Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Лавренов Андрей Валентинович

Строение групп Стейнберга

Специальность 01.01.06 —
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Вавилов Н. А.

Санкт-Петербург — 2018

Оглавление

Введение **4**

1 Линейная группа Стейнберга **11**

1.1 Классические результаты 11

1.1.1 Соотношения Стейнберга 11

1.1.2 Центральные расширения 13

1.1.3 Другое копредставление 17

1.2 Относительная группа Стейнберга 18

1.2.1 Определение Туленбаева 18

1.2.2 Определение в ранге три 20

1.2.3 Совпадение определений 22

1.3 Локально-глобальный принцип 22

1.3.1 Сведение локально-глобального принципа к лемме о поднятии 22

1.3.2 Лемма о поднятии Туленбаева 25

1.3.3 Приложение: центральность ортогонального K_2 27

2 Симплектическая группа Стейнберга **30**

2.1 Симплектическая группа 30

2.1.1 Короткое доказательство нормальности Ep 30

2.1.2 Определение симплектической группы Стейнберга 34

2.2 Другое копредставление 37

2.2.1 Формулировка результатов и план доказательства 37

2.2.2 Унипотентные радикалы в группах Стейнберга 39

2.2.3 Определение ESD-образующих для векторов, имеющих нули 42

2.2.4 Элементы длиннокорневого типа 46

2.2.5 Доказательство теоремы о центральности 49

2.2.6 Соотношения между ESD-образующими 52

2.2.7 Симплектическая группа ван дер Каллена 56

2.3 Локально-глобальный принцип 59

2.3.1 Другое копредставление для относительной группы 59

2.3.2 Сведение к лемме о поднятии 61

2.3.3 Доказательство леммы о поднятии . . . 64

3 Унитарная группа Стейнберга **78**

3.1 Нечётная унитарная группа . . . 78

3.1.1 Псевдоинволюция и нечётный форменный параметр . . . 78

3.1.2 Определение нечётной унитарной группы . . . 79

3.1.3 Нечётная унитарная группа Стейнберга . . . 81

3.2 Центральная замкнутость унитарной группы Стейнберга . . . 82

3.2.1 План доказательства . . . 82

3.2.2 Построение сечения: корректность . . . 83

3.2.3 Построение сечения: гомоморфность . . . 86

3.3 Центральность предельного унитарного K_2 . . . 88

3.4 Приложения результатов диссертации . . . 89

Заключение **92**

Список литературы . . . 92

Введение

Актуальность темы, степень ее разработанности

Настоящяя диссертация посвящена группам Стейнберга классических групп: линейной, ортогональной, симплектической и унитарной над произвольными кольцами.

Возникновение теории классических групп датируют второй половины XIX века и связывают с именами Жордана, Фробениуса, Диксона. Они рассматривали классические группы над полем комплексных чисел и над конечными полями. Витт начал изучать ортогональные группы над произвольными полями в связи с теорией квадратичных форм. Сам термин «классическая группа» принадлежит Вейлю, который рассматривал эти группы над (произвольными) полями, в частности, развивал теорию представлений классических групп. Дьедонне перенёс многие результаты на случай тел.

Изложение теории классических групп над полями (и телами) можно найти в [5]. Одним из основных её результатов являются теоремы о порождении классических групп элементами простого вида: отражениями или трансвекциями. Например, элементы специальной линейной группы над полем можно привести к единичной матрице элементарными преобразованиями.

Во второй половине XX века начинается активное изучение классических групп над произвольными кольцами. В теории арифметических групп играют огромную роль классические группы над кольцом целых и над кольцом аделей глобального поля. В топологии Уайтхед вводит инвариант кручения, который не является числом, как кручение Райдемайстера, а принимает значение в *группе Уайтхеда* $\mathrm{Wh}(\pi_1)$, построенной по полной линейной группе группового кольца $\mathbb{Z}\pi_1$ (здесь π_1 — это фундаментальная группа) [74]. Конструкция Уайтхеда в действительности формализует тот факт, что не любая матрица из $\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{Z}\pi_1)$ приводится к единичной элементарными преобразованиями (при абелевой π_1). Сейчас его работы на эту тему считаются одним из истоков алгебраической K-теории.

Введённая Уайтхедом группа вскоре нашла приложения в топологии. Милнор использовал её для опровержения Основной гипотезы комбинаторной топологии, «Hauptvermutung», утверждающей, что любые две триангуляции одного пространства допускают изоморфные подразбиения [46]. Вскоре Барден, Мазур и Столлингс использовали кручение Уайтхеда в теории кобордизмов.

Хайман Басс [28], интерпретируя идеи Уайтхеда и Милнора, дал определение $\mathrm{K}_1(n,\ R)$ как фактор-группы $\mathrm{GL}(n,\,R)$ по её подгруппе, порождённой элементарными матрицами, $\mathrm{E}(n,\,R)$. В этих терминах можно описать группу Уайтхеда как $\mathrm{Wh}(\pi_1) = \mathrm{K}_1(n,\,\mathbb{Z}\pi_1)/\pm\pi_1$.

Группа K_1 оказалась напрямую связана с проблемой конгруэнц подгрупп: ответ на конгруэнц-проблему для $\mathrm{SL}_n(R)$ положителен в точности при тривиальности всех относительных K_1 функторов. Басс, Милнор и Серр привели окончательное решение этой проблемы для произвольного глобального поля в [29]. В этой статье была найдена неожиданная взаимосвязь между строением относительных групп $\mathrm{K}_1(R,\,I)$ и законами взаимности, что привлекло внимание многих людей, в частности, Хидейи Мацумото и Джона Тейта.

Конгруэнц-проблема и теория перестроек в дифференциальной топологии привели к идее заменить линейную группу в определении K_1 на другие классические группы и появлению L-теории.

Хотя простые образующие классических групп над полями были хорошо известны ещё в XIX веке, определяющие *соотношения* между ними были впервые найдены только в 1962 году Робертом Стейнбергом [56], причём сразу в контексте (односвязных) групп Шевалле. Кроме того, Стейнберг задал образующими и соотношениями *универсальные центральные расширения* групп Шевалле (то есть, их расширения при помощи мультипликаторов Шура), которые мы сейчас называем *группами Стейнберга*. Например, для линейной группы $\mathrm{SL}(n,\,\mathbb{F}_q)$ образующими выступают трансвекции, а элементы этой группы можно представлять как цепочки элементарных преобразований, приводящих матрицу к единичной. Тогда соотношения в линейной группе Стейнберга описывают элементарные перестройки, которыми можно переходить к новой цепочке. Оказывается, что над конечным полем любые два способа привести матрицу к единичной получаются друг из друга последовательностью элементарных перестроек Стейнберга. Однако для бесконечного поля это уже не так. Если же рассматривать вместо поля произвольное (коммутативное) кольцо, то у отображения $\mathrm{St}(n,\,R) \to \mathrm{SL}(n,\,R)$ из линейной группы Стейнберга в специальную линейную группу появляется не только нетривиальное ядро, но также и коядро $\mathrm{SL}(n,\,R)/\mathrm{E}(n,\,R)$. Вслед за работами Стейнберга, Джон Милнор определил алгебраический K_2-функтор как ядро расширения $\mathrm{St}(n,\,R) \to \mathrm{E}(n,\,R)$, см. [47].

Вскоре Хидейа Мацумото описал ядра отображений из групп Стейнберга в группы Шевалле над произвольным полем при помощи образующих и соотношений [45]. Ульф Реманн обобщил этот результат на тела [51].

Джон Тейт рассматривал линейный K_2 и построил гомоморфизмы норменных вычетов из $\mathrm{K}_2(F)$ (для каждого n, где $1/n \in F$). Если F содержит n-ый примитивный корень из 1, то эти гомоморфизмы действует в группу Брауэра; вообще говоря, они действуют в некоторую группу когомологий Галуа. Тейт показал, что для любого глобального поля $\mathrm{K}_2(F)/n \to \mathrm{H}^2(F,\,\mu_n^{\otimes 2})$ является изоморфизмом [66]. Позже Меркурьев и Суслин показали, что этот гомоморфизм является изоморфизмом для любого поля [10, 11].

