.

По теореме Таддеи [89] группа $\mathrm{E}(\Phi, R)$ нормальна в $\mathrm{G}(\Phi, R)$, если Φ — неприводимая система корней ранга $\geqslant 2$. Релятивизация Стайна [84] позволяет вывести из теоремы Таддеи, что при тех же предположениях относительная элементарная группа $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$ нормальна в $\mathrm{G}(\Phi, R, I)$. Это позволяет определить относительную K_1-группу посредством $\mathrm{K}_1(\Phi, R, I) = \mathrm{G}(\Phi, R, I)/\,\mathrm{E}(\Phi, R, I)$. В случае $I = R$ мы пишем $\mathrm{K}_1(\Phi, R)$ вместо $\mathrm{K}_1(\Phi, R, R)$.

В некоторых случаях известно, что группа $\mathrm{K}_1(\Phi, R, I)$ тривиальна. Например, $\mathrm{SK}_1(\ell+1, R) = \mathrm{K}(\mathsf{A}_\ell, R) = 1$ для любого кольца стабильного ранга 1 (см. раздел 1.3), в то время как для других систем корней может потребоваться более сильное условие стабильности, такое как $\mathrm{asr}(R) = 1$ или полулокальность. С другой стороны, для любого евклидова кольца R и любого идеала $I \trianglelefteq R$ группа $\mathrm{K}_1(\Phi, R, I)$ тривиальна для любого Φ.

Для колец главных идеалов, не являющихся евклидовыми, тривиальность K_1 может не иметь места [42, 48, 56]. Так, например, если S — мультипликативная система, порожденная всеми круговыми многочленами, то $R = S^{-1}\mathbb{Z}[x]$ — область главных идеалов, для которой $\mathrm{K}_1(R) \neq 1$.

Пусть k — глобальное поле, S — конечный набор нормирований поля k, содержащий все неархимедовы нормирования. Обозначим через $\mathcal{O}_S$ дедекиндово кольцо арифметического типа, определенное k и S, и пусть I — идеал кольца $\mathcal{O}_S$.

Теорема. *Пусть* Φ *— система корней ранга* $\geqslant 2$*. Предположим, что поле* k *имеет вещественное вложение. Тогда* $\mathrm{K}_1(\Phi, \mathcal{O}_S, I) = 1$.

Доказательство. Следует из [22, теорема 3.6] и [63, следствие 4.5]. $\square$

1.2. Представления и уравнения

Пусть π — базисное представление группы Шевалле $\mathrm{G}(\Phi, R)$ на модуле V. Лемма Мацумото [63, лемма 2.3] утверждает, что можно нормировать базис v^λ, $\lambda \in \Lambda^*(\pi)$, v^0_α, $\alpha \in \Delta(\pi)$ таким образом, что действие корневых унипотентов $x_\alpha(\xi)$ будет описываться следующими простыми формулами:

Если $\lambda \in \Lambda^*$, $\lambda + \alpha \notin \Lambda$, то	$x_\alpha(\xi) v^\lambda = v^\lambda$;
Если λ, $\lambda + \alpha \in \Lambda^*$, то	$x_\alpha(\xi) v^\lambda = v^\lambda \pm \xi v^{\lambda+\alpha}$;
Если $\alpha \notin \Lambda^*$, то	$x_\alpha(\xi) v^0 = v^0$ для любого $v^0 \in V^0$;
Если $\alpha \in \Lambda^*$, то	$x_\alpha(\xi) v^{-\alpha} = v^{-\alpha} \pm \xi v^0(\alpha) \pm \xi^2 v^\alpha$ и
	$x_\alpha(\xi) v^0 = v^0 \pm \xi \alpha_*(v^0) v^\alpha$.

Здесь $v^0(\alpha)$ это определенный унимодулярный элемент V^0, а α_* — некоторый унимодулярный элемент двойственного модуля $(V^0)^* = \mathrm{Hom}_R(V^0, R)$.

В случае, когда $\alpha \in \Pi$, а $v^0 = v^0_\alpha$, последние две формулы принимают более простой вид:

$$x_\alpha(\xi) v^0_\alpha = v^0_\alpha - 2\xi v^\alpha, \quad x_\alpha(\xi) v^{-\alpha} = v^{-\alpha} + \xi v^0_\alpha - \xi^2 v^\alpha.$$

Это отвечает действию корневого унипотента в присоединенном представлении группы $\mathrm{SL}(2, R)$, где v^α, $v^{-\alpha}$ и v^0_α образуют стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

Замечание 1.3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda(\pi)$ — пара весов представления π классической группы, для которых $\lambda_1 - \lambda_2 \in \Phi$. В такой ситуации нам будет удобно писать $x_{\lambda_1,\lambda_2}(\xi)$ (при некотором выборе λ_1 и λ_2) вместо $x_{\lambda_1-\lambda_2}(\xi)$. Например, для $\Phi = \mathsf{A}_\ell$ будем писать $x_{1,2}(\xi) = x_{\varpi_1 - \varpi_1 + \alpha_1}(\xi) = x_{\alpha_1}(\xi)$. Это сделано с целью зафиксировать знаки в лемме Мацумото.

Для классических групп имеется стандартный выбор знаков. Мы будем нумеровать веса векторных представлений классических групп следующим образом:

$$\begin{array}{ccl} 1, 2, \dots, \ell+1 & \text{в случае} & \Phi = \mathsf{A}_\ell, \\ 1, 2, \dots, \ell, 0, -\ell, \dots, -2, -1 & \text{в случае} & \Phi = \mathsf{B}_\ell, \\ 1, 2, \dots, \ell, -\ell, \dots, -2, -1 & \text{в случаях} & \Phi = \mathsf{C}_\ell, \mathsf{D}_\ell. \end{array}$$

Так, мы пишем 1 вместо ϖ_1, 2 вместо $\varpi_1 - \alpha_1$, и так далее.

Тогда в случае $\Phi = \mathsf{C}_\ell$ длинные и короткие корневые унипотенты в симплектической группе имеют вид

$$\begin{aligned} &x_{i,-i}(\xi) = e + \xi e_{i,-i}, \\ &x_{i,j}(\xi) = e + \xi e_{ij} - \varepsilon_i \varepsilon_j \xi e_{-j,-i}, \quad i \neq \pm j. \end{aligned}$$

Здесь ε_i — знак i. В случае $\Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{D}_\ell$ длинные и короткие унипотенты в $\mathrm{SO}(n, R)$

это

$$x_{i,j}(\xi) = e + \xi e_{ij} - \xi e_{-j,-i}, \quad i \neq \pm j,\, i, j \neq 0,$$
$$x_{i0}(\xi) = e + 2\xi e_{i0} - \xi e_{0,i} - \xi^2 e_{i,-i}, \quad i \neq 0.$$

Мы будем пользоваться весовыми диаграммами. Весовая диаграмма базисного или присоединенного представления это граф, вершинами которого служат элементы $\Lambda(\pi)$, и две вершины λ и μ соединены ребром с меткой i, если $\lambda - \mu = \pm\alpha_i$. Диаграмма ориентирована, то есть мы читаем ее справа налево и снизу вверх, больший вес всегда стоит левее или выше меньшего. Иногда для присоединенного представления мы будем изображать только положительную часть диаграммы, то есть включающую положительные и нулевые веса.

Весовые диаграммы позволяют визуализировать действие корневых унипотентов. А именно, для корня α надо найти все цепочки ребер, метки на которых (скажем, $i_1, \ldots, i_k$) суммируются в α, то есть $\alpha = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}$. Прибавление тогда происходит вдоль всех таких цепочек по правилам, описываемым леммой Мацумото.

Следующий результат известен как разложение Шевалле—Мацумото.

Лемма 1.4. *Пусть π — фундаментальное представление $\mathrm{G}(\Phi, R)$ со старшим весом ϖ_s. Если для элемента $g \in \mathrm{G}(\Phi, R, I)$ выполнено $(g \cdot v^+)_{\varpi_s} = 1$, то*

$$g \in \mathrm{U}(\Sigma_s^-, I) \cdot \mathrm{G}(\Delta_s, R, I) \cdot \mathrm{U}(\Sigma_s^+, I).$$

Доказательство. В абсолютном случае ($I = R$) утверждение леммы можно найти в [85, теорема 1.3]. Таким образом, можно представить g в виде $g = u_1 \cdot g' \cdot u_2$, где $u_1 \in \mathrm{U}(\Sigma_s^-, R)$, $u_2 \in \mathrm{U}(\Sigma_s^+, R)$ и $g' \in \mathrm{G}(\Delta_s, R)$. Поскольку g лежит в $\mathrm{G}(\Phi, R, I)$, вектор gv^+ сравним с v^+ по модулю I. С другой стороны, $g'u_2v^+ = v^+$, так что $u_1 \in \mathrm{G}(\Phi, R, I) \cap \mathrm{U}(\Sigma_s^-, R) = \mathrm{U}(\Sigma_s^-, I)$. Матрица $g'u_2$ является элементом $(\mathrm{G}(\Delta_s, R)\, \mathrm{U}(\Sigma_s^+, R)) \cap \mathrm{G}(\Phi, R, I)$, поэтому в силу разложения Леви $u_2 \in \mathrm{U}(\Sigma_s^+, I)$, $g' \in \mathrm{G}(\Delta_s, R, I)$. □

Мы будем пользоваться также уравнениями на орбиту вектора старшего веса, то есть уравнениями, которым удовлетворяют элементы вектора gv^+ для любого $g \in \mathrm{G}(\Phi, R)$.

Первый тип уравнений — *квадратные*, или, в терминологии работы [61], $\pi/2$-уравнения. Они отвечают *квадрату*, то есть множеству весов $\Omega \subseteq \Lambda$, имеющему не менее 4 элементов и удовлетворяющему дополнительному условию: для любого $\lambda \in \Omega$ разность $\lambda - \mu$ является корнем для всех $\mu \in \Omega$, кроме одного, обозначаемого $\overline{\lambda}$ (и $\lambda - \overline{\lambda} \notin \Lambda$). Типичным примером квадрата является диаграмма векторного представления группы типа D_ℓ.

Каждому максимальному квадрату $\Omega = \{\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda}_k\}$ отвечает одно уравнение, имеющее вид

$$v_{\lambda_1} v_{\overline{\lambda}_1} \pm \ldots \pm v_{\lambda_k} v_{\overline{\lambda}_k} = 0.$$

В присоединенном представлении имеются и другие, учитывающие нулевые веса. Нас будет интересовать только случай E_8. Пусть α и β — два ортогональных корня. Тогда вектор v из орбиты вектора старшего веса удовлетворяет следующим трем уравнениям.

$\pi/2$-уравнение имеет вид

$$v_\alpha v_\beta = \sum_{\{\gamma,\delta\}\in S_{\pi/2}(\alpha,\beta)} \pm v_\gamma v_\delta,$$

где

$$S_{\pi/2}(\alpha,\beta) = \big\{\{\gamma,\delta\} \bigm| \gamma+\delta=\alpha+\beta,\, \{\gamma,\delta\}\neq\{\alpha,\beta\}\big\}.$$

$2\pi/3$-уравнение имеет вид

$$v_\alpha\cdot\sum_{s=1}^{\ell}\langle\beta,\alpha_s\rangle\widehat{v}_s = \sum_{\substack{\{\gamma,\delta\}\in S_{2\pi/3}(\alpha,\beta)\\ \langle\gamma,\beta\rangle=1}} \pm v_\gamma v_\delta,$$

где

$$S_{2\pi/3}(\alpha,\beta) = \big\{\{\gamma,\delta\} \bigm| \gamma+\delta=\alpha,\, (\gamma,\beta)\neq 0\big\}.$$

Наконец, π-уравнение имеет вид

$$\sum_{s=1}^{\ell}\langle\alpha,\alpha_s\rangle\widehat{v}_s\cdot\sum_{s=1}^{\ell}\langle\beta,\alpha_s\rangle\widehat{v}_s = \sum_{(\gamma,\delta)\in S'_\pi(\alpha,\beta)} v_\gamma v_\delta - \sum_{(\gamma,\delta)\in S_\pi(\alpha,\beta)} v_\gamma v_\delta,$$

где

$$\begin{aligned} S_\pi(\alpha,\beta) &= \big\{(\gamma,-\gamma) \bigm| \langle\gamma,\alpha\rangle=\langle\gamma,\beta\rangle=-1\big\},\\ S'_\pi(\alpha,\beta) &= \big\{(\gamma,-\gamma) \bigm| \langle\gamma,\alpha\rangle=\langle-\gamma,\beta\rangle=-1\big\}. \end{aligned}$$

Группу Шевалле, отвечающую системе корней Ψ с кратными связями, можно реализовать как скручивание группы, отвечающей некоторой системе Φ с простыми связями. Тогда уравнения на орбиту вектора старшего веса можно получить, рассматривая ограничение представления $\mathrm{G}(\Phi)$ на $\mathrm{G}(\Psi)$.

Так, B_ℓ можно рассматривать как ${}^2\mathsf{D}_{\ell+1}$. Занумеруем веса векторного представления $\mathrm{G}(\mathsf{D}_{\ell+1})\cong\mathrm{SO}(2\ell+2)$ как $1,\dots,\ell+1,-\ell-1,\dots,-1$. Тогда группа $\mathrm{G}(\mathsf{B}_\ell)\cong\mathrm{SO}(2\ell+1)$ является подгруппой преобразований, оставляющих неподвижным вектор $v^{\ell+1}-v^{-\ell-1}$. На уровне матриц это означает, в частности, что $\ell+1$-й и $-\ell-1$-й элементы первого столбца равны, поэтому уравнение на орбиту вектора старшего веса для $\mathrm{SO}(2\ell+2)$, имеющее вид

$$v_1v_{-1}+\ldots+v_{\ell+1}v_{-\ell-1}=0,$$

превращается в

$$v_1v_{-1}+\ldots v_\ell v_{-\ell}+v_0^2=0.$$

1.3. Условия стабильности

Пусть R — коммутативное кольцо, а I — его идеал.

Столбец $(a_1, \ldots, a_n)^t \in R^n$ называется унимодулярным, если идеал, порожденный $a_1, \ldots, a_n$, совпадает со всем кольцом R. Столбец называется I-унимодулярным, если он, кроме этого, сравним по модулю I с первым столбцом единичной матрицы. Множество всех I-унимодулярных столбцов высоты n обозначается $\mathrm{Ums}(n, R, I)$, а в случае $I = R$ мы сокращаем эту запись до $\mathrm{Ums}(n, R)$.

Столбец $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})^t \in R^{n+1}$ называется стабильным, если найдутся такие $b_1, \ldots, b_n \in R$, что идеал $\langle a_1, \ldots, a_{n+1}\rangle$ совпадает с идеалом $\langle a_1 + b_1 a_{n+1}, \ldots, a_n + b_n a_{n+1}\rangle$. Столбец называется I-стабильным, если эти элементы b_i можно выбрать в идеале I.

Определение 1.5. Говорят, что стабильный ранг $\mathrm{sr}(R, I)$ пары $I \trianglelefteq R$ не превосходит n, если каждый I-унимодулярный столбец $a \in \mathrm{Ums}(n+1, R, I)$ высоты $n+1$ является I-стабильным.

В действительности понятие стабильного ранга не зависит от объемлющего кольца R, поэтому мы будем говорить о стабильном ранге кольца без единицы I и писать просто $\mathrm{sr}(I)$.

Наше обозначение корректно в том смысле, что если $\mathrm{sr}(I) \leqslant n$, то автоматически $\mathrm{sr}(I) \leqslant m$ для любого $m \geqslant n$.

Отметим некоторые свойства стабильного ранга.

Лемма 1.6. *Пусть R — коммутативное кольцо, I — его идеал. Тогда*

1. $\mathrm{sr}(I) \leqslant \mathrm{sr}(R)$*;*
2. $\mathrm{sr}(R/I) \leqslant \mathrm{sr}(R)$*;*
3. *Если $I \leqslant \mathrm{Rad}(R)$, то $\mathrm{sr}(I) = 1$;*
4. $\mathrm{sr}(R/\operatorname{Rad}(R)) = \mathrm{sr}(R)$*;*
5. *Если $\{R_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — набор колец, то* $\mathrm{sr}\left(\prod_{\omega\in\Omega} R_\omega\right) = \max_{\omega\in\Omega}(\mathrm{sr}\, R_\omega)$.

Примерами колец стабильного ранга 1 являются поля, локальные и полулокальные кольца, булевы кольца, кольцо всех целых алгебраических чисел, кольцо всех целых функций, диск-алгебра. Эти и другие примеры можно найти в работе [92].

Нам понадобится также понятие абсолютного стабильного ранга. Определим его относительную версию следующим образом.

Для столбца $a = (a_1, \ldots, a_n)^t \in R^n$ обозначим через $\mathfrak{J}(a)$ пересечение всех максимальных идеалов, содержащих $a_1, \ldots, a_n$. Столбец a унимодулярен в том и только том случае, когда $\mathfrak{J} = R$. Очевидно, что для любого $g \in \mathrm{GL}(n, R)$ верно $\mathfrak{J}(ga) = \mathfrak{J}(a)$.

Столбец $a = (a_1, \ldots, a_{n+1})^t \in I^{n+1}$ называется $\mathfrak{J}$-стабильным, если существуют такие $b_1, \ldots, b_n \in I$, что $\mathfrak{J}(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \mathfrak{J}(a_1 + b_1 a + n + 1, \ldots, a_n + b_n a_{n+1})$.

Определение 1.7. Говорят, что абсолютный стабильный ранг $\mathrm{asr}(I)$ пары $I \trianglelefteq R$ не превосходит n, если, во-первых, $\mathrm{sr}(I) \leqslant n$, а во-вторых, любой столбец $a \in I^{n+1}$ является $\mathfrak{J}$-стабильным.

Как и в случае стабильного ранга, $\mathrm{asr}(I) \leqslant n$ влечет $\mathrm{asr}(I) \leqslant m$ для всех $m \geqslant n$.

Из определения абсолютного стабильного ранга не видно сразу, почему оно не зависит от объемлющего кольца R. Следующая лемма демонстрирует корректность наших обозначений. Она является относительной версией [62, лемма 8.3].

Лемма 1.8. *Для коммутативного кольца R и его идеала $I \trianglelefteq R$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Любой столбец $a \in I^{n+1}$ является $\mathfrak{J}$-стабильным;*
2. *Для любого I-унимодулярного столбца $(b, a_1, \ldots, a_n, d)^t \in \mathrm{Ums}(n+2, I)$ найдутся такие $c_1, \ldots, c_n \in I$, что $(b+b', a_1+c_1 d, \ldots, a_n+c_n d)^t$ I-унимодулярен для любого $b' \in J$, где $J = Ia_1 + \ldots + Ia_n + Id \leqslant I$.*

Доказательство. Предположим сперва, что любой столбец $a \in I^{n+1}$ является $\mathfrak{J}$-стабильным. В частности, для любого $(b, a_1, \ldots, a_n, d)^t \in \mathrm{Ums}(n+2, I)$ существуют такие $c_1, \ldots, c_n$, что

$$\mathfrak{J}(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \mathfrak{J}(a_1 + c_1 a_{n+1}, \ldots, a_n + c_n a_{n+1}).$$

Следовательно, $(b, a_1 + c_1 d, \ldots, a_n + c_n d)^t$ также унимодулярен. Разумеется, для любого $b' \in J$ мы могли с самого начала заменить b на $b + b'$.

Чтобы показать обратное, возьмем произвольный столбец $(a_1, \ldots, a_n, d)^t \in I^{n+1}$ и рассмотрим I-унимодулярный столбец $(1, a_1, \ldots, a_n, d)^t \in \mathrm{Ums}(n+2, I)$. По предположению, существуют $c_1, \ldots, c_n$, для которых

$$v = (1 + b', a'_1, \ldots, a'_n)^t = (1 + b', a_1 + c_1 d, \ldots, a_n + c_n d)^t$$

унимодулярен при любом $b' \in J$. Допустим, что найдется максимальный идеал $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$, содержащий все $a'_1, \ldots, a'_n$, но не содержащий по крайней мере один из элементов d, a_i. Очевидно, что в таком случае $d \notin \mathfrak{m}$ и $I \not\subseteq \mathfrak{m}$ (иначе $a_i = a'_i - c_i d \in \mathfrak{m}$, вопреки допущению). Теперь мы можем выбрать $t \in I$, образ $\bar{t}$ которого в поле вычетов $R/\mathfrak{m}$ равняется $-\bar{1}/\bar{d}$. Получаем, что $1 + b' \in \mathfrak{m}$ для $b' = td \in J$, что противоречит унимодулярности v. Это показывает, что такого $\mathfrak{m}$ не существует и, следовательно, $\mathfrak{J}(a'_1, \ldots, a'_n) = \mathfrak{J}(a_1, \ldots, a_n, d)$. $\square$

Очевидно, что второе утверждение леммы 1.8 не зависит от R.

Для коммутативного кольца R обозначим через $\mathrm{Max}(R)$ его *максимальный спектр*, то есть множество всех его максимальных идеалов, снабженное топологией Зариского. Следующий результат дает верхнюю оценку на абсолютный стабильный ранг (см. [36, теорема 2.3], [62, теорема 3.7]).

Теорема 1.3. *Предположим, что* $\mathrm{Max}(R)$ *допускает покрытие конечным семейством подмножеств* $X_1 \ldots, X_m$*, топологическая размерность каждого из которых не превышает некоторого числа* d*. Тогда* $\mathrm{asr}(R) \leqslant d+1$.

Имеется следующая цепочка неравенств:

$$\mathrm{sr}(I) \leqslant \mathrm{asr}(I) \leqslant \mathrm{asr}(R) \leqslant \dim(\mathrm{Max}(R)) + 1 \leqslant \dim(\mathrm{Spec}(R)) + 1.$$

Замечание 1.9. Существуют примеры колец, для которых первое неравенство является строгим. А именно, существуют кольца стабильного ранга 1, имеющие абсолютный стабильный ранг $\geqslant 2$, см. [62]. Однако [62, теорема 1.3] показывает, что $\mathrm{sr}(R) = \mathrm{asr}(R)$ для любого кольца главных идеалов R.

Теорема 1.3 показывает, в частности, что любая дедекиндова область R удовлетворяет $\mathrm{asr}(R) \leqslant 2$, и что $\mathrm{sr}(A[x]) \leqslant 3$ для любого локально главного кольца A. В работе [43] показано, что $\mathrm{sr}(\mathbb{Z}[x]) = 3$. Заметим, что $\mathrm{sr}(\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]) = n+1$, если $n > 1$ [10, пример после теоремы 18.2].

Еще одно следствие теоремы 1.3 — оценка на стабильный ранг кольца многочленов над полем. А именно, $\mathrm{sr}(F[x_1, \ldots, x_n]) \leqslant n+1$ для любого поля F. Для некоторых классов полей эта оценка может быть уточнена. Например, если F алгебраично над конечным полем, то $\mathrm{sr}(F[x_1, \ldots, x_n]) \leqslant n$ по [10, следствие 17.4]. С другой стороны, известно, что $\mathrm{sr}(F[x, y]) = 3$ для любого поля F, имеющего $\mathrm{K}_2^M(F) \neq 0$ [55], и что $\mathrm{sr}(F[x_1, \ldots, x_n]) = n+1$ для $F \subseteq \mathbb{R}$, см. [8, теорема 8].

Оценка на стабильный ранг дедекиндовых областей влечет, в частности, что любая область главных идеалов имеет стабильный ранг не больше 2. То же самое верно и для колец главных идеалов, не являющихся областями целостности — согласно теореме Зариского—Самюэля [47, 100] любое такое кольцо раскладывается в конечную прямую сумму областей главных идеалов и так называемых специальных колец главных идеалов, то есть локальных артиновых колец главных идеалов.

Несмотря на то, что в определении стабильного ранга участвуют только конечно порожденные идеалы, для колец Безу ситуация сложнее. Напомним, кольцом Безу называется кольцо, каждый конечно порожденный идеал которого являетя главным.

Определение 1.10. Коммутативное кольцо R называется *эрмитовым*, если для любых $a, b \in R$ существует такая обратимая матрица $g \in \mathrm{GL}(2, R)$, что $g(a, b)^t = (d, 0)^t$ для некоторого d.

Очевидно, что такую матрицу g можно выбрать уже в $\mathrm{SL}(2, R)$.

Следующее утверждение является классическим и хорошо известным:

Лемма 1.11. *Область Безу является эрмитовым кольцом.*

Доказательство. Пусть $aR + bR = dR$, $ax + by = d$ для каких-то x, y, тогда

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -b/d & a/d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Это рассуждение не работает в случае, когда d — делитель нуля. В примере 3.4 работы [37] строится кольцо Безу, не являющееся эрмитовым. А именно, не является эрмитовым кольцо непрерывных функций на дополнении замкнутой полуплоскости в ее компактификации Стоуна–Чеха. Однако можно показать [99], что любое кольцо Безу стабильного ранга 2 эрмитово.

2. Ширина в элементарных образующих

Данная глава посвящена исследованию ширины элементарных подгрупп относительно естественных наборов образующих. В разделе 2.1 рассматривается ширина относительно множества элементарных корневых унипотентов. Точнее, исследуется вопрос о длине унитреугольной факторизации, который сводится к анализу групп малых рангов. Последнему посвящены подразделы 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3.

В разделе 2.2 исследуется ширина относительных элементарных групп относительно множества образующих типа $z_\alpha(s,\xi)$.

2.1. Унитреугольные факторизации

В работе О. И. Тавгеня [14] установлена следующая теорема о редукции ранга.

Теорема 2.1. *Пусть ${}^\sigma\Phi$ — (возможно скрученная) система корней, а Δ_1 и Δ_2 — две ее подсистемы, полученные выбрасыванием первого или последнего корня на диаграмме Дынкина системы ${}^\sigma\Phi$. Предположим, что соответствующие подсистемные подгруппы допускают унитреугольную факторизацию*

$$\mathrm{E}(\Delta_i) = \mathrm{U}(\Delta_i)\,\mathrm{U}^-(\Delta_i)\ldots\mathrm{U}^\pm(\Delta_i)$$

длины N. Тогда и объемлющая группа также допускает унитреугольную факторизацию

$$\mathrm{E}({}^\sigma\Phi) = \mathrm{U}({}^\sigma\Phi)\,\mathrm{U}^-({}^\sigma\Phi)\ldots\mathrm{U}^\pm({}^\sigma\Phi)$$

такой же длины N.

Отметим, что здесь отсутствуют какие-либо ограничения на базовое кольцо. Теорема, таким образом, сводит построение унитреугольных факторизаций к рассмотрению групп ранга 1 или 2. В оригинальной работе [14] рассматриваются группы ранга 2 над дедекиндовыми кольцами арифметического типа. Мы же будем рассматривать группы ранга 1, но над кольцами стабильного ранга 1 или, в случае скрученных и сильно скрученных групп, над конечным полем.

Для полноты воспроизведем доказательство существования факторизации для группы $\mathrm{SL}(2,R)$, из которого сразу же следует существование такой же факторизации для групп Шевалле всех нормальных типов, а также для скрученных групп типов ${}^2\mathsf{A}_{2n+1}$, ${}^2\mathsf{D}_\ell$, ${}^2\mathsf{E}_6$ и ${}^3\mathsf{D}_4$, см. [6].

