На правах рукописи

Лавренов Андрей Валентинович

СТРОЕНИЕ ГРУПП СТЕЙНБЕРГА

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Вавилов Николай Александрович**.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, **Орлов Дмитрий Олегович**, федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, заведующий отделом, главный научный сотрудник; доктор физико-математических наук, **Ягунов Сергей Алексеевич**, федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, старший научный сотрудник.
Ведущая организация:	федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН.

Защита состоится «1» июня 2018 года в 17:00 на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 на базе федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, `http://pdmi.ras.ru`.

Автореферат разослан «   »   2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета:

Малютин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Настоящая диссертация посвящена группам Стейнберга классических групп: линейной, ортогональной, симплектической и унитарной над произвольными кольцами.

Классические группы изучались со второй половины XIX века. Сам термин «классическая группа» принадлежит Вейлю, который рассматривал эти группы над (произвольными) полями, в частности, был одним из пионеров теории представлений классических групп.

Во второй половине XX века начинается активное изучение классических групп над произвольными кольцами. В теории арифметических групп огромную роль играют классические группы над кольцом целых и над кольцом аделей глобального поля. В топологии Уайтхед, а позже Милнор, Столлингс и другие рассматривают полную линейную группу группового кольца $\mathbb{Z}\pi_1$ фундаментальной группы топологического пространства $\pi_1 = \pi_1(X)$.

Хайман Басс, интерпретируя идеи Уайтхеда и Милнора, даёт определение алгебраического K_1. Введённая им группа K_1 сразу находит чрезвычайно значимые приложения в топологии и теории чисел. Басс, Милнор и Серр при решении конгруэнц-проблемы показывают взаимосвязь между K_1 и законами взаимности.

В 1962 году Роберт Стейнберг находит полную систему соотношений между элементарными унипотентами в группах Шевалле над полем, то есть, задание группы $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\Phi, F)$ при помощи образующих и соотношений. Кроме того, Стейнберг задал образующими и соотношениями *универсальные центральные расширения* групп Шевалле (то есть, их расширения при помощи мультипликаторов Шура), которые мы сейчас называем *группами Стейнберга*. Вскоре Хидейа Мацумото описывает ядра естественных гомоморфизмов из групп Стейнберга в группы Шевалле над полем. Джон Милнор рассматривает группы Стейнберга над произвольными кольцами и определяет с их помощью алгебраический K_2.

Совершенно новый этап в развитии структурной теории классических групп связан с успехом Квиллена и Суслина в решении проблемы Серра (и её K_1-аналога).

Вильберд ван дер Каллен и Марат Туленбаев перенесли идеи Суслина на уровень *линейного* K_2. А именно, ван дер Каллен показал, что расширение элементарной подгруппы при помощи группы Стейнберга является центральным над любым коммутативным кольцом. В доказательстве он использовал «бескоординатную» версию копредставления для группы Стейнберга, которую назвал *другим копредставлением*. Из его результатов напрямую следует, что группа Стейнберга в действительности является расширением элементарной группы при помощи её вторых (целочисленных) гомологий, а также, что классическое Милноровское определение K_2 совпадает с определением Квиллена через $+$-конструкцию. До работ ван дер Каллена это было известно только над полем или над кольцом маленькой размерности по отношению к рангу группы.

Туленбаев обобщил результат ван дер Каллена на (некоммутативные) конечномерные алгебры над коммутативными кольцами. Кроме того, он доказал для (линейной) группы Стейнберга аналог локально-глобальной леммы Квиллена о проективных модулях, то есть, что строение группы Стейнберга можно изучать, переходя к максимальным локализациям основного кольца. Результат ван дер Каллена о центральности является прямым следствием этого локально-глобального принципа.

В локально-глобальном принципе Туленбаева необходимо, чтобы степень группы была хотя бы 5 (то есть, ранг соответствующей системы корней A_l был хотя бы 4) [3]. В 2012 году Матиас Вендт доказал, что локально-глобальный принцип не имеет места, если ранг группы равен 2 [13]. Таким образом, случай ранга 3 (степени 4) оставался открытым. Но в 2015 Сергей Синчук показал, что локально-глобальный принцип для *ортогональной* группы Стейнберга сводится к локально-глобальному принципу для линейной группы Стейнберга именно степени 4. Таким образом, доказательство локально-глобального принципа для линейной группы Стейнберга степени 4 является актуальным вопросом.

Кроме того, на уровне K_1 результаты Суслина и Квиллена перенесены не только на случай классических групп или групп Шевалле, но и на гораздо более широкие контексты изотропных редуктивных групп или нечётных унитарных групп. В то же время, на уровне K_2 они были известны только для линейной группы до работ автора. Таким образом, доказательство аналогов теоремы центральности, другого копредставления и локально-глобального принципа для *симплектической* группы Стейнберга также является актуальным вопросом.

Наконец, в 2003 Виктор Петров ввёл понятия *нечётной унитарной группы*, обобщающей все классические группы: линейные, симплектические, чётные и нечётные ортогональные, а также унитарные групп в смысле Бака [4] и некоторые другие, см. [8]. За последние годы появилось много работ, посвящённых этим группам. Однако о соответствующей нечётной унитарной группы *Стейнберга* до работы соискателя не было доказано ни одного результата.