Для колец, не являющихся полями, прогресс шёл медленнее. Важным отличием случая поля является тот факт, что группы K_1 и K_2 (линейные или эрмитовы) не зависят от ранга группы, по которой они построены, например,

$$\operatorname{Ker}\big(\mathrm{St}(n,\,F)\to \mathrm{E}(n,\,F)\big)\cong \operatorname{Ker}\big(\mathrm{St}(n+1,\,F)\to \mathrm{E}(n+1,\,F)\big).$$

Однако для произвольных колец это, вообще говоря, не так. Басс показал в [28], что отображение $\mathrm{K}_1(n,\,R)\to \mathrm{K}_1(n+1,\,R)$ является сюръективным, если R — это коммутативное нётерово кольцо размерности Крулля $\leqslant n-1$. Позже, в [29] было показано, что это отображение инъективно при $\dim R\leqslant n-2$. Басс и его ученики, Майк Стайн и Энтони Бак, занимались строением классических групп и групп Шевалле «на стабильном уровне», то есть, когда K-функторы перестают зависеть от ранга группы, по которой они построены. Также, они получили более слабые условия, чем размерность Крулля, на кольца, при которых наступает стабилизация, и перенесли результаты о стабилизации на K-функторы, посторенные по классическим группам и группам Шевалле [22, 55].

Даже такой факт, как нормальность элементарной группы $\mathrm{E}(n,\,R)$ в $\mathrm{GL}(n,\,R)$ долгое время был известен только на стабильном уровне. Новый этап в развитии структурной теории классических групп начался с *теоремы нормальности* Суслина о том, что этот факт верен для любого коммутативного кольца R и натурального $n\geqslant 3$ [18]. Позже эта техника была развита Васерштейном, Голубчиком, Михалёвым, а также перенесена на классические группы и группы Шевалле в работах Копейко, Таддеи, Абе и других [8, 19, 63, 62, 64, 68, 60], а на унитарные группы — Баком, Вавиловым, Васерштейном и другими [20, 67, 1, 3, 2, 16, 42, 43, 69, 70, 12, 23, 71, 4, 32, 31, 33, 26, 48, 25, 59]. См. также дальнейшие обобщения в [27, 49, 15, 13, 58]. Огромную роль в этих работах играет техника редукции основного кольца к его локализациям.

Теорема нормальности Суслина утверждает, что $\mathrm{K}_1(n,\,R)$ является группой, а не просто множеством с отмеченной точкой. Вообще говоря, определение элементарных преобразований зависит от выбора базиса свободного модуля, но теорема нормальности в точности показывает, что порождённая ими элементарная группа не зависит от выбора базиса. Более того, при доказательстве Суслин рассматривал «бескоординатные версии» элементарных преобразований, и проверил, что порождённая ими группа совпадает с $\mathrm{E}(n,\,R)$.

Вильберд ван дер Каллен перенёс рассуждение Суслина на уровень (линейной) группы Стейнберга и доказал, что $\mathrm{K}_2(n,\,R)$ является центральной подгруппой в группе Стейнберга, в частности, абелевой группой [34]. В своём доказательстве он получил задание группы Стейнберга «бескоординатными» образующими и соотношениями, которое он назвал *другим копредставлением*. Вслед за ним, мы используем этот термин в настоящей диссертации. Кроме того, его результат показывал, что, как и в случае поля, линейная группа Стейнберга $\mathrm{St}(n,\,R)$ является универсальным центральным расширением элементарной подгруппы $\mathrm{E}(n,\,R)$, а $\mathrm{K}_2(n,\,R)$ — её мультипликатором Шура для любого коммутативного кольца R. Вскоре ученик Суслина, Марат Туленбаев, обобщил результат ван дер Каллена на (некоммутативные) конечномерные алгебры над коммутативными кольцами [20]. Однако аналог теоремы центральности для других классических групп впервые появился только в работе соискателя в 2015 году [39].

Суслин дал доказательство нормальности элементарной группы в своей работе [17] с положительным решением проблемы Серра. Вскоре он доказал также K_1-аналог проблемы Серра, а именно, что любая матрица с определителем 1 над кольцом многочленов над полем $F[t_1, \ldots, t_m]$ приводится к единичной элементарными преобразованиями [18]. Для доказательства своего K_1-аналога, Суслин использовал утверждение об элементарных матрицах, аналогичное «локально-глобальной лемме Квиллена» о свободных модулях [50], а именно, что обратимая матрица $g(t)$ над кольцом $R[t]$, удовлетворяющая $g(0) = 1$, является элементарной матрицей в том и только том случае, если все её локализации во всех максимальных идеалах кольца R элементарны. Суслин называет это утверждение теоремой Квиллена, а мы в настоящей дисертации будем называть ряд утверждений такого типа *локально-глобальным принципом Квиллена–Суслина*. Позже Марат Туленбаев доказал локально-глобальный принцип для линейной группы Стейнберга $\mathrm{St}(n,\, R)$ и получил с его помощью K_2-аналог проблемы Серра [21].

Наконец, незадолго до результатов Суслина и ван дер Каллена, появилось определение Квиллена высшей K-теории как гомотопических групп $\pi_n \mathrm{BGL}(R)^+$. Его $+$-конструкцию можно было применить к любой классической группе или группе Шевалле, а не только $\mathrm{GL}(R)$, при этом, по его определению, K_2-функтор всегда оказывался мультипликатором Шура элементарной подгруппы. Таким образом, новое определение обобщило классические K_2-функторы для линейной группы (благодаря результатам ван дер Каллена и Туленбаева), а также для всех классических групп и групп Шевалле *на стабильном уровне*.

Цели и задачи, научная новизна

Сформулируем теперь основные результаты настоящей диссертации. Её первая глава посвящена линейной группе Стейнберга и линейному K_2, а также приложениям к случаю ортогональной группы. Вторая глава посвящена симплектической группе. В третьей главе мы работаем с *нечётными унитарными группами*, которые обобщают все классические группы.

Основной результат первой главы — это доказательство локально-глобального принципа для группы Стейнберга $\mathrm{St}(4,\, R)$. Туленбаев получил этот результат только для $\mathrm{St}(n,\, R)$ при $n \geqslant 5$. Соискатель рассматривал случай $n = 4$, мотивированный результатами Сергея Синчука [52, 14]. А именно, Синчук показал, что локально-глобальный принцип для *чётной ортогональной* группы Стейнберга и теорема о центральности ортогонального K_2 в действительности сводятся к случаю *линейной* группы $\mathrm{St}(4,\, R)$ (но не $\mathrm{St}(5,\, R)$. Совместно, соискатель и Сергей Синчук опубликовали результаты первой главы настоящей диссертации и теорему о центральности ортогонального K_2 в [41]. Мы доказываем последнюю в конце Главы 1 как приложение полученных результатов.

Основной результат второй главы — это другое копредставление для симплектической группы Стейнберга $\mathrm{StSp}(2l,\, R)$ (в смысле ван дер Каллена). С его помощью мы доказываем теорему центральности симплектического K_2Sp и теорему о локально-глобальном принципе Квиллена–Суслина для симплектической группы Стейнберга. Результаты получены в полной общности: здесь R — произвольное коммутативное кольцо, $l \geq 3$. Как показано в работе Матиаса Вендта [73], при $l = 2$ ни одна из этих двух теорем не имеет места.

В третьей главе мы работаем в гораздо более широком контексте нечётных унитарных групп над *некоммутативными* кольцами, определённых Виктором Петровым как одновременное обобщение всех классических групп: линейной, симплектической, чётной и нечётной ортогональной, а также унитарных групп в смысле Бака [22] и некоторых других, см. [49]. Основным результатом Главы 3 является тривиальность мультипликатора Шура нечётной унитарной группы Стейнберга $StU(2n, R, \mathfrak{L})$ над произвольным кольцом, при любом $n \geq 5$. Для линейной группы аналогичный результат принадлежит Милнору [57, 47], для групп Шевалле — Майку Стайну [53], для чётных унитарных групп Бака этот факт был известен для предельной группы [22] и над коммутативными кольцами [30]. См. также [24, 35, 36, 6, 7, 54, 65]. В работе соискателя [9] доказана тривиальность мультипликатора Шура *чётной* унитарной группы Стейнберга $StU(2n, R, \Lambda)$ над произвольным ассоциативным кольцом с инволюцией, при любом $n \geq 5$. В настоящей диссертации мы также приводим обобщение этого факта на случай нечётных унитарных групп Петрова, этот результат можно найти в препринте соискателя [38]. Как следствие этих результатов, мы получаем, что *стабильный* нечётный унитарный K_2 совпадает с мультипликатором Шура стабильной нечётной унитарной элементарной группы. Для нестабильных групп мы не можем доказать этот факт, так как не можем доказать центральность расширения элементарной подгруппы при помощи группы Стейнберга: на настоящий момент это неизвестно даже в частном случае нечётной *ортогональной* группы.