Лемма 2.1. *Пусть R — кольцо стабильного ранга 1. Тогда группа $\mathrm{SL}(2,R)$ допускает унитреугольную факторизацию*

$$\mathrm{SL}(2,R)=\mathrm{U}(2,R)\,\mathrm{U}^-(2,R)\,\mathrm{U}(2,R)\,\mathrm{U}^-(2,R)$$

длины 4.

Доказательство. Фиксируем матрицу $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,R)$. Ее второй столбец унимодулярен, поэтому в силу условия стабильного ранга существует такой $\xi\in R$, что $b+\xi d\in R^*$ обратим. Тогда

$$\begin{aligned}
&x_{12}(\xi)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'&b+\xi d\\c&d\end{pmatrix},\\
&x_{21}\left(\frac{1-d}{b+\xi d}\right)\begin{pmatrix}a'&b+\xi d\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'&b+\xi d\\c'&1\end{pmatrix},\\
&x_{12}(-b-\xi d)\begin{pmatrix}a'&b+\xi d\\c'&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\c'&1\end{pmatrix}=x_{21}\left(c'\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, $g=x_{12}(-\xi)x_{21}({}^{d-1}/_{d+\xi d})x_{12}(b+\xi d)x_{21}(c')$. □

В работах [6,97] построены факторизации длины 5 для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}[{}^1/_p])$.

В следующих разделах мы рассмотрим случаи скрученных групп, имеющих корневые подгруппы типов, отличных от A_1 и $\mathsf{A}_1+\mathsf{A}_1$, то есть специальную унитарную группу SU_3, группу Судзуки ${}^2\mathsf{C}_2$ и малую группу Ри ${}^2\mathsf{G}_2$. В результате мы докажем следующий результат:

Теорема 2.2. *Всякая конечная простая группа типа Ли в характеристике p есть произведение четырех своих силовских p-подгрупп.*

2.1.1. Унитарная группа нечетной размерности

Определения и обозначения в данном разделе в целом следуют [16].

Пусть R — коммммутативное кольцо и σ — инволюция на нем. Мы будем писать $\overline{a}$ вместо $\sigma(a)$.

Положим $\mathfrak{A}=\left\{(a,b)\in R^2\;\middle|\;a\overline{a}=b+\overline{b}\right\}$. Множество $\mathfrak{A}$ является частным случаем так называемого максимального нечетного форменного параметра. Для элемента $\xi=(a,b)\in\mathfrak{A}$ мы будем называть $a=n(\xi)$ and $b=t(\xi)$ соотвественно n- и t-компонентами ξ. Множества всех n- and t-компонент будут обозначаться R_{n} и R_{t}. Множество всех $\xi=(a,b)\in\mathfrak{A}$, для которых $b\in R^*$ обратим, будет обозначаться $\mathfrak{A}^*$.

Для матрицы $x\in M(n,R)$ мы используем $\overline{x}$ для обозначения ее сопряженной под действием σ, то есть $\overline{x}_{ij} = \overline{(x_{ij})}$. По определению

$$\mathrm{SU}_3(R) = \left\{ x \in SL_3(R) \;\middle|\; x^t J\,\overline{x} = J \right\}, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}.$$

Для $\xi = (a, b) \in \mathfrak{A}$ положим

$$x_+(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & \overline{a} \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad x_-(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \overline{a} & 1 & \\ b & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы из $\mathrm{SU}_3(R)$ есть в точности унипотентные корневые элементы группы типа ${}^2\mathsf{A}_2$, отождествленной с SU_3. По определению единственным положительным корнем ${}^2\mathsf{A}_2$ является $A = \{\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\}$, где α и β это простые корни A_2 и $\sigma(\alpha) = \beta$, так что корневая подгруппа имеет вид $X_A = \{x_\alpha(a)x_\beta(\overline{a})x_{\alpha+\beta}(b) \mid (a, b) \in \mathfrak{A}\}$.

Обозначим через U и U^- подгруппы SU_3, порожденные элементами типа $x_+(\xi)$ и $x_-(\xi)$ соответственно. В действительности, подгруппы $U^\pm$ *состоят* из элементов этих типов, поскольку произведение двух элементов типа x_+ снова является элементом типа x_+, аналогично для x_-. Это определяет групповую структуру на $\mathfrak{A}$, а именно для любых $\xi = (a, b), \eta = (c, d) \in \mathfrak{A}$ выполнено $\xi + \eta = (a + c, b + d + \overline{a}c)$, так что $x_\pm(\xi)x_\pm(\eta) = x_\pm(\xi + \eta)$. Кроме того, определим действие R на $\mathfrak{A}$ следующим образом: $c \rightharpoonup (a, b) = (ca, c\overline{c}b)$. Отсюда видно, что R_{n} является идеалом в R.

Для $\xi = (a, b) \in \mathfrak{A}^*$ определим

$$w_\pm(\xi) = x_\pm\left(\xi\right) x_\mp\left(-\overline{b} \rightharpoonup \xi\right) x_\pm\left(b\overline{b}^{-1} \rightharpoonup \xi\right),$$

где $-c \rightharpoonup \xi$ следует читать как $(-c) \rightharpoonup \xi$.

В матрицах элементы $w_\pm(\xi)$ имеют вид

$$w_+(\xi) = \begin{pmatrix} & & b \\ & -b^{-1}\overline{b} & \\ \overline{b}^{-1} & & \end{pmatrix}, \quad w_-(\xi) = \begin{pmatrix} & & \overline{b}^{-1} \\ & -b^{-1}\overline{b} & \\ b & & \end{pmatrix}.$$

Для данной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{SU}_3(R)$ выпишем все уравнения на ее элементы, возникающие из матричного уравнения $A^t J\,\overline{A} = J$, удалив дубликаты:

$$-a_{31}\overline{a_{11}} + a_{21}\overline{a_{21}} - a_{11}\overline{a_{31}} = 0 \tag{U1.1}$$
$$-a_{31}\overline{a_{12}} + a_{21}\overline{a_{22}} - a_{11}\overline{a_{32}} = 0 \tag{U1.2}$$
$$-a_{31}\overline{a_{13}} + a_{21}\overline{a_{23}} - a_{11}\overline{a_{33}} = -1 \tag{U1.3}$$
$$-a_{32}\overline{a_{12}} + a_{22}\overline{a_{22}} - a_{12}\overline{a_{32}} = 1 \tag{U2.2}$$
$$-a_{32}\overline{a_{13}} + a_{22}\overline{a_{23}} - a_{12}\overline{a_{33}} = 0 \tag{U2.3}$$
$$-a_{33}\overline{a_{13}} + a_{23}\overline{a_{23}} - a_{13}\overline{a_{33}} = 0 \tag{U3.3}$$

Из уравнений (U1.1) и (U3.3) получаем $(a_{21}, a_{11}\overline{a_{31}}), (a_{23}, a_{13}\overline{a_{33}}) \in \mathfrak{A}$.

Пусть теперь $F = \mathbb{F}_{q^2}$ — конечное поле с нетривиальной инволюцией, заданной как $\overline{x} = x^q$. Легко видеть, что отображения $x \mapsto x\overline{x}$ и $x \mapsto x + \overline{x}$ сюръективны, так как являются в точности нормой и следом расширения $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$. Отсюда $F_{\mathrm{n}} = F_{\mathrm{t}} = F$.

Лемма 2.2. *Над конечным полем F с нетривиальной инволюцией группа $\mathrm{SU}_3(F)$ допускает унитреугольную факторизацию*

$$\mathrm{SU}_3(F) = \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}^-$$

длины 4.

Доказательство. Фиксируем элемент $A \in \mathrm{SU}_3(F)$. Мы можем применять к столбцовому вектору элементарные преобразования двух типов, называемые верхним и нижним:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{x_+(\alpha,\beta)} \begin{pmatrix} x + \alpha y + \beta z \\ y + \overline{\alpha} z \\ z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{x_-(\alpha,\beta)} \begin{pmatrix} x \\ y + \overline{\alpha} x \\ z + \alpha y + \beta x \end{pmatrix}.$$

В данном доказательстве мы будем писать a_{ij}, работая со всей матрицей или с какой-то из ее строк, и $(x, y, z)^t$ для ее первого столбца.

Случай 1. Предположим, что $x \neq 0$.

Применяя нижнее преобразование, можно добиться того, чтобы элемент в третьей строке стал обратимой t-компонентой. В случае $F_{\mathrm{t}} = F$ достаточно, чтобы элемент стал ненулевым.

Полагая теперь $z \in F^*$, применим верхнее преобразование с $\overline{\alpha} = -y/z$, чтобы получить 0 во второй строке. Это возможно, так как любой y является n-компонентой.

Теперь $y = 0$, так что применяя еще одно верхнее предобразование, можно получить 1 в первой строке. А именно, поскольку $y = 0$, после применения верхнего преобразования элемент в первой строке равен $x + \beta z$. Чтобы получить 1, положим $\beta = (1 - x)/z$. Соответствующая n-компонента может быть получена исходя из того факта, что $F_{\mathrm{t}} = F$, но мы проведем более общее рассуждение, работающее во всех случаях, когда $z \in F_{\mathrm{t}}^*$ является обратимой t-компонентой:

$$\beta + \overline{\beta} = \frac{1-x}{z} + \frac{1-\overline{x}}{\overline{z}} = \frac{(1-x)\overline{z} + (1-\overline{x})z}{z\overline{z}} = \\ = \frac{z + \overline{z} - x\overline{z} - \overline{x}z}{z\overline{z}} = \frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}}.$$

Поскольку $z \in F_t$ является t-компонентой, существует такой γ, что $z + \overline{z} = \gamma\overline{\gamma}$. Можно положить $\alpha = \gamma/z$.

Из столбца с $x = 1$ легко получить $(1,0,0)^t$ одним нижним преобразованием. Заметим, что $z + \overline{z} = y\overline{y}$. Поэтому можно использовать $\alpha = -\overline{y}$ и $\beta = \overline{z}$.

В итоге имеем $a_{11} = 1$, $a_{21} = a_{31} = 0$. Из уравнений (U1.2) и (U1.3) следует $a_{32} = 0$ и $a_{33} = 1$. Поскольку $\det(A) = 1$, $a_{22} = 1$. Это означает, что мы получили верхне-унитреугольную матрицу, применив три элементарных преобразования, а такая матрица, лежащаяя в SU_3, является элементом типа x_+. Отсюда $A = x_-(*)x_+(*)x_-(*)x_+(*)$.

Случай 2. Предположим, что $x = 0$.

В силу уравнения (U1.1) выполнено $y = 0$, отсюда $z \in F^*$. Уравнение (U1.2) показывает, что $a_{12} = 0$. Из (U1.3) получаем $-a_{31}\overline{a_{13}} = -1$, то есть $\overline{a_{31}} = a_{13}^{-1}$. Поскольку $\det(A') = 1$, имеем $a_{22} = -a_{13}^{-1}\overline{a_{13}}$.

Обозначим $b = a_{13}$, и пусть a — соотвествующая n-компонента, так что $(a,b) \in \mathfrak{A}$. Из уравнения (U3.3) получаем $\xi = (a_{23}, \overline{b}a_{33}) \in \mathfrak{A}$. Рассмотрим $\overline{b}^{-1} \rightharpoonup \xi = \left(\overline{b}^{-1}, b^{-1}a_{33}\right)$ и заметим, что

$$A = x_-\left(\overline{b}^{-1} \rightharpoonup \xi\right) w_+\left((a,b)\right) = x_-(*)x_+(*)x_-(*)x_+(*). \qquad \square$$

Пусть теперь $F = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел с комплексным сопряжением в качестве инволюции. В этом случае $\mathbb{C}_{\mathrm{t}} = \{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} x \geqslant 0\}$ и $\mathbb{C}_{\mathrm{n}} = \mathbb{C}$.

Лемма 2.3. *Группа* $\mathrm{SU}_3(\mathbb{C})$ *допускает унитреугольную факторизацию*

$$\mathrm{SU}_3(\mathbb{C}) = \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}$$

длины 5.

Доказательство. Мы снова фиксируем элемент $A \in SU_3(\mathbb{C})$ и работаем с его первым столбцом, обозначаемым $(x,y,z)^t$.

Случай 1. Предположим, что $\operatorname{Im}(x) \neq 0$. Сначала мы получаем 0 во второй строке, применяя нижнее преобразование с $\alpha = \overline{(-x/y)}$. Теперь при $y = 0$, мы можем получить обратимую t-компоненту в третьей строке с помощью еще одного нижнего преобразования. А именно, положим $x = x_1 + x_2 i$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 i$. Требуется найти такие $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, что $\operatorname{Re}(z + \beta x) > 0$. $\operatorname{Re}(z+\beta x) = \operatorname{Re} z + x_1\beta_1 - x_2\beta_2$. Возьмем $\beta_1 = 1$, тогда ясно, что можно найти β_2, для которого $-x_2\beta_2 > |\operatorname{Re} z| - x_1$. Тогда $\beta = 1 + \beta_2 i$ являкется t-компонентой параметров искомого преобразования.

Остаток доказательства в этом случае совпадает с доказательством случая 1 kеммы 2.2.

Случай 2. Если $\mathrm{Im}(x) = 0$, мы применяем одно верхнее преобразование, чтобы получить в первой строке элемент с ненулевой мнимой частью, а затем пользуемся случаем 1, что дает факторизацию длины 5. □

Заметим, что в случае $x = 0$ мы не могли бы повторить доказательство из леммы 2.2, так как $z \neq 0$ может не быть t-компонентой. Это действительно является препятствием к существованию более короткой факторизации:

Лемма 2.4. *Если $F_{\mathrm{t}} \neq F$, то не существует унитреугольной факторизации длины меньше* 5.

Доказательство. Для $x \in F \setminus F_{\mathrm{t}}$ положим

$$A = \begin{pmatrix} & & 1/x \\ & -x/\overline{x} & \\ \overline{x} & & \end{pmatrix}.$$

Допустим, A может быть выражена как произведение 4 элементарных матриц:

$$A = x_+(*)x_-(*)x_+(*)x_-(*).$$

Эквивалентно, можно применить к A три элементарных преобразования A и получить нижне-унитреугольную матрицу: $x_+(*)x_-(*)x_+(*)A = x_-(*)$. Зафиксируем некоторые коэффициенты $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathfrak{A}$ и рассмотрим произведение $B = x_+(\alpha_1, \beta_1)x_-(\alpha_2, \beta_2)x_+(\alpha_3, \beta_3)A$. Прямое вычислением показывает, что $B_{33} = \beta_2/x$. С другой стороны, как диагональный элемент нижне-унитреугольной матрицы, $B_{33} = 1$. Отсюда $\beta_2 = x \notin F_{\mathrm{t}}$, противоречие. □

2.1.2. Группа Судзуки и большая группа Ри

Группа Судзуки рассматривается как подгруппа симплектической группы $\mathrm{Sp}(4, F)$ над полем $F = \mathbb{F}_q$, $q = 2^{2m+1}$, поэлементно инвариантная под действием исключительного автоморфизма. Далее обозначим через $\{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta\}$ положительные корни C_2.

Обозначим $\theta = 2^m$, так что $q = 2\theta^2$, и рассмотрим автоморфизм $t \mapsto t^\theta$ поля F. Он позволяет определить исключительный автоморфизм $\mathrm{Sp}(4, F)$, отвечающий симметрии $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ ее диаграммы Дынкина, следующим образом:

$$\sigma\colon x_\gamma(\xi) \longmapsto x_{\overline{\gamma}}\left(\xi^{\lambda(\overline{\gamma})\theta}\right), \text{ где } \lambda(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \text{ короткий,} \\ 2, & \text{если } \gamma \text{ длинный.} \end{cases}$$

Группа Судзуки определяется как

$$\mathrm{Sz}(q) = {}^2\mathsf{C}_2\left(2^{2m+1}\right) = \{g \in \mathrm{Sp}(4, F) \mid \sigma(g) = g\}.$$

Это определение не очень подходит для прямых вычислений, так как не выявляет никаких уравнений на матричные элементы, кроме тех, что приходят из симплектической группы. К счастью, группа Судзуки наследует разложение Брюа $\mathrm{Sz}(q) = \bigsqcup \mathrm{B}\, w\, \mathrm{U}$, где w пробегает ее группу Вейля. Это разложение можно по существу использовать в качестве определения группы Судзуки.

Определим для любых $t, u \in F$

$$x_+(t,u) = x_\alpha(t^\theta)\, x_\beta(t)\, x_{\alpha+\beta}(t^{\theta+1}+u)\, x_{2\alpha+\beta}(u^{2\theta}).$$

Это в точности элементы $\mathrm{U}(\mathsf{C}_2^+, F)$, неподвижные под действием σ. Подгруппа $\mathrm{U} = \{x_+(t,u) \mid t, u \in F\}$ является силовской 2-подгруппой $\mathrm{Sz}(q)$. В матрицах

$$x_+(t,u) = \begin{pmatrix} 1 & t^\theta & u & t^{2\theta+1} + t^\theta u + u^{2\theta} \\ & 1 & t & t^{\theta+1} + u \\ & & 1 & t^\theta \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы тора, неподвижные под действием σ, имеют вид

$$h(\varepsilon) = \mathrm{diag}\left(\varepsilon, \varepsilon^{2\theta-1}, \varepsilon^{1-2\theta}, \varepsilon^{-1}\right).$$

Полагая $\mathrm{T} = \{h(\varepsilon) \mid \varepsilon \in F^*\}$ для обозначения тора, опредлим борелевскую подгруппу посредством равенства $\mathrm{B} = \mathrm{U}\,\mathrm{T}$. Элементы нормализатора тора N принимают одну из следующих форм:

$$h(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon^{2\theta-1} & & \\ & & \varepsilon^{1-2\theta} & \\ & & & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix},$$

$$h(\varepsilon)w = \begin{pmatrix} & & & \varepsilon \\ & & \varepsilon^{2\theta-1} & \\ & \varepsilon^{1-2\theta} & & \\ \varepsilon^{-1} & & & \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad w = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Разложение Брюа утверждает, что $\mathrm{Sz}(q) = \mathrm{B}\,\mathrm{N}\,\mathrm{U}$, или что каждый элемент $g \in \mathrm{Sz}(q)$ может быть единственным образом записан как одно из следующих произведений:

$$g = x_+(t_1,u_1)\, h(\varepsilon)\, w\, x_+(t_2,u_2), \qquad g = x_+(t,u)\, h(\varepsilon).$$

Определим также

$$x_-(t,u) = w\, x_+(t,u)\, w \quad \text{и} \quad \mathrm{U}^- = \{x_-(t,u) \mid t, u \in F\}.$$

Подгруппа $\mathrm{U}^- = {}^{w}\,\mathrm{U}$ тоже является 2-силовской.

Лемма 2.5. $\mathrm{Sz}(q) = \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}^-$.

Доказательство. В силу разложения Брюа достаточно показать, что

$$\mathrm{T}\,w \subseteq \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U} \ \text{ и } \ \mathrm{T} \subseteq \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}^- .$$

Для доказательства первого включения зафиксируем элемент $\varepsilon \in F^*$ и рассмотрим $h(\varepsilon)w$. Прямое вычисление показывает, что

$$x_-\left(\varepsilon^{1-2\theta}, 0\right)\, x_+\left(0, \varepsilon^{\theta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon^{\theta} & \varepsilon \\ \varepsilon^{\theta-1} & 1 & \varepsilon^{2\theta-1} & \\ \varepsilon^{-\theta} & \varepsilon^{1-2\theta} & & \\ \varepsilon^{-1} & & & \end{pmatrix} = x_+\left(\varepsilon^{2\theta-1}, 0\right)\, h(\varepsilon)w.$$

Разложение для тора подсказано разложением тора в $\mathrm{SL}(2, R)$ над произвольным коммутативным кольцом R:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon(\varepsilon-1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующее произведение (отметим элемент в верхнем левом углу):

$$\begin{aligned} g_1 &= x_+(0,1)\cdot x_-\left(1, 1+\varepsilon^{\theta}\right) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^{\theta} & 0 & 1 \\ \varepsilon+\varepsilon^{\theta} & \varepsilon^{\theta} & 1 & 1 \\ \varepsilon^{\theta} & 1 & 1 & 0 \\ 1+\varepsilon+\varepsilon^{\theta} & 1+\varepsilon^{\theta} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ g_2 &= g_1 \cdot x_+\left(\varepsilon^{1-2\theta}, \varepsilon^{-\theta}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon+\varepsilon^{\theta} & \varepsilon^{2\theta-1} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{\theta} & 1+\varepsilon^{2\theta-1} & \varepsilon^{1-2\theta} & 0 \\ 1+\varepsilon+\varepsilon^{\theta} & 1+\varepsilon^{\theta-1}+\varepsilon^{2\theta-1} & \varepsilon^{-\theta}+\varepsilon^{1-2\theta} & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Можно даже не вычислять элементы g_2 под диагональю и просто заметить, что g_2 имеет вид $h(\varepsilon)\,x_-(t,u)$ для некоторых $t, u \in F$, что и требуется. В действительности $t = \varepsilon^{2\theta-1}(1+\varepsilon^{2\theta-1})$ и $u = \varepsilon + \varepsilon^{\theta} + \varepsilon^{2\theta}$. □

Большая группа Ри рассматривается как подгруппа группы Шевалле $\mathrm{G}(\mathsf{F}_4, \mathbb{F}_q)$, $q = 2^{2m+1}$, задаваемая исключительной симметрией диаграммы Дынкина таким же образом, как группа Судзуки. Она не является группой ранга 1, поэтому из существования разложений для групп типов A_1 and ${}^2\mathsf{C}_2$ по теореме Тавгеня получаем

Следствие. ${}^2\mathsf{F}_4\left(2^{2m+1}\right) = \mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}^-$.

2.1.3. Малая группа Ри

Малая группа Ри задается как подгруппа группы Шевалле $\mathrm{G}(\mathsf{G}_2, F)$ над полем $F = \mathbb{F}_q$, $q = 3^{2m+1} = 3\theta^2$. $\mathrm{G}(\mathsf{G}_2, F)$ рассматривается в своей 7-мерном представлении со старшим весом ϖ_1 (см. [73, раздел 6]), а элементарные образующие выбраны следующим образом (базис занумерован $1, 2, 3, 0, -3, -2, -1$):

$$
\text{короткие}\left[\begin{array}{l}
x_{\alpha}(\xi) = e + \xi(e_{12} - e_{30} + 2e_{0,-3} - e_{-2,-1}) - \xi^2 e_{3,-3},\\
x_{\alpha+\beta}(\xi) = e + \xi(e_{13} + e_{20} - 2e_{0,-2} - e_{-3,-1}) - \xi^2 e_{2,-2},\\
x_{2\alpha+\beta}(\xi) = e + \xi(-e_{10} + e_{2,-3} - e_{3,-2} + 2e_{0,-1}) - \xi^2 e_{1,-1},\\
x_{-\alpha}(\xi) = e + \xi(e_{21} - 2e_{03} + e_{-3,0} - e_{-1,-2}) - \xi^2 e_{-3,3},\\
x_{-\alpha-\beta}(\xi) = e + \xi(e_{31} + 2e_{02} - e_{-2,0} - e_{-1,-3}) - \xi^2 e_{-2,2},\\
x_{-2\alpha-\beta}(\xi) = e + \xi(-2e_{01} + e_{-3,2} - e_{-2,3} + e_{-1,0}) - \xi^2 e_{-1,1},
\end{array}\right.
$$

$$
\text{длинные}\left[\begin{array}{l}
x_{\beta}(\xi) = e + \xi(-e_{23} + e_{-3,-2}) = x_{-\beta}(\xi)^t,\\
x_{3\alpha+\beta}(\xi) = e + \xi(e_{1,-3} - e_{3,-1}) = x_{-3\alpha-\beta}(\xi)^t,\\
x_{3\alpha+2\beta}(\xi) = e + \xi(-e_{1,-2} + e_{2,-1}) = x_{-3\alpha-2\beta}(\xi)^t.
\end{array}\right.
$$

Данный выбор знаков структурных констант совпадает с выбором в [29, раздел 12.4], позволяя, таким образом, определить автоморфизм $\mathrm{G}(\mathsf{G}_2, F)$ посредством

$$
\sigma\colon x_{\gamma}\left(\xi\right) \longmapsto x_{\overline{\gamma}}\left(\xi^{\lambda(\overline{\gamma})\theta}\right), \text{ где } \lambda(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \text{ короткий},\\ 3, & \text{если } \gamma \text{ длинный}. \end{cases}
$$

Малая группа Ри ${}^2\mathsf{G}_2\left(3^{2m+1}\right)$ определяется как подгруппа точек, неподвижных под действием σ.

Элементы $\mathrm{U}(\mathsf{G}_2^+, F)$, инвариаетные относительно σ, имеют вид

$$
\begin{aligned}
&x_+(t, u, v) = x_1(t)\, x_2(u)\, x_3(v), \text{ где } t, u, v \in F \text{ и}\\
&\quad x_1(t) = x_{\alpha}\left(t^{\theta}\right) x_{\beta}\big(t\big)\, x_{\alpha+\beta}\big(t^{\theta+1}\big)\, x_{2\alpha+\beta}\big(t^{2\theta+1}\big),\\
&\quad x_2(u) = x_{\alpha+\beta}\left(u^{\theta}\right)\, x_{3\alpha+\beta}\left(u\right),\\
&\quad x_3(v) = x_{2\alpha+\beta}\left(v^{\theta}\right)\, x_{3\alpha+2\beta}\left(v\right).
\end{aligned}
$$

$\mathrm{U}^+ = {}^{\sigma}\mathrm{U}(\mathsf{G}_2^+, F)$ является силовской 3-подгруппой ${}^2\mathsf{G}_2\left(3^{2m+1}\right)$.

Обозначим, как обычно,

$$
w_{\gamma}(\varepsilon) = x_{\gamma}(\varepsilon)x_{-\gamma}\left(-\varepsilon^{-1}\right)x_{\gamma}(\varepsilon), \quad h_{\gamma}(\varepsilon) = w_{\gamma}(\varepsilon)w_{\gamma}(-1), \quad \varepsilon \neq 0.
$$

Инвариантные элементы тора имеют вид $h(\varepsilon) = h_{\alpha}\left(\varepsilon\right) h_{\beta}\left(\varepsilon^{3\theta}\right)$. Обозначим за $w = \big(w_{\alpha}(1)w_{\beta}(1)\big)^3$ подъем в нормализатор тора длиннейшего элемента группы Вейля $\mathrm{W}(\mathsf{G}_2)$. Он попадает в ${}^2\mathsf{G}_2$ и представляет нетривиальный элемент ее группы Вейля. В матрицах

$$h\left(\varepsilon\right)=\operatorname{diag}\left(\varepsilon,\varepsilon^{3\theta-1},\varepsilon^{2-3\theta},1,\varepsilon^{3\theta-2},\varepsilon^{1-3\theta},\varepsilon^{-1}\right),\quad w=\begin{pmatrix} & & -1\\ & \iddots & \\ -1 & & \end{pmatrix}.$$

Также определим

$$x_-(t,u,v)=wx_+(t,u,v)w,\quad \mathrm{U}^-={}^{w}\,\mathrm{U}^+=\left\{x_-(t,u,v)\mid t,u,v\in F\right\}.$$

Разложение Брюа утверждает, что каждый элемент g малой группы Ри может быть единственным образом записан в одной из следующих форм:

$$g=x_+(t_1,u_1,v_1)\,h(\varepsilon)\,w\,x_+(t_2,u_2,v_2),\quad g=x_+(t,u,v)\,h(\varepsilon).$$

Лемма 2.6. ${}^2\mathsf{G}_2\left(3^{2m+1}\right)=\mathrm{U}\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}^-$.