Цель работы

Основная цель настоящей диссертации — дать гомологическую интерпретацию групп Стейнберга классических групп, а именно, показать, что группа Стейнберга в той или иной ситуации оказывается универсальным центральным расширением элементарной подгруппы классической группы, а и K_2-функтор совпадает со второй группой её целочисленных гомологий.

Для реализации поставленной цели в случае чётной ортогональной группы необходимо обобщить результаты Туленбаева о том, что тривиальность элементов линейной группы Стейнберга можно проверять локально.

Для симплектической группы необходимо перенести на рассматриваемый контекст технику ван дер Каллена и Туленбаева, развитую ими при работе с линейной группой Стейнберга.

В случае стабильной нечётной унитарной группы Стейнберга необходимо доказать тривиальность мультипликатора Шура этой группы.

Методы исследований

Работая с линейной группой Стейнберга мы используем технику другого копредставления ван дер Каллена и Туленбаева. Доказательство локально-глобального принципа следует тому же плану, что и в статье Туленбаева [3]. Главная идея, позволившая обобщить это рассуждение, заключается в использовании нового варианта «другого копредставления» для относительной группы Стейнберга.

В случае симплектической группы, мы, главным образом, разрабатываем аналоги идей ван дер Каллена из [5], соединив их с полезной идеей о порождении элементарной симплектической группы длиннокорневыми трансвекциями (в отличие от элементарной унитарной группы), см., например, [12]. В то же время, именно наличие корней разной длины было и главным техническим препятствием, отличающим симплектический случай от линейного.

Техника, используемая при работе с нечётной унитарной группой, восходит к работам Стейнберга, а общий план доказательства следует исходному рассуждению Милнора, см. [11, 7]. Однако в рассматриваемом контексте соискатель работал с коммутационной формулой Шевалле, отвечающей системе корней BC_l и некоммутативным кольцом, что потребовало вести рассуждение в два этапа: сначала для коротких корней, затем для длинных и *экстракоротких*, а также более аккуратного применения коммутаторного исчисления.

Положения, выносимые на защиту

В настоящей диссертации получены следующие новые результаты.

1. Доказан локально-глобальный принцип для линейной группы Стейнберга $\mathrm{St}(4, R)$. Приведённое доказательство работает и для линейной группы Стейнберга $\mathrm{St}(n, R)$ при $n \geqslant 5$, таким образом, наш результат является прямым обобщением результата Туленбаева.

2. Доказана теорема центральности симплектического $\mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(2l, R)$, построено другое копредставление для симплектической группы Стейнберга $\mathrm{StSp}(2l, R)$ (в смысле ван дер Каллена). Здесь R — это произвольное коммутативное кольцо, $l \geqslant 3$. Как показано в работе Матиаса Вендта [13], при $l = 2$ эти результаты не имеют места.

3. Доказана тривиальность мультипликатора Шура чётной унитарной группы Стейнберга $\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda)$ над произвольном кольцом, при любом $n \geqslant 5$.

Кроме того, как следствие основных результатов настоящей диссертации, мы получаем новые теоремы о связи K_2 классических групп с гомологиями их элементарных подгрупп в трёх следующих ситуациях.

1. Ортогональная группа. Пусть R — произвольное коммутативное кольцо, $l \geqslant 5$,

$$G = \mathrm{O}(2l, R), \quad E = \mathrm{EO}(2l, R), \quad \mathrm{St} = \mathrm{StO}(2l, R), \quad \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_2\mathrm{O}(2l, R).$$

2. Симплектическая группа. Пусть R — произвольное коммутативное кольцо, $l \geqslant 4$,

$$G = \mathrm{Sp}(2l, R), \quad E = \mathrm{Ep}(2l, R), \quad \mathrm{St} = \mathrm{StSp}(2l, R), \quad \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(2l, R).$$

3. Стабильная унитарная группа. Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо с псевдоинволюцией, Λ — произвольный чётный форменный параметр,
$$G = \mathrm{U}(R,\, \Lambda) = \mathrm{U}(\infty,\, R,\, \Lambda), \quad E = \mathrm{EU}(R,\, \Lambda), \quad \mathrm{St} = \mathrm{StU}(R,\, \Lambda), \quad \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_2\mathrm{U}(R,\, \Lambda).$$

Если кольцо R не имеет полей вычетов из двух элементов, мы можем также рассмотреть $G = \mathrm{Sp}(6,\, R)$ и $G = \mathrm{O}(8,\, R)$.

Для всех перечисленных групп мы показываем, что St является универсальным центральным расширением E и при этом $\mathrm{K}_2 = \mathrm{H}_2(E,\, \mathbb{Z})$.

Этот результат устанавливает также совпадение определения K_2-функторов через группы Стейнберга и определением через $+$-конструкцию Квиллена. Взяв G как в одном из трёх случаев выше, мы получаем определение ортогональной, симплектической или унитарной K-теории Квиллена, как гомотопических групп $\mathrm{B}G^+$,
$$\mathrm{K}_i^Q(G) = \pi_i(\mathrm{B}G^+).$$

Из результатов настоящей диссертации следует, что $\mathrm{K}_2^Q(G) = \mathrm{K}_2$.

Кроме основных результатов, в настоящей диссертации также доказан локально-глобальный принцип Квиллена–Суслина для симплектической группы Стейнберга $\mathrm{StSp}(2l,\, R)$ над произвольным коммутативным кольцом R при $l \geqslant 3$, а также тривиальность мультипликатора Шура *нечётной* унитарной группы Стейнберга $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ над произвольном ассоциативным кольцом с псевдоинволюцией, при любом $n \geqslant 5$. Эти результаты опуюликованы в препринтах соискателя [18, 17].