В качестве следствия результатов настоящей диссертации мы также получаем совпадение (эрмитовых) K_2-функторов, определённых при помощи групп Стейнберга и определённых через $+$-конструкцию Квиллена в трёх следующих ситуациях: чётная ортогональная группа, симплектическая группа, стабильная нечётная унитарная группа.

Методология и методы диссертационного исследования

В первой главе мы используем технику другого копредставления ван дер Каллена и Туленбаева. Доказательство локально-глобального принципа следует тому же плану, что и в статье Туленбаева [21]. Главная идея, позволившая обобщить это рассуждение на случай $n = 4$, заключается в использовании нового варианта другого копредставления для *относительной* группы Стейнберга.

Результаты второй главы с технической точки зрения — это, главным образом, разработка симплектических аналогов методов ван дер Каллена из [34], соединённая с полезным наблюдением, что элементарная симплектическая группа порождается длиннокорневыми трансвекциями (в отличие от элементарной ортогональной или унитарной группы). С другой стороны, именно наличие корней разной длины является главным техническим препятствием, отличающим симплектический случай от линейного.

Используемая в третьей главе техника восходит к работам Стейнберга, а общий план доказательства следует исходному рассуждению Милнора, см. [57, 47]. Однако в контексте нечётных унитарных групп дополнительная сложность состоит в некоммутативности нечётного форменного параметра, и необходимости работать с коммутационной формулой Шевалле, отвечающей системе корней BC_l, что потребовало вести рассуждение в два этапа: сначала для коротких корней, а затем для длинных и *экстракоротких*, а также более аккуратного использования коммутаторного исчисления.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказательство локально-глобальный принципа Квиллена–Суслина для линейной группы Стейнберга $\mathrm{St}(4, R)$ для произвольного коммутативного кольца R.

2. Доказательство теоремы центральности симплектического $\mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(2l, R)$, построение другого копредставления для симплектической группы Стейнберга $\mathrm{StSp}(2l, R)$ для произвольного коммутативного кольца R и $l \geq 3$.

3. Доказательство тривиальности мультипликатора Шура чётной унитарной группы Стейнберга $\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda)$ над произвольном ассоциативным кольцом с инволюцией R, для произвольного чётного форменного параметра Λ и $n \geq 5$.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть применены в структурной теории классических групп. Материалы диссертации могут быть использованы для проведения спецкурсов и спецсеминаров по темам «Алгебраическая K-теория» и «Классические группы над кольцами».

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в печатных работах соискателя [9, 39, 41]. Все три из них вышли в журналах, входящих в список ВАК. Работа [41] написана в соавторстве с Сергеем Синчуком. Соискателю принадлежат результаты параграфов 3 и 4, а соавтору — идея доказательства и результаты параграфа 2, включённые в диссертацию в § 1.3.3 в качестве приложения. Кроме того, некоторые результаты соискателя, также включённые в диссертацию, опубликованы в препринтах [38, 40]. Препринт принят к печати в журнал Documenta Mathematica, также входящий в список ВАК.

По результатам диссертационной работы были сделаны доклады на конференциях «Algebraic groups and related structures» в честь 60-летия Николая Вавилова (Санкт-Петербург, 2012), «Non-stable classical Algebraic K-Theory» (Триест, 2012), «Classical Algebraic K-Theory» (Бомбей, 2013), «Ischia Group Theory 2014» (Искья, 2014), «K-Theory and related structures» (Пекин, 2014), а также на семинарах в лаборатории Чебышёва и на Санкт-Петербургском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева.

Глава 1

Линейная группа Стейнберга

1.1 Классические результаты

1.1.1 Соотношения Стейнберга

Классически известно, что над полем F любая матрица с определителем 1 приводится к единичной матрице при помощи элементарных преобразований над строками и столбцами, другими словами, что для любого $n \in \mathbb{N}$ специальная линейная группа $\mathrm{SL}(n,\, F)$ порождается матрицами элементарных преобразований $t_{ij}(a) = 1 + e_{ij}a$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $a \in F$, через e_{ij} мы обозначили матричные единицы, а через 1 — единичную матрицу. Матрицы $t_{ij}(a)$ называются элементарными трансвекциями.

Роберт Стейнберг нашёл полную систему соотношений между элементарными трансвекциями над конечным полем F_q, то есть, нашёл задание группы $\mathrm{SL}(n,\, F_q)$ при помощи образующих и соотношений [57, 47].

Теорема (Стейнберг)**.** *Пусть F_q — конечное поле (или алгебраическое расширение конечного поля), $n \geqslant 3$. Тогда следующие три серии образуют полную систему соотношений между элементарными трансвекциями $t_{ij}(a)$:*

$$
\begin{aligned}
&t_{ij}(a)t_{ij}(b) = t_{ij}(a+b),\\
&[t_{ij}(a),\, t_{kh}(b)] = 1 \quad \text{при } k \neq j,\ h \neq i,\\
&[t_{ij}(a),\, t_{jk}(b)] = t_{ik}(ab).
\end{aligned}
$$

В настоящей работе мы всюду понимаем под коммутатором x и y элемент

$$[x,\, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Над произвольным полем F этих соотношений уже не хватает. Недостающие соотношения нашёл Мацумото [57, 47]. Чуть точнее, он рассматривал группу, заданную формальными образующими $x_{ij}(a)$ и “очевидными” соотношениями, найденными Стейнбергом. Такую группу называют группой Стейнберга.

Определение. Для произвольного коммутативного кольца с единицей R и $n \geqslant 3$ абстрактная группа, заданная множеством формальных образующих

$$\{x_{ij}(a) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ a \in R\}$$

и соотношений

$$x_{ij}(a)x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b), \tag{S1}$$

$$[x_{ij}(a),\, x_{kh}(b)] = 1 \ \text{ при } k \neq j,\ h \neq i, \tag{S2}$$

$$[x_{ij}(a),\, x_{jk}(b)] = x_{ik}(ab). \tag{S3}$$

называется группой Стейнберга и обозначается $\mathrm{St}(n,\, R)$.

Ясно, что соотношения Стейнберга выполняются для элементарных трансвекций над любым кольцом, другими словами, для любого коммутативного R корректно определено естественное отображение

$$\phi\colon\ \mathrm{St}(n,\, R) \to \mathrm{SL}(n,\, R).$$

Мацумото в действительности описал ядро этого отображения для любого поля $R = F$.

Если же рассматривать это отображение над произвольным коммутативным кольцом R, то у него кроме ядра появляется также и коядро, другими словами, не любая матрица с определителем 1 является произведением элементарных трансвекций.

Определение. Пусть R — коммутативное кольцо, назовём элементарной группой $\mathrm{E}(n,\, R)$ подгруппу в $\mathrm{SL}(n,\, R)$, порождённую элементарными трансвекциями, $\mathrm{E}(n,\, R) = \langle t_{ij}(a) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ a \in R\rangle \subseteq \mathrm{SL}(n,\, R)$.

Элементарная подгруппа $\mathrm{E}(n,\, R)$ — это в точности образ отображения $\phi\colon\ \mathrm{St}(n,\, R) \to \mathrm{SL}(n,\, R)$.

Андрей Суслин показал, что элементарная подгруппа нормальна в полной линейной группе [18].

Таким образом, $\mathrm{Coker}\,\phi = \mathrm{SL}(n,\, R)/\mathrm{E}(n,\, R)$ измеряет, сколько матриц с определителем 1 нельзя привести к единичной элементарными преобразованиями. Этот инвариант кольца R называется (нестабильным) SK_1-функтором. Фактор-группа $\mathrm{GL}(n,\, R)/\mathrm{E}(n,\, R)$ называется K_1-функтором.