Доказательство. Рассмотрим сначала $h(\varepsilon)w$ для некоторого $\varepsilon\in F^*$. Каждый элемент поля $F=\mathbb{F}_{3\theta^2}$ является либо квадратом, либо минус квадратом. Если $\varepsilon=\lambda^2$, то

$$\begin{aligned}
&x_-\left(-\lambda^{3-6\theta},0,\lambda^{-3\theta}\right)\,x_+\left(0,0,\lambda^{3\theta}\right)=\\
&=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & -\lambda^{3\theta} & -\lambda^2\\
\lambda^{3\theta-2} & 1 & 0 & -\lambda^{3\theta-1} & \lambda & -\lambda^{6\theta-2} & 0\\
-\lambda^{1-3\theta} & -\lambda^{3-6\theta} & 1 & \lambda^{2-3\theta} & -\lambda^{4-6\theta} & 0 & 0\\
-\lambda^{-1} & 0 & \lambda^{3\theta-2} & -1 & 0 & 0 & 0\\
\lambda^{3\theta-3} & -\lambda^{-1} & -\lambda^{6\theta-4} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\lambda^{-3\theta} & -\lambda^{2-6\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\lambda^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}=\\
&=x_+\left(\lambda^{6\theta-3},0,-\lambda^{3\theta}\right)\,h\left(\lambda^2\right)w.
\end{aligned}$$

Если $\varepsilon = -\lambda^2$, то

$$x_-\left(-\lambda^{3-6\theta}, -\lambda^{3\theta-3}, \lambda^{-3\theta}\right)\, x_+\left(\lambda^{6\theta-3}, 0, 0\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{2-3\theta} & 0 & 0 & \lambda^{3-3\theta} & -\lambda^{3\theta} & \lambda^2 \\ \lambda^{3\theta-2} & -1 & -\lambda^{6\theta-3} & \lambda^{3\theta-1} & -\lambda & -\lambda^{6\theta-2} & 0 \\ 0 & -\lambda^{3-6\theta} & -1 & \lambda^{2-3\theta} & \lambda^{4-6\theta} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{1-3\theta} & -\lambda^{3\theta-2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{3\theta-3} & -\lambda^{-1} & \lambda^{6\theta-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^{-3\theta} & -\lambda^{2-6\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= x_+\left(\lambda^{6\theta-3}, \lambda^{3-3\theta}, \lambda^{3\theta}\right)\, h\left(-\lambda^2\right) w.$$

Теперь рассмотрим элемент $h(\varepsilon)$, $\varepsilon \in F^*$. Снова, если $\varepsilon = \lambda^2$, положим

$$g_1 = x_+(0,1,0)\, x_-\left(0,1,\lambda^{3\theta}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^{3\theta} & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -\lambda^{3\theta} & 0 & -\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda^{3\theta}+\lambda & 0 & \lambda & -1 & 0 & -1 \\ \lambda^{3\theta}+\lambda & 0 & \lambda & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda^{3\theta} & -1 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ \lambda^{3\theta}-\lambda & -1 & \lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1-\lambda^2 & -\lambda^{3\theta}-\lambda & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение справа на $x_+\left(-\lambda^{3-6\theta}, -\lambda^{3\theta-3}, -\lambda^{-3\theta}\right)$ обнуляет все элементы над диагональю, что дает

$$g_1 \cdot x_+\left(-\lambda^{3-6\theta}, -\lambda^{3\theta-3}, -\lambda^{-3\theta}\right) =$$
$$= h\left(\lambda^2\right)\, x_-\left(\lambda^{6\theta-3}, -\lambda^{3-3\theta}(1+\lambda^{3-3\theta}), \lambda^{3\theta}+\lambda^3\right).$$

Если $\varepsilon = -\lambda^2$, положим

$$g_1 = x_+(-1,-1,1)\, x_-\left(1,\lambda^{3-3\theta},0\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} -\lambda^2 & 0 & \lambda^{3-3\theta} & 0 & \lambda^{3\theta-1} & 0 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda^{6\theta-2} & -\lambda^{3-3\theta} & -\lambda^{3\theta-1} & -\lambda^{3\theta-1} & -1 & -1 \\ -\lambda^2-\lambda^{3-3\theta} & \lambda^{6\theta-2} & \lambda^{3-3\theta} & -\lambda^{3\theta-1} & 1+\lambda^{3\theta-1} & -1 & 1 \\ \lambda^{3-3\theta} & \lambda^{6\theta-2}-\lambda^{3\theta-1} & 0 & -\lambda^{3\theta-1}-1 & -1 & -1 & 0 \\ \lambda^{3-3\theta}-\lambda^{3\theta-1} & \lambda^{6\theta-2}+\lambda^{3\theta-1} & 1 & 1-\lambda^{3\theta-1} & -1 & -1 & 0 \\ \lambda^{3\theta-1}+\lambda^{3-3\theta}-\lambda^2 & \lambda^{6\theta-2}+\lambda^{3\theta-1}-1 & \lambda^{3-3\theta}-1 & 1-\lambda^{3\theta-1} & \lambda^{3\theta-1}-1 & -1 & 1 \\ 1-\lambda^2-\lambda^{3\theta-1} & -1-\lambda^{6\theta-2} & 1+\lambda^{3-3\theta} & \lambda^{3\theta-1} & \lambda^{3\theta-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямое вычисление показывает, что

$$g_1 \cdot x_+\left(0, \lambda^{3\theta-3}, 0\right) = x_-\left(1, 1-\lambda^{3\theta-3}, 1\right)\, h\left(-\lambda^2\right) = h\left(-\lambda^2\right)\, x_-(t,u,v)$$

для некоторых $t, u, v \in F$. □

2.2. Ширина главных конгруэнц-подгрупп

Согласно теореме 1.1, относительная элементарная группа $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$ порождается образующими $z_\alpha(s,\xi)$, $s \in I$, $\xi \in R$. Для исследования ширины по отношению к z_α невозможно применить унитреугольные факторизации — последние для конгруэнц-подгрупп существовать не могут, так как $\mathrm{U}^{\pm}(I) \leqslant \mathrm{E}(I)$. В этом разделе мы получим относительные версии разложений Гаусса и Басса—Кольстера и применим их для вычисления ширины по отношению к z_α.

2.2.1. Относительное разложение Гаусса

Теорема 2.3. *Пусть Φ — система корней ранга ℓ, а Δ_1, Δ_ℓ — две терминальные подсистемы Φ. Предположим, что обе относительные элементарные подгруппы $\mathrm{E}(\Delta_i, R, I)$, $i = 1, \ell$ допускают треугольную факторизацию с N треугольными множителями:*

$$\mathrm{E}(\Delta_i, R, I) = \mathrm{H}(\Delta_i, R, I) \cdot \mathrm{U}(\Delta_i^+, I) \cdot \mathrm{U}(\Delta_i^-, I) \cdot \ldots \cdot \mathrm{U}(\Delta_i^{\pm}, I), \quad i = 1, \ell.$$

Тогда и объемлющая группа $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$ допускает треугольную факторизацию с тем же количеством множителей:

$$\mathrm{E}(\Phi, R, I) = \mathrm{H}(\Phi, R, I) \cdot \mathrm{U}(\Phi^+, I) \cdot \mathrm{U}(\Phi^-, I) \cdot \ldots \cdot \mathrm{U}(\Phi^{\pm}, I).$$

Доказательство. Обозначим через Y произведение подгрупп в правой части равенстве выше. Чтобы показать, что $Y = \mathrm{E}(\Phi, R, I)$, достаточно проверить, что

1. Y нормализуется $\mathrm{E}(\Phi, R)$, то есть $Y^{\mathrm{E}(\Phi,R)} \subseteq Y$;
2. существует множество X, порождающее $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$ как *нормальную* подгруппу $\mathrm{E}(\Phi, R)$ и такое, что $XY \subseteq Y$.

Для доказательства первого достаточно показать, что $Y^{x_\alpha(\xi)} \subseteq Y$ для любых $\alpha \in \pm\Pi$, $\xi \in R$. Зафиксируем простой корень $\alpha \in \pm\Pi$. Ясно, что $\alpha \in \Delta_i$ для $i = 1$ или $i = \ell$, и можно разложить Y следующим образом:

$$Y = \mathrm{H}(\Phi, R, I) \cdot \mathrm{U}(\Delta_i^+, I) \cdot \ldots \cdot \mathrm{U}^{\pm}(\Delta_i, I) \cdot \mathrm{U}(\Sigma_i^+, I) \cdot \ldots \cdot \mathrm{U}(\Sigma_i^{\pm}, I). \tag{2.1}$$

Для каждого $h \in \mathrm{H}(\Phi, R, I)$ при некотором $s \in I$ выполнено

$$x_\alpha(\xi) \cdot h = h \cdot x_\alpha((1+s)\xi) = h \cdot x_\alpha(\xi)\, x_\alpha(s\xi).$$

Отсюда по предположению теоремы

$$Y^{x_\alpha(\xi)} \subseteq \mathrm{H}(\Phi, R, I) \cdot x_\alpha(-\xi)\, \mathrm{X}_\alpha(I) \cdot \mathrm{E}(\Delta_i, R, I) \cdot x_\alpha(\xi) \cdot \mathrm{U}(\Sigma_i^+, I) \cdot \ldots \cdot \mathrm{U}(\Sigma_i^\pm, I) = \\ = \mathrm{H}(\Phi, R, I) \cdot \mathrm{E}(\Delta_i, R, I) \cdot \mathrm{U}(\Sigma_i^+, I) \cdot \ldots \cdot \mathrm{U}(\Sigma_i^\pm, I) = Y.$$

Положим теперь $X = \{x_\alpha(\xi) \mid \alpha \in \Pi,\, \xi \in I\}$. Каждый корень сопряжен с каким-то простым под действием группы Вейля $W(\Phi)$. Поскольку $\mathrm{E}(\Phi, R)$ содержит нормализатор тора, множество $X^{\mathrm{E}(\Phi,R)}$ содержит все образующие группы $\mathrm{E}(\Phi, I) = \langle x_\alpha(\xi),\, \alpha \in \Phi,\, \xi \in I\rangle$. Наконец, включение $XY \subseteq Y$ следует из равенства (2.1) и того факта, что $\mathrm{H}(\Phi, R, I)$ нормализует каждую корневую подгруппу $\mathrm{X}_\alpha(I)$. □

2.2.2. Относительное разложение Басса–Кольстера

Докажем сперва вспомогательный результат о действии унипотентных радикалов в ортогональных группах.

Пусть $v \in V = R^{2\ell}$ — элемент векторного представления $\mathrm{G}(\mathsf{D}_\ell, R)$. Обозначим через v_+ и v_- его верхнюю и нижнюю половины, то есть $v_+ = (v_1, \ldots, v_\ell)^t$, $v_- = (v_{-\ell}, \ldots, v_{-1})^t$.

Лемма 2.7. *Положим* $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ *и предположим, что* $\mathrm{asr}(I) \leqslant \ell - 1$. *Тогда для любого* I*-унимодулярного столбца* $v = (v_+, v_-)^t \in \mathrm{Ums}(2\ell, I)$ *найдется такой* $g \in \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+, I)$, *что* $(g \cdot v)_+ \in \mathrm{Ums}(\ell, I)$.

Доказательство. Обозначим через J идеал R, порожденный компонентами вектора v_-. Ясно, что $J \subseteq I$. Поскольку $\mathrm{sr}(I/J) \leqslant \ell - 1$, относительная элементарная группа $\mathrm{E}(\mathsf{A}_{\ell-1}, R/J, I/J)$ действует транзитивно на $\mathrm{Ums}(\ell, I/J)$ (см. [7, теорема 2.3c]). Отсюда следует, что найдется элемент $h \in \mathrm{E}(\Delta_\ell, R, I)$, для которого вектор $v' = h \cdot v$ удовлетворяет $v'_i \equiv \delta_{i1} \pmod J$ при всех $i = 1, \ldots, \ell$.

Понятно, что $(v'_1, v'_{-\ell}, \ldots, v'_{-1})$ является I-унимодулярным. Применяя пункт 2 леммы 1.8, найдем такие $c_2, \ldots, c_\ell \in I$, что для $v'' = \prod_{i=2}^{\ell} x_{-i,-1}(c_i) \cdot v'$ выполнено $(v''_1, v''_{-\ell}, \ldots, v''_{-2}) \in \mathrm{Ums}(\ell + 1, I)$. Применяя условие $\mathrm{sr}(I) \leqslant \ell - 1$, найдем такие $d_1, d_3, \ldots, d_\ell \in I$, что элементы $(v'''_1, v'''_{-\ell}, \ldots, v'''_{-3})$ вектора $v''' = x_{-2,1}(d_1) \cdot \prod_{i=3}^{\ell} x_{-2,-i}(d_i) \cdot v''$ образуют I-унимодулярный столбец.

Можно найти такие $f_1, f_3, \ldots, f_\ell \in R$, что $f_1 v'''_1 + \sum_{i=3}^{\ell} f_i v'''_{-i} = 1$. Положим

$$\xi = v'''_1 - v'''_2 - 1 \in I, \quad v^{(4)} = x_{1,2}(\xi f_1) \cdot \prod_{i=3}^{\ell} x_{-i,2}(\xi f_i) \cdot v'''.$$

Ясно, что $v^{(4)}_2 = v^{(4)}_1 - 1$, поэтому $v^{(4)}_+$ I-унимодулярен. В итоге мы нашли такой $g \in \mathrm{EP}_\ell(R, I)$, что $v^{(4)} = g \cdot v$, и утверждение леммы следует отсюда в силу разложения Леви. □

Следующее утверждение является относительной версией разложения Басса–Кольстера (см. [85, теорема 2.1]).

Теорема 2.4. *Пусть* Φ *— классическая система корней ранга* $\ell \geqslant 2$, R *— коммутативное кольцо, а* I *— его идеал, удовлетворяющие одному из следующих условий:*

$$\begin{array}{ll} \Phi = \mathsf{A}_\ell,\ \ell \geqslant 2, & \mathrm{sr}(I) \leqslant \ell; \\ \Phi = \mathsf{C}_\ell,\ \ell \geqslant 2, & \mathrm{sr}(I) \leqslant 2\ell - 1; \\ \Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{D}_\ell,\ \ell \geqslant 3, & \mathrm{asr}(I) \leqslant \ell - 1. \end{array}$$

Тогда главная конгруэнц-подгруппа $\mathrm{G}(\Phi, R, I)$ *допускает разложение*

$$\mathrm{G}(\Phi, R, I) = \mathrm{U}(\Phi^+, I) \cdot \mathrm{U}(\Phi^-, I) \cdot Z \cdot \mathrm{U}(\Sigma_1^- \setminus \{-\alpha_{\max}\}, I) \cdot \mathrm{U}(\Sigma_1, I) \cdot \mathrm{G}(\Delta_1, R, I),$$

где $Z = \{z_{-\alpha_{\max}}(r, 1) \mid r \in I\}$.

Доказательство. Пусть g — элемент $\mathrm{G}(\Phi, R, I)$. Положим $v = g \cdot v^+ \in \mathrm{Ums}(n, I)$. Заметим, что достаточно найти такой элемент $g' \in \mathrm{U}(\Phi^-, I) \cdot \mathrm{U}(\Phi^+, I) \cdot g$, что

$$(g' \cdot v^+)_1 = 1 + s \text{ and } (g' \cdot v^+)_{\varpi_1 - \alpha_{\max}} = s \text{ для некоторого } s \in I. \tag{2.2}$$

Действительно, положим $g'' = z_{-\alpha_{\max}}(-s, 1) \cdot g'$. Очевидно, что имеют место равенства $(g'' \cdot v^+)_1 = 1$, $(g'' \cdot v^+)_{\varpi_1 - \alpha_{\max}} = 0$ и заключение теоремы следует из Леммы 1.4.

Случай $\Phi = \mathsf{A}_\ell$, $n = \ell + 1$. Поскольку $\mathrm{sr}(I) \leqslant \ell$, найдутся такие $a_1, \ldots, a_\ell \in I$, что вектор $(v_1 + a_1 v_{\ell+1}, \ldots, v_\ell + a_\ell v_{\ell+1})^t = (v_1', \ldots, v_\ell')^t$ является I-унимодулярным. Тогда существуют такие $b_1, \ldots, b_\ell \in I$, что $b_1 v_1' + \ldots b_\ell v_\ell' = v' - 1 \in I$. Тогда вектор

$$v'' = \prod_{i=1}^{\ell} x_{\ell+1, i}(b_i) \cdot \prod_{i=1}^{\ell} x_{i, \ell+1}(a_i) \cdot v$$

удовлетворяет уравнениям 2.2.

Случай $\Phi = \mathsf{C}_\ell$, $n = 2\ell$. Заметим, что столбец $(v_1, \ldots, v_{-2}, v_{-1}^2)^t$ также I-унимодулярен. Применяя условие $\mathrm{sr}(I) \leq 2\ell - 1$, найдем элементы $c_1, c_2, \ldots, c_{-2} \in I \cdot v_{-1}$, для которых верхние $2\ell - 1$ компонента вектора $v' = (v_1 + c_1 v_{-1}, \ldots, v_{-2} + c_{-2} v_{-1}, v_{-1})^t$ образуют I-унимодулярный столбец. Выбор c_i позволяет найти такой $d \in I$, что $h_1 \cdot v = v'$ для

$$h_1 = x_{1,-1}(c_1 + d) \cdot \prod_{i=2}^{-2} x_{i,-1}(c_i) \in \mathrm{U}(\Sigma_1^-, I).$$

Можно найти такие $f_1, f_2, \ldots, f_{-2} \in R$, что $f_1 v_1' + \sum_{i=2}^{-2} f_i v_i' = 1$. Положим

$\xi = v''_1 - v''_{-1} - 1 \in I$ и

$$h_2 = x_{-1,1}\Big(\xi f_1 + \sum_{i=2}^{\ell} v'_1\xi^2 f_i f_{-i}\Big) \cdot \prod_{i=2}^{-2} x_{-1,i}(\xi f_i) \in \mathrm{U}(\Sigma_1, I).$$

Прямое вычисление показывает, что $v'' = h_2 \cdot v'$ удовлетворяет уравнениям 2.2.

Случай $\Phi = \mathsf{D}_\ell$, $n = 2\ell$. По Лемме 2.7 найдется такой $h_1 \in \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+, I)$, что верхняя половина v'_+ вектора $v' = h_1 \cdot v$ окажется I-унимодулярной. Поскольку $\mathrm{sr}(I) \leqslant \ell - 1$, существуют такие $c_1, c_3, \dots c_\ell \in I$, что $(v''_1, v''_3, \dots, v''_\ell) \in \mathrm{Ums}(\ell - 1, I)$, где

$$v'' = h_2 \cdot x_{1,2}(c_1) \cdot v', \quad h_2 = \prod_{i=3}^{\ell} x_{i,2}(c_i).$$

Можно найти такие $f_1, f_3, \dots, f_\ell \in R$, что $f_1 v''_1 + \sum_{i=3}^{\ell} f_i v''_i = 1$. Как и ранее, положим

$$\xi = v''_1 - v''_{-2} - 1 \in I, \quad h_3 = x_{-2,1}(\xi f_1) \cdot \prod_{i=3}^{\ell} x_{-2,i}(\xi f_i), \quad v''' = h_3 \cdot v''.$$

Ясно, что $t_{1,2}(c_1) \cdot h_1 \in \mathrm{U}(\Phi^+, I)$, $h_3 \cdot h_2 \in \mathrm{U}(\Phi^-, I)$ и v''' удовлетворяет 2.2.

Случай $\Phi = \mathsf{B}_\ell$, $n = 2\ell + 1$. Разделим $v \in \mathrm{Ums}(2\ell+1, I)$ на $v = (v_+, v_0, v_-) \in R^\ell \times R \times R^\ell$. Обозначим через $J \leqslant I$ идеал, порожденный компонентами v_-. Поскольку $\mathrm{sr}(I/J) \leq \ell$, найдутся такие $c_1, \dots, c_\ell \in I$, что для $v' = h \cdot v$, $h = \prod_{i=1}^{\ell} x_{i,0}(c_i) \in \mathrm{U}(\Phi^+, I)$ выполнено $\bar{v}'_+ = (\bar{v}'_1, \dots, \bar{v}'_\ell) \in \mathrm{Ums}(\ell, I/J)$ и, следовательно, $(v'_+, v'_-) \in \mathrm{Ums}(2\ell, I)$. Теперь доказательство можно завершить повторением рассуждения в случае $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ (примененного к множеству длинных корней в B_ℓ). $\square$

Этот результат в действительности дает явную оценку на число элементарных образующих, участвующих в разложении.

Следствие 2.8. *В предположениях теоремы 2.4 каждый элемент $\mathrm{G}(\Phi, R, I)$ представляется в виде произведения одного элемента из $\mathrm{G}(\Delta_1, R, I)$, одного элемента из Z и не более $4|\Sigma_1| - 1$ элементарных корневых унипотентов $x_\alpha(s)$ уровня I.*

Доказательство. Оценка получается внимательным рассмотрением доказательства предыдущей теоремы. Случаи $\Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{C}_\ell$ тривиальны. В случае $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ из доказательства теоремы 2.4 вытекает разложение

$$\mathrm{G}(\Phi, R, I) = \mathrm{U}(\Sigma_\ell, I) \cdot \mathrm{X}_{\alpha_1}(I) \cdot \mathrm{U}(\Sigma_2^- \cap \Delta_1, I) \cdot \mathrm{X}_{-\alpha_{\max}}(I) \cdot Z \cdot \\ \cdot \mathrm{U}(\Sigma_1^-, I) \cdot \mathrm{U}(\Sigma_1, I) \cdot \mathrm{G}(\Delta_1, R, I).$$

Можно представить элемент $g \in \mathrm{U}(\Sigma_\ell, I)$ как произведение $g_1 \in \mathrm{U}(\Sigma_{\{1,2\}} \cap \Sigma_\ell)$ и $g_2 \in \mathrm{U}(\Delta_{\{1,2\}} \cap \Sigma_\ell)$. Вид расширенной диаграммы Дынкина D_ℓ показывает, что g_2 либо централизует либо нормализует все множителеи в этом разложении, кроме последнего, и поэтому может быть перенесено вправо вплоть до момента, когда оказывается поглощенным $\mathrm{G}(\Delta_1)$. С другой стороны, g_1 является произведением не более $2\ell - 3$ элементарных унипотентов, в то время как ширина $\mathrm{U}(\Sigma_1^{\pm}, I)$ и $\mathrm{U}(\Sigma_2^{-} \cap \Delta_1)$ в элементарных унипотентах не превосходит $2\ell - 2$ и $2\ell - 4$ соответственно. Суммируя эти оценки, получаем

$$(2\ell - 3) + 1 + (2\ell - 4) + 1 + 2 \cdot (2\ell - 2) = 8\ell - 9 = 4(|\mathsf{D}_\ell| - |\mathsf{D}_{\ell-1}|) - 1.$$

Оценка в случан $\Phi = \mathsf{B}_\ell$ получается аналогичным образом. □

Разложение Басса—Кольстера можно итерировать, пока позволяет условие стабильности, с небольшим усилением следствия 2.8.

Следствие 2.9. *Предположим, что Φ и I удовлетворяют одному из следующих предположений*

$$\begin{array}{lll}
\Phi = \mathsf{A}_\ell, & \mathrm{sr}(I) \leqslant 2, & N' = 3\,|\Phi^+| + 2\ell - 5; \\
\Phi = \mathsf{C}_\ell, & \mathrm{sr}(I) \leqslant 3, & N' = 3\,|\Phi^+| + 3\ell - 6; \\
\Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{D}_\ell, & \mathrm{asr}(I) \leqslant 2, & N' = 4\,|\Phi^+| - 4.
\end{array}$$

Тогда каждый эдемент $\mathrm{G}(\Phi, R, I)$ можно представить как произведение одного элемента из $\mathrm{G}(\langle \pm\alpha_\ell \rangle, R, I) \cong \mathrm{SL}(2, R, I)$ и не более N' элементов из $\mathcal{Z}(\Sigma_\ell)$.

Доказательство. Улучшенные оценки для $\Phi = \mathsf{A}_\ell$ или C_ℓ получаются с использованием того факта, что достаточно производить только два или три прибавления для получения более короткого унимодулярного столбца на первом шаге в доказательстве разложения Басса—Кольстера. □

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D}_4 \arrow[dr, bend left, "\mathrm{asr}\leqslant 3"] & & & \\
\mathsf{A}_4 \arrow[r, "\mathrm{sr}\leqslant 4"] & \mathsf{A}_3 \arrow[r, "\mathrm{sr}\leqslant 3"] & \mathsf{A}_2 \arrow[r, "\mathrm{sr}\leqslant 2"] & \mathsf{A}_1 \\
\mathsf{C}_4 \arrow[r, "\mathrm{sr}\leqslant 7"] & \mathsf{C}_3 \arrow[r, "\mathrm{sr}\leqslant 5"] & \mathsf{C}_2 \arrow[ur, bend right, "\mathrm{sr}\leqslant 3"'] & \\
\mathsf{B}_4 \arrow[r, "\mathrm{asr}\leqslant 3"] & \mathsf{B}_3 \arrow[ur, bend right, "\mathrm{asr}\leqslant 2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Рисунок 2.1: Редукции, доставляемые разложением Басса—Кольстера

2.2.3. Анализ групп малых рангов

Лемма 2.10. *Пусть Φ — система корней, а I — идеал коммутативного кольца R, удовлетворяющий условию $\mathrm{sr}(I) = 1$. Тогда относительная элементарная группа*

Шевалле допускает разложение Гаусса

$$\mathrm{E}(\Phi, R, I) = \mathrm{H}(\Phi, R, I) \cdot \mathrm{U}(\Phi, I) \cdot \mathrm{U}(\Phi^-, I) \cdot \mathrm{U}(\Phi, I).$$

Доказательство. В силу теоремы 2.3 достаточно доказать, что разложение Гаусса длины 3 имеет место для $\Phi = \mathsf{A}_1$.

Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, R, I)$. Первый столбец A I-унимодулярен, так что найдется такой $z \in I$, что $a + cz \in R^*$. Умножая A слева на $x_{12}(z)$, получаем матрицу $A' = x_{12}(z) \cdot A = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, имеющую обратимый элемент a' в левом верхнем углу. После умножения A' слева на $x_{21}(-c/a')$ и справа на $x_{12}(-b'/a')$ получаем диагональную матрицу. Таким образом мы получаем разложение

$$A = x_{12}(-z) \cdot x_{21}(c/a') \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix} \cdot x_{12}(b'/a') = x_{12}(-z) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix} \cdot x_{21}(y) \cdot x_{12}(b'/a'),$$

где $\varepsilon \in 1 + I$ и $y \in I$. □

Лемма 2.11. *В условиях леммы 2.10 ширина* $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$ *по отношению к* $\mathcal{Z}(\Pi)$ *не превышает* $3\,|\Phi^+| + 2\,\mathrm{rk}\,\Phi - 1$.