Научная новизна

Все результаты настоящей диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть применены в структурной теории классических групп. Материалы диссертации могут быть использованы для проведения спецкурсов и спецсеминаров по темам «Алгебраическая K-теория» и «Классические группы над кольцами».

Апробация работы

По результатам диссертационной работы были сделаны доклады на конференциях «Algebraic groups and related structures» в честь 60-летия Николая Вавилова (Санкт-Петербург, 2012), «Non-stable classical Algebraic K-Theory» (Триест, 2012), «Classical Algebraic K-Theory» (Бомбей, 2013), «Ischia Group Theory 2014» (Искья, 2014), «K-Theory and related structures» (Пекин, 2014), а также на семинарах в лаборатории Чебышёва и на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева.

Публикации

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в печатных работах соискателя [14, 15, 16]. Все три из них вышли в журналах, входящих в список ВАК. Работа [16] написана в соавторстве с Сергеем Синчуком. Соискателю принадлежат результаты параграфов 3 и 4, а соавтору — идея доказательства и результаты параграфа 2, включённые в диссертацию в § 1.3.3 в качестве приложения. Кроме того, некоторые дополнительные результаты соискателя, включённые в диссертацию, опубликованы в препринтах [18, 17], приведённых в конце автореферата. Препринт [18] принят к печати в журнале, входящем в список ВАК.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав (первая глава содержит три раздела, вторая — также три раздела, а третья — четыре раздела) и списка литературы, содержащего 74 наименования. Объём диссертации — 94 страницы.

Содержание работы

Линейная группа Стейнберга

Классически известно, что над полем F любая матрица с определителем 1 приводится к единичной матрице при помощи элементарных преобразований над строками и столбцами, другими словами, что для любого $n \in \mathbb{N}$ специальная линейная группа $\mathrm{SL}(n, F)$ порождается матрицами элементарных преобразований $t_{ij}(a) = 1 + e_{ij}a$. Эти матрицы называются элементарными трансвекциями.

Роберт Стейнберг нашёл полную систему соотношений между элементарными трансвекциями над конечным полем F_q, то есть, нашёл задание группы $\mathrm{SL}(n, F_q)$ (как и других групп Шевалле) при помощи образующих и соотношений [11, 7].

Теорема (Стейнберг)**.** *Пусть F_q — конечное поле (или алгебраическое расширение конечного поля), $n \geqslant 3$. Тогда следующие три серии образуют полную систему соотношений между элементарными трансвекциями $t_{ij}(a)$:*

$$\begin{aligned}
&t_{ij}(a)t_{ij}(b) = t_{ij}(a+b),\\
&[t_{ij}(a),\, t_{kh}(b)] = 1 \quad \textit{при } k \neq j,\ h \neq i,\\
&[t_{ij}(a),\, t_{jk}(b)] = t_{ik}(ab).
\end{aligned}$$

Над произвольным полем F этих соотношений не хватает. Хидейа Мацумото рассматрел группу, заданную формальными образующими $x_{ij}(a)$ и «очевидными» соотношениями Стейнберга как выше [6, 7].

Определение. Для произвольного коммутативного кольца с единицей R и $n \geqslant 3$ абстрактная группа, заданная множеством формальных образующих

$$\{x_{ij}(a) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n, \ a \in R\}$$

и соотношениями

$$x_{ij}(a)x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b), \tag{S1}$$

$$[x_{ij}(a),\, x_{kh}(b)] = 1 \ \text{ при } k \neq j, \ h \neq i, \tag{S2}$$

$$[x_{ij}(a),\, x_{jk}(b)] = x_{ik}(ab). \tag{S3}$$

называется (линейной) группой Стейнберга и обозначается $\mathrm{St}(n,\, R)$.

Ясно, что соотношения Стейнберга выполняются для элементарных трансвекций над любым кольцом R, другими словами, корректно определено естественное отображение

$$\phi\colon\ \mathrm{St}(n,\, R) \to \mathrm{SL}(n,\, R).$$

Мацумото описал ядро этого отображения для произвольного поля $R = F$.

Если же рассматривать это отображение над произвольным коммутативным кольцом R, то у него кроме ядра появляется также и коядро, другими словами, не любая матрица с определителем 1 является произведением элементарных трансвекций.

Определение. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, тогда назовём элементарной группой $\mathrm{E}(n,\, R)$ подгруппу в $\mathrm{SL}(n,\, R)$, порождённую элементарными трансвекциями, $\mathrm{E}(n,\, R) = \langle t_{ij}(a) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n, \ a \in R\rangle \subseteq \mathrm{SL}(n,\, R)$.

Элементарная подгруппа $\mathrm{E}(n,\, R)$ — это в точности образ отображения $\phi\colon\ \mathrm{St}(n,\, R) \to \mathrm{SL}(n,\, R)$.

Андрей Суслин показал, что элементарная подгруппа нормальна в полной линейной группе [2].

Таким образом, $\operatorname{Coker}\phi = \mathrm{SL}(n,\, R)/\mathrm{E}(n,\, R)$ измеряет, сколько матриц с определителем 1 нельзя привести к единичной элементарными преобразованиями. Этот инвариант кольца R называется (нестабильным) SK_1-функтором. Фактор-группа $\mathrm{GL}(n,\, R)/\mathrm{E}(n,\, R)$ называется K_1-функтором.