А ядро ϕ показывает, сколько есть различных способов привести матрицу к единичной, когда это можно сделать. $\mathrm{Ker}\,\phi$ называется (нестабильным) K_2-функтором.

Определение. Введём обозначения $\mathrm{K}_1(n,\, R) = \mathrm{GL}(n,\, R)/\mathrm{E}(n,\, R)$, $\mathrm{SK}_1(n,\, R) = \mathrm{Coker}\,\phi$ и $\mathrm{K}_2(n,\, R) = \mathrm{Ker}\,\phi$.

Кроме того, мы можем рассматривать предельную (или стабильную) полную линейную группу $\mathrm{GL}(R)$. Мы можем вложить $\mathrm{GL}(n,\, R)$ в $\mathrm{GL}(n+1,\, R)$, сопоставляя матрице g размера

$n\times n$ блочную матрицу $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ размера $(n+1)\times(n+1)$. Тогда $\mathrm{GL}(R) = \varinjlim \mathrm{GL}(n,\, R)$ — это копредел полных линейных групп при последовательности таких отображениях. Аналогично определяются стабильные группы $\mathrm{SL}(R)$, $\mathrm{E}(R)$, $\mathrm{St}(R)$ и стабильные K-функторы $\mathrm{K}_1(R)$, $\mathrm{SK}_1(R)$ и $\mathrm{K}_2(R)$.

В следующем пункте мы перейдём к гомологической интерпретации K_2-функтора.

1.1.2 Центральные расширения

Милнор показал, что для произвольного кольца R группа $\mathrm{K}_2(R)$ связана с гомологиями элементарной группы $\mathrm{E}(R)$. Чтобы сформулировать точный результат Милнора и изложить, в чём состоит упомянутая связь, нам будет удобен развитый в этом пункте язык центральных расширений.

Насколько известно автору, ниже приведено самое краткое изложение необходимых сведений о центральных расширениях, поэтому мы приводим доказательства лемм 1.1–1.5, а не только формулировки.

Определение. Эпиморфизм групп $\epsilon : H \twoheadrightarrow G$ называется *центральным расширением* (*группы* G), если ядро этого эпиморфизма содержится в центре H.

Следующее замечание будет нашим основным инструментом для работы с центральными расширениями.

Лемма 1.1 (Трюк Стейнберга)**.** *Пусть $\epsilon : H \twoheadrightarrow G$ — центральное расширение. Тогда для любых $u_1,\, u_2,\, v_1,\, v_2 \in H$ таких, что $\epsilon(u_1) = \epsilon(u_2)$ и $\epsilon(v_1) = \epsilon(v_2)$ верно равенство $[u_1,\, v_1] = [u_2,\, v_2]$.*

Этот результат моментально следует из того, что $u_1{u_2}^{-1},\ v_1{v_2}^{-1} \in \mathrm{Ker}(\epsilon) \subseteq \mathrm{Cent}(H)$. Введём теперь следующее обозначение.

Определение. Пусть $\epsilon : H \twoheadrightarrow G$ — центральное расширение. Тогда для $x,\, y \in G$ будем обозначать через $[\epsilon^{-1}x,\, \epsilon^{-1}y]$ коммутатор любых двух $u,\, v \in H$ таких, что $\epsilon(u) = x$ и $\epsilon(v) = y$. Такое определение корректно в силу Леммы 1.1.

Напомним также, что

Определение. группа G называется *совершенной*, если она совпадает со своим коммутантом $[G,\, G]$.

Лемма 1.2. *Пусть $\epsilon : H \twoheadrightarrow G$ — центральное расширение. Тогда H совершенна тогда и только тогда, когда для любого центрального расширения $\zeta : H' \twoheadrightarrow G$ существует не более одного гомоморфизма, замыкающего диаграмму*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\epsilon"'] & & H' \arrow[dl, "\zeta"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

до коммутативной.

Доказательство. Пусть H совершенна, ζ — центральное расширение G, а η, θ — гомоморфизмы, замыкающие диаграмму

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, shift left, "\eta"] \arrow[rr, shift right, "\theta"'] \arrow[dr, "\epsilon"'] & & H' \arrow[dl, "\zeta"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

до коммутативной. Тогда для любых двух элементов x, y из H по Лемме 1.1 получаем, что $[\eta(x),\, \eta(y)] = [\zeta^{-1}(\epsilon(x)),\, \zeta^{-1}(\epsilon(y))] = [\theta(x),\, \theta(y)]$, то есть $\eta([x,\, y]) = \theta([x,\, y])$. Но H совершенна, значит $\eta = \theta$.

Теперь предположим, что H не совершенна. Тогда существует нетривиальный эпиморфизм $\alpha : H \to A = \dfrac{H}{[H,\, H]}$ на абелеву группу. Пользуясь тем, что гомоморфизм $\zeta : H \times A \to G$, определённый по формуле $\zeta(u, a) = \epsilon(u)$, является центральным расширением, получаем два различных гомоморфизма $\eta(u) = (u, 1)$ и $\theta(u) = (u, \alpha(u))$, замыкающих диаграмму

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, shift left, "\eta"] \arrow[rr, shift right, "\theta"'] \arrow[dr, "\epsilon"'] & & H \times A \arrow[dl, "\zeta"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

до коммутативной. $\square$

Определение. Центральное расширение $\pi : U \twoheadrightarrow G$ называется *универсальным центральным расширением* G, если для любого другого центрального расширения $\epsilon : H \twoheadrightarrow G$ существует единственный гомоморфизм η, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, dashed, "\eta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \arrow[dl, "\epsilon"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

до коммутативной.

Замечание. Из Леммы 1.2 следует, что область (а тогда и кообласть) универсального центрального расширения совершенна. То есть, универсальное центральное расширение может существовать только для совершенной группы.

Лемма 1.3. *У любой совершенной группы существует универсальное центральное расширение.*

Доказательство. Выберем эпиморфизм $\phi : F \twoheadrightarrow G$ из свободной группы F и обозначим $R = \operatorname{Ker}\phi$. Ясно, что ϕ пропускается через эпиморфизм на фактор-группу $\tau : F \twoheadrightarrow \overline{F} = \dfrac{F}{[R,\, F]}$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[d, "\tau"'] & G \\ \overline{F} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Ограничим пропущенный эпиморфизм φ на коммутант и получим гомоморфизм $\pi : \dfrac{[F,\, F]}{[R,\, F]} \twoheadrightarrow [G,\, G] = G$, причём $\operatorname{Ker}\pi = \dfrac{R \cap [F,\, F]}{[R,\, F]}$. Ясно, что φ и π — центральные расширения G, а ниже мы покажем, что π — это универсальное центральное расширение.

Рассмотрим центральное расширение $\epsilon : H \twoheadrightarrow G$. Так как F свободна, можно задать гомоморфизм $\theta : F \to H$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, dashed, "\theta"] \arrow[dr, two heads, "\phi"'] & & H \arrow[dl, two heads, "\epsilon"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

будет коммутативна. Тогда $[\theta(R),\, \theta(F)] \subseteq [\operatorname{Ker}\epsilon,\, \theta(F)] = 1$, так что θ пропустится через τ.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\tau"] \arrow[ddr, bend right, two heads, "\phi"'] & & H \arrow[ddl, bend left, two heads, "\epsilon"] \\
& \overline{F} \arrow[ur, dashed, "\vartheta"] \arrow[d, two heads, "\varphi"] & \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Ограничив пропущенный морфизм ϑ на коммутант, получим гомоморфизм $\eta : [\overline{F},\, \overline{F}] \to H$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{[\overline{F},\, \overline{F}]} \arrow[rr, dashed, "\eta"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & & H \arrow[dl, two heads, "\epsilon"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

до коммутативной. Наконец, заметим, что для любых $x,\, y \in \overline{F}$ найдутся $u,\, v \in [\overline{F},\, \overline{F}]$ такие, что $\varphi(x) = \pi(u)$ и $\varphi(y) = \pi(v)$ (ведь π — сюръекция), но φ — центральное расширение, Так что из Леммы 1.1 следует, что $[x,\, y] = [u,\, v]$, то есть $[\overline{F},\, \overline{F}]$ — совершенная группа. С использованием Леммы 1.2, доказательство закончено. $\square$

Определение. Если π — это универсальное центральное расширение G, то его ядро называется *мультипликатором Шура группы* G и обозначается $\mathrm{M}(G) = \operatorname{Ker}(\pi)$.