Доказательство. Рассмотрим элемент $g \in \mathrm{E}(\Phi, R, I)$ и разложим его в произведение $g = u_1 h v_2 u_3$, где $h \in \mathrm{H}(\Phi, R, I)$, $u_1, u_3 \in \mathrm{U}(\Phi, I)$, $v_2 \in \mathrm{U}(\Phi^-, I)$. Разложим также $h = \prod_{i=1}^{\ell} h_{\alpha_i}(\varepsilon_i)$, $\varepsilon \in 1 + I$. Каждый из $h_{\alpha_i}(\varepsilon_i)$ раскладывается в произведение $h_{\alpha_i}(\varepsilon_i) = x_{\alpha_i}(*) z_{-\alpha_i}(*, *) x_{-\alpha_i}(*)$ (см. Лемму 1.1), и поскольку тор нормализует каждую из корневых подгрупп $X_\alpha(I)$ (см. (1.4)), имеем разложение

$$g \in \mathrm{U}(\Phi, I) \cdot \prod_{i=1}^{\ell} \bigl(x_{\alpha_i}(*) z_{-\alpha_i}(*, *)\bigr) \cdot \mathrm{U}^-(\Phi, I)\, \mathrm{U}(\Phi, I),$$

откуда следует заявленная оценка. □

Следующий результат является следствием теорем 5.7 и 5.8 работы [57].

Лемма 2.12. *Пусть p — простое число, а c и d — пара взаимно простых целых чисел, и $p \perp d$. Тогда в предположении Обобщенной Гипотезы Римана существует бесконечно много простых чисел $q \equiv c \pmod d$, для которых p является примитивным корнем по модулю q.*

Следующее утверждение является относительной версией [6, лемма 6] (см. также [97]).

Лемма 2.13. *Положим $R = \mathbb{Z}[1/p]$, и пусть I — идеал R. В предположении Обобщенной Гипотезы Римана ширина* $\mathrm{SL}(2, R, I)$ *по отношению к множеству образующих*

$$\mathcal{Z}(\{-\alpha_1\}) = X_{12}(I) \cup X_{21}(I) \cup \{z_{21}(s, \xi) \mid s \in I,\, \xi \in R\}$$

не превосходит 6.

Доказательство. Ясно, что I является главным идеалом, порожденным некоторым $m \in \mathbb{Z}$, не делящимся на p. Пусть g — некоторый элемент $\mathrm{SL}(2, R, I)$. Запишем его в виде

$$g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \text{ for } x = p^{\alpha}a,\ z = p^{\beta}bm, \text{ where } a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Z},\ p \nmid a, b.$$

Случай 1: $\alpha \geqslant \beta$. Поскольку $p^{\alpha-\beta}a \perp bm^2$ и $p \perp bm^2$, существует бесконечно много простых q вида $p^{\alpha-\beta}a + bm^2k$, для которых p — примитивный корень по модулю q. Можно также считать, что q взимно прост с b. Положим

$$g_1 = x_{12}(mk) \cdot g = \begin{pmatrix} p^{\beta}q & * \\ p^{\beta}bm & * \end{pmatrix}.$$

Найдется такой $u \geqslant 1$, что $p^u \equiv b \pmod{q}$, скажем, $p^u = b + lq$. Тогда

$$g_2 = x_{21}(ml) \cdot g_1 = \begin{pmatrix} p^{\beta}q & * \\ mp^{\beta+u} & * \end{pmatrix}.$$

Поскольку $g_2 \equiv 1 \pmod{m}$, можно представить $p^{\beta}q = 1 + cm$ для какого-то c. Положим теперь

$$\begin{aligned} g_3 &= x_{12}\left(\frac{-c}{p^{\beta+u}}\right) \cdot g_2 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ mp^{\beta+u} & * \end{pmatrix}, \\ g_4 &= x_{21}\left(-mp^{\beta+u}\right) \cdot g_3 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \\ g_5 &= x_{12}\left(\frac{c}{p^{\beta+u}}\right) \cdot g_4 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что $g_5 = z_{21}\left(-mp^{\beta+u}, c/p^{\beta+u}\right) \cdot g_2$, так что $g = x_{12} \cdot x_{21} \cdot z_{21} \cdot x_{12}$ и длина g не превосходит 4.

Случай 2: $\alpha < \beta$. Поскольку фактор-кольцо $\mathbb{Z}[1/p]/I$ конечно, найдется такой $k > 0$, что $p^k \equiv 1 \pmod{I}$. Мжно выбрать $k > \beta - \alpha$. Тогда $k + \alpha > -k + \beta$ и

$$h_{12}\left(p^k\right) \cdot g = \begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & p^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{\alpha}a & * \\ p^{\beta}bm & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{k+\alpha}a & * \\ p^{-k+\beta}bm & * \end{pmatrix}.$$

Мы вновь окказываемся в ситуации Случая 1, так что можем разложить $g = h_{12} \cdot x_{12} \cdot x_{21} \cdot z_{21} \cdot x_{12}$. Выражая, наконец, $h = x_{21} \cdot z_{21} \cdot x_{12}$ как в Лемме 1.1, получаем, что $g = x_{21} \cdot z_{21} \cdot x_{12} \cdot x_{21} \cdot z_{21} \cdot x_{12}$. □

До конца раздела k обозначает глобальное поле. Пусть $\mathcal{O}_S$ — дедекиндово кольцо арифметического типа, определенное множеством S нормирований в k, и пусть I — идеал $\mathcal{O}_S$.

Лемма 2.14. *Пусть Φ — классическая система корней ранга $\ell \geqslant 2$. Если k имеет вещественное вложение, то $\mathrm{G}(\Phi, \mathcal{O}_S, I)$ имеет конечную ширину по отношению к $\mathcal{Z}(\Sigma_\ell)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что $\operatorname{asr}(I) \leqslant \operatorname{asr}(\mathcal{O}_S) \leqslant 2$. По следствию 2.9 можно представить любой элемент $G = \mathrm{G}(\Phi, \mathcal{O}_S, I)$ как произведение конечного числа образующих из $\mathcal{Z}(\Sigma_\ell)$ и одного элемента $G_0 = \mathrm{G}(\{\alpha_\ell, -\alpha_\ell\}, \mathcal{O}_S, I) \cong \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_S, I)$. Следовательно, для доказательства леммы достаточно представить каждый элемент $g = \left(\begin{smallmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{smallmatrix}\right) \in G_0$ как произведение конечного числа образующих, лежащих в какой-то подгруппе ранга 2, содержащей G_0.

Из равенства $\det(g) = 1$ заключаем, что $a + d = bc - ad \in I^2$. Напомним, что конгруэнц-подгруппа Васерштейна определяется как

$$\mathrm{G}(I, I) = \left\{ \begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_S) \;\middle|\; a, d \in I^2,\, b, c \in I \right\}.$$

Заметим, что $g_1 = g \cdot z_{21}(a, 1)$ содержится в $G(I, I)$. Действительно

$$\begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ba-a^2 & b-a-ba-a^2 \\ c+a+ad-ac & 1+bc-ac \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(I, I).$$

Для любой матрицы $g' = \left(\begin{smallmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{smallmatrix}\right) \in G(I, I)$ матрица $x_{21}(-c) \cdot g' \cdot x_{12}(-b)$ лежит в $\mathrm{SL}\left(2, \mathcal{O}_S, I^2\right)$.

По лемме 1.2 группа $\mathrm{E}\left(\Phi, \mathcal{O}_S, I^2\right)$ содержится в $\mathrm{E}(\Phi, I)$ для любой системы корней $\Phi \neq \mathsf{C}_\ell$ ранга $\geqslant 2$. Заметим, что в предположениях леммы известна коненость ширины $\mathrm{E}(\Phi, I)$ по отношению к $\{x_\alpha(s) \mid \alpha \in \Phi,\ s \in I\}$, см. [90] или [15, теорема 3.3].

Остается рассмотреть случай $\Phi = \mathsf{C}_\ell$. Во-первых, заметим, что $2abc - abd \in II^{⊡}$. Действительно,

$$\det(g_1) = a^3d - 3a^2bc + a^2bd + ab^2c + a^3 + a^2b + a^2d + 2abc - abd + 1.$$

Следовательно, имеет место сравнение

$$g_2 = x_{21}(-a-c) \cdot g_1 \cdot x_{12}(a-b) \equiv \begin{pmatrix} 1+ab-a^2 & -ab-a^2 \\ ad-ac-abc & 1-ab+a^2 \end{pmatrix} \bmod II^{⊡}.$$

Для $g_3 = g_2 \cdot z_{12}\left(a^2 - ab, 1\right)$ выполнено

$$g_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2ab \\ -abc-a^2+ab-ac+ad & 1 \end{pmatrix} \bmod II^{⊡},$$
$$g_4 = x_{12}(2ab) \cdot g_3 \equiv x_{21}\left(-abc-a^2+ab-ac+ad\right) \bmod II^{⊡}.$$

Таким образом, $g_4 \cdot x_{21}(*) \in \mathrm{SL}\left(2, \mathcal{O}_S, II^{\boxed{2}}\right)$ содержится в $\mathrm{E}(\mathsf{C}_\ell, I)$ по Лемме 1.2, и, следовательно, может быть выражено как произведение ограниченного числа множителей x_α. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть Φ — система корней, а I — идеал кольца R.*

1. *Если $\mathrm{sr}(I) = 1$, то $W(\mathrm{E}(\Phi, R, I), \mathcal{Z}(\Pi)) \leqslant 3|\Phi^+| + 2\,\mathrm{rk}(\Phi) - 1$;*

2. *Пусть p — простое число, $R = \mathbb{Z}[1/p]$, а Φ одна из классических систем корней. В предположении Обобщенной Гипотезы Римана имеют место оценки*

$$W(\mathrm{E}(\Phi, R, I), \mathcal{Z}(\Sigma_\ell^-)) \leqslant 3|\Phi^+| + 2\,\mathrm{rk}(\Phi) + 1, \text{ если } \Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{C}_\ell,$$
$$W(\mathrm{E}(\Phi, R, I), \mathcal{Z}(\Sigma_\ell^-)) \leqslant 4|\Phi^+| + \mathrm{rk}(\Phi) + 1, \quad \text{ если } \Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{D}_\ell;$$

3. *Пусть $\mathcal{O}_S$ — дедекиндово кольцо арифметического типа в глобальном поле k, имеющем вещественное вложение. Предположим, что Φ классическая ранга $\geqslant 2$, тогда $W(\mathrm{G}(\Phi, \mathcal{O}_S, I), \mathcal{Z}(\Sigma_\ell^-))$ конечна.*

Доказательство. Первое утверждение содержится в лемме 2.11. Второе и третье утверждения следуют из лемм 2.13 и 2.14. $\square$

3. Коммутаторная ширина

В данной главе исследуется ширина элементарных групп относительно множества всех коммутаторов. Доказательство устроено следующим образом. Во-первых, в разделе 3.1 исследуются аналоги фробеуниусовых клеток для групп Шевалле и способы приведения некоторых классов элементов к такому виду. Во-вторых, в разделе 3.2 для элементов из унипотентных радикалов некоторых максимальных параболических подгрупп строятся их разложения в произведение небольшого числа коммутаторов. Наконец, существование унитреугольной факторизации сводит задачу к исследованию длины элементов типа uv для $u \in \mathrm{U}(\Phi^+)$ и $v \in \mathrm{U}(\Phi^-)$, которая вычисляется благодаря полученным в разделе 3.1 результатам о приведении к фробениусовой форме.

Также в разделе 3.3 обсуждаются оценки для других классов колец или чуть отличающихся множеств образующих.

3.1. Фробениусовы клетки и их свойства

Определение 3.1. Для элемента $w \in \mathrm{W}(\Phi)$ и натурального числа n обозначим

$$\Omega_n^w = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w^{n+1}\alpha \in \Phi^-,\, w\alpha, w^2\alpha, \ldots, w^n\alpha \in \Phi^+\},$$
$$\Theta^w = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w^k\alpha \in \Phi^+ \ \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Обычно выбор конкретного элемента w ясен из контекста, в таких случаях мы опускаем верхний индекс и пишем просто Θ и Ω_n.

Заметим, что $\Phi^+ = \Theta \cup \bigcup_{k\geqslant 0}\Omega_k$ и объединение дизъюнктно.

Замечание 3.2. Множество Θ^w замкнуто для любого $w \in \mathrm{W}$.

Доказательство. Допустим, существуют такие $\alpha, \beta \in \Theta$, что $\alpha + \beta \in \Phi^+ \setminus \Theta$. Тогда существует $k \geqslant 0$, для которого $w^k(\alpha+\beta) \in \Phi^-$. Тогда $w^k\alpha$ или $w^k\beta$ отрицателен. □

Лемма 3.3. $\Theta \cup \bigcup_{k=0}^n \Omega_k$ *замкнуто для любого* n. *Как следствие,* $\Phi^+ \setminus \cup_{k\geqslant n}\Omega_k$ *замкнуто для любого* n.

Доказательство. Допустим, существуют такие $\alpha, \beta \in \Theta \cup \bigcup_{k=0}^n \Omega_k$, что $\alpha + \beta \in \cup_{k>n}\Omega_k$. Тогда существует $m > n$, для которого $w^{m+1}(\alpha+\beta) \in \Phi^-$ и $w^i(\alpha+\beta) \in \Phi^+$ для всех $i = 0, \ldots, m$.

Тогда $w^{m+1}\alpha$ или $w^{m+1}\beta$ отрицателен, так что один из α, β лежит вне Θ. Поскольку $w^{n+1}(\alpha+\beta) \in \Phi^+$, имеем $\alpha \in \Theta \cup \bigcup_{k>n}\Omega_k$ или $\beta \in \Theta \cup \bigcup_{k>n}\Omega_k$. Если $\alpha \in \Theta$, то $\beta \in \cup_{k>n}\Omega_k$, противоречие, аналогично для $\beta \in \Theta$. □

Определение 3.4. Обозначим через $\widetilde{\pi}$ следующий элемент Кокстера группы Вейля системы Φ или, в случае E_6, подсистемы типа A_5:

Φ	$\widetilde{\pi}$
$\mathsf{A}_\ell, \mathsf{B}_\ell, \mathsf{C}_\ell$	$\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_\ell$
D_ℓ	$\sigma_\ell\ldots\sigma_2\sigma_1$
E_6	$\sigma_1\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6$
E_7	$\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7$
E_8	$\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8$
F_4	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$
G_2	$\sigma_2\sigma_1$

Через π обозначим подъем $\widetilde{\pi}$ в расширенную группу Вейля, полученный отправкой σ_i в $w_i(1)$.

Для любого элемента Кокстера w_c множество Θ^{w_c} пусто. Поэтому для данного выбора $\widetilde{\pi}$ имеем $\Theta^{\widetilde{\pi}} = \varnothing$ во всех случаях, кроме E_6, когда $\Theta^{\widetilde{\pi}} = \Sigma_2$.

Определение 3.5. Будем называть фробениусовой клеткой элемент вида $u\pi$ с $u \in \mathrm{U}(\Sigma)$, где $\Sigma = \Omega_0^{\widetilde{\pi}}$ в случае $\Phi \neq \mathsf{E}_6$ и $\Sigma = \left(\Theta^{\widetilde{\pi}} \setminus \{\alpha_2\}\right) \cup \Omega_0^{\widetilde{\pi}}$ для $\Phi = \mathsf{E}_6$. В зависимости от системы корней это множество может быть описано следующим образом:

- A_ℓ: $\Sigma = \Sigma_\ell$;
- B_ℓ: $\Sigma = \left(\Sigma_\ell^{=2} \cap \Sigma_{\ell-1}^{=1}\right) \cup \{\alpha_\ell\}$ (помечено черным на весовой диаграмме присоединенного представления, см. рис. 3.2);
- C_ℓ: $\Sigma = \left(\Sigma_\ell^{=1} \cap \Sigma_{\ell-1}^{=1}\right) \cup \{\alpha_\ell\} = \Sigma_\ell^{=1} \cap \Sigma_{\ell-1}^{\leqslant 1}$ (рис. 3.1);
- D_ℓ: $\Sigma = \Sigma_1 \cap (\Delta_\ell \cup \Delta_{\ell-1})$ (рис. 3.3);
- E_6: $\Sigma = (\Sigma_6 \cap \Delta_2) \cup (\Sigma_2 \setminus \{\alpha_2\})$ (рис. 3.7);
- $\mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8, \mathsf{F}_4$: см. рис. 3.4, 3.5, 3.6 соответственно;
- G_2: $\Sigma = \{\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2\}$.

Это описание (для $\Phi \neq \mathsf{E}_6$) получено следующим образом: сначала проверяется, что $\widetilde{\pi}$ переводит правую часть в Φ^- и что количество корней в ней равно рангу Φ. После этого остается заметить, что $\left|\Omega_0^{\widetilde{\pi}}\right| = \mathrm{rk}(\Phi)$. Это следует из того факта, что все орбиты действия элемента Кокстера w_c имеют одинаковый размер, равный числу Кокстера h (поскольку w_c действует поворотом на $2\pi/h$ на своей плоскости Кокстера и ни один корень не проектируется в ноль, см. [46, разделы 3.17, 3.18]) и что $|\Phi| = h \cdot \mathrm{rk}(\Phi)$. В случае $\Phi = \mathsf{E}_6$ следует применить это рассуждение к A_5-подсистеме Δ_2.

В случае $\Phi = \mathsf{A}_\ell$ данное выше определение фробениусовой клетки превращается в определение сопровождающей матрицы унитарного многочлена степени $\ell + 1$.

Лемма 3.6. *Для любого $u \in \mathrm{U}^+$ существует такой $\eta \in \mathrm{U}^+$, что $\eta u \pi \eta^{-1}$ — фробеуниусова клетка.*

Доказательство. Рассмотрим Ω_k для $w = \widetilde{\pi}$ и обозначим через N наибольшее натуральное число, для которого $\Omega_N \neq \varnothing$.

Разложим u в произведение θv, где $\theta = \prod_{\alpha \in \Omega_N} x_\alpha(c_\alpha)$ и $v \in \mathrm{E}(\Phi^+ \setminus \Omega_N)$. Рассмотрим сопряженный с ним элемент $\theta^{-1} u \pi \theta$. Из соотношения (1.1) следует, что для $\alpha \in \Omega_N$ выполнено $\pi x_\alpha(c_\alpha)\pi^{-1} \in \mathrm{E}(\Omega_{N-1}) \subset \mathrm{E}(\Phi^+ \setminus \Omega_N)$, и потому $\pi\theta \in \mathrm{E}(\Phi^+ \setminus \Omega_N)\pi$, так что $\theta^{-1} u \pi \theta = u'\pi$ для некоторого $u' \in \mathrm{E}(\Phi^+ \setminus \Omega_N)$, поскольку это множество корней замкнуто.

Теперь мы можем разложить u' в произведение $\theta' v'$, где $\theta' = \prod_{\alpha \in \Omega_{N-1}} x_\alpha(c_\alpha)$ и $v' \in \mathrm{E}(\Phi^+ \setminus (\Omega_N \cup \Omega_{N-1}))$. Повторим предыдущий шаг, чтобы получить элемент вида $u''\pi$, где $u'' \in \mathrm{E}(\Phi^+ \setminus (\Omega_N \cup \Omega_{N-1}))$.

Повторяя эту процедуру $N - 1$ раз, мы в итоге получим элемент вида $u\pi$ с $u \in \mathrm{E}(\Phi^+ \setminus \cup_{k>0} \Omega_k) = \mathrm{E}(\Theta \cup \Omega_0)$.

Поскольку $\Theta \cup \Omega_0$ совпадает с Σ во всех случаях, кроме E_6, лемма почти доказана. Для $\Phi = \mathsf{E}_6$ необходимо дополнительно убрать множитель $x_{\alpha_2}(*)$ таким же способом (это дает замкнутое множество Σ). □

Подъем w элемента Кокстера в расширенную группу Вейля это по существу набор знаков $s_i^w = \pm 1$, приписанных к простым корням α_i.

Лемма 3.7. *Пусть $\Phi \neq \mathsf{A}_\ell, \mathsf{D}_\ell, \mathsf{E}_7$, а w_1, w_2 – два подъема одного и того же элемента Кокстера в расширенную группу Вейля $\mathrm{N}(\Phi, \mathbb{Z})$. Тогда w_1 и w_2 сопряжены элементом из $\mathrm{H}(\Phi, \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Сопряжение элементом $h \in \mathrm{H}(\mathbb{Z})$ меняет какие-то из s_i^w, оставляя другие неизменными. Из соотношения (1.5) следует, что $h_\alpha(-1)$ меняет знаки, ассоциированные только с теми корнями β, для которых число $\langle \beta, \alpha \rangle$ нечетно. Это число может быть легко вычислено, например, следующим образом: если $\beta - r\alpha, \dots, \beta + q\alpha$ являестя α-серией, порожденной β, то $\langle \beta, \alpha \rangle = r - q$.

Чтобы найти подходящий элемент $\mathrm{H}(\mathbb{Z})$, проанализируем каждую из возможных систем корней. В каждом случае укажем процедуру для преобразования одного набора знаков (w_1) в другой (w_2), то есть цепочку «элементарных» преобразований $w \mapsto {}^{h_\alpha(\pm 1)}w$. Знаки текущего значения w будем обозначать просто через s_i, $i = 1, \dots, \ell$.

$\Phi = \mathsf{B}_\ell$, $\ell \geqslant 3$: начнем с получения искомого значения s_ℓ, сопрягая w при помощи $h_{\alpha_{\ell-1}}(\pm 1)$. Теперь положим $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\ell$ и заметим, что $\langle \alpha_1, \gamma_1 \rangle = 1$ и $\langle \alpha_\ell, \gamma_1 \rangle = 0$. Это показывает, что сопряжение при помощи h_{γ_1} позволяет изменить s_1, не меняя при этом s_ℓ. Аналогично, используем $\gamma_k = \alpha_{k-1} + 2\alpha_k + \ldots + 2\alpha_\ell$, чтобы изменить s_k, $k = \ell - 1, \ell - 2, \dots, 3$. Каждый из h_{γ_k}

влияет только на s_k и s_{k-1}, а последний при необходимости исправляется $h_{\gamma_{k-1}}$. Последний шаг состоит в том, чтобы применить $\gamma_2 = \alpha_{\max} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_\ell$, поскольку h_{γ_2} меняет только s_2.

$\Phi = \mathsf{C}_\ell$, $\ell \geqslant 2$: начнем с исправления s_ℓ, сопрягая w при помощи h_γ, где $\gamma = \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell$ (действительно, $\langle \alpha_\ell, \gamma \rangle = 1$). Теперь мы можем изменить s_k, $k = 1, 2, \ldots, \ell - 1$, применяяя $h_{\alpha_{k+1}}$.

$\Phi = \mathsf{E}_6$: сначала изменим s_2 сопряжением с h_{α_4}, затем используем α_1 и α_6 для s_3 и s_5, после чего α_3 и α_5 для s_1 и s_6, и наконец α_2, чтобы исправить s_4.

$\Phi = \mathsf{E}_8$: используем α_3, для изменения s_1, затем α_4, α_5, α_6, α_7, α_8 для s_2, s_4, s_5, s_6, s_7 соотвественно, и закончим применением α_1 для s_3 и $\alpha_{\max}$ для s_8.

$\Phi = \mathsf{E}_4$: используем α_1 и α_2 для s_2 и s_1, затем α_3 и α_4 для s_4 и s_3.

$\Phi = \mathsf{G}_2$: применим α_1 и α_2 для s_2 и s_1. □

Поскольку в случае $\Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{D}_\ell, \mathsf{E}_7$ невозможно применить лемму 3.7, проведем некоторые дополнительные вычисления.

Обозначим за w_0 длиннейший элемент группы Вейля. Будем использовать $\widehat{w_0}$ для обозначения его очевидного подъема в расширенную группу Вейля, полученного заменой каждого множителя σ_i на $w_i(1)$ в его приведенном разложении. Позже мы зафиксируем другой подъем в случае $\Phi = \mathsf{A}_\ell$.

Лемма 3.8. *Для* $\Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{D}_\ell, \mathsf{E}_7$ *выполнено* $\widehat{w_0} w_i(1) \widehat{w_0}^{-1} = w_j(1)$*, где* $\alpha_j = -w_0(\alpha_i)$.

Доказательство. В случаях A_ℓ и D_ℓ это может быть проверено прямым вычислением в матрицах (для ортогональной группы это проделано в работе [19], откуда сразу следует для спинорной группы, поскольку центральный множитель не играет никакой роли).

В случае E_7 затруднительно провести явно вычисление с матрицами, но можно проделать нечто очень похожее. А именно, после выбора положительноого базиса в микровесовом представлении (E_7, ϖ_7) имеется явное и очень простое описание действия $\widetilde{\mathrm{W}}(\Phi)$.

Обозначим Λ множество весов представления, а α — простой корень, тогда

$$w_\alpha(1) v^\lambda = \begin{cases} v^\lambda, & \text{если } \lambda \pm \alpha \notin \Lambda, \\ v^{\lambda+\alpha}, & \text{если } \lambda + \alpha \in \Lambda, \\ -v^{\lambda-\alpha}, & \text{если } \lambda - \alpha \in \Lambda. \end{cases}$$

Теперь можно считать, что $\widetilde{\mathrm{W}}(\Phi)$ действует означенными перестановками на $\Lambda \cup -\Lambda$, так что проверка равенства $\widehat{w_0} w_i(1) = w_i(1) \widehat{w_0}$ для каждого i становится рутинной. □

Как следствие получаем, что в случае $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ выполнено $\widehat{w_0} \pi \widehat{w_0} = \pi$, так как $w_\ell(1)$ и $w_{\ell-1}(1)$ коммутируют.

Обозначим за p_n перъединичную $n \times n$-матрицу, то есть $p_n = (\delta_{i,n-j+1})_{i,j=1,\ldots,n}$. Если $n \neq 4k + 2$, то либо $\det(p_n) = 1$, либо $\det(-p_n) = 1$, так что для $\mathrm{SL}(n, R) =$

$\mathrm{G}(\mathsf{A}_{n-1}, R)$ мы специально выбираем в качестве $\widehat{w_0}$ матрицу p_n или $-p_n$, которые не являются очевидным поъемом w_0. Однако с таким выбором верно

$$\widehat{w_0} \cdot w_\ell(-1) \dots w_1(-1) \cdot \widehat{w_0}^{-1} = w_1(1) \dots w_\ell(1),$$

что может быть записано просто как $\widehat{w_0}\pi^{-1}\widehat{w_0}^{-1} = \pi$.

Для $n = 4k+2$ ни p_n, ни $-p_n$ не лежит в $\mathrm{SL}(n, R)$. Тогда мы полагаем $\widehat{w_0}$ равным анти-диагональной матрице с чередующимися 1 и -1. Тогда $\widehat{w_0}\pi^{-1}\widehat{w_0}^{-1} = -\pi$.

Лемма 3.9. *Пусть $\Phi = \mathsf{A}_\ell$, $\ell \neq 4k+1$ или $\Phi = \mathsf{E}_6$. Если x подобна фробениусовой клетке, то то же верно для x^{-1}.*

Доказательство. По предположению запишем $\eta x \eta^{-1} = u\pi$ для какого-то $u \in \mathrm{U}(\Sigma)$, так что $\eta x^{-1} \eta^{-1} = \pi^{-1} u^{-1}$.

В случае $\Phi = \mathsf{A}_\ell$, $\ell \neq 4k+1$, сопряжем его при помощи $\widehat{w_0}$ и получим $\pi u'$, где $u' \in \mathrm{U}(w_0\Sigma)$. Заметим, что $w_0\Sigma_\ell = -\Sigma_1 = \widetilde{\pi}\Sigma_\ell$, поэтому $\pi u' = u''\pi$ для некоторого $u'' \in \mathrm{U}(\Sigma_\ell)$.