Ядро ϕ показывает, сколько есть разных способов привести матрицу к единичной, если это можно сделать. $\operatorname{Ker}\phi$ называется (нестабильным) K_2-функтором.

Джон Милнор рассматривал предельные варианты определённых групп,

$$\mathrm{GL}(R) = \varinjlim \mathrm{GL}(n,\, R)$$

и также для $\mathrm{E}(R)$, $\mathrm{St}(R)$, K_1 и K_2, и показал, что в действительности $\mathrm{St}(R)$ является универсальным центральным расширением $\mathrm{E}(R)$, а $\mathrm{K}_2(R)$ является мультипликатором Шура элементарной группы,

$$\mathrm{K}_2(R) = \mathrm{H}_2(\mathrm{E}(R),\, \mathbb{Z}).$$

Точно такой же результат верен и для нестабильного K_2, однако доказательство оказывается значительно сложнее, чем стабильный аналог.

А именно, Вильберд ван дер Каллен получил следующий результат. Он показал, что для $n \geqslant 4$ группа Стейнберга $\mathrm{St}(n, R)$ изоморфна группе, заданной множеством образующих

$$\{X(u, v) \mid u \in \mathrm{Um}(n, R),\ v \in R^n,\ u^t v = 0\}$$

и следующими соотношениями:

$$X(u, v)X(u, w) = X(u, v + w), \tag{K1}$$

$$X(u, v)X(u', v')X(u, v)^{-1} = X((1 + uv^t)u', (1 - vu^t)v'). \tag{K2}$$

При этом для обычных образующих группы Стейнберга выполнено $x_{ij}(a) = X(e_i, e_j a)$.

Мы будем ссылаться на этот результат как на теорему о другом копредставлении группы Стейнберга. Через $\mathrm{Um}(n, R)$ в формулировке мы обозначили множество унимодулярных столбцов высоты n, то есть, таких, что их элементы порождают единичный идеал.

Из такого копредставления легко следует, что расширение $\phi\colon \mathrm{St}(n, R) \to \mathrm{E}(n, R)$ является центральным. Действительно, легко видеть, что $g\,X(u', v')g^{-1} = X(\phi(g)u', \phi(g)^* v')$, и если элемент $g \in \operatorname{Ker}\phi$, то $g\,X(u', v')g^{-1} = X(u', v')$.

Имея результат ван дер Каллена, можно точно так же, как и в стабильном случае, проверить, что это центральное расширение в действительности является универсальным и показать совпадение K_2 и мультипликатора Шура элементарной группы.

Туленбаев обобщил другое копредставление ван дер Каллена на относительные группы Стейнберга $\mathrm{St}(n, R, I)$, параметризуемые парой $I \trianglelefteq R$. С их помощью он доказал локально-глобальный принцип для групп Стейнберга при $n \geqslant 5$.

Основной результат первой главы настоящей диссертации — это обобщение теоремы Туленбаева на случай $n = 4$.

Для этого нам понадобится использовать вместо другого копредставления Туленбаева свой вариант копредставления для относительной группы Стейнберга.

Теорема (Туленбаев)**.** *Для расщепимого идеала I и $n \geqslant 4$ относительная группа Стейнберга*

$$\mathrm{St}(n, R, I) = \operatorname{Ker}\big(\mathrm{St}(n, R) \to \mathrm{St}(n, R/I)\big)$$

изоморфна группе, заданной следующим множеством образующих:

$$\{X(u, v) \mid u \in \mathrm{E}(n, R)e_1,\ v \in I^n,\ u^t v = 0\},$$

и следующими соотношениями между ними:

$$X(u, v)X(u, w) = X(u, v + w), \tag{T1}$$

$$X(u, v)X(u', v')X(u, v)^{-1} = X((1 + uv^t)u', (1 - vu^t)v'), \tag{T2}$$

$$X(ur + w, v) = X(u, vr)X(w, v), \ \text{ где } r \in R,\ (u, w) \in \mathrm{Um}_{n\times 2}(R). \tag{T3}$$

В формулировке теоремы мы обозначили через $\mathrm{Um}_{n\times 2}(R)$ множество $n\times 2$ *унимодулярных матриц*, то есть, таких матриц A, что существует $2\times n$ матрица B, такая что $BA = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

В обоих других копредставлениях ван дер Каллена и Туленбаева образующие параметризуются парой векторов, первый из которых «хороший» в некотором смысле (скажем, унимодулярный), а второй — произвольный. Для таких образующих легко сформулировать аддитивность по второму вектору, как K1 и T1, но не так просто формулировать аддитивность по первому, как T3.

В доказательстве локально-глобального принципа Туленбаев строит отображение из относительной группы Стейнберга в некоторую другую группу, то есть, проверяет соотношения T1–T3 для образов $X(u, v)$. Единственная причина, по которой доказательство Туленбаева требует условия $n \geqslant 5$, заключается в том, что он не может проверить «сложное» соотношение T3 при $n = 4$.

Для того, чтобы обобщить результат Туленбаева на случай $n = 4$, мы используем более симметричное копредставление с двумя типами образующих: $F(u, v)$, где u хороший, а v — произвольный, и $S(u, v)$, где u произвольный, а v — хороший. Образующие $F(u, v)$ будут аддитивны по второму вектору, в то время как образующие $S(u, v)$ будут аддитивны по первому. В случае, когда u и v оба хорошие, мы потребуем, чтобы образующие обоих типов были равны друг другу.