Замечание. Из Леммы 1.3 следует, что мультипликатор Шура существует у любой совершенной группы. Как мы видим из доказательства этой леммы,

$$\mathrm{M}(G) = \frac{R \cap [F,\, F]}{[R,\, F]},$$

то есть $\mathrm{M}(G) = \mathrm{H}_2(G,\, \mathbb{Z})$ по формуле Хопфа. Если группа G не совершенна, её мультипликатором Шура называют вторую группу целочисленных гомологий.

Теперь мы разовьём метод, позволяющий доказывать, что некоторый эпиморфизм является универсальным центральным расширением. Сначала дадим несколько определений.

Определение. Совершенная группа G называется *центрально замкнутой*, если $1_G : G \to G$ является её универсальным центральным расширением. Это, очевидно, эквивалентно тому, что $\mathrm{M}(G) = 1$.

Определение. Центральное расширение $\epsilon : H \twoheadrightarrow G$ называется *расщепимым*, если существует гомоморфизм $\sigma : G \to H$ такой, что $\epsilon\sigma = 1_G$, то есть, короткая точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow \operatorname{Ker}\epsilon \longrightarrow H \xrightarrow{\epsilon} G \longrightarrow 1$$

расщепляется (справа).

Лемма 1.4. *Пусть $\epsilon : H \twoheadrightarrow G$ — это расщепимое центральное расширение, а H совершенна. Тогда H и G в действительности изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\sigma : G \to H$ — такой гомоморфизм, что $\epsilon\sigma = 1_G$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, shift left, "\sigma\epsilon"] \arrow[rr, shift right, "1_H"'] \arrow[dr, "\epsilon"'] & & H \arrow[dl, "\epsilon"] \\ & G. & \end{tikzcd}$$

Так как H совершенна, по Лемме 1.2 получаем, что $\sigma\epsilon = 1_H$, а значит $H \cong G$. $\square$

Лемма 1.5. *Пусть $\epsilon : H \twoheadrightarrow G$ — центральное расширение, а H центрально замкнута. Тогда ϵ — это универсальное центральное расширение группы G.*

Доказательство. Так как $G = \epsilon(H)$ совершенна, рассмотрим её универсальное центральное расширение $\pi : U \twoheadrightarrow G$ и гомоморфизм групп $\eta : U \to H$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \arrow[dl, "\epsilon"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

до коммутативной. Тогда по Лемме 1.1, $\eta(U) = [H, H] = H$, так что $\eta : U \twoheadrightarrow H$ является центральным расширением. Но H центрально замкнута, поэтому из универсального свойства 1_H мы получаем, что η расщепим. Лемма 1.4 завершает доказательство. $\square$

Милнор показал, что группа Стейнберга является центрально замкнутой группой [47].

Теорема (Милнор)**.** *Пусть R — произвольное кольцо, $n \geqslant 5$. Тогда группа Стейнберга $\mathrm{St}(n, R)$ центрально замкнута. Кроме того, стабильная группа $\mathrm{St}(R)$ центрально замкнута.*

Легко показать, что стабильная группа Стейнберга является центральным расширением стабильной элементарной группы. Совмещая этот факт с предыдущей теоремой, мы видим, что в действительности $\mathrm{St}(R)$ является универсальным центральным расширением $\mathrm{E}(R)$, а $\mathrm{K}_2(R)$ является мультипликатором Шура элементарной группы,

$$\mathrm{K}_2(R) = \mathrm{H}_2(\mathrm{E}(R),\, \mathbb{Z}).$$

Точно такой же результат верен и для нестабильного K_2, однако для доказательства этого факта нужно проверить центральность расширения $\mathrm{St}(n,\, R) \twoheadrightarrow \mathrm{E}(n,\, R)$, что оказывается значительно сложнее, чем стабильный аналог.

В следующем пункте мы приведём конструкцию ван дер Каллена, использованную им для доказательства теоремы о центральности нестабильного K_2.

1.1.3 Другое копредставление

Мы уже упоминали результат Андрея Суслина о том, что элементарная группа $\mathrm{E}(n, R)$ нормальна в полной линейной группе $\mathrm{GL}(n,\, R)$ [18]. Чуть точнее, он показал, что $\mathrm{E}(n, R)$ совпадает с подгруппой $\mathrm{GL}(n,\, R)$, порождённой марицами вида $t(u,\, v) = 1 + uv^t$, где u — унимодурярный столбец, $v \in R^n$ такой, что $u^t v = 0$б через u^t мы обозначаем строку, получающуюся из столбца u транспонированием.

Определение. Столбец $u \in R^n$ называется *унимодуолярным*, если его координаты порождают единичный идеал кольца R. Другими словами, это значит, что существует столбец $w \in R^n$ такой, что $w^t u = 1$. Множество всех унимодулярных столбцов высоты n мы будем обозначать $\mathrm{Um}(n,\, R)$.

Из результата Суслина легко следует, что $\mathrm{E}(n,\, R)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,\, R)$. Действительно, для $g \in \mathrm{GL}(n,\, R)$ верно

$$g\, t(u,\, v) g^{-1} = g(1 + uv^t) g^{-1} = 1 + guv^t g^{-1} = t(gu, (g^{-1})^t v),$$

при этом для $u \in \mathrm{Um}(n,\, R)$ также имеем $gu \in \mathrm{Um}(n,\, R)$. Далее мы будем обозначать $(g^{-1})^t$ через g^* и называть её контраградиентной матрицей.

Сразу отметим, что автоморфизм * взятия контраградиентной матрицы поднимается на группу Стейнберга, чуть точнее, корректно определён гомоморфизм $^*\colon \mathrm{St}(n,\, R) \to \mathrm{St}(n,\, R)$, заданный правилом $x_{ij}(r) \mapsto x_{ji}(-r)$. При этом для $g \in \mathrm{St}(n,\, R)$ верно $\phi(g^*) = \phi(g)^*$.

Развивая идеи Андрея Суслина, Вильберд ван дер Каллен показал, что для $n \geq 4$ группа Стейнберга $\mathrm{St}(n,\, R)$ изоморфна группе, заданной множеством образующих

$$\{X(u,\, v) \mid u \in \mathrm{Um}(n,\, R),\ v \in R^n,\ u^t v = 0\}$$

и следующими соотношениями:

$$X(u,\, v) X(u,\, w) = X(u,\, v + w), \tag{K1}$$
$$X(u,\, v) X(u',\, v') X(u,\, v)^{-1} = X(t(u,\, v)u',\, t(u,\, v)^* v'). \tag{K2}$$

При этом для обычных образующих группы Стейнберга выполнено $x_{ij}(a) = X(e_i,\, e_j a)$. Мы будем ссылаться на этот результат как на теорему о Другом копредставлении группы Стейнберга.

Из такого копредставления легко следует, что расширение $\phi\colon \mathrm{St}(n,\, R) \to \mathrm{E}(n,\, R)$ является центральным. Действительно, легко видеть, что $g\, X(u',\, v')g^{-1} = X(\phi(g)u',\, \phi(g)^* v')$, и если элемент $g \in \operatorname{Ker}\phi$, то $g\, X(u',\, v')g^{-1} = X(u',\, v')$.

Отметим, что в настоящей работе мы параметризуем образующую $X(u, v)$ двумя столбцами, а Вильберд ван дер Каллен в оригинальной работе использовал столбец и строку [34]. Наша образующая $X(u, v)$ отвечает образующей ван дер Каллена $X(u, v^t)$.

1.2 Относительная группа Стейнберга

1.2.1 Определение Туленбаева

Туленбаев обобщил другое копредставление ван дер Каллена на так называемые относительные группы Стейнберга $\mathrm{St}(n,\, R,\, I)$, параметризуемые парой $I \trianglelefteq R$. С помощью этого своего результата он доказал локально-глобальный принцип для групп Стейнберга при $n \geqslant 5$.