В случае $\Phi = \mathsf{E}_6$ обозначим через v_0 длиннейший элемент $\mathrm{W}(\Delta_2)$ и за $\widehat{v_0}$ его подъем в нормализатор тора. Сопрягая $\pi^{-1}u^{-1}$ при помощи $\widehat{v_0}$, получим $\rho u'$, где $u' \in \mathrm{U}(v_0\Sigma)$, а ρ это (возможно иной) подъем $\widetilde{\pi}$. Сопряжем результат при помощи ρ^{-1}, чтобы получить $u'\rho$. Сопрягая, если необходимо, подходящим элементом $\mathrm{H}(\mathbb{Z})$ (см. лемму 3.7), мы можем считать $\rho = \pi$. Поскольку $v_0 (\Sigma_6 \cap \Delta_2) = \widetilde{\pi} (\Sigma_6 \cap \Delta_2) = -\Sigma_1 \cap \Delta_2$ и $v_0\Sigma_2 = \widetilde{\pi}\Sigma_2 = \Sigma_2$, имеем $u'\pi = \pi u''$ для $u'' \in \mathrm{U}(\Sigma \cup \{\alpha_2\})$, который сопряжен с $u''\pi$. Остается сопрячь это при помощи $x_{\alpha_2}(*)$ как в доказательстве леммы 3.6. □

Замечание 3.10. Пусть $\Phi = \mathsf{A}_{4k+1}$. Если x подобна фробениусовой клетке, то то же верно для $-x^{-1}$.

Доказательство. Достаточно повторить доказательство леммы 3.9, используя равенство $\widehat{w_0}\pi^{-1}\widehat{w_0}^{-1} = -\pi$. □

Лемма 3.11. *Пусть $\Phi \neq \mathsf{A}_{4k+1}$. Тогда для любого $v \in \mathrm{U}^-$ существует такой $\eta \in \mathrm{E}(\Phi)$, что $\eta v \pi \eta^{-1}$ — фробениусова клетка.*

Доказательство. Заметим, что $\widehat{w_0} v \widehat{w_0}^{-1} \in \mathrm{U}^+$.

В случае $\Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{C}_\ell, \mathsf{D}_\ell, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8, \mathsf{F}_4, \mathsf{G}_2$ выполнено равенство $w_0\widetilde{\pi}w_0 = \widetilde{\pi}$, и потому $\widehat{w_0}\pi\widehat{w_0}^{-1} = \rho$ для некоторого подъема ρ. Этот подъем либо равен π (в случаях $\mathsf{D}_\ell, \mathsf{E}_7$ по лемме 3.8), либо может быть превращен в π сопряжением при помощи элемента $h \in \mathrm{H}(\mathbb{Z})$ (во всех остальных случаях по лемме 3.7). После остается применить лемму 3.6 к $h\widehat{w_0}v\pi\widehat{w_0}^{-1}h^{-1} \in \mathrm{U}^+\,\pi$.

Если $\Phi = \mathsf{A}_\ell$, $\ell \neq 4k+1$ или $\Phi = \mathsf{E}_6$, длиннейший элемент группы Вейля переводит $\widetilde{\pi}$ в обратный к нему, так что $\widehat{w_0}\pi\widehat{w_0}^{-1} = \rho^{-1}$. Поэтому $\widehat{w_0}v\pi\widehat{w_0}^{-1} \in \mathrm{U}^+\,\rho^{-1}$ и

$$\rho^{-1}\widehat{w_0}v\pi\widehat{w_0}^{-1}\rho \in \rho^{-1}\,\mathrm{U}^+,$$

что по лемме 3.9 подобно фробениусовой клетке как обратный к некоторому элементу из $\mathrm{U}^+\,\rho$ (в случае $\Phi = \mathsf{A}_\ell$ можно считать, что $\rho = \pi$, как в доказательстве леммы 3.9, в то время как в случае $\Phi = \mathsf{E}_6$ надо применить лемму 3.7). □

Замечание 3.12. Пусть $\Phi = \mathsf{A}_{4k+1}$. Тогда для любого $v \in \mathrm{U}^-$ существует такой $\eta \in \mathrm{E}(\Phi)$, что $-\eta v \pi \eta^{-1}$ — фробениусова клетка.

Доказательство. Повторить доказательство леммы 3.11, используя вместо леммы 3.9 замечание 3.10. □

3.2. Построение разложения в коммутаторы

Лемма 3.13 (лемма 11 из работы [94])**.** *В векторном представлении* $(\mathsf{A}_\ell, \varpi_1)$ *существует матрица* $g \in \mathrm{E}(\ell+1, R)$*, для которой* $g - 1 \in \mathrm{E}(\ell+1, R)$.

Доказательство. В случаях $\ell = 1$ и $\ell = 2$ искомые матрицы можно предъявить явно:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а для произвольного ℓ можно составить из них блочно-диагональную матрицу. □

Замечание 3.14 (лемма 1.6 из работы [21])**.** Если $1 = r+s$ для каких-то обратимых $r, s \in R^*$, то

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -r^{-1}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \text{ в } \mathrm{GE}(2, R).$$

Если $1 = r + s^2$ для каких0то обратимых $r, s \in R^*$, то

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -r^{-1}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \text{ в } \mathrm{E}(2, R).$$

Лемма 3.15. *Если* $\operatorname{rk}\Phi \geqslant 2$*, то каждый элемент* $\theta \in \mathrm{U}(\Sigma)$ *есть произведение не более* N *коммутаторов, где*

- $N = 1$ *в случае* $\Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{F}_4$*;*
- $N = 2$ *в случае* $\Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{C}_\ell, \mathsf{D}_\ell, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$*,* $\ell \geqslant 3$*;*
- $N = 2$ *в случае* $\Phi = \mathsf{C}_2, \mathsf{G}_2$ *и* 1 *— сумма двух обратимых элементов* R*;*
- $N = 3$ *в случае* $\Phi = \mathsf{E}_6$.

Доказательство. Начнем с разбора случая $\Phi = \mathsf{A}_\ell$. Обозначим $\Delta = \Delta_\ell$, тогда фактор Леви $\mathrm{E}(\Delta)$ действует на унипотентном радикале $\mathrm{U}(\Sigma_\ell)$.

Разложим $\theta = \prod_{\alpha\in\Sigma} x_\alpha(\xi_\alpha)$. Элемент $g \in \mathrm{E}(\Delta) \cong \mathrm{E}(\ell, R)$ действует на векторе с компонентами ξ_α посредством представления $(\mathsf{A}_{\ell-1}, \varpi_1)$. Во избежание разночтений будем обозначать результат через ${}^{g}(\xi_\alpha)$.

Пусть $g \in \mathrm{E}(\Delta)$ — элемент, построенный в лемме 3.13. Положим

$$\eta = \left[g, \prod_{\alpha\in\Sigma} x_\alpha\left(\zeta_\alpha\right)\right], \quad \text{где } \left(\zeta_\alpha\right) = {}^{(g-1)^{-1}}\!\left(\xi_\alpha\right).$$

Раскрывая коммутатор, получаем

$$g \cdot \prod_{\alpha\in\Sigma} x_\alpha\left(\zeta_\alpha\right) \cdot g^{-1} = \prod_{\alpha\in\Sigma} x_\alpha\left(\zeta'_\alpha\right), \quad \text{где } \left(\zeta'_\alpha\right) = {}^{g}\!\left(\zeta_\alpha\right),$$

$$\eta = \prod_{\alpha\in\Sigma} x_\alpha\left(\zeta''_\alpha\right), \quad \text{где } \left(\zeta''_\alpha\right) = \left(\zeta'_\alpha\right) - \left(\zeta_\alpha\right) = {}^{(g-1)}\!\left(\zeta_\alpha\right) = \left(\xi_\alpha\right).$$

Таким образом, в этому случае $\theta = \eta$, который является коммутатором.

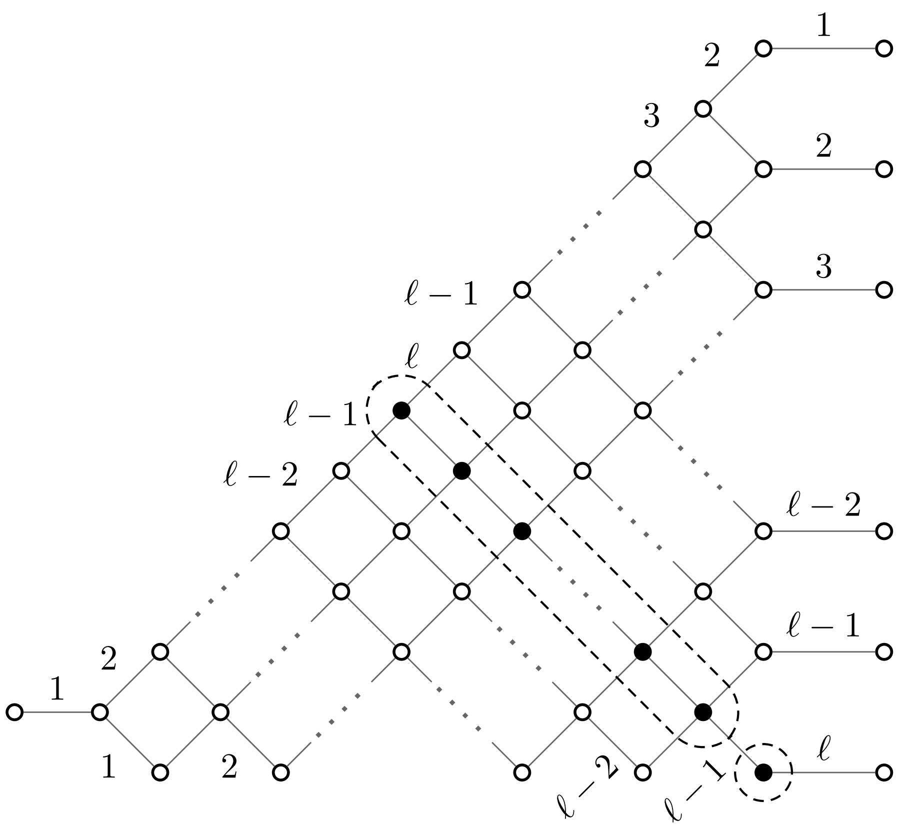

Рисунок 3.1: $(\mathsf{C}_\ell, 2\varpi_1)$

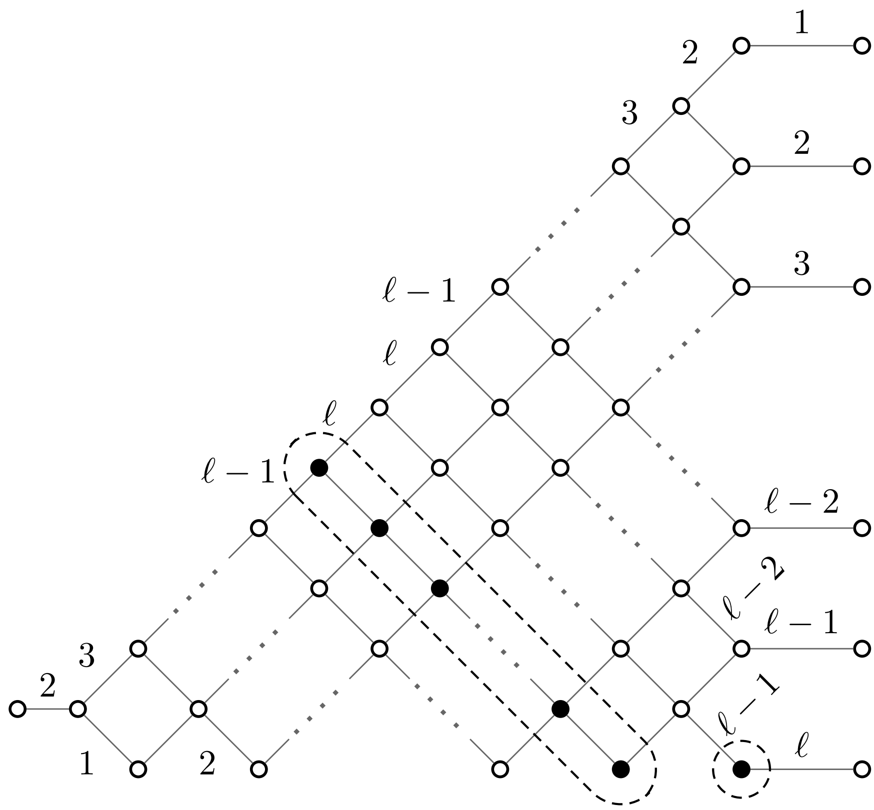

Рисунок 3.2: $(\mathsf{B}_\ell, \varpi_2)$

В случае $\Phi = \mathsf{C}_\ell$, сначала перепишем

$$\theta = x_{\alpha_\ell}(a_\ell) \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma'} x_\alpha(a_\alpha) = x_{\alpha_\ell}(a_\ell) \cdot \theta', \text{ где } \Sigma' = \Sigma \setminus \{\alpha_\ell\},$$
$$x_{\alpha_{\ell-1}+\alpha_\ell}(*)\, x_{\alpha_\ell}(t) = \left[x_{2\alpha_{\ell-1}+\alpha_\ell}(1), x_{-\alpha_\ell}(\pm t)\right].$$

Поскольку $\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell \in \Sigma = \Sigma_\ell^{=1} \cap \Sigma_{\ell-1}^{\leqslant 1}$,

$$x_{\alpha_\ell}(t) = c \cdot x_{\alpha_{\ell-1}+\alpha_\ell}(*), \text{ где } c \text{ — коммутатор},$$
$$\theta = c \cdot \theta'', \text{ для некоторого } \theta'' \in U(\Sigma \setminus \{\alpha_\ell\}).$$

Если $\ell \geqslant 3$, то элемент $g \in \mathrm{E}(\Delta_\ell \cap \Delta_{\ell-1})$, построенный в лемме 3.13, не использует корней из $\Sigma_{\ell-1}$, и из диаграммы (рис. 3.1) видно, что он действует на θ'' так, как предписано леммой 3.13, что позволяет провести точно такое же рассуждение, как для случая $\Phi = \mathsf{A}_\ell$. Таким образом θ есть произведение двух коммутаторов.

Если $\ell = 2$, то рассуждение выше не работает (цепочка, отмеченная пунктирной линией, имеет длину 1). Однако $\alpha_1 + \alpha_2$ — короткий корень, поэтому можно воспользоваться гиперболическим вложением группы $\mathrm{GE}(2, R)$, отвечающим этому корню. А именно, полагая $1 = r + s$ для некоторых $r, s \in R^*$, выразим

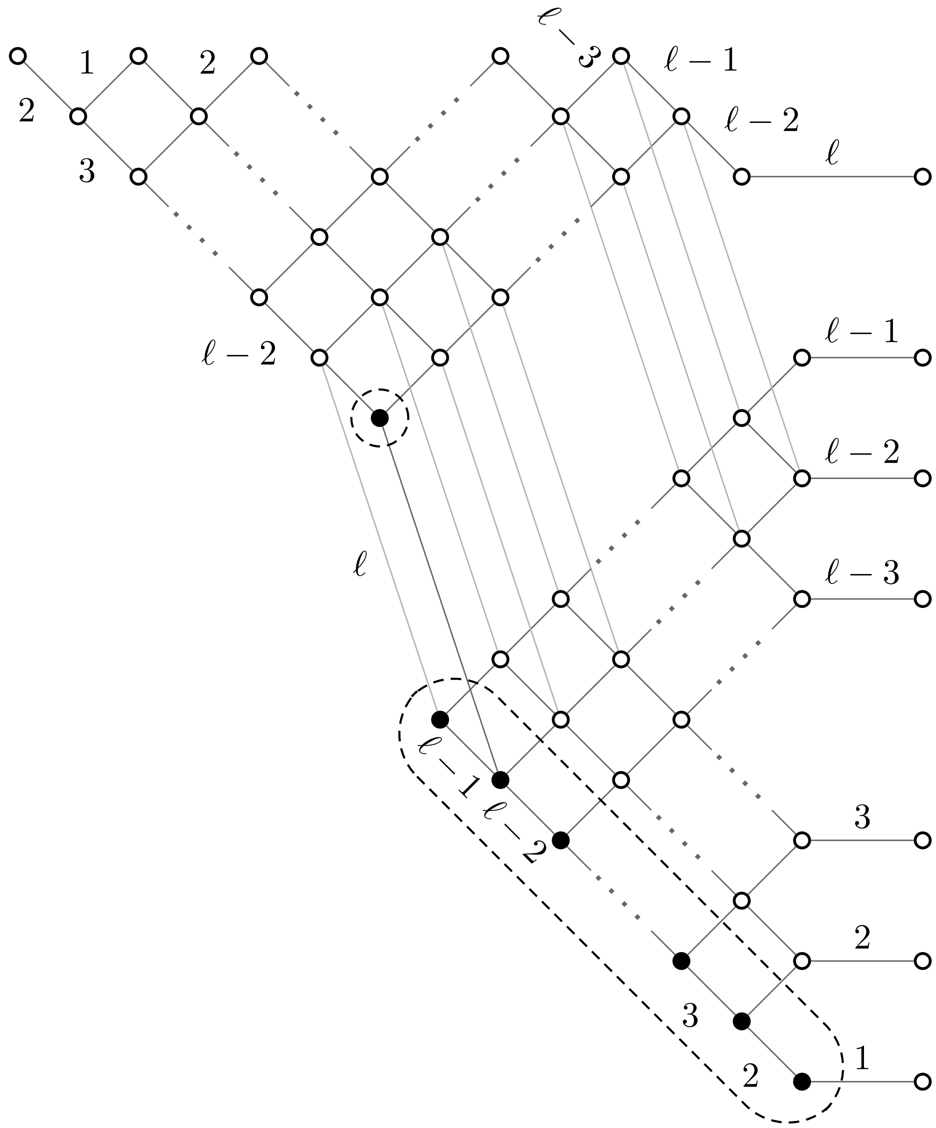

Рисунок 3.3: $(\mathsf{D}_\ell, \varpi_2)$

$x_{\alpha_1+\alpha_2}(t)$ как коммутатор

$$x_{\alpha_1+\alpha_2}(t) = \left[h_{\alpha_1+\alpha_2}(s)h_{\alpha_2}\left(s^{-1}\right), x_{\alpha_1+\alpha_2}\left(r^{-1}t\right)\right]$$

в $\mathrm{H}\left(\mathsf{C}_2, R\right) \cdot \mathrm{E}\left(\langle\alpha_1+\alpha_2\rangle, R\right)$ (см. замечание 3.14)

В случае $\Phi = \mathsf{B}_\ell$ (рис. 3.2), мы делаем то же, что и в случае C_ℓ. На этот раз мы исключаем α_ℓ и замечаем, что $\Delta_\ell \cap \Delta_{\ell-1}$ действует на цепочке $\Sigma \setminus \{\alpha_\ell\}$ как $(\mathsf{A}_{\ell-2}, \varpi_1)$. Опять

$$x_{\alpha_\ell}(t) = \left[x_{\alpha_{\ell-1}+\alpha_\ell}(1), x_{-\alpha_{\ell-1}}(\pm t)\right] \cdot x_{\alpha_{\ell-1}+2\alpha_\ell}(*).$$

В случае $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ (рис. 3.3), мы делим Σ на две части: $\Sigma_1 \cap \Delta_{\ell-1}$ и $\{\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{\ell-1}\}$. На первой действует $\Delta_{\ell-1}$ (типа $\mathsf{A}_{\ell-1}$), в то время как $x_\alpha(t) = [x_{\alpha+\alpha_\ell}(t), x_{-\alpha_\ell}(1)]$.

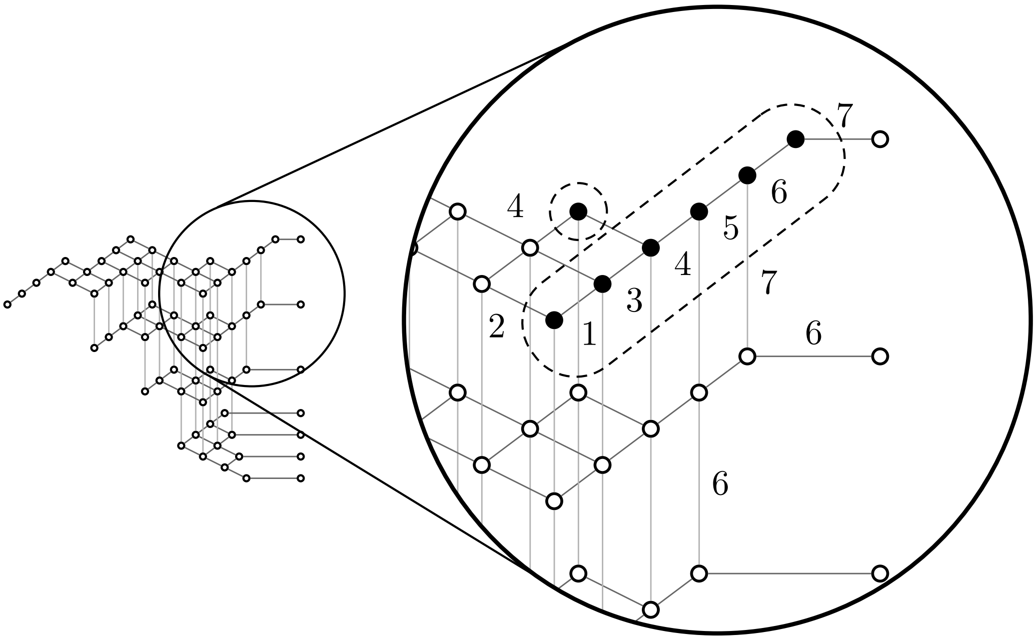

Рисунок 3.4: (E_7, ϖ_1)

Точно такой же подход работает в случаях $\Phi = \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$, см. рис. 3.4, 3.5.

В случае $\Phi = \mathsf{F}_4$ (рис. 3.6) подсистемная подгруппа $\mathrm{E}(\langle\alpha_1, \alpha_3\rangle) \cong \mathrm{E}(\mathsf{A}_1) \times \mathrm{E}(\mathsf{A}_1)$ действует на $\mathrm{U}(\Sigma)$, и ребра, помеченные 1 и 3, соединяются только вне Σ.

В случае $\Phi = \mathsf{G}_2$, мы фиксируем структурные константы как в [29, раздел 12.4] и раскладываем

$$x_{\alpha_1}(t) = \left[h_{\alpha_1}(s)h_{2\alpha_1+\alpha_2}\left(s^{-1}\right), x_{\alpha_1}\left(-r^{-1}t\right)\right],$$
$$x_{3\alpha_1+\alpha_2}(t) = \left[x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(t), x_{-\alpha_2}(-1)\right].$$

В последнем случае $\Phi = \mathsf{E}_6$ (рис. 3.7) мы разделяем Σ на три части, отмеченный сплошной линией, штриховым и точечным пунктиром, на которые действуют подгруппы $\mathrm{E}(\Delta_6)$, $\mathrm{E}(\langle\alpha_5, \alpha_6\rangle)$ и $\mathrm{E}(\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle)$ (типов A_5, A_2 и $\mathsf{A}_2 \times \mathsf{A}_1$) соответственно. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть Φ — система корней ранга $\geqslant 2$, а R — коммутативное кольцо стабильного ранга 1. Тогда элементарная группа Шевалле $E(\Phi, R)$ имеет коммутаторную ширину N, где*

- $N = 3$ *в случае* $\Phi = \mathsf{A}_\ell, \mathsf{F}_4$*;*
- $N = 4$ *в случае* $\Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{C}_\ell, \mathsf{D}_\ell, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$, $\ell \geqslant 3$*;*
- $N = 4$ *в случае* $\Phi = \mathsf{C}_2, \mathsf{G}_2$*, если* 1 *равна сумме двух обратимых элементов кольца* R*;*
- $N = 5$ *в случае* $\Phi = \mathsf{E}_6$*.*

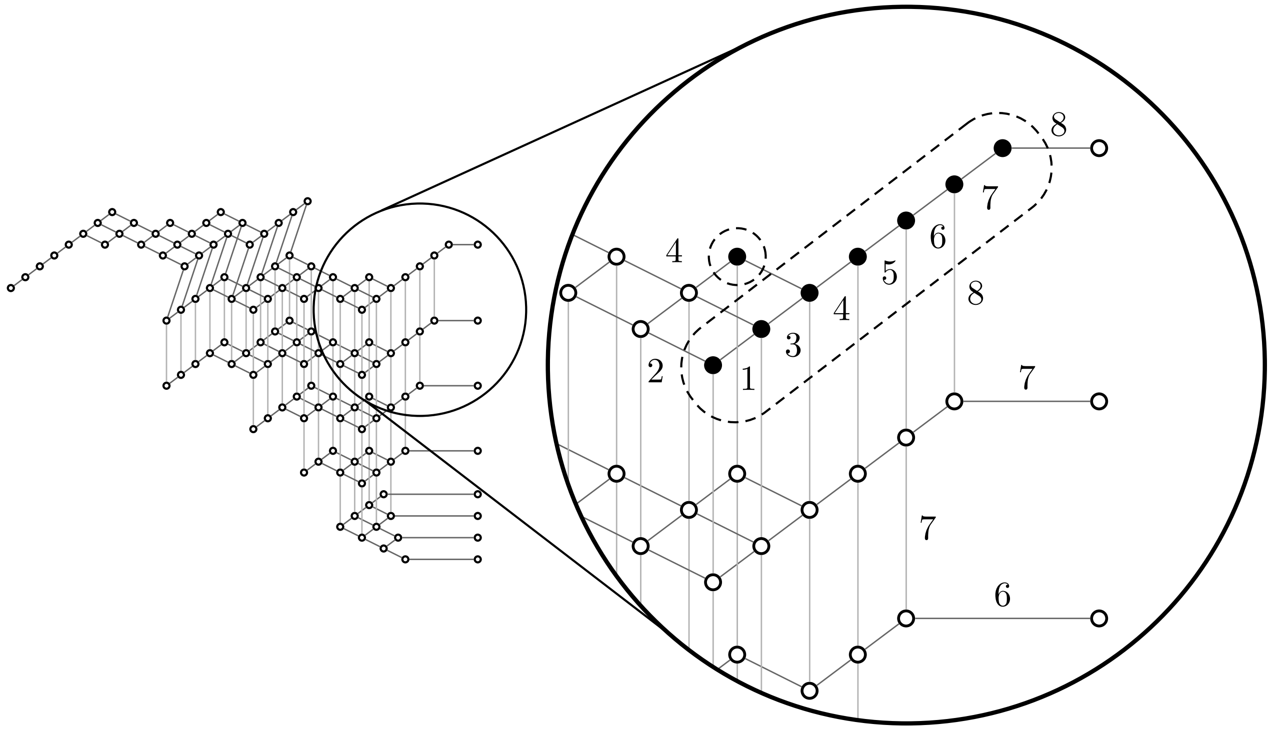

Рисунок 3.5: (E_8, ϖ_8)

Доказательство. Будем использовать унитреугольную факторизацию

$$\mathrm{E}(\Phi, R) = \mathrm{U}^+(\Phi, R)\ \mathrm{U}^-(\Phi, R)\ \mathrm{U}^+(\Phi, R)\ \mathrm{U}^-(\Phi, R).$$

Предположим сначала, что $\Phi \neq \mathsf{A}_{4k+1}$. Зафиксируем элемент $g \in \mathrm{E}(\Phi, R)$ и запишем его как $g = u_1 v_1 u_2 v_2$, где $u_i \in \mathrm{U}^+$ and $v_i \in \mathrm{U}^-$. Тогда $g = u_3 c_1 v_3 = c_2 u_3 v_3 = c_2(u_3\pi)(\pi^{-1}v_3)$, где c_i — коммутаторы. Обозначим $\varphi = u_3\pi$ и $\psi = \pi^{-1}v_3$. По леммам 3.6 и 3.11 существуют такие $\mu, \nu \in \mathrm{E}(\Phi)$, что $z_1 = \mu\varphi\mu^{-1}$ и $z_2 = \nu\psi^{-1}\nu^{-1}$ являются фробениусовыми клетками. Поскольку $z_1 z_2^{-1} = \zeta \in \mathrm{U}(\Sigma)$, имеем

$$\mu\varphi\mu^{-1} = \zeta\nu\psi^{-1}\nu^{-1}.$$

Тогда $\varphi = \mu^{-1}\zeta\nu\psi^{-1}\nu^{-1}\mu$ и

$$\begin{aligned}\varphi\psi = \mu^{-1}\zeta\nu\psi^{-1}\nu^{-1}\mu\cdot\psi = \\ = \mu^{-1}\zeta\nu\cdot\psi^{-1}\cdot\nu^{-1}\cdot\left(\zeta^{-1}\mu\cdot\psi\cdot\psi^{-1}\mu^{-1}\zeta\right)\cdot\mu\psi = \\ = \left[\mu^{-1}\zeta\nu, \psi^{-1}\right]\cdot\psi^{-1}\mu^{-1}\zeta\mu\psi = \left[\mu^{-1}\zeta\nu, \psi^{-1}\right]\cdot\zeta^{\mu\psi}.\end{aligned}$$

Так как $\zeta \in \mathrm{U}(\Sigma)$ равняется произведению $N-2$ коммутаторов по лемме 3.15, утверждение теоремы в расссматриваемом случае доказано.