Определение. Для $I \trianglelefteq R$ и $n \geqslant 4$ определим группу $\mathrm{St}^*(n, R, I)$ при помощи множества образующих

$$\{F(u, v) \mid u \in \mathrm{E}(n, R)e_1,\ v \in I^n,\ u^t v = 0\} \cup \{S(u, v) \mid u \in I^n,\ v \in \mathrm{E}(n, R)e_1,\ u^t v = 0\}$$

и следующих соотношений между ними:

$$F(u, v)F(u, w) = F(u, v + w), \tag{R1}$$

$$S(u, v)S(w, v) = S(u + w, v), \tag{R2}$$

$$F(u, v)F(u', v')F(u, v)^{-1} = F((1 + uv^t)u', (1 - vu^t)^{-1}v'), \tag{R3}$$

$$F(u, va) = S(ua, v), \text{ где } a \in I,\ (u, v^t) = (Me_1, e_2^t M^{-1}),\ M \in \mathrm{E}(n, R). \tag{R4}$$

Мы показываем, что для расщепимого идеала $I \trianglelefteq R$ группа $\mathrm{St}^*(n, R, I)$ изоморфна $\mathrm{St}(n, R, I) = \mathrm{Ker}\,\big(\mathrm{St}(n, R) \twoheadrightarrow \mathrm{St}(n, R/I)\big)$.

Следующая теорема для $n \geqslant 5$ была доказана Туленбаевым в [3], а мы доказываем её для $n = 4$. Это основной результат первой главы настоящей диссертации.

Теорема 1 (Локально-глобальный принцип)**.** *Пусть R произвольное коммутативное кольцо (с 1), $n \geqslant 4$, и $g \in \mathrm{St}(n, R[t], tR[t])$. Этот элемент тривиален, $g = 1$, тогда и только тогда, когда все его максимальные локализации тривиальны, $g_{\mathfrak{m}} = 1 \in \mathrm{St}(n, R_{\mathfrak{m}}[t])$ для каждого максимального идеала $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$.*

Мы получили это утверждение, мотивированные результатами Сергея Синчука, которые сводили теорему центральности *ортогонального* K_2 и локально-глобального принципа для ортогональной группы Стейнберга к линейному случаю.

Напомним, что по каждой приведённой неприводимой системе корней Φ и коммутативному кольцу R можно построить расщепимую простую односвязную группу $\mathrm{G_{sc}}(\Phi, R)$, называемую группой Шевалле. Элементарная группа $\mathrm{E}(\Phi, R)$ — это по-определению подгруппа $\mathrm{G_{sc}}(\Phi, R)$ порождённая элементарными корневыми унипотентами $x_\alpha(\xi)$, $\xi \in R$, $\alpha \in \Phi$. Для системы корней Φ с простыми связями ранга $\geqslant 2$ группа Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, R)$ задаётся множеством образующих $y_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Phi$, $r \in R$, которые моделируют поведение унипотентов $x_\alpha(\xi)$, и соотношениями Стейнберга между ними:

$$\begin{aligned}
&y_\alpha(r)y_\alpha(s) = y_\alpha(r+s), && \\
&[y_\alpha(r), y_\beta(s)] = y_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta}\cdot rs), && \alpha,\beta\in\Phi,\ \alpha+\beta\in\Phi, \\
&[y_\alpha(r), y_\beta(s)] = 1, && \alpha,\beta\in\Phi,\ \alpha+\beta\notin\Phi\cup\{0\}.
\end{aligned}$$

Линейная группа Стейнберга $\mathrm{St}(l+1, R)$ является группой типа A_l, а ортогональная группа Стейнберга — это группа типа D_l.

Сергей Синчук показал, что для всех групп Шевалле имеют место следующие импликации, см. [10].

Предложение (Синчук). *Для любой неприводимой системы корней Φ с простыми связями и ранга $\geqslant 3$ верны импликации*

$$1. \implies 2. \implies 3.$$

1. *Для функтора $\mathrm{St}(\Phi, -)$ группы Стейнберга имеет место следующее свойство поднятия: для любого кольца R и любого ненильпотентного $a \in R$ существует отображение T_Φ, дополняющее диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{St}(\Phi,\ R\ltimes tR_a[t],\ tR_a[t]) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{St}(\Phi, R\ltimes tR_a[t]) \arrow[d, "\lambda_a^*"] \\
\mathrm{St}(\Phi,\ R_a[t],\ tR_a[t]) \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed, "T_\Phi"] & \mathrm{St}(\Phi, R_a[t])
\end{tikzcd}$$

   до коммутативной;

2. *для $\mathrm{St}(\Phi, -)$ верен локально-глобальный принцип, то есть, если $g \in \mathrm{St}(\Phi, R[t])$, удовлетворяющий условию $g(0) = 1 \in \mathrm{St}(\Phi, R)$, является нейтральным элементом $1 \in \mathrm{St}(\Phi, R[t])$ тогда и только тогда, когда его образы $\lambda_M^*(g) \in \mathrm{St}(\Phi, R_M[t])$ при отображении локализации $\lambda_\mathfrak{m}\colon R \to R_\mathfrak{m}$ тривиальны для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$;*