В следующем разделе настоящей главы мы подробно обсудим локально-глобальный принцип и обобщим результат Туленбаева на случай $n = 4$. Но для этого нам понадобится использовать вместо Другого копредставления Туленбаева свой вариант копредставления для относительной группы Стейнберга.

Сначала мы приводим определение Туленбаева, затем своё определение для $n = 4$ и показываем, что они в действительности задают одну и ту же группу.

Мы можем ограничиться только расщепимыми идеалами $I \trianglelefteq R$.

Определение. Идеал $I \trianglelefteq R$ называется *расщепимым*, если существует гомоморфизм колец $\sigma\colon R/I \to R$, являющий правым обратным к естественной проекции $\pi\colon R \to R/I$, другими словами, $\pi\sigma = \mathrm{id}_{R/I}$.

Если идеал $I \trianglelefteq R$ не расщепим, то опредление относительной группы Стейнберга выглядит чуть сложнее того, что мы приводим ниже. Подробности можно найти в работах [61, 37, 44, 52].

Определение. Пусть $I \trianglelefteq R$ — это расщепимый идеал. Тогда *относительной группой Стейнберга* $\mathrm{St}(n,\, R,\, I)$ называется $\operatorname{Ker}\big(\pi^*\colon \mathrm{St}(n,\, R) \to \mathrm{St}(n,\, R/I)\big)$.

Следующее утверждение доказано Туленбаевым в [21, Предложение 1.6]. Мы будем ссылаться на этот факт как на другое копредставление Туленбаева.

Теорема (Туленбаев)**.** *Для расщепимого идеала I и $n \geq 4$ относительная группа Стейнберга $\mathrm{St}(n,\, R,\, I)$ изоморфна группе, заданной следующим множеством образующих:*

$$\{X(u,\, v) \mid u \in \mathrm{E}(n,\, R)e_1,\ v \in I^n,\ u^t v = 0\},$$

и следующими соотношениями между ними:

$$X(u,\, v)X(u,\, w) = X(u,\, v+w), \tag{T1}$$

$$X(u,\, v)X(u',\, v')X(u,\, v)^{-1} = X(t(u,\, v)u',\, t(u,\, v)^* v'), \tag{T2}$$

$$X(ur+w,\, v) = X(u,\, vr)X(w,\, v), \;\; \textit{где } r \in R,\; (u,\, w) \in \mathrm{Um}_{n\times 2}(R). \tag{T3}$$

Более того, можно заменить семейство соотношений T3 *выше следующим меньшим семейством:*

$$X(Me_1 r + Me_2,\, M^* e_3 a) = X(Me_1,\, M^* e_3 ar)X(Me_2,\, M^* e_3 a), \tag{T3'}$$

где $r \in R$, $a \in I$ и $M \in E(n, R)$.

В формулировке теоремы мы обозначили через $\mathrm{Um}_{n\times 2}(R)$ множество $n\times 2$ *унимодулярных матриц*, то есть, таких матриц A, что существует $2 \times n$ матрица B такая, что $BA = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

Туленбаев доказывает в [21, Предложение 1.6] только утверждение про соотношения T1, T2, T3, поэтому мы повторим его рассуждение для соотношений T1, T2, T3'.

Доказательство. Временно обозначим через G группу, заданную соотношениями T1, T2, T3'. Для удобства мы будем считать, что R/I вложено в R, другими словами, переобозначим $\sigma\pi$ через π.

Для доказательства утверждения теоремы мы построим два взаимно-обратных отображения

$$G \rtimes \mathrm{St}(n, R/I) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathrm{St}(n, R)\;,$$

где $\mathrm{St}(n, R/I)$ действует на G по правилу

$$^{X(u,\,v)}X(u', v') = X(t(u,\, v)u',\, t(u,\, v)^* v').$$

Определим отображение ψ правилом $\psi(x_{ij}(\xi)) = (X(e_i, (\xi - e_j\pi(\xi)),\; x_{ij}(\pi(\xi)))$. Проверим корректность такого определения, то есть, что ψ сохраняет соотношения S1–S3. Разберём соотношение S3. Воспользуемся явной формулой для вычисления коммутатора в полупрямом произведении (любых) групп:

$$[(a, b), (c, d)] = (a \cdot {}^{b}c \cdot {}^{bdb^{-1}}a^{-1} \cdot {}^{[b,d]}c^{-1}, [b, d]).$$

Будем обозначать $\xi' = \xi - \pi(\xi)$ для $\xi \in R$. Подставим $a = X(e_i, e_j\xi')$, $b = x_{ij}(\pi(\xi))$, $c = X(e_j, e_k\eta')$, $d = x_{jk}(\pi(\eta))$ и вычислим, коммутатор $[\psi(x_{ij}(\xi), \psi(x_{jk}(\eta))]$ следующим образом:

$$(X(e_i, e_j\xi') \cdot X(e_j + e_i\pi(\xi), e_k\eta') \cdot X(e_i, e_k\pi(\eta)\xi' - e_j\xi') \cdot X(e_j, -e_k\eta'),\; x_{ik}(\pi(\xi\eta)))\,.$$

Применим соотношения аддитивности T1 и T3' и перенесём множитель $X(e_i, -e_j\xi')$ в левую часть формулы при помощи соотношения T2. Мы получаем следующее выражение:

$$(X(e_j, e_k\eta') \cdot X(e_i, e_k(\xi'\eta' + \pi(\xi)\eta' + \pi(\eta)\xi')) \cdot X(e_j, -e_k\eta'),\; x_{ik}(\pi(\xi\eta)))\,.$$

Так как $\xi'\eta' + \pi(\xi)\eta' + \pi(\eta)\xi' = \xi\eta - \pi(\xi\eta)$, выражение выше упрощается до $\psi(x_{ik}(\xi\eta))$, что мы и хотели показать. Точно так же можно показать, что ψ сохраняет соотношения S1 и S2, и вычисление правой и левой части будет ещё проще, чем то, что приведено выше. В частности, не понадобится использовать соотношение T3'.

Теперь определим φ по правилу $\varphi\left((X(u, v), 1)\right) = X(u, v)$, где $u \in E(n, R)e_1$, $v \in I^n$, и $\varphi\left((1, x_{ij}(\xi))\right) = X(e_i, e_j\sigma(\xi))$. Ясно, что φ сохраняет соотношения T1 и T2. Соотношение T3' в абсолютной группе также можно вывести из соотношений ван дер Каллена K1 и K2, см. [21, (1.3)], так что, отображение φ корректно определено. Легко видеть, что $\varphi\psi = 1$ так что ψ инъективно. Чтобы показать, что ψ сюръективно, остаётся заметить, что элементы $(X(u, v), 1)$, $u \in \mathrm{E}(n, R)e_1$, $v \in I^n$ лежат в образе ψ. $\square$

В обоих других копредставлениях ван дер Каллена и Туленбаева образующие параметризуются парой векторов, первый из которых «хороший» в некотором смысле (скажем, унимодулярный), а второй — произвольный. Для таких образующих легко сформулировать аддитивность по второму вектору, как K1 и T1, но не так просто формулировать аддитивность по первому, как T3'.

В доказательстве локально-глобального принципа Туленбаев строит отображение из относительной группы Стейнберга в некоторую другую группу, то есть, проверяет соотношения T1–T3 для образов $X(u,\, v)$. Единственная причина, по которой доказательство Туленбаева требует условия $n \geq 5$, заключается в том, что он не может проверить «сложное» соотношение T3 (или T3') при $n = 4$.

1.2.2 Определение в ранге три

Для того, чтобы обобщить результат Туленбаева на случай $n = 4$, мы используем более симметричное копредставление с двумя типами образующих: $F(u,\, v)$, где u хороший, а v — произвольный, и $S(u,\, v)$, где u произвольный, а v — хороший. Образующие $F(u,\, v)$ будут аддитивны по второму вектору, в то время как образующие $S(u,\, v)$ будут аддитивны по первому. В случае, когда u и v оба хорошие, мы потребуем, чтобы образующие обоих типов были равны друг другу. Перейдём к формальному определению.