Если же $\Phi = \mathsf{A}_{4k+1}$, мы рассматриваем разложение $g = -u_1 v_1 u_2 v_2$ для некоторых $u_i \in \mathrm{U}^+$, $v_i \in \mathrm{U}^-$. Тогда, как и в предыдущем случае, $g = -c_2\varphi\psi$, где φ подобна фробениусовой клетке в силу леммы 3.6, а $-\psi^{-1}$ подобна фробениусовой клетке по замечанию 3.12. Тогда для $z_1 = \mu\varphi\mu^{-1}$ и $z_2 = \nu\psi^{-1}\nu^{-1}$ выполнено

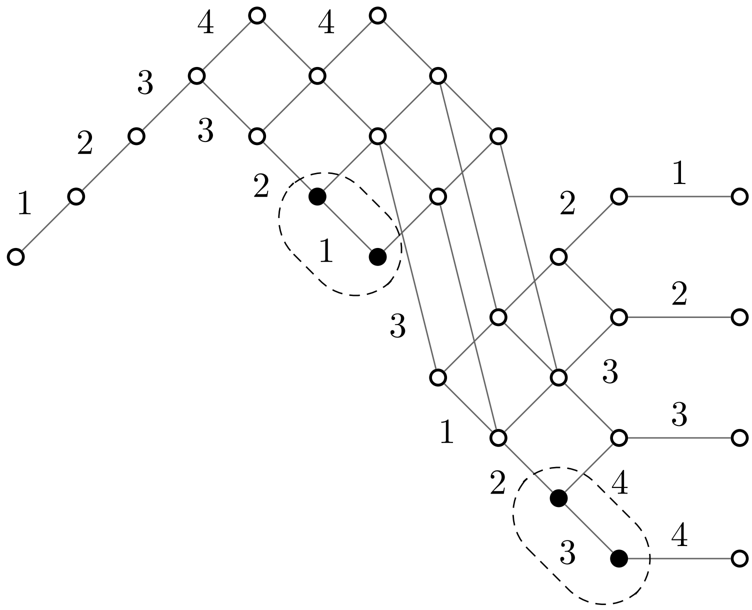

Рисунок 3.6: (F_4, ϖ_1)

$z_1 z_2^{-1} = -\zeta$ при некотором $\zeta \in \mathrm{U}(\Sigma)$. Как и ранее,

$$g = -c_2\varphi\psi = -c_2 \cdot \left(- \left[\mu^{-1}\zeta\nu, \psi^{-1}\right] \cdot \zeta^{\mu\psi}\right)$$

есть произведение N коммутаторов. $\square$

3.3. Варианты теоремы 3.1

Отметим, что единственное место в теореме 3.1, где по существу возникают предположения на базовое кольцо — существование унитреугольной факторизации. Поэтому начиная с факторизации другой длины или над другим кольцом, можно получить аналогичные хорошие оценки на коммутаторную ширину. Так, например, группы Шевалле над булевым кольцом допускают унитреугольную факторизацию $\mathrm{E}(\Phi) = \mathrm{U}^+\,\mathrm{U}^-\,\mathrm{U}^+$ длины 3, так что каждый элемент сопряжен произведению uv для каких-то $u \in \mathrm{U}^+$, $v \in \mathrm{U}^-$. Отсюда следует, что каждый элемент $\mathrm{E}(\Phi, R)$ может быть выражен как произведение $N-1$ коммутатора (где N такое же, как в теореме 3.1).

Как было упомянуто в главе 2, группа $\mathrm{E}(\Phi, \mathbb{Z}[1/p])$ допукает факторизацию длины 5, и потому удовлетворяет той же оценке на коммутаторную ширину, что и группы над кольцами стабильного ранга 1.

В работе [49] показано, что для пространства Стейна X размерности 1 или 2 специальная линейная группа степени 2 над кольцом $\mathcal{O}(X)$ функций, голоморфных на X, допускает унитреугольную факторизацию длины 4 или 5 соотвественно. Теорема Тавгеня о редукции ранга [6, 14] расширяет этот результат на все элементарные группы Шевалле (но не на объемлющую группу, так как $\mathrm{SK}_1(n, \mathcal{O}(X))$ не

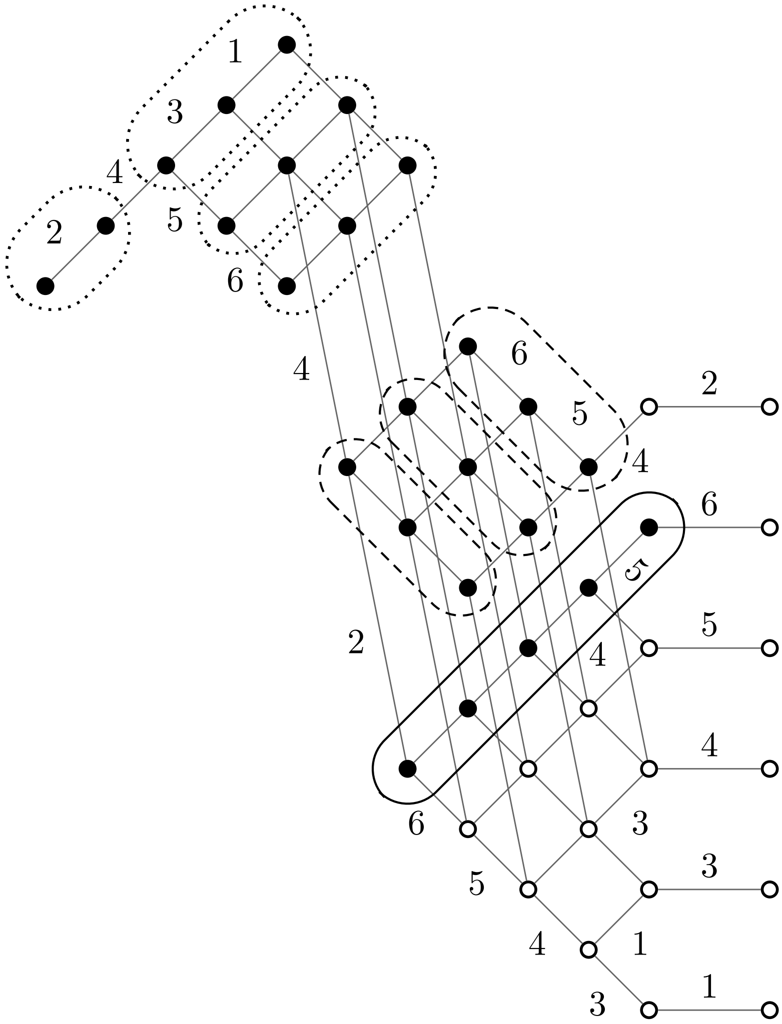

Рисунок 3.7: (E_6, ϖ_2)

обязательно тривиален при $n > 2$), поэтому $\mathrm{E}(\Phi, \mathcal{O}(X))$ имеет коммутаторную ширину не более N, снова для того же N, что и в формулировке теоремы 3.1.

В работах [19, 94] коммутаторная ширина вычислена также для расширенных групп Шевалле (например, GL_n, GSp_{2n}, GO_n и так далее). Получающиеся оценки чуть лучше, потому что можно вместо унитреугольной факторизации начинать с разложения Гаусса

$$\mathrm{E}(\Phi, R) = \mathrm{H}(\Phi, R)\, \mathrm{U}^+(\Phi, R)\, \mathrm{U}^-(\Phi, R)\, \mathrm{U}^+(\Phi, R).$$

Можно изменить лемму 3.6 следующим образом (здесь $\overline{\mathrm{T}}_{\mathrm{sc}}(\Phi)$ — расширенный тор, см. [1, 23]):

Лемма 3.16. *Для любого $b \in \mathrm{H}(\Phi)\, \mathrm{U}^+$ существует такой $\eta \in \overline{\mathrm{T}}_{\mathrm{sc}}(\Phi)\, \mathrm{U}^+$, что $\eta b \pi \eta^{-1}$ — фробениусова клетка.*

Результат получается таким же образом, как в теореме 3.1. Более того, для расширенных групп не требуется отдельно рассматривать случай $\Phi = \mathsf{A}_{4k+1}$, так как можно положить $\widehat{w_0} = p_n$, что и сделано в [94].

Другая интересная деталь работы [19] — еще более низкая оценка в случае четной ортогональной группы O_{2n}. Трюк состоит в том, чтобы использовать не элемент Кокстера группы Вейля $\mathrm{W}(\mathsf{D}_\ell)$, а элемент Кокстера $\mathsf{A}_{\ell-1}$-подсистемы Δ_ℓ в композиции с внутренним автоморфизмом, отвечающим симметрии диаграммы Дынкина D_ℓ. Тогда можно положить $\Sigma = \Sigma_\ell \cap \Delta_{\ell-1}$, так что на соответствующей унипотентной подгруппе $\mathrm{U}(\Sigma)$ действует $\mathrm{E}(\Delta_\ell \cap \Delta_{\ell-1})$, что в точности совпадает со случаем $\mathsf{A}_{\ell-1}$. Однако этот автоморфизм является внутренним только для O_{2n}, но не для SO_{2n}, как утверждается в [19].

Следующее рассуждение, показывающее, что этот автоморфизм является внутренним для O_{2n}, принадлежит С. Гарибальди.

Пусть $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ — неприводимое представление G со старшим весом λ. Умножая данный автоморфизм σ системы корней Φ на подходящий элемент группы Вейля, мы может полагать $\sigma(\Pi) = \Pi$ (при этом σ переводит доминантные веса в доминантные веса). Мы хотим найти такой $x \in \mathrm{GL}(V)$, что $\sigma(g) = xgx^{-1}$ для каждого $g \in \mathrm{G}$. Предложение 2.2 работы [24] утверждает, что такой x существует в том и только в том случае, когда $\sigma(\lambda) = \lambda$. Пусть теперь ρ — естественное представление O_{2n}, и поскольку ϖ_1 не меняется при симметрии, такой x найдется в GL_{2n}. Для каждой G-инвариантной полиномиальной функции f на V функция xf является $\rho(\mathrm{G})$-инвариантной. Но $\rho(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$, так что xf G-инвариантна. Если f — невырожденная квадратичная форма на V, то xf $\mathrm{SO}(f)$-инвариантна и является невырожденной квадратичнйо формой, так что она должна быть пропорциональна f. Отсюда $x \in \mathrm{O}_{2n}$.

Для четной спинорной группы Spin_{2n} такой элемент не может существовать ни в группе Pin_{2n}, ни в группе Клиффорда, поскольку он переставляет старшие веса двух полуспинорных слагаемых ее спинорного придставления.

4. Подсистемные факторизации

В данной главе исследуется вопрос о длине факторизации в терминах подсистемных подгрупп. В разделе 4.1 строятся факторизации в терминах подгрупп, изоморфных SL_2. Во-первых, из уже известных параболических факторизаций выводятся SL_2-факторизации групп над кольцами, удовлетворяющими предположениям на стабильный ранг. Во-вторых, посредством детального анализа отдельных случаев строятся SL_2-факторизации групп над эрмитовыми кольцами.

Затем в разделе 4.2 обсуждаются факторизации в терминах подгрупп типа A_ℓ субмаксимального ранга. А именно, такие факторизации строятся для групп типов A_ℓ и D_ℓ.

4.1. Произведения SL_2-подгрупп

Заметим прежде всего, что из следствия 2.9 сразу же получается следующий результат:

Теорема 4.1. *Предположим, что Φ и I удовлетворяют одному из следующих предположений:*

$$\begin{array}{lll}
\Phi = \mathsf{A}_\ell, & \mathrm{sr}(I) \leqslant 2, & N = 3\,|\Phi^+| - \mathrm{rk}(\Phi) - 1; \\
\Phi = \mathsf{C}_\ell, & \mathrm{sr}(I) \leqslant 3, & N = 3\,|\Phi^+| - 2; \\
\Phi = \mathsf{B}_\ell, \mathsf{D}_\ell, & \mathrm{asr}(I) \leqslant 2, & N = 4\,|\Phi^+| - 3\,\mathrm{rk}(\Phi).
\end{array}$$

Тогда главную конгруэнц-подгруппу $\mathrm{G}(\Phi, R, I)$ можно представить как произведение не более N копий своих (регулярно вложенных) подгрупп, изоморфных $\mathrm{SL}(2, R, I)$.

Цель настоящего раздела – доказать следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть Φ — система корней, R — эрмитово кольцо, и в случае $\Phi \neq \mathsf{A}_\ell, \mathsf{C}_\ell$ предположим дополнительно, что R является областью целостности. Тогда $\mathrm{G}(\Phi, R)$ есть произведение не более $|\Phi| - \mathrm{rk}\,\Phi$ фундаментальных $\mathrm{SL}(2, R)$.*

Замечание. Утверждение теоремы 4.2 верно также для фактор-колец областей Безу.

Отметим, что определении 1.10 нельзя заменить $\mathrm{SL}(2, R)$ на ее элементарную подгруппу $\mathrm{E}(2, R)$, так как последняя может быть строго меньше даже для областей главных идеалов, см. [42, 48, 56].

Основой работы [2] служит следующее наблюдение.

Лемма 4.1 ([2, лемма 4]). *Пусть R — эрмитово кольцо. Тогда для каждого столбца $(a_1, \ldots, a_n)^t \in R^n$ найдется такой $g \in \mathrm{G}_{1n}\,\mathrm{G}_{2n} \ldots \mathrm{G}_{n-1,n}$, что $g(a_1, \ldots, a_n)^t = (d, 0, \ldots, 0)^t$ для некоторого d.*

Понятно, что есть много способов выбрать корни $\beta_1, \ldots, \beta_k$ так, что в произведении $\mathrm{G}_{\beta_1} \ldots \mathrm{G}_{\beta_k}$ найдется элемент, переводящий данный столбец в кратный первому столюцу единичной матрицы. Мы всегда будем выбирать в качестве β_i простые корни.

Обозначим через S_k образ очевидного вложения $\mathrm{SL}(n-1, R)$ в $\mathrm{SL}(n, R)$, избегающего k-х строки и столбца.

Лемма 2 работы [67] утверждает, что над полем можно разложить группу $\mathrm{SL}(n, F)$, $n \geqslant 4$, в произведение 4 копий $\mathrm{SL}(n-1, F)$:

$$\mathrm{SL}(n, F) = S_2 \cdot S_3 \cdot S_1 \cdot S_2.$$

Почти такое же рассуждение дает следующий немного более сильный результат:

Лемма 4.2. *Пусть R — эрмитово кольцо, а $n \geqslant 3$. Тогда*

(a) $\mathrm{SL}(n, R) = S_1 S_2 S_3 S_1$ *есть произведение* 4 *копий* $\mathrm{SL}(n-1, R)$*;*

(b) $\mathrm{SL}(n, R)$ *есть произведение* $(n-1)^2$ *копий фундаментальных* $\mathrm{SL}(2, R)$.

Доказательство. Пусть g — матрица из $\mathrm{SL}(n, R)$, а g_{1*} – ее первая строка. По лемме 4.1 найдется такой $a \in \mathrm{G}_{n-1,n} \ldots \mathrm{G}_{23}\,\mathrm{G}_{12}$, что $g_{1*}a = (\xi, 0, \ldots, 0)$. Так как строка g_{1*} унимодулярна, элемент ξ обратим, так что $g_{1*}ah_{12}\left(\xi^{-1}\right) = (1, 0, \ldots, 0)$. Поэтому $g \cdot ah_{12}\left(\xi^{-1}\right) \in S_1\,\mathrm{U}(-\Sigma_1)$ и

$$g \in S_1 \cdot \underbrace{\mathrm{X}_{n1} \ldots \mathrm{X}_{31}}_{\mathrm{U}(-\Sigma_1 \backslash \{\alpha_1\})} \cdot \underbrace{\mathrm{X}_{21}\,\mathrm{H}_{12}\,G_{12}}_{\mathrm{G}_{12}} \cdot \underbrace{\mathrm{G}_{23} \ldots \mathrm{G}_{n-1,n}}_{S_1} \subseteq S_1 S_2 S_3 S_1.$$

Подсчитывая число $\mathrm{SL}(2, R)$-множителей в этом выражении, получаем, что $2n - 3$ копии достаточно, чтобы перевести данный элемент внутрь подгруппы S_1, поэтому $\sum_{k=3}^{n}(2k-3) = n^2 - 2n$ достаточно, чтобы получить элемент $S_1 \cap \ldots \cap S_{n-2} = \mathrm{G}_{n-1,n}$. $\square$

Прежде чем переходить к получению аналогичных факторизаций для других групп Шевалле, докажем одну техническую лемму.

Рассмотрим присоединенное представление ϕ группы SL_2, то есть расщепимую группу SO_3. Оно задается формулой

$$\phi\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a^2 & -2ab & -b^2 \\ -ac & ad + bc & bd \\ -c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Лемма 4.3. *Пусть R — эрмитова область, а вектор $(u, v, w)^t \in R^3$ удовлетворяется уравнению $uw + v^2 = 0$. Тогда найдется такой элемент $g \in \mathrm{SL}(2, R)$, что $\phi(g) \cdot (u, v, w)^t = (*, 0, 0)^t$.*

Доказательство. Обозначим $z = \gcd(v, w)$. Если $z = 0$, то $v = w = 0$ и можно взять $g = 1$. Если $z \neq 0$, положим $c = -w/z$ and $d = v/z$, так что $\gcd(c, d) = 1$ и $ad - bc = 1$ для некоторых $a, b \in R$. Прямое вычисление показывает, что можно взять $g = \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)$. Действительно, в силу уравнения на столбец и того, что действие SO_3 это уравнение сохраняет, в третьей строке вектора $\phi(g) \cdot (u, v, w)^t$ стоит 0, а тогда является нулевым и элемент во второй строке. □

Доказательство теоремы 4.2. Фиксируем элемент $g \in \mathrm{G}(\Phi, R)$ и рассмотрим его матрицу в фундаментальном представлении $(\mathrm{G}(\Phi, R), \varpi_s)$, отвечающем простому корню α_s. В каждом случае построим элемент a из $\mathrm{G}_{\beta_1} \ldots \mathrm{G}_{\beta_k}$, где корни β_i не зависят от g, $\beta_1 = \alpha_s$ и число множителей $k = |\Sigma_s|$, для которого $a \cdot (g_{*,\varpi_s}) = v^+$. Тогда в силу разложения Шевалле–Мацумото ag попадает в параболическую подгруппу $\mathrm{P}_s = \mathrm{U}(\Sigma_s)\, \mathrm{G}(\Delta_s)$. Раскладывая $\mathrm{U}(\Sigma_s)$ в произведение $\mathrm{X}_{\alpha_s} \cdot \mathrm{U}(\Sigma_s \setminus \{\alpha_s\})$, видим, что

$$g \in \mathrm{G}_{\beta_k} \ldots \mathrm{G}_{\beta_2} \cdot \mathrm{G}_1 \cdot \mathrm{U}(\Sigma_s \setminus \{\alpha_s\}) \cdot \mathrm{G}(\Delta_s).$$

Таким образом, $2\,|\Sigma_s| - 1$ множителей хватает, чтобы перевести данный элемент в подсистемную подгруппу на единицу меньшего ранга, и индукция дает $|\Phi| - \mathrm{rk}\,\Phi$ множителей для перевода в подгруппу ранга 1.

Остаток раздела посвящен разбору случаев. □

Далее мы обозначаем через $v = g_{*,\varpi_s}$ столбец матрицы g, отвечающий старшему весу, а также его образы под действием конструируемого элемента a.

4.1.1. Классические группы

Случай $(\mathsf{C}_\ell, \varpi_1)$. Лемма 4.1 доставляет элемент $a_1 \in \mathrm{G}_{\ell-1} \ldots \mathrm{G}_1$, для которого $a_1 \cdot v_i = 0$ для всех $i = -\ell + 1, \ldots, -1$. Тогда какой-то $a_2 \in \mathrm{G}_\ell$ обнуляет также элемент на позиции $-\ell$, и мы завершаем редукцию с помощью такого элемента $a_3 \in \mathrm{G}_1 \ldots \mathrm{G}_{\ell-1}$, что $a_3 a_2 a_1 \cdot g_{*1} = v^+$.

Случай $(\mathsf{D}_\ell, \varpi_1)$, $\ell \geqslant 4$. Сначала будем работать внутри подсистемной подгруппы $\mathrm{G}(\Delta_\ell) \cong \mathrm{G}(\mathsf{A}_{\ell-1})$. Лемма 4.1 дает элемент $a_1 \in \mathrm{G}_{\ell-1} \ldots \mathrm{G}_1$, удовлетворяющий $(a_1 \cdot g)_{i1} = 0$ для всех $i = -\ell + 1, \ldots, -1$. Уравнение на орбиту вектора старшего веса принимает вид $v_\ell \cdot v_{-\ell} = 0$. Если $v_{-\ell} = 0$, то мы можем вновь использовать лемму 4.1 для $\mathrm{G}(\Delta_\ell)$, чтобы упростить элементы позициях от 1 до ℓ, не изменяя при этом нули на позициях от $-\ell$ до -1. Если $v_\ell = 0$, используем лемму 4.1 на $\mathrm{G}(\Delta_{\ell-1})$. Комбинируя, получаем элемент $a \in \mathrm{G}_1 \ldots \mathrm{G}_{\ell-2}\, \mathrm{G}_\ell\, \mathrm{G}_{\ell-1}\, \mathrm{G}_{\ell-2} \ldots \mathrm{G}_1$, для которого $a \cdot g_{*1} = v^+$.

Случай $(\mathsf{B}_\ell, \varpi_1)$**.** Сначала мы обнуляем элементы $v_{-1}, \dots, v_{-\ell+1}$ с помощью матрицы из $\mathrm{G}_{\ell-1} \dots \mathrm{G}_1$. Уравнение на орбиту вектора старшего веса принимает вид $v_0^2 = v_\ell v_{-\ell}$, так что мы можем применить лемму 4.3, чтобы обнулить $v_{-\ell}$ и v_0. Теперь мы можем завершить редукцию с помощью элемента из $\mathrm{G}_1, \dots \mathrm{G}_{\ell-1}$.

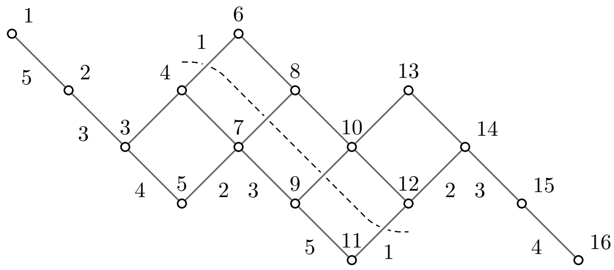

Рисунок 4.1: (D_5, ϖ_5)

Случай (D_5, ϖ_5)**.** Используем тот факт, что представление (D_4, ϖ_4) эквивалентно представлению (D_4, ϖ_1) и что ограничение полуспинорного представления $(\mathsf{D}_5, \varpi_5) \downarrow \Delta_1$ распадается в сумму двух полуспинорных представлений D_4, как показано на рисунке 4.1.

Если правая часть содержит ненулевой элемент, то найдется матрица $a_1 \in \mathrm{G}_4\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_5\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_4$, делающая $v_8 = v_{10} = v_{12} = v_{13} = v_{14} = v_{15} = v_{16} = 0$ и $v_6 \neq 0$. Тогда автоматически в силу уравнений $v_5 = v_7 = v_9 = v_{11} = 0$ и можно использовать некоторый $a_2 \in \mathrm{G}_5\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_1$, чтобы обнулить все оставшиеся элементы, кроме v_1.

Если же правая часть нулевая, найдем $a_3 \in \mathrm{G}_5\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_4\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_5$, упрощающий левую часть. В итоге получаем элемент из $\mathrm{G}_5\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_1\,\mathrm{G}_4\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_5\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_4$, производящий редукцию.

4.1.2. Исключительные группы в микровесовых представлениях

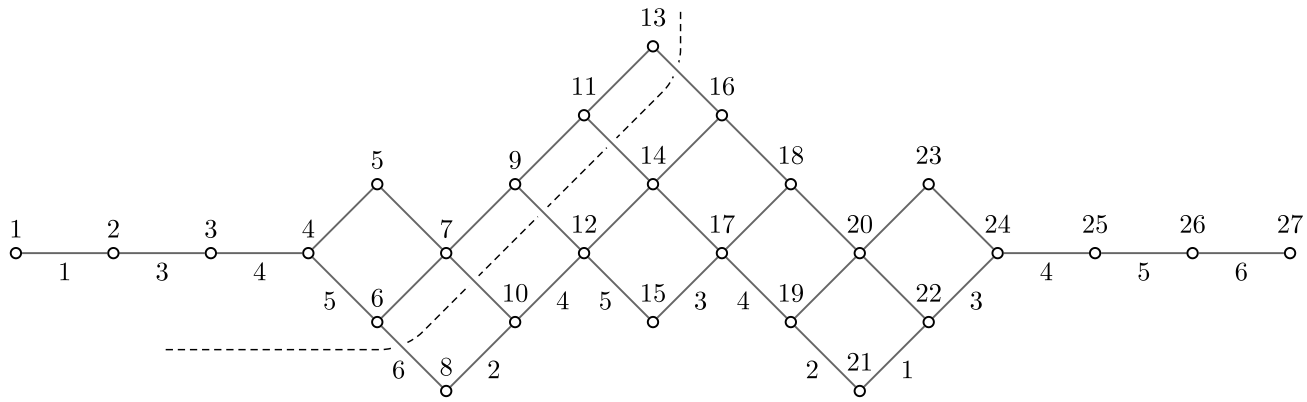

Рисунок 4.2: (E_6, ϖ_1)

Случай (E_6, ϖ_1). Мы нумеруем веса представления $V(\varpi_1)$ как показано на рисунке 4.2. Ограничение этого представления на подгруппу $\mathrm{G}(\Delta_6)$ раскладывается в сумму одномерного представления на Rv_{27}, полуспинорного представления (D_5, ϖ_5) и векторного представления (D_5, ϖ_1).