3. *$\mathrm{K}_2(\Phi, R)$ является центральной подгруппой $\mathrm{St}(\Phi, R)$.*

В действительности, Туленбаев в [3] строит отображение T_Φ из пункта 1 этого предложения для $\Phi = \mathsf{A}_l$, $l \geq 4$, а мы в первой главе настоящей диссертации строим поднятия

$$\mathrm{T}\colon\ \mathrm{St}^*(4,\ R_a[t],\ tR_a[t]) \to \mathrm{St}(4,\ R \ltimes tR_a[t])$$

пользуясь своим вариантом копредставления для относительной группы Стейнберга. Такое отображение T_Φ мы называем *поднятием Туленбаева.*

Сергей Синчук также показал, что относительная группа Стейнберга является амальгамированным произведением нескольких относительных групп Стейнберга меньшего ранга. Чуть точнее, он получил следующий результат [10, 16].

Теорема (Синчук)**.** *Пусть R — коммутативное кольцо, $I \subseteq R$ — расщепимый идеал, Φ — неприводимая система корней с простыми связями.*

1. *Для $s \in I$, $r \in R$ и $\alpha \in \Phi$ обозначим $z_\alpha(s,r) := x_\alpha(s)^{x_{-\alpha}(r)} \in \mathrm{St}(\Phi, R, I)$. Если Φ имеет хотя бы ранг 2, то $\mathrm{St}(\Phi, R, I)$ порождена множеством элементов $z_\alpha(s,r)$.*
2. *Обозначим через G_0 свободное произведение групп Стейнберга $\mathrm{St}(\Psi, R, I)$, где Ψ пробегает все подсистемы корней Φ, которые имеют тип A_3. Обозначим через $z^\Psi_\alpha(s,r)$ образ $z_\alpha(s,r) \in \mathrm{St}(\Psi, R, I)$ при каноническом вложении $\mathrm{St}(\Psi, R, I) \hookrightarrow G_0$. Обозначим теперь через G фактор-группу G_0 по модулю всех соотношений вида $z^{\Psi_1}_\alpha(s,r) = z^{\Psi_2}_\alpha(s,r)$, где $\alpha \in \Psi_1 \cap \Psi_2$, $s \in I$, $r \in I$ и обе Ψ_1 и Ψ_2 — это подсистемы типа A_3. Если Φ имеет ранг $\geqslant 3$, то каноническое отображение $G \to \mathrm{St}(\Phi, R, I)$ является изоморфизмом групп.*
3. *Если ранг Φ больше или равен 3, а T_Ψ — это поднятия Туленбаева для подсистем $\Psi \subseteq \Phi$ типа A_3, построенные в первой главе настоящей диссертации, то для всех Ψ_1, Ψ_2 типа A_3, содержащих общий корень α, выполнено $\mathrm{T}_{\Psi_1}(z_\alpha(s,r))^{\Psi_1} = \mathrm{T}_{\Psi_2}(z_\alpha(s,r))^{\Psi_2} \in \mathrm{St}(\Phi, R \ltimes tR_a[t])$. Другими словами, по универсальному свойству копредела, корректно определено отображение Туленбаева T_Φ, а значит выполнены все пункты предыдущего предложения.*

Сергей Синчук сначала использовал этот метод для доказательства центральности K_2 для групп типа E_l в [10]. При этом вместо построенного соискателем поднятия Туленбаева для групп типа A_3, он использовал отображение для групп типа A_4, построенное Туленбаевым. Однако для ортогональных групп, соответствующих типу D_l, уже не удавалось свести доказательство к подсистемам типа A_4, редукцию удавалось провести только к подсистемам ранга 3.

Совместно, Сергей Синчук и соискатель получили следующий результат.

Теорема 2 (Центральность ортогонального K_2)**.** *Пусть R — произвольное коммутативное кольцо. Тогда для $l \geqslant 4$ группа $\mathrm{K}_2(\mathsf{D}_l, R)$ является центральной подгруппой $\mathrm{St}(\mathsf{D}_l, R)$.*

В действительности, $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\mathsf{D}_l, R)$ является чётной *спинорной* группой $\mathrm{Spin}(2l,\ R)$, при этом, так как расширение ортогональной группы $\mathrm{SO}(2l,\ R)$ спинорной является центральным, то результат о центральности $\mathrm{K}_2(\mathsf{D}_l, R)$ влечёт также и результат о центральности ядра гомоморфизма $\mathrm{St}(\mathsf{D}_l, R) \to \mathrm{O}(2l,\ R)$.

Симплектическая группа Стейнберга

Основными результатами второй главы настоящей диссертации являются теоремы о другом копредставлении для симплектической группы Стейнберга, о центральности симплектического K_2 и локально-глобальном принципе для симплектической группы Стейнберга.

Как и в линейном случае, теорема о другом копредставлении следует плану доказательства нормальности элементарной подгруппы $\mathrm{Ep}(2l,\ R)$ в симплектической группе $\mathrm{Sp}(2l,\ R)$. Впервые этот факт был доказан Копейко в [1], и его доказательство работает также для случая $l = 2$. Мы приводим в начале главы доказательство, которое работает только для $l \geqslant 3$, однако гораздо проще, и поэтому мы следуем именно ему, работая с симплектической группой Стейнберга.

Аналогично линейному случаю, симплектическая группа Стейнберга моделирует поведение элементарных симплектических трансвекций.