Определение. Для $I \trianglelefteq R$ и $n \geq 4$ определим группу $\mathrm{St}^*(n,\, R,\, I)$ при помощи множества образующих

$$\{F(u,\, v) \mid u \in \mathrm{E}(n,\, R)e_1,\ v \in I^n,\ u^t v = 0\} \cup \{S(u,\, v) \mid u \in I^n,\ v \in \mathrm{E}(n,\, R)e_1,\ u^t v = 0\}$$

и следующих соотношений между ними:

$$F(u,\, v)F(u,\, w) = F(u,\, v + w), \tag{R1}$$

$$S(u,\, v)S(w,\, v) = S(u + w,\, v), \tag{R2}$$

$$F(u,\, v)F(u',\, v')F(u,\, v)^{-1} = F(t(u,\, v)u',\, t(u,\, v)^* v'), \tag{R3}$$

$$F(u,\, va) = S(ua,\, v),\ \text{где } a \in I,\ (u,\, v^t) = (Me_1,\, e_2^t M^{-1}),\ M \in \mathrm{E}(n,\, R). \tag{R4}$$

Отметим, что мы включили в определение только одно соотношение о действии образующей $F(u,v)$ сопряжением на другой образующей $F(u',v')$, и не стали требовать три других соотношения с участием образующих второго типа $S(u,v)$. Это объясняет следующая лемма, утверждающая, что «недостающие» соотношения автоматически следуют из R1–R4.

Лемма 1.6. *Обозначим через* $\phi\colon \mathrm{St}^*(n,\, R,\, I) \to \mathrm{E}(n,\, R)$ *естественное отображение, которое отправляет* $F(u,\, v) \mapsto t(u,\, v)$ *и* $S(u,\, v) \mapsto t(u,\, v)$. *Имеют место следующие утверждения:*

1. $\mathrm{St}^*(n,\, R,\, I)$ *как абстрактная группа порождается множеством элементов*
$$\{F(u,\, va) \mid a \in I,\ (u,\, v^t) = (Me_1,\, e_2^t M^{-1}),\, M \in \mathrm{E}(n,\, R)\};$$
2. *для любого* $g \in \mathrm{St}^*(n,\, R,\, I)$ *верно равенство*
$$gF(u,\, v)g^{-1} = F(\phi(g)u,\, \phi(g^{-1})^t v); \tag{R3'}$$
3. *для любого* $g \in \mathrm{St}^*(n,\, R,\, I)$ *верно равенство*
$$gS(u,\, v)g^{-1} = S(\phi(g)u,\, \phi(g^{-1})^t v); \tag{R3''}$$
4. *на* $\mathrm{St}^*(n,R,I)$ *корректно определён автоморфизм* * *взятия «контраградиентного» элемента, заданный правилом*
$$F(u,\, v)^* = S(-v,\, u), \quad S(u,\, v)^* = F(v,\, -u).$$

Доказательство. Пусть $F(u,\, v)$ — это произвольная образующая первого типа, и пусть $M \in \mathrm{E}(n,\, R)$ — такая матрица, что $F(u,\, v) = F(Me_1,\, M^*\tilde{v})$. Пользуясь соотношением R1, получаем
$$F(u,\, v) = \prod_{k\neq 1} F(Me_1,\, M^* e_k \tilde{v}_k),$$
где $\tilde{v}_k$ обозначает k-ю координату $\tilde{v} = \sum e_i\tilde{v}_i$. Применяя соотношения R2 и R4, мы получаем
$$S(u',\, v') = \prod_{k\neq 1} S(Ne_k\tilde{u}_k,\, N^*e_1) = \prod_{k\neq 1} F(Ne_k,\, N^*e_1\tilde{u}_k),$$
откуда следует (a). Ясно, что (b) следует из (a). Чтобы доказать (c), достаточно проверить, что
$$F(u,\, v)S(u',\, v')F(u,\, v)^{-1} = S(t(u,\, v)u',\, t(u,\, v)^*v').$$
Действительно, для $S(u',\, v') = \prod_{k\neq 1} F(Ne_k,\, N^*e_1\tilde{u}_k)$ имеем
$$\begin{aligned} F(u,\, v)S(u',\, v')F(u,\, v)^{-1} &= F(u,\, v)\prod F(Ne_k,\, N^*e_1\tilde{u}_k)F(u,\, v)^{-1} = \\ &= \prod F(t(u,\, v)Ne_k,\, t(u,\, v)^*N^*e_1\tilde{u}_k) = \\ &= \prod S(t(u,\, v)Ne_k\tilde{u}_k,\, t(u,\, v)^*N^*e_1) = S(t(u,\, v)u',\, t(u,\, v)^*v'). \end{aligned}$$
Наконец, (d) следует из (c). □

1.2.3 Совпадение определений

Сейчас мы покажем, что для расщепимого идеала $I \trianglelefteq R$ группа $\mathrm{St}^*(n,\, R,\, I)$ изоморфна $\mathrm{St}(n,\, R,\, I) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{St}(n,\, R) \twoheadrightarrow \mathrm{St}(n,\, R/I)\right)$.

Для этого мы построим два взаимно-обратных гомоморфизма

$$\mathrm{St}^*(n,\, R,\, I) \underset{\kappa}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{St}(n,\, R,\, I).$$

Для того, чтобы построить отображение κ мы используем другое копредставление Туленбаева. Мы положим

$$\kappa(X(u, v)) = F(u, v),\ \ u \in \mathrm{E}(n, R)e_1,\ \ v \in I^n.$$

Для проверки корректности такого определения достаточно показать, что $F(u, v)$ удовлетворяют соотношениям T1, T2, T3'. Очевидно, что выполняются T1 и T2, а для проверки T3' нужно воспользоваться R4 и R2. Действительно,

$$F(Me_1, M^*e_3ar)F(Me_2, M^*e_3a) = S(Me_1ar, M^*e_3)S(Me_2a, M^*e_3) = \\ = S(M(e_1r + e_2)a, M^*e_3) = F(Me_1r + Me_2, M^*e_3a).$$

Теперь построим отображение ι. Сначала мы будем считать, что ι отображает $\mathrm{St}^*(n, R, I)$ в абсолютную группу, а затем докажем, что образ ι содержится в $\mathrm{St}(n, R, I)$. Разумеется, образующие $F(u,\, v)$ следует отправить в образующие ван дер Каллена $X(u,\, v)$. Но также нам нужно найти образы для элементов $S(u,\, v)$.

Вспомним, что на абсолютной группе Стейнберга задан автоморфизм взятия «контраградиентного» элемента *, отправляющий $x_{ij}(a)$ в $x_{ji}(-a)$. Положим $\iota(S(u,\, v)) = X(v,\, -u)^*$.

Чтобы проверить корректность определения ι нужно показать, что элементы $X(u,\, v)$ и $X(v,\, -u)^*$ удовлетворяют соотношениям R1–R4.

Только соотношение R4 не очевидно сразу. Другими словами, для $(u,\, v^t) = (Me_1,\, e_2^tM^{-1})$, $M \in \mathrm{E}(n,\, R)$, $a \in I$, нужно проверить равенство $X(u,\, va) = X(v,\, -ua)^*$. Для этого достаточно показать, что $X(e_1,\, e_2a) = X(e_2,\, -e_1a)^*$, что верно по определению *.

Так как $\pi^*(\iota(F(u, v))) = X(\pi(u),\, 0) = 1$ и $\pi^*(\iota(S(u, v)) = X(\pi(v),\, 0)^* = 1$, мы получаем, что $\mathrm{Im}(\iota) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi^*) = \mathrm{St}(n,\, R,\, I)$. Ясно, что $\iota\kappa = \mathrm{id}$, так что κ инъективно. С другой стороны, из первого пункта Леммы 1.6 следует, что κ сюръективно. Итак, мы доказали следующий результат.

Лемма 1.7. *Для расщепимого идеала $I \trianglelefteq R$ и $n \geq 4$ группы $\mathrm{St}^*(n,\, R,\, I)$ и $\mathrm{St}(n,\, R,\, I)$ изоморфны.*

1.3 Локально-глобальный принцип

1.3.1 Сведение локально-глобального принципа к лемме о поднятии

Следующая теорема называется локально-глобальным принципом для группы Стейнберга. Для $n \geq 5$ она была доказана Туленбаевым в [21]. Основным результатом первой главы настоящей диссертации является доказательство локально-глобального принципа при $n = 4$.