Сначала получим 0 на 27-й строке с помощью элемента из G_6. Если справа от пунктирной линии имеется ненулевой элемент, воспользуемся случаем (D_5, ϖ_5), это даст нам элемент из $\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_4\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_1\,\mathrm{G}_5\,\mathrm{G}_4\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_4\,\mathrm{G}_5$, обнуляющий все элементы, кроме v_8 и стоящих на позициях $27^{\perp}$. Поскольку теперь $v_8 \neq 0$, уравнения показывают, что $v_{13} = v_{11} = v_9 = v_7 = v_5 = 0$. Тогда применение какого-то элемента из $\mathrm{G}_1\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_4\,\mathrm{G}_5\,\mathrm{G}_6$ переведет v в v^+.

Если же справа от пунктирной линии остались только нули, применим случай (D_5, ϖ_5), чтобы привести первый столбец к v^+. Первые пять множителей в получаемом в данном случае произведении совпадают с последними пятью множителями в случае $v_8 \neq 0$, то есть можно сконструировать элемент, лежащий в произведении 16 множителей и переводящий первый столбец в v^+. Заметим, что $16 + 15 + 35 = 72 - 6$.

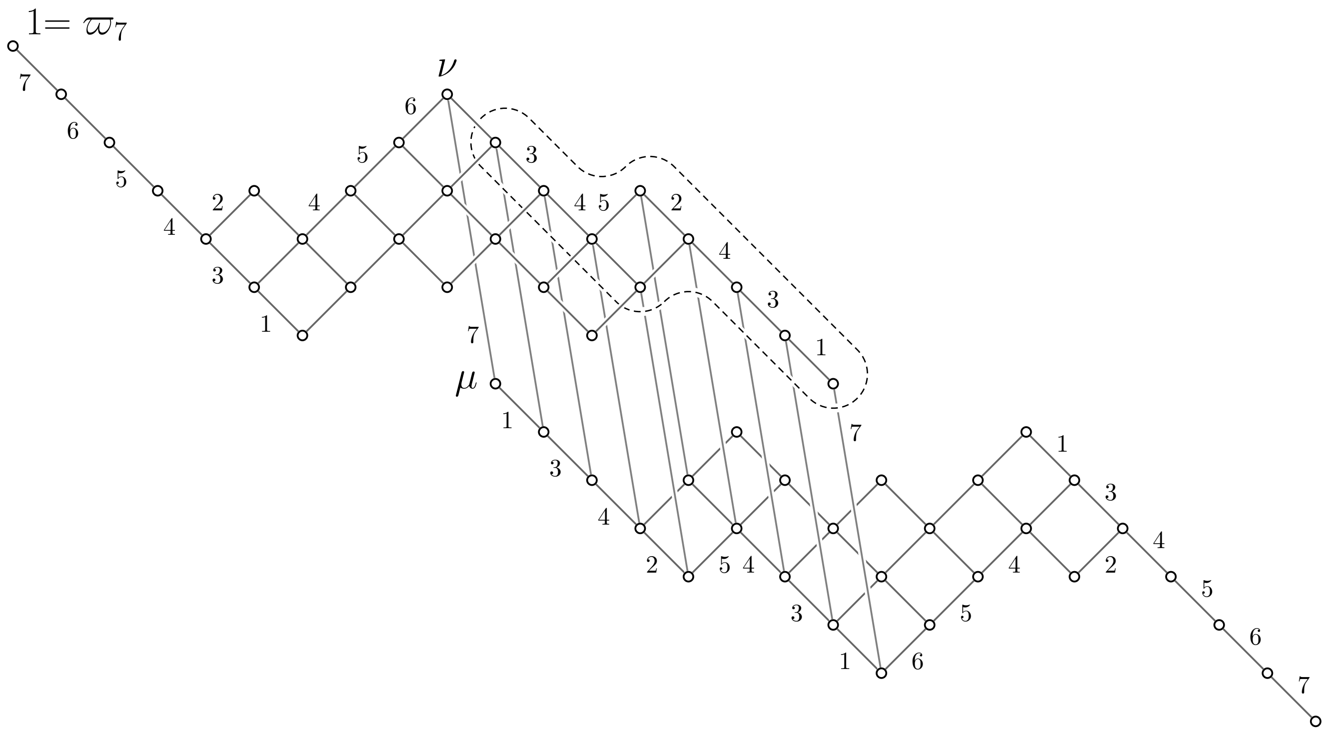

Рисунок 4.3: (E_7, ϖ_7)

Случай (E_7, ϖ_7). Сначала применим подходящий элемент из G_7, чтобы обнулить элемент, отвечающий младшему весу. Если после этого в нижней части остались ненулевые элементы, воспользуемся случаем (E_6, ϖ_1), чтобы обнулить все элементы в нижней части, кроме v_μ.

Поскольку $v_\mu \neq 0$, все элементы в части, обведенной на диаграмме пунктирной линией, равны нулю, поэтому применение какого-то элемента G_7 делает $v_\mu = 0$

и $v_\nu \neq 0$. Тогда можно воспользоваться случаем (D_5, ϖ_5), чтобы единственными ненулевыми элементами стали v_{ϖ_7} и $v_{\varpi_7-\alpha_7}$, которые можно сделать равными соответственно 1 и 0 при помощи элемента из G_7.

Если же после первого применения G_7 нижняя часть состоит из нулей, мы можем применить к верхней части случай (E_6, ϖ_1) в обратном порядке. Начало получающегося произведения совпадает с концом произведения, использованного для нижней части (поскольку соответствующие (D_5, ϖ_1)-части ограничения на $\mathrm{G}(\Delta_6)$ соединены параллельными ребрами с меткой 7), поэтому редукцию можно произвести с помощью произведения 27 множителей, а $27 + 26 + 66 = 126 - 7$.

4.1.3. Группа типа E_8

Будем работать в присоединенном представлении (E_8, ϖ_8) и изображать на диаграмме только положительную часть. Мы будем использовать ее же для отрицательной части, читая ее слева направо и сверху вниз вместо справа налево и снизу вверх.

Положительная часть раскладывается в сумму одномерного представления на Rv^+, двух микровесовых представлений (E_7, ϖ_7) и (E_6, ϖ_1), полуспинорного представления (D_5, ϖ_5), бивекторного представления (A_4, ϖ_2) и положительной части присоединенного представления $(\mathsf{A}_4, \mathrm{ad})$.

Начнем с обнуления элемента $v_{-\varpi_8}$ при помощи G_8. Если в результате в (E_7, ϖ_7)-части найдется ненулевая компонента, можно найти элемент из $\mathrm{G}(\Delta_8) \cong \mathrm{G}(\mathsf{E}_7)$, который сделает нулевыми все v_λ, $\lambda \in -\Sigma_8 \setminus \{-\alpha_8\}$, при этом $v_{-\alpha_8}$ станет ненулевым.

Теперь, когда $v_{-\alpha_8} \neq 0$, рассмотрим $\pi/2$-уравнение, отвечающее паре корней $(-\alpha_8, \beta)$ для какого-нибудь $\beta \in \Delta_{7,8}$. У каждого элемента $\{\gamma, \delta\} \in S_{\pi/2}(-\alpha_8, \beta)$ одна из компонент лежит в $-\Sigma_8 \setminus \{-\alpha_8\}$ (а другая в $\Sigma_7 \cap \Delta_8$), так что $v_\beta = 0$. Отсюда автоматически $\widehat{v}_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, 6$. Это следует из того, что в противном случае действие $x_{\alpha_i}(1)$ делало бы v_{α_i} ненулевым. Но оно не меняет v_λ, $\lambda \in -\Sigma_8$, так что рассмотренное уравнение по-прежнему влечет $v_{\alpha_i} = 0$.

Рассмотрим $2\pi/3$-уравнение, отвечающее паре корней $(-\alpha_8, -\alpha_6)$. Как и ранее, у каждого элемента $\{\gamma, \delta\} \in S_{2\pi/3}(-\alpha_8, -\alpha_6)$ одна из компонент лежит в $-\Sigma_8 \setminus \{-\alpha_8\}$. Правая часть уравнения тогда равна нулю, а левая равняется $v_{-\alpha_8} \cdot (\widehat{v}_5 - 2\widehat{v}_6 + \widehat{v}_7)$, поэтому $\widehat{v}_7 = 0$. Следовательно, $v_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in -\Sigma_7 \cap \Delta_8$ (в силу действия $x_{-\lambda}(1)$).

Теперь рассмотрим π-уравнение, отвечающее паре корней $(\alpha_{\max}, \alpha_7)$. Для каждой пары $(\gamma, \delta) \in S_\pi(\alpha_{\max}, \alpha_7)$ выполнено $\gamma \in -\Sigma_8 \setminus \{-\alpha_8\}$. В $S'_\pi(-\alpha_{\max}, -\alpha_7)$ то же самое выполнено для всех элементов, кроме одного, а именно $(-\alpha_8, \alpha_8)$. Так что π-уравнение имеет вид $-\widehat{v}_8 \cdot \widehat{v}_8 = v_{-\alpha_8} \cdot v_{\alpha_8}$. Это означает, что столбец $(v_{\alpha_8}, \widehat{v}_8, v_{-\alpha_8})^t$ удовлетворяет условию Леммы 4.3, так что он переходит под действием некоторого элемента G_8 в $(*, 0, 0)^t$.

$2\pi/3$-уравнение для $(\alpha_7 + \alpha_8, \alpha_6 + \alpha_7)$ принимает вид $v_{\alpha_7} \cdot v_{\alpha_8} = 0$. Действительно, для каждого $\{\gamma, \delta\} \in S_{2\pi/3}(\alpha_7 + \alpha_8, \alpha_6 + \alpha_7)$ либо одна из компонент

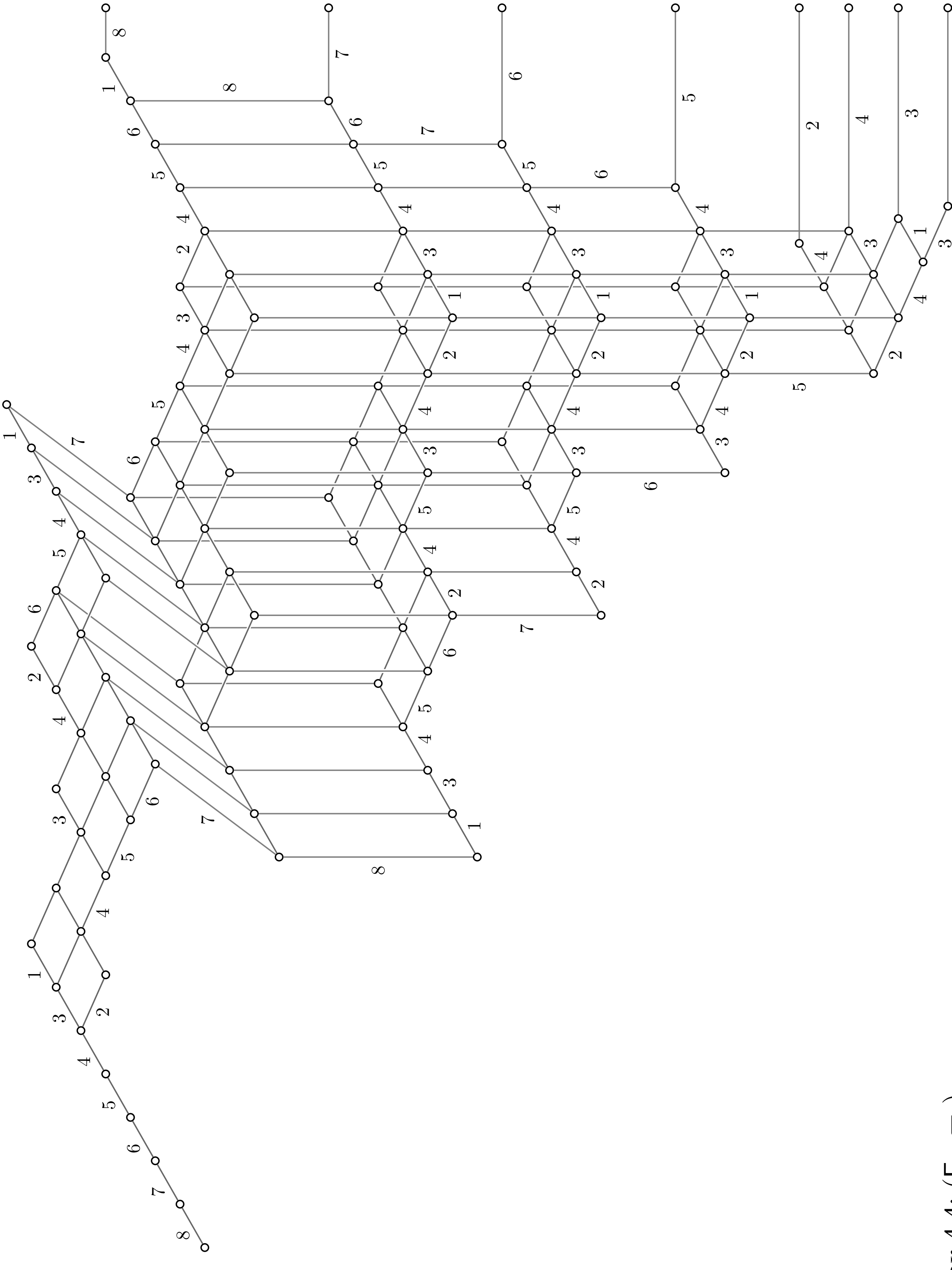

Рисунок 4.4: (E_8, ϖ_8)

лежит в $-\Sigma_{\{6,7\}} \cap \Delta_8$, либо $\{\gamma, \delta\} = \{\alpha_7, \alpha_8\}$, в то время как $\widehat{v}_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, 8$. Поэтому $v_{\alpha_7} = 0$.

Отсюда следует, что $v_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Sigma_7 \cap \Delta_8$. В самом деле, для $\lambda \in \alpha_7 + \Sigma_6 \cap \Delta_7$ умножение на $x_{\lambda-\alpha_7}(1)$ поставило бы ненулевой элемент в позицию α_7, не трогая при этом отрицательную часть и v_{α_8}, противоречие. Таким образом, все элементы на позициях из множества $\alpha_7 + \Sigma_6 \cap \Delta_7$ равны нулю, а остальные равны нулю, поскольку применение еще одной элементарной трансвекции сделало бы ненулевым один из элементов на позициях $\alpha_7 + \Sigma_6 \cap \Delta_7$.

Теперь, когда ненулевыми являются только v_λ с $\lambda \in \Sigma_8$, мы снова применяем случай (E_7, ϖ_1) и обнуляем все элементы, кроме $v_{\alpha_{\max}}$ и $v_{\alpha_{\max}-\alpha_8}$, после чего завершаем редукцию умножением на элемент из G_8.

Если же (E_7, ϖ_7)-часть состоит целиком из нулей, мы используем случай (E_6, ϖ_1), чтобы обнулить все элементы из $-\Sigma_7 \setminus \{\alpha_7\}$. Если $v_{-\alpha_7} \neq 0$, то рассуждение, аналогичное случаю $v_{-\alpha_8} \neq 0$, показывает, что $v_\beta = 0$ для всех $\beta \in \Delta_{\{6,7,8\}}$ и что $\widehat{v}_i = 0$ для $i = 1, \dots, 5$. Это следует из $\pi/2$-уравнения для $(-\alpha_7, \beta)$. Из $2\pi/3$-уравнения для $(-\alpha_7, -\alpha_5)$ следует, что $\widehat{v}_6 = 0$ и $v_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in -\Sigma_6 \cap \Delta_7$. Из π-уравнения для $(\alpha_{\max}, \alpha_7)$ следует, что $\widehat{v}_8 = 0$.

Положим $\alpha = -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\alpha_4 - 2\alpha_5 - \alpha_6$, то есть α — минимальный корень подсистемы типа E_6. Поскольку единственный ненулевой элемент в отрицательной части это $v_{-\alpha_7}$, π-уравнение для $(\alpha, -\alpha_6)$ превращается в $\widehat{v}_7^2 = -v_{\alpha_7} \cdot v_{-\alpha_7}$, так что мы применяем лемму 4.3 с G_7, чтобы обнулить $v_{-\alpha_7}$ и $\widehat{v}_7$.

Поскольку $v_{\alpha_7} \neq 0$, из $2\pi/3$-уравнения для $(\alpha_7 + \alpha_8, \alpha_6 + \alpha_7)$ следует, что$v_{\alpha_8} = 0$, а из $2\pi/3$-уравнения для $(\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_5 + \alpha_6)$ следует, что $v_{\alpha_6} = 0$. Поэтому $v_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Sigma_6 \cap \Delta_7$.

В этот момент мы действуем G_8 на вектор $(v_{\alpha_7+\alpha_8}, v_{\alpha_7})^t$, делая $v_{\alpha_7} = 0$. Тогда для любого $\beta \in \Sigma_7 \cap \Delta_8$ $\pi/2$-уравнения для $(\alpha_7 + \alpha_8, \beta)$ показывает, что $v_\beta = 0$. Поэтому мы опять можем использовать случай (E_7, ϖ_7). Заметим, что получаемое произведение SL_2-подгрупп лежит в произведении, которое мы использовали в случае $v_{-\alpha_8} \neq 0$.

Если $v_{-\alpha_7} = 0$, то есть (E_6, ϖ_1)-часть состоит из нулей, мы идем глубже и проводим аналогичную процедуру на (D_5, ϖ_5)-части. Далее, если необходимо, делаем то же самое на (A_4, ϖ_2)- и $(\mathsf{A}_4, \mathrm{ad})$-частях. Для последнего мы используем тот факт, что $(\mathsf{A}_\ell, \mathrm{ad})$ раскладывается в сумму $(\mathsf{A}_{\ell-1}, \varpi_1)$ и $(\mathsf{A}_{\ell-1}, \mathrm{ad})$, так что мы по очереди обнуляем все те веса из $-\Sigma_2 \cap \Delta 5$, $-\Sigma_4 \cap \Delta_{\{2,5\}}$, $-\Sigma_3 \cap \Delta_4$, которые не являются минус простыми, и повторяем рассуждение, использованное для всех других частей.

В целом мы использовали произведение $1 + 27 + 1 + 27 + 1 = 57$ множителей, чтобы перевести $g_{*\varpi_8}$ в v^+. Заметим, что $57 + 56 + 126 - 7 = 240 - 8$.

4.1.4. Исключительные группы с кратными связями

Случай (F_4, ϖ_4)**.** Сначала мы используем элемент из G_4, чтобы обнулить элемент, отвечающий младшему весу, затем рассуждение, аналогичное случаю

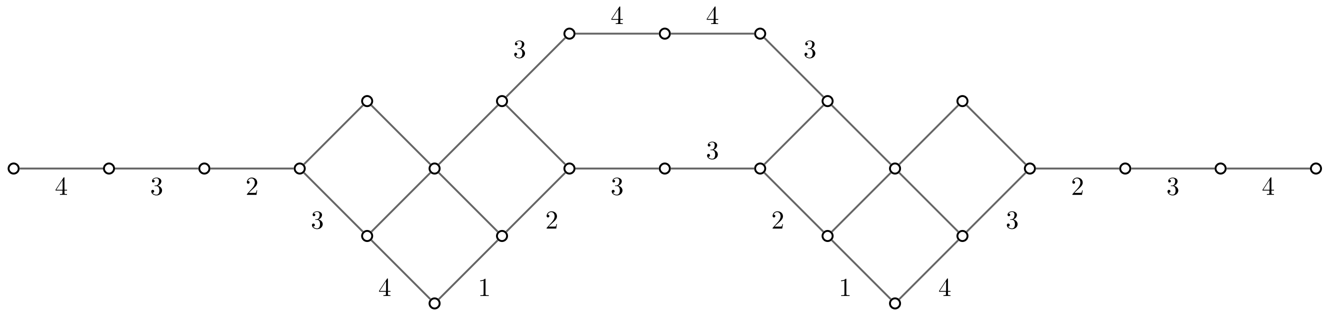

Рисунок 4.5: (F_4, ϖ_4)

(D_4, ϖ_1), дает элемент из $\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_1\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_3$, обнуляющий все, что стоит на позициях из $-\Sigma_4 \setminus \{-\alpha_4\}$. Если $v_{-\alpha_4} \neq 0$, то все элементы на позициях из $-\Sigma_3$ равны нулю, так что мы можем использовать Лемму 4.3 с G_4, чтобы перевести все в положительную часть. Теперь мы можем использовать элемент из $\mathrm{G}_4\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_3\,\mathrm{G}_1\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_3$, чтобы перевести v в v^+, поскольку $v_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Sigma_3 \cap \Delta_4$.

Если $v_{-\alpha_4} = 0$, то мы могли использовать $\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_1$ сразу после применения G_4, чтобы сделать $v_{-\alpha_3}$ единственным ненулевым элементом в отрицательной части. После этого используем G_3, чтобы перевести его в положительную часть, и G_4 для того, чтобы перевести его в позицию $\alpha_3 + \alpha_4$. Этот случай уже был разобран ранее. Таким образом, мы построили произведение 15 множителей, переводящее ϖ_4-й столбец в v^+, а $15 + 14 + 15 = 48 - 4$.

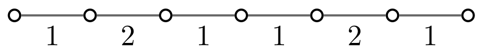

Рисунок 4.6: (G_2, ϖ_1)

Случай (G_2, ϖ_1)**.** Поскольку группа $\mathrm{G}(\mathsf{G}_2)$ в своем 7-мерном представлении является подгруппой SO_7 и диаграмма Дынкина является цепочкой, существует элемент из $\mathrm{G}_1\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_1\,\mathrm{G}_2\,\mathrm{G}_1$, переводящий первый столбец в v^+, а $5+4+1 = 12-2$.

4.2. Произведения SL_n-подгрупп

Основной результат работы Н. Николова [67] дает оценку на длину SL_n-факторизации:

Теорема. *Пусть G — классическая (возможно скрученная) группа Шевалле ранга n над конечным полем. Тогда G раскладывается в произведение не более 200 подгрупп, изоморфных SL_n.*

Доказательство в [67] основывается на унитреугольной факторизации длины 13, так что уже просто использование результатов [6] или [82] значительно улучшило бы получающиеся оценки. В действительности гораздо более эффективно начинать не с треугольной факторизации, а с параболической факторизации. Мы будем использовать разложения Денниса—Васерштейна. Заметим для начала, что из него моментально следует следующая вариация леммы 4.2:

Лемма 4.4. *Предположим, что* $\mathrm{sr}(I) \leqslant n-1$. *Тогда* $\mathrm{SL}(n+1,R,I)$ *есть произведение не более* 5 *подгрупп, изоморфных* $\mathrm{SL}(n,R,I)$.

Доказательство. Классическое разложение Денниса—Васерштейна (см. [7] и [13, Лемма 2.1]) позволяет представить $\mathrm{SL}(n+1,R,I)$ в виде

$$\mathrm{SL}(n+1,R,I) = \mathrm{P}_1 \cdot X_{n1} \cdot \mathrm{P}_n = \mathrm{G}(\Delta_1)\,\mathrm{U}(\Sigma_1)\cdot \mathrm{X}_{n1}\cdot \mathrm{U}(\Sigma_n)\,\mathrm{G}(\Delta_n).$$

Разложим далее $\mathrm{U}(\Sigma_1) = (\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{G}(\Delta_n))\cdot \mathrm{X}_{1n}$ и $\mathrm{U}(\Sigma_n) = \mathrm{X}_{1n}\cdot(U(\Sigma_n)\cap \mathrm{G}(\Delta_1)$. Остается заметить, что $\mathrm{X}_{1n}\,\mathrm{X}_{n1}\,\mathrm{X}_{1n} \in \mathrm{G}(\Delta_1)^{w_{12}(1)}$. □

Сейчас мы продемонстрируем на примере $\Phi = \mathsf{D}_\ell$, что разложения Денниса—Васерштейна подходят для изучения подсистемных факторизаций в других группах, хотя и с худшими оценками на длину факторизации и условие стабильности.

Рассмотрим убывающую цепочку Φ_k, $k = 1,\ldots,\lfloor \ell/2\rfloor$ подсистем системы корней $\Phi = \mathsf{D}_\ell$, определенную следующим образом. Если $2k \neq \ell$, мы полагаем Φ_k равным подсистеме системы Φ, порожденной простыми корнями $\alpha_{2k-1},\ldots,\alpha_\ell$. Такие системы Φ_k имеют тип $\mathsf{D}_{\ell-2k+2}$. В случае $2k=\ell$ положим $\Phi_k = \langle \alpha_\ell\rangle \cong \mathsf{A}_1$. Обозначим через β_k максимальный корень системы Φ_k, то есть $\beta_k = \alpha_{\max}(\Phi_k)$, $k = 1,\ldots,\lfloor \ell/2\rfloor$. Обозначим через B множество всех β_k. Очевидно, что все элементы B попарно ортогональны. Корни β_k можно также определить явными формулами:

$$\begin{aligned} \beta_k = \alpha_{2k-1} + 2\alpha_{2k} + \ldots + 2\alpha_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell \quad & \text{для } k = 1,\ldots,\lfloor \ell/2\rfloor - 1,\\ \beta_{\lfloor \ell/2\rfloor} = \alpha_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell, \quad & \text{если } \ell \text{ нечетно},\\ \beta_{\lfloor \ell/2\rfloor} = \alpha_\ell, \quad & \text{если } \ell \text{ четно}. \end{aligned}$$

Лемма 4.5. *Существует такой элемент* $w \in \mathrm{W}(\mathsf{D}_\ell)$, *что* $w(B) \subseteq \Delta_\ell^+$.

Доказательство. Случай $\ell = 4$. Положим $w = \sigma_{\alpha_1+\alpha_2} \circ \sigma_{\alpha_2+\alpha_4}$. Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} w(\beta_1) &= w(\alpha_{\max}) = \sigma_{\alpha_1+\alpha_2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \alpha_3,\\ w(\beta_2) &= w(\alpha_4) = \sigma_{\alpha_1+\alpha_2}(-\alpha_2) = \alpha_1, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы.

Случай $\ell \geq 5$. Согласно [11, таблица 9], для нечетных (соответственно, для четных) ℓ все максималные подсистемы типа $\mathsf{A}_1 + \ldots + \mathsf{A}_1 + \mathsf{D}_3$ (соотв., $\mathsf{A}_1 + \ldots + \mathsf{A}_1 + \mathsf{D}_4$) сопряжены под действием группы Вейля $\mathrm{W}(\Phi)$. Следовательно, найдется такой $w \in \mathrm{W}(\Phi)$, что $w(\beta_k) = \alpha_{2k-1}$ для всех $k < \lfloor \ell/2\rfloor$ (соотв., $k < \lfloor \ell/2\rfloor - 1$). Теперь, пользуясь транзитивностью действия $\mathrm{W}(\mathsf{D}_3)$ на корнях (соотв., рассуждением из случая $\ell = 4$), мы можем перевести оставшийся корень $\beta_{\lfloor \ell/2 \rfloor}$ в $\alpha_{\ell-1}$ (соотв., оставшиеся два корня $\beta_{\lfloor \ell/2 \rfloor - 1}$, $\beta_{\lfloor \ell/2 \rfloor}$ в $\alpha_{\ell-3}$, $\alpha_{\ell-1}$), не трогая при этом остальные β_k. $\square$

Следующая лемма является аналогом предложения 1 работы [67].