Определение. *Симплектической группой Стейнберга* $\mathrm{StSp}(2l,\ R)$ называется группа, заданная формальными образующими $X_{ij}(a),\ i \neq j,\ a \in R$ и следующими соотношениями между ними:

$$X_{ij}(a) = X_{-j,-i}(-a\varepsilon_i\varepsilon_j), \tag{P0}$$

$$X_{ij}(a)X_{ij}(b) = X_{ij}(a+b), \tag{P1}$$

$$[X_{ij}(a),\ X_{hk}(b)] = 1, \text{ при } h \notin \{j,-i\},\ k \notin \{i,-j\}, \tag{P2}$$

$$[X_{ij}(a),\ X_{jk}(b)] = X_{ik}(ab), \text{ при } i \notin \{-j,-k\},\ j \neq -k, \tag{P3}$$

$$[X_{i,-i}(a),\ X_{-i,j}(b)] = X_{ij}(ab\varepsilon_i)X_{-j,j}(-ab^2), \tag{P4}$$

$$[X_{ij}(a),\ X_{j,-i}(b)] = X_{i,-i}(2ab\varepsilon_i). \tag{P5}$$

Симплектическая группа отвечает системе корней

$$C_l = \{\pm\chi_i \pm \chi_j,\ \pm 2\chi_i \mid i \neq j,\ \chi_i \text{ базисный вектор } \mathbb{R}^l\},$$

и определение выше совпадает с определением, данным в первой главе. Действительно, обозначив дополнительно $\chi_{-i} = -\chi_i$, получаем, что коротким корням соответствуют образующие $y_{\chi_i+\chi_j}(a) = X_{ij}(a)$, а длинным — $y_{2\chi_i}(a) = X_{i,-i}(a)$.

Определение. Рассмотрим ϕ как отображение из симплектической группы Стейнберга $\mathrm{StSp}(2l,\ R)$ в симплектическую группу $\mathrm{Sp}(2l,\ R)$. Тогда его коядро обозначается $\mathrm{K}_1\mathrm{Sp}(2l,\ R)$, а его ядро — $\mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(2l,\ R)$,

$$\mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(2l,\ R) \rightarrowtail \mathrm{StSp}(2l,\ R) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Sp}(2l,\ R) \twoheadrightarrow \mathrm{K}_1\mathrm{Sp}(2l,\ R),$$

и называются симплектическими K_1- и K_2-функторами.

Мы доказываем теорему о другом копредставлении для группы Стейнберга, а именно, что $\mathrm{StSp}(2l,\, R)$ может быть задана множеством образующих

$$\bigl\{X(u,\, v,\, a)\,\big|u,\, v\in V,\ u\in \mathrm{Ep}(2l,\, R)e_1,\ \langle u,\, v\rangle = 0,\ a\in R\bigr\}$$

и соотношениями

$$X(u,\, v,\, a)X(u,\, w,\, b) = X(u,\, v+w,\, a+b+\langle v,\, w\rangle), \tag{Q1}$$

$$X(u,\, va,\, 0) = X(v,\, ua,\, 0), \tag{Q2}$$

$$X(u',\, v',\, b)X(u,\, v,\, a)X(u',\, v',\, b)^{-1} = X(T(u',\, v',\, b)u,\, T(u',\, v',\, b)v,\, a). \tag{Q3}$$

Здесь $T(u,\, v,\, a)$ обозначают элементы $\mathrm{Ep}(2l,\, R)$, действующие по правилу

$$T(u,\, v,\, a)w = w + v\langle u,\, w\rangle + u(\langle v,\, w\rangle + a\langle u,\, w\rangle).$$

При этом гомоморфизм ϕ переводит $X(u,\, v,\, a)$ в $T(u,\, v,\, a)$.

Как и в случае полной линейной группы, из такого копредставления легко следует центральность подгруппы $\mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(2l,\, R)$: если $\phi(g) = 1$ для некоторого $g\in \mathrm{StSp}(2l,\, R)$, то

$$g\, X(u,\, v,\, a)g^{-1} = X(\phi(g)u,\, \phi(g)v,\, a) = X(u,\, v,\, a).$$

После этого мы доказываем локально-глобальный принцип Квиллена–Суслина. Общий план доказательства такой же, как в линейном случае, в частности, нам снова понадобилось найти другое копредставление для *относительной* симплектической группы Стейнберга и построить поднятие Туленбаева T. Приведём точную формулировку теоремы о локально-глобальном принципе.

Теорема 3 (Локально-глобальный принцип). *Пусть R — произвольное коммутативное кольцо, $l \geqslant 3$, и $g \in \mathrm{StSp}(2l,\, R[t],\, tR[t])$. Тогда $g = 1$ (соотв., лежит в образе $\mathrm{StSp}(2l-2,\, R[t])$) тогда и только тогда, когда $g_{\mathfrak{m}} = 1 \in \mathrm{StSp}(2l,\, R_{\mathfrak{m}}[t])$ (соотв., лежит в образе $\mathrm{StSp}(2l-2,\, R_{\mathfrak{m}}[t])$) для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ в R.*

Унитарная группа Стейнберга

В третьей главе мы рассматриваем группы, определённые над *некоммутативными* кольцами с псевдоинволюцией. Понятие нечётной унитарной группы было введено Виктором Петровым в [8] как единообразное обобщение всех классических групп. Он пишет, что называние «не обязательно чётная» было бы более точным, но звучит неуклюже.