Лемма 4.6. *Пусть* $\Phi = \mathsf{D}_\ell$, $\ell \geqslant 2$, *и пусть* I *— идеал коммутативного кольца* R. *Тогда найдутся такой элемент* $y \in \mathrm{E}(\Phi, R)$ *и такой элемент* $w \in \widetilde{\mathrm{W}}(\Phi)$, *что* $\mathrm{U}(\Sigma_\ell^+, I) \subset [\mathrm{U}(\Delta_\ell^-, I), y] \cdot {}^w\mathrm{U}(\Delta_\ell^+, I)$.

Доказательство. Разложим $\mathrm{U}(\Sigma_\ell^+, I)$ в произведение $\mathrm{U}(\Sigma_\ell^+, I) = \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+ \setminus B, I) \cdot \mathrm{U}(B, I)$. Положим $y = \prod_{\beta \in B} x_\beta(1)$. Докажем индукцией по ℓ, что

$$\mathrm{U}(\Sigma_\ell^+ \setminus B, I) \subset [\mathrm{U}(\Delta_\ell^-, I), y] \cdot \mathrm{U}(B, I). \tag{4.1}$$

База индукции в случаях $\ell = 2, 3$ тривиальна.

Заметим, что β_1 — единственный корень Φ, удовлетворяющий $m_2(\beta_1) = 2$, поэтому коммутационная формула Шевалле влечет

$$\big[\mathrm{U}(\Delta_2^-, I), x_{\beta_1}(1)\big] = 1.$$

Не существует корня γ вида $\gamma = \alpha + \beta$ с $\alpha \in \Sigma_2^- \cap \Delta_\ell$ и $\beta \in B \setminus \{\beta_1\}$, поскольку такой корень γ должен одновременно удовлетворять $m_2(\gamma) = -1$ и $m_\ell(\gamma) = 1$. Поэтому

$$\Big[\mathrm{U}(\Sigma_2^- \cap \Delta_\ell, I), \prod_{i \neq 1} x_{\beta_i}(1)\Big] = 1.$$

Поскольку $B \setminus \{\beta_1\} \subset \Sigma_\ell^+ \cap \Delta_2$, два равенства выше влекут

$$\Big[\mathrm{U}(\Sigma_2^- \cap \Delta_\ell, I) \cdot \mathrm{U}(\Delta_{2,\ell}^-, I), x_{\beta_1}(1) \cdot \prod_{i \neq 1} x_{\beta_i}(1)\Big] \equiv$$
$$\equiv \big[\mathrm{U}(\Sigma_2^- \cap \Delta_\ell, I), x_{\beta_1}(1)\big] \bmod \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+ \cap \Delta_2, I).$$

Возьмем элемент $u \in \mathrm{U}(\Sigma_2^- \cap \Delta_\ell, I)$ и разложим его в произведение $u = vw$, где $v \in \mathrm{U}(\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^- \cap \Delta_\ell, I)$ и $w \in \mathrm{U}(\Sigma_2^- \cap \Delta_{1,\ell}, I)$. Пользуясь тождеством

$$[ab, c] = {}^a[b, c] \cdot [a, c], \tag{4.2}$$

перепишем

$$[vw, x_{\beta_1}(1)] = {}^v[w, x_{\beta_1}(1)] \cdot [v, x_{\beta_1}(1)].$$

Поскольку группы $\mathrm{U}(\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^- \cap \Delta_\ell, I)$ и $\mathrm{U}(\Sigma_2^- \cap \Delta_{1,\ell}, I)$ абелевы, легко видеть, что

$$[v, x_{\beta_1}(1)] \in \mathrm{U}(\Sigma_2^+ \cap \Sigma_\ell^+ \cap \Delta_1, I), \quad [w, x_{\beta_1}(1)] \in \mathrm{U}((\Sigma_1^+ \cap \Sigma_\ell^+) \setminus \{\beta_1\}, I).$$

Каждый элемент $\mathrm{U}(\Sigma_2^+ \cap \Sigma_\ell^+ \cap \Delta_1, I)$ (соответственно, $\mathrm{U}(\Sigma_1^+ \cap \Sigma_\ell^+ \setminus \{\beta_1\}, I)$) можно выразить в виде такого коммутатора при подходящем выборе v (соотв., w). Действительно, положим $v = x_\gamma(\xi_\gamma) \cdot v'$, где $\gamma = -\alpha_1 - \alpha_2$ и $v' \in \mathrm{U}(\Sigma_1^- \cap \Sigma_2^- \cap \Delta_\ell \setminus \{\gamma\})$. Используя соотношение (4.2) и тот факт, что $\mathrm{X}_\gamma(I)$ коммутирует с $\mathrm{U}(\Sigma_2^+ \cap \Delta_1, I)$, получаем

$$[v, x_{\beta_1}(1)] = [x_\gamma(\xi_\gamma) \cdot v', x_{\beta_1}(1)] = {}^{x_\gamma(\xi_\alpha)}[v', x_{\beta_1}(1)] \cdot [x_\gamma(\xi_\gamma), x_{\beta_1}(1)] = \\ = [v', x_{\beta_1}(1)] \cdot x_{\beta_1-\alpha_1-\alpha_2}(\xi_\gamma) = \ldots = \prod_{\alpha \in \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^- \cap \Delta_\ell} x_{\beta_1+\alpha}(\xi_\alpha).$$

Остается заметить, что $\Sigma_2^+ \cap \Sigma_\ell^+ \cap \Delta_1 = \beta_1 + \Sigma_1^- \cap \Sigma_2^- \cap \Delta_\ell$. Такое рассуждение работает для $[w, x_{\beta_1}(1)]$. Прямое вычисление с коммутационной формулой показывает, что

$${}^v\mathrm{U}(\Sigma_1^+ \cap \Sigma_\ell^+ \setminus \{\beta_1\}, I) \equiv \mathrm{U}(\Sigma_1^+ \cap \Sigma_\ell^+ \setminus \{\beta_1\}, I) \bmod \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+ \cap \Delta_2, I).$$

Вместе рассуждения выше дают сравнение

$$[\mathrm{U}(\Sigma_2^-, I) \cdot \mathrm{U}(\Delta_{2,\ell}^-, I), y] \equiv \mathrm{U}((\Sigma_{1,2}^+ \cap \Sigma_\ell^+) \setminus \{\beta_1\}) \bmod \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+ \cap \Delta_2, I),$$

из которого включение (4.1) выполнено по индукционному предположению (примененному к подсистеме $\Delta_{1,2} \cong \mathsf{D}_{\ell-2}$).

Итого мы нашли такие $a \in \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+ \setminus B, I)$ и $b \in \mathrm{U}(\Delta_\ell^-, I)$, что

$$a \in [b, y] \cdot \prod_{\beta \in B} X_\beta \subset [\mathrm{U}(\Delta_\ell^-, I), y] \cdot \mathrm{U}(B, I).$$

Утверждение леммы следует теперь из леммы 4.5. □

Теорема 4.3. *Предположим, что* $\mathrm{sr}(I) \leqslant 2$. *Тогда элементарная спинорная группа* $\mathrm{Epin}_{2\ell}(R, I) = \mathrm{E}(\mathsf{D}_\ell, R, I)$ *является произведением* 9 *своих подгрупп типа* $\mathsf{A}_{\ell-1}$.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{E}(\Delta_\ell, R, I) \leqslant \mathrm{E}(\mathsf{D}_\ell, R, I)$, и обозначим через σ автоморфизм группы $\mathrm{G}(\mathsf{D}_\ell, R)$, индуцированный симметрией диаграммы Дынкина D_ℓ. Недавний результат С. С. Синчука (неопубликовано) утверждает, что в предположениях теоремы имеет место разложение Денниса–Васерштейна для пары корней $\alpha_{\ell-1}$ и α_ℓ, то есть

$$\mathrm{E}(\mathsf{D}_\ell, R, I) = \mathrm{EP}_\ell(R, I) \cdot \mathrm{U}(\Sigma_{\ell-1}^- \cap \Sigma_\ell^-, I) \cdot \mathrm{EP}_{\ell-1}(R, I) = \\ = L \cdot \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+, I) \cdot \mathrm{U}(\Sigma_{\ell-1}^- \cap \Sigma_\ell^-, I) \cdot \big(L \cdot \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+, I)\big)^\sigma.$$

По лемме 4.6 найдутся такие $y_1, y_2 \in \mathrm{G}(\mathsf{D}_\ell, R)$ и $w_1, w_2 \in \widetilde{\mathrm{W}}(\mathsf{D}_\ell)$, что

$$L \cdot \mathrm{U}(\Sigma_\ell^+, I) \subset L \cdot \mathrm{U}(\Delta_{\ell-1}^-, I) \cdot {}^{y_1}\mathrm{U}(\Delta_{\ell-1}^-, I) \cdot {}^{w_1}\mathrm{U}(\Delta_{\ell-1}^+, I),$$
$$\mathrm{U}(\Sigma_{\ell-1}^- \cap \Sigma_\ell^-, I) \subset \mathrm{U}(\Delta_\ell^+, I) \cdot {}^{y_2}\mathrm{U}(\Delta_\ell^+, I) \cdot {}^{w_2}\mathrm{U}(\Delta_\ell^-, I).$$

Отсюда $\mathrm{E}(\mathsf{D}_\ell, R, I)$ есть произведение не более 9 подгрупп, изоморфных $L \cong \mathrm{E}(\mathsf{A}_{\ell-1}, R, I)$. $\square$

Заключение

Изложенные результаты дают основание полагать, что используемые в диссертации методы позволят решить и другие задачи, связанные с факторизациями и вербальной шириной линейных групп. Отметим наиболее интересные с нашей точки зрения задачи.

Задача 1. Получить точные оценки на длину унитреугольной факторизации группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$.

Из работы К. Денниса и Л. Н. Васерштейна [33] известно, что с ростом ранга длина унireугольной факторизации уменьшается вплоть до 6. В данный момент не видно никаких причин, по которым уже группа $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ не может иметь факторизацию длины 6.

Задача 2. Вычислить ширину групп Шевалле по отношению к степеням.

В отличие от групп над конечными полями, для групп над кольцами не известно оценок вербальной ширины ни для каких слов, кроме коммутаторов. Степени являются словами, во многих смыслах противоположными коммутаторам, поэтому кажется естественным начать изучение с них. В свете результата А. В. Степанова о ширине коммутаторов возникает следующая связанная с ней

Задача 3. Исследовать ширину степеней относительно элементарных образующих.

Наконец, интересно было бы перенести результаты раздела 4.1 на скрученные группы, что уточнило бы результаты работы [58].

Список литературы

1. *Вавилов Н. А.* Весовые элементы групп Шевалле // *Алгебра и анализ.* — 2008. — Т. 20, № 1. — С. 34–85.

2. *Вавилов Н. А., Ковач Е. И.* SL_2-факторизации групп Шевалле // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2011. — Т. 394. — С. 20–32.

3. *Вавилов Н. А., Синчук С. С.* Разложения типа Денниса—Васерштейна // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2010. — Т. 375. — С. 48–60.

4. *Вавилов Н. А., Синчук С. С.* Параболические факторизации расщепимых классических групп // *Алгебра и анализ.* — 2011. — Т. 23. — С. 1–30.

5. *Вавилов Н. А., Синчук С. С.* Улучшенная стабилизация для нечетной ортогональной группы // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2013. — Т. 414. — С. 181–192.

6. *Вавилов Н. А., Смоленский А. В., Сури Б.* Унитреугольные факторизации групп Шевалле // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2011. — Т. 388. — С. 17–47.

7. *Васерштейн Л. Н.* О стабилизации общей линейной группы над кольцом // *Матем. сб.* — 1969. — Т. 79(121), № 3(7). — С. 405–424.

8. *Васерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // *Функц. анализ и его прил.* — 1971. — Т. 5, № 2. — С. 17–27.

9. *Васерштейн Л. Н.* О стабилизации для K_2-функтора Милнора // *УМН.* — 1975. — Т. 30. — С. 224.

10. *Васерштейн Л. Н., Суслин А. А.* Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1976. — Т. 40, № 5. — С. 993–1054.

11. *Дынкин Е. Б.* Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // *Матем. сб.* — 1952. — Т. 30(72). — С. 349–462.

12. *Ковач Е. И.* SL_2-факторизации групп Шевалле: дипломная работа. — 2012.

13. *Суслин А. А., Туленбаев М. С.* Теорема о стабилизации для K_2-функтора Милнора // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1976. — Т. 64. — С. 131–152.

14. *Тавгень О. И.* Ограниченная порождаемость групп Шевалле над кольцами S-целых алгебраических чисел // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1990. — Т. 54, № 1. — С. 97–122.

15. *Тавгень О. И.* Комбинаторные методы в теории линейных и арифметических групп: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06. — Минск, 1993. — 168 с.

16. *Abe E.* Coverings of twisted Chevalley groups over commutative rings // *Sci. Repts. Tokyo. Kyoiku Daigaku.* — 1977. — Vol. 13. — Pp. 194–218.

17. *Abe E., Suzuki K.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Tohoku Math. J.* — 1976. — Vol. 28, no. 2. — Pp. 185–198.

18. *Adian S., Mennicke J.* On bounded generation of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ // *Internat. J. Algebra Comput.* — 1992. — Vol. 2, no. 04. — Pp. 357–365.

19. *Arlinghaus F. A., Vaserstein L. N., You Hong*. Commutators in pseudo-orthogonal groups // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*. — 1995. — Vol. 59, no. 3. — Pp. 353–365.

20. *Babai L., Nikolov N., Pyber L.* Product growth and mixing in finite groups // 19th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms / ACM-SIAM. — 2008. — Pp. 248–257.

21. *Bass H.* K-theory and stable algebra // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1964. — no. 22. — Pp. 5–60.

22. *Bass H., Milnor J., Serre J.-P.* Solution of the congruence subgroup problem for SL_n $(n \geq 3)$ and Sp_{2n} $(n \geq 2)$ // *Publ. Math. IHES*. — 1967. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 59–137.

23. *Berman S., Moody R.* Extensions of Chevalley groups // *Israel J. Math.* — 1975. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 42–51.

24. *Bermudez H., Garibaldi S., Larsen V.* Linear preservers and representations with a 1-dimensional ring of invariants // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 2014. — Vol. 366, no. 6. — Pp. 4755–4780.

25. *Blau H. I.* A fixed-point theorem for central elements in quasisimple groups // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1994. — Vol. 122, no. 1. — Pp. 79–84.

26. *Bourbaki N.* Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6. — Springer-Verlag, Berlin, 2002.

27. *Burger M.* Kazhdan constants for $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$ // *J. Reine Angew. Math.* — 1991. — Vol. 413. — Pp. 36–67.

28. *Carter D., Keller G.* Bounded elementary generation of $\mathrm{SL}_n(O)$ // *Amer. J. Math.* — 1983. — Vol. 105, no. 3. — Pp. 673–687.

29. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. Wiley Classics Library. — John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. — Pp. x+335.

30. *Chernousov V., Ellers E. W., Gordeev N.* Gauss decomposition with prescribed semisimple part: short proof // *J. Algebra*. — 2000. — Vol. 229, no. 1. — Pp. 314–332.

31. Commutator width in Chevalley groups / R. Hazrat, A. Stepanov, N. Vavilov, Z. Zhang // *Note Mat.* — 2013. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 139–170.

32. Commutators in finite quasisimple groups / M. W. Liebeck, E. A. O'Brien, A. Shalev, P. H. Tiep // *Bull. Lond. Math. Soc.* — 2011. — Vol. 43, no. 6. — Pp. 1079–1092.

33. *Dennis R., Vaserstein L.* On a question of M. Newman on the number of commutators // *J. Algebra*. — 1988. — Vol. 118, no. 1. — Pp. 150–161.

34. *Dennis R. K.* Stability for K_2 // Proceedings of the Conference on Orders, Group Rings and Related Topics (Ohio State Univ., Columbus, Ohio, 1972). — Springer, Berlin, 1973. — Pp. 85–94. Lecture Notes in Math., Vol. 353.

35. *Ellers E. W., Gordeev N.* On the conjectures of J. Thompson and O. Ore // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1998. — Vol. 350, no. 9. — Pp. 3657–3671.

36. *Estes D. R., Ohm J.* Stable range in commutative rings // *J. Algebra*. — 1967. — Vol. 7. — Pp. 343—362.

37. *Gillman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1956. — Pp. 366–391.

38. *Gordeev N., Saxl J.* Products of conjugacy classes in Chevalley groups over local rings // *Алгебра и анализ*. — 2005. — Т. 17, № 2. — С. 285–293.

39. *Gotô M.* A theorem on compact semi-simple groups // *J. Math. Soc. Japan*. — 1949. — Vol. 1. — Pp. 270–272.

40. *Gow R.* Commutators in the symplectic group // *Arch. Math. (Basel)*. — 1988. — Vol. 50, no. 3. — Pp. 204–209.

41. *Gow R.* Commutators in finite simple groups of Lie type // *Bull. London Math. Soc.* — 2000. — Vol. 32, no. 3. — Pp. 311–315.

42. *Grayson D. R.* SK_1 of an interesting principal ideal domain // *J. Pure Appl. Algebra*. — 1981. — Vol. 20, no. 2. — Pp. 157–163.

43. *Grunewald F., Mennicke J., Vaserstein L.* On the groups $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[x])$ and $\mathrm{SL}_2(k[x,y])$ // *Israel J. Math.* — 1994. — Vol. 86, no. 1–3. — Pp. 157–193.

44. *Hadad U.* Uniform Kazhdan constant for some families of linear groups // *J. Algebra*. — 2007. — Vol. 318, no. 2. — Pp. 607–618.

45. *Hadad U.* On Kazhdan constants of finite index subgroups in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2012. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 1250026, 18.

46. *Humphreys J. E.* Reflection groups and Coxeter groups. — Cambridge University Press, Cambridge, 1990. — Vol. 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. — Pp. xii+204.

47. *Hungerford T. W.* On the structure of principal ideal rings // *Pacific J. Math.* — 1968. — Vol. 25, no. 3. — Pp. 543–547.

48. *Ischebeck F.* Hauptidealringe mit nichttrivialer SK_1-Gruppe // *Arch. Math. (Basel)*. — 1980. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 138–139.

49. *Ivarsson B., Kutzschebauch F.* On the number of factors in the unipotent factorization of holomorphic mappings into $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2012. — Vol. 140, no. 3. — Pp. 823–838.

50. *K.-C. Ts'eng, C.-H. Hsu*. On the commutators of two classes of finite simple groups // *Shuxue Jinzhan*. — 1965. — Vol. 8. — Pp. 202–208.

51. *van der Kallen W.* Injective stability for K_2 // Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, III., 1976). — Springer, 1976. — Vol. 551 of *Lect. Notes Math.* — Pp. 77–154.

52. *van der Kallen W.* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}[x])$ does not have bounded word length // Algebraic K-theory, Proc. Conf., Oberwolfach 1980, Part I. — Springer, 1982. — Vol. 966 of *Lect. Notes Math.* — Pp. 357–361.

53. *Kassabov M.* Kazhdan constants for $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2005. — Vol. 15, no. 5-6. — Pp. 971–995.

54. *Kolster M.* On injective stability for K_2 // Algebraic K-theory, Part I (Oberwolfach, 1980). — Springer, Berlin-New York, 1982. — Vol. 966 of *Lecture Notes in Math.* — Pp. 128–168.

55. *Krusemeyer M. I.* Fundamental groups, algebraic K-theory, and a problem of Abhyankar // *Invent. Math.* — 1973. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 15–47.

56. *Lenstra Jr. H. W.* Grothendieck groups of abelian group rings // *J. Pure Appl. Algebra*. — 1981. — Vol. 20, no. 2. — Pp. 173–193.

57. *Lenstra Jr. H. W., Stevenhagen P., Moree P.* Character sums for primitive root densities // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* — 2014. — 11. — Vol. 157. — Pp. 489–511.

58. *Liebeck M., Nikolov N., Shalev A.* Groups of Lie type as products of SL_2 subgroups // *J. Algebra*. — 2011. — Vol. 326, no. 1. — Pp. 201–207.

59. *Liebeck M., Pyber L.* Finite linear groups and bounded generation // *Duke Math. J.* — 2001. — Vol. 107. — Pp. 159–171.

60. *Lubotzky A., Pak I.* The product replacement algorithm and Kazhdan's property (T) // *J. Amer. Math. Soc.* — 2001. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 347–363 (electronic).

61. *Luzgarev A.* Equations determining the orbit of the highest weight vector in the adjoint representation // *arXiv preprint arXiv:1401.0849*. — 2014.

62. *Magurn B. A., van der Kallen W., Vaserstein L. N.* Absolute stable rank and Witt cancellation for noncommutative rings // *Invent. Math.* — 1988. — Vol. 91. — Pp. 525–542.

63. *Matsumoto H.* Sur les sous-groupes arithmetiques des groupes semi-simple deployes // *Ann. Sci. ENS*. — 1969. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 1–62.

64. Minimal length products of unipotent Sylow subgroups in finite simple groups of Lie type / M. Garonzi, D. Levy, A. Maróti, I. Simion // *arXiv preprint arXiv:1501.05678*. — 2015.

65. *Miyasaka T., Shukuzawa O., Yokota I.* Spinor generators of compact exceptional Lie groups F_4, E_6 and E_7 // *Tsukuba J. Math.* — 1999. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 705–721.

66. *Neubüser J., Pahlings H., Plesken W.* CAS; design and use of a system for the handling of characters of finite groups // Computational group theory (Durham, 1982). — Academic Press, London, 1984. — Pp. 195–247.

67. *Nikolov N.* A product decomposition for the classical quasisimple groups // *J. Group Theory*. — 2007. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 43–53.

68. *Ore O.* Some remarks on commutators // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1951. — Vol. 2. — Pp. 307–314.

69. The Ore conjecture / M. W. Liebeck, E. A. O'Brien, A. Shalev, P. H. Tiep // *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*. — 2010. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 939–1008.

70. *Pasiencier S., Wang H.-C.* Commutators in a semi-simple Lie group // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1962. — Vol. 13. — Pp. 907–913.

71. *Plotkin E.* On the stability of the K_1-functor for Chevalley groups of type E_7 // *J. Algebra*. — 1998. — Vol. 210. — Pp. 67–85.

72. *Ree R.* Commutators in semi-simple algebraic groups // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1964. — Vol. 15. — Pp. 457–460.

73. *Seligman G. B.* On automorphisms of Lie algebras of classical type. II // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1960. — Vol. 94, no. 3. — Pp. 452–482.

74. *Shalom Y.* Bounded generation and Kazhdan's property (T) // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1999. — no. 90. — Pp. 145–168 (2001).

75. *Shoda K.* Einige Sätze über Matrizen // *Japan J. Math.* — 1937. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 361–365.

76. *Sinchuk S.* Injective stability for unitary K_1, revisited // *J. K-Theory*. — 2013. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 233–242.

77. *Sinchuk S., Smolensky A.* Decompositions of congruence subgroups of Chevalley groups // *arXiv preprint arXiv:1511.02906*. — 2015.

78. *Sivatski A. S., Stepanov A. V.* On the word length of commutators in $\mathrm{GL}_n(R)$ // K-*Theory*. — 1999. — Vol. 17, no. 4. — Pp. 295–302.

79. *Smolensky A.* Unitriangular factorization of twisted Chevalley groups // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2013. — Vol. 23, no. 6. — Pp. 1497–1502.

80. *Smolensky A.* Commutator width of Chevalley groups over rings of stable rank 1 // *arXiv preprint arXiv:1410.3427*. — 2014.

81. *Smolensky A.* Products of Sylow subgroups in Suzuki and Ree groups // *arXiv preprint arXiv:1501.05234*. — 2015. — accepted for publication in Comm. Algebra.

82. *Smolensky A., Sury B., Vavilov N.* Gauss decomposition for Chevalley groups, revisited // *Int. J. Group Theory*. — 2012. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 3–16.

83. *Sourour A. R.* A factorization theorem for matrices // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1986. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 141–147.

84. *Stein M.* Relativizing functors on rings and algebraic K-theory // *J. Algebra*. — 1971. — Vol. 19. — Pp. 140–152.

85. *Stein M. R.* Stability theorems for K_1, K_2 and related functors modeled on Chevalley groups // *Japan J. Math.* — 1978. — Vol. 4. — Pp. 77–108.

86. *Stepanov A.* Elementary calculus in Chevalley groups over rings // *J. Prime Res. Math.* — 2013. — Vol. 9. — Pp. 79–95.

87. *Stepanov A.* Structure of Chevalley groups over rings via universal localization // *arXiv preprint arXiv:1303.6082*. — 2013.

88. *Stepanov A., Vavilov N.* On the length of commutators in Chevalley groups // *Israel J. Math.* — 2011. — Vol. 185. — Pp. 253–276.

89. *Taddei G.* Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau // Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part II (Boulder, Colo., 1983). — Vol. 55 of *Contemp. Math.* — 1986. — Pp. 693–710.

90. *Tavgen O. I.* Bounded generability of congruence subgroups of Chevalley groups over rings of integers of algebraic number fields // *Dokl. Akad. Nauk Belarusi.* — 1993. — Vol. 37, no. 5. — Pp. 12–15, 121 (1994).

91. *Thompson R. C.* Commutators in the special and general linear groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1961. — Vol. 101, no. 1. — Pp. 16–33.

92. *Vaserstein L. N.* Bass's first stable range condition // *J. Pure Appl. Algebra.* — 1984. — Vol. 34, no. 2. — Pp. 319–330.

93. *Vaserstein L. N.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Tohoku Math. J.* — 1986. — Vol. 38. — Pp. 219–230.

94. *Vaserstein L. N., Wheland E.* Commutators and companion matrices over rings of stable rank 1 // *Linear Algebra Appl.* — 1990. — Vol. 142. — Pp. 263–277.

95. *Vavilov N. A., Plotkin E.* Chevalley groups over commutative rings: I. Elementary calculations // *Acta Appl. Math.* — 1996. — Vol. 45, no. 1. — Pp. 73–113.

96. *Villari G.* Sui commutatori del gruppo modulare // *Boll. Un. Mat. Ital. (3).* — 1958. — Vol. 13. — Pp. 196–201.

97. *Vsemirnov M.* Short unitriangular factorizations of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$ // *Q. J. Math.* — 2013. — Pp. 279–290.

98. Word values in p-adic and adelic groups / N. Avni, T. Gelander, M. Kassabov, A. Shalev // *Bull. Lond. Math. Soc.* — 2013. — Vol. 45, no. 6. — Pp. 1323–1330.

99. *Zabavs'kyi B. V.* Reduction of matrices over Bézout rings of stable rank not higher than 2 // *Ukrainian Math. J.* — 2003. — Vol. 55, no. 4. — Pp. 665–670.

100. *Zariski O., Samuel P.* Commutative algebra. Graduate Texts in Mathematics no. 28, 29. — Springer-Verlag, 1975.