Классически, унитарную группу определяют как группу преобразований, сохраняющих (анти) эрмитову и квадратичную форму. Петров в [8] и мы вслед за ним используем более экономный язык групп Гейзенберга и нечётных форменных параметров.

В гиперболической нечётной унитарной группе $\mathrm{U}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ определена элементарная подгруппа $\mathrm{EU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$, и в [8] доказано, что эта подгруппа нормальна при $n \geqslant 3$. Унитарная группа Стейнберга моделирует поведение элементарных унитарных трансвекций.

Определение. Нечётной унитарной группой Стейнберга $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ называется группа, заданная множеством образующих

$$\{X_{ij}(a) \mid i,\, j \in \Omega,\ i \notin \{\pm j\},\ a \in R\} \cup \{X_i(\xi) \mid i \in \Omega,\ \xi \in \mathfrak{L}\}$$

и соотношениями

$$X_{ij}(a) = X_{-j,-i}(\varepsilon_{-j}\overline{a}\varepsilon_i), \tag{U0}$$

$$X_{ij}(a)X_{ij}(b) = X_{ij}(a+b), \tag{U1}$$

$$X_i(\xi)X_i(\zeta) = X_i(\xi \dotplus \zeta), \tag{U2}$$

$$[X_{ij}(a),\, X_{hk}(b)] = 1,\ \text{при } h \notin \{j, -i\},\ k \notin \{i, -j\}, \tag{U3}$$

$$[X_i(\xi),\, X_{jk}(a)] = 1,\ \text{при } j \neq -i,\ k \neq i, \tag{U4}$$

$$[X_{ij}(a),\, X_{jk}(b)] = X_{ik}(ab), \tag{U5}$$

$$[X_i(u,a),\, X_j(v,b)] = X_{i,-j}(\varepsilon_i B(u,\, v)),\ \text{при } i \notin \{\pm j\}, \tag{U6}$$

$$[X_i(u,a),\, X_i(v,b)] = X_i(0, B(u,\, v) - B(v,\, u)), \tag{U7}$$

$$[X_i(u,\, a),\, X_{-i,j}(b)] = X_{ij}(\varepsilon_i ab)X_{-j}((u, -\overline{a}) \leftharpoondown b), \tag{U8}$$

$$[X_{ij}(a),\, X_{j,-i}(b)] = X_i(0, -\varepsilon_{-i}\overline{1}ab + \overline{b}\,\overline{1}^{-1}\overline{a}\varepsilon_i). \tag{U9}$$

Унитарный K_2-функтор $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ определяется как ядро естественного эпиморфизма из группы Стейнберга $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ в $\mathrm{EU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$.

Основным результатом третьей главы является доказательство центральной замкнутости унитарной группы Стейнберга, то есть, тривиальности её мультипликатора Шура.

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ *— это нечётная унитарная группа Стейнберга, где* $n \geqslant 5$ *или* $n = \infty$. *Тогда* $\mathrm{H}_2(\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L}),\, \mathbb{Z}) = 1$.

Кроме того, мы получаем, что предельная унитарная группа Стейнберга является центральным расширением предельной элементарной унитарной группы.

Список цитируемой литературы:

[1] В. Копейко, “Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов”, *Матем. сб.*, **106 (148)**:1 (5) (1978), 94–107.

[2] А. Суслин, “О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов”, *Изв. АН СССР*, **41**:2 (1977), 235–252.

[3] М. Туленбаев, “Группа Стейнберга кольца многочленов”, *Матем. сб.*, **117 (159)**:1 (1982), 131–144.

[4] A. Bak, *The stable structure of quadratic modules*, Thesis, Columbia University, 1969.

[5] W. van der Kallen, “Another presentation for Steinberg groups”, *Indag. Math.*, **39**:4 (1977), 304–312.

[6] H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, University of Paris, 1969.

[7] J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Princeton University Press, 1971.

[8] V. Petrov, “Odd Unitary Groups”, *Journal of Mathematical Sciences*, **130**:3 (2003), 4752-4766.

[9] D. Quillen, “Projective modules over polynomial rings”, *Invent. Math.*, **36** (1976), 167–171.

[10] S. Sinchuk, “On centrality of K_2 for Chevalley groups of type E_l”, *J. Pure Appl. Algebra*, **220**:2 (2016), 857–875.

[11] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, 1967.

[12] A. Stepanov, N. Vavilov, “Decomposition of transvections: a theme with variations”, *K-Theory*, **19** (2000), 109–153.

[13] M. Wendt, “On homotopy invariance for homology of rank two groups”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **216**:10 (2012), 2291–2301.

Статьи сосикателя по теме диссертации, опубликованные в журналах, рекомендованных ВАК:

[14] А. Лавренов, “Центральная замкнутость унитарной группы Стейнберга”, *Алгебра и анализ*, **24**:5 (2012), 124–140.

[15] A. Lavrenov, “Another presentation for symplectic Steinberg groups”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **219**:9 (2015).

[16] A. Lavrenov, S. Sinchuk, “On centrality of even orthogonal K_2”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **221**:5 (2017), 1134–1145.

Препринты соискателя по теме диссертации:

[17] A. Lavrenov, “On odd unitary Steinberg group”, arXiv:1303.6318.

[18] A. Lavrenov, “A local-global principle for symplectic K_2”, arXiv:1606.06548.