Теорема 1 (Локально-глобальный принцип)**.** *Пусть R произвольное коммутативное кольцо (с 1), $n \geq 4$, и $g \in \mathrm{St}(n, R[t], tR[t])$. Этот элемент тривиален, $g = 1$, тогда и только тогда, когда все его максимальные локализации тривиальны, $g_{\mathfrak{m}} = 1 \in \mathrm{St}(n, R_{\mathfrak{m}}[t])$ для каждого максимального идеала $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$.*

Туленбаев сводит эту теорему к доказательству технической леммы, которую мы называем «леммой о поднятии» [21]. Хорошее изложение этого сведения можно также найти в [52]. Мы иногда будем делать ссылку на эту статью вместо того, чтобы заново приводить доказательство.

В этом пункте $a \in R$ будет обозначать элемент, не являющийся нильпотентом. Через $\lambda_a \colon R \to R_a$ мы обозначаем гомоморфизм главной локализации R в a.

Для $x \in R[t]$ мы будем обозначать через $\mathrm{ev}_x \colon R[t] \to R[t]$ гомоморфизм эвалюоации, то есть (единственный) гомоморфизм R-алгебр, переводящий t в x. Для $p \in R[t]$ мы обозначаем его образ при ev_x через $p(x)$, например, $p = p(t)$. Точно так же, мы обозначаем образ $g \in \mathrm{St}(n, R[t])$ при индуцированном гомоморфизме ev_x^* через $g(x)$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.8. *Пусть $g(t) \in \mathrm{St}(n, R[t], tR[t])$ такое, что*

$$\lambda_a^*(g(t)) = 1 \in \mathrm{St}(n, R_a[t]).$$

Тогда найдётся достаточно большое $N \in \mathbb{N}$, что $g(a^N t) = 1$.

Чтобы доказать Лемму 1.8, нам понадобится дать следующее определение.

Определение. Обозначим через $B = R \ltimes tR_a[t]$ кольцо, совпадающее с $R \times tR_a[t]$ как множество, с покомпонентным сложением, и умножением, заданным правилом

$$(r, f) \cdot (s, g) = (rs, \lambda_a(r)g + f\lambda_a(s) + fg).$$

Элементы B можно представлять себе как многочлены от t со свободным членом из R, а всеми остальными коэффициентами из R_a.

Рассмотрим направленную систему колец

$$R[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_{at}} R[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_{at}} R[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_{at}} \cdots$$

то есть, $(S_i, \psi_{ij})_{0 \leq i \leq j}$, где $S_i = R[t]$, а $\psi_{ij} \colon t \mapsto a^{j-i}t$. Она индуцирует направленную систему групп Стейнберга. Следующие утверждения почти очевидны (см. [21]).

Лемма 1.9. *Семейство отображений $\varphi_i \colon S_i \to B$, заданных правилом*

$$p(t) \mapsto \big(p(0), \lambda_a^*(p)(a^{-i}t) - \lambda_a^*(p)(0)\big),$$

индуцирует

1. *изоморфизм*

$$\varinjlim S_i \xrightarrow{\sim} B;$$

2. *изоморфизм*

$$\varinjlim \mathrm{St}(n,\, S_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{St}(n,\, B).$$

Теперь мы покажем, что композиция φ_0^* с вложением

$$\mu\colon\ \mathrm{St}(n,\, R[t],\, tR[t]) \hookrightarrow \mathrm{St}(n,\, R[t]) \xrightarrow{\varphi_0^*} \mathrm{St}(n,\, B)$$

пропускается через локализацию в a. В действительности, имеет место даже более общее утверждение.

Лемма 1.10 (Лемма о поднятии)**.** *Пусть B — кольцо, $a \in B$ и $I \trianglelefteq B$ такой идеал, что для любого $x \in I$ существует единственный $y \in I$ такой, что $ya = x$ (эквивалентное условие: гомоморфизм локализации $\lambda_a\colon I \to I_a = I \otimes_R R_a$ является изоморфизмом). Тогда существует отображение*

$$\mathrm{T}\colon\ \mathrm{St}^*(n,\, B_a,\, I_a) \to \mathrm{St}(n,\, B)$$

замыкающее диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{St}^*(n,\, B,\, I) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_a^*"'] & \mathrm{St}(n,\, B) \arrow[d, "\lambda_a^*"] \\
\mathrm{St}^*(n,\, B_a,\, I_a) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{T}"'] & \mathrm{St}(n,\, B_a)
\end{tikzcd}$$

до коммутативной.

Туленбаев доказал Лемму 1.10 только для $n \geq 5$ в [21]. В следующем пункте мы докажем её и для $n = 4$, а сейчас выведем из неё Лемму 1.8.

Доказательство Леммы 1.8. Применим Лемму 1.10 к $a \in R \subseteq B$, $B = R \ltimes tR_a[t]$ как выше, $I = tR_a[t] \trianglelefteq B$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{St}(n,\, R[t],\, tR[t]) \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "\lambda_a^*"'] \arrow[dr, "\varphi_0^*"'] & & \mathrm{St}(n,\, R[t]) \arrow[dd, "\varphi_0^*"] \\
& \mathrm{St}(n,\, B,\, I) \arrow[dl, "\lambda_a^*"'] \arrow[dr, hook] & \\
\mathrm{St}(n,\, R_a[t],\, tR_a[t]) \arrow[rr, "\mathrm{T}"] & & \mathrm{St}(n,\, B)
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим $g(t) \in \mathrm{St}(n,\, R[t],\, tR[t])$ такой, что $\lambda_a^*(g(t)) = 1$. Тогда

$$\varphi_0^*(g(t)) = (T \circ \lambda_a^*)(g(t)) = 1$$

тоже, то есть, $g(t)$ становится тривиальным при переходе к прямому пределу. Но это может случиться только если $\psi_{0,N}^*(g(t)) = 1$ для некоторого N (проще всего это увидеть, если воспользоваться конструкцией прямого предела как несвязного объединения по модулю отношения эквивалентности). $\square$

Доказательство следующей леммы дословно повторяет доказательство Леммы 16 в [52]. В этом доказательстве происходит две ссылки: вместо Леммы 8 из [52] нужно воспользоваться Леммой 1.7 из предыдущего пункта, а вместо Леммы 15 из [52] нужно использовать Лемму 1.8.

Лемма 1.11. *Пусть a, $b \in R$ порождают единичный идеал кольца R, $Ra + Rb = R$. Предположим, что для $g \in \mathrm{St}(n,\, R[t], tR[t])$ выполнено, что $\lambda_a^*(g) = \lambda_b^*(g) = 1$. Тогда $g = 1$.*

Наконец, мы можем доказать и Локально-глобальный принцип (Теорему 1 выше). Для этого нужно дословно повторить доказательство Теоремы 2 из [52] (воспользовавшись вместо Леммы 16 из [52] Леммой 1.11 выше).

1.3.2 Лемма о поднятии Туленбаева

Сейчас мы докажем лемму о поднятии (Лемму 1.10 в предыдущем пункте). Приведём ещё раз точную формулировку.

Лемма (Лемма о поднятии)**.** *Пусть $n \geqslant 4$, B — кольцо, $a \in B$ и $I \trianglelefteq B$ такой идеал, что для любого $x \in I$ существует единственный $y \in I$ такой, что $ya = x$ (мы будем обозначать такой y через $\frac{x}{a}$). Тогда существует отображение*

$$\mathrm{T}\colon\ \mathrm{St}^*(n,\, B_a,\, I_a) \to \mathrm{St}(n,\, B)$$

замыкающее диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{St}^*(n,\, B,\, I) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_a^*"'] & \mathrm{St}(n,\, B) \arrow[d, "\lambda_a^*"'] \\
\mathrm{St}^*(n,\, B_a,\, I_a) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{T}"'] & \mathrm{St}(n,\, B_a)
\end{tikzcd}$$

до коммутативной.

Для вектора $u \in R^n$ мы будем обозначать через $I(u)$ идеал, порождённый компонентами $u \in R^n$, то есть, $I(u) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k R$.

Чтобы доказать лемму о поднятии, мы, следуя Туленбаеву, используем семейство элементов $X_{u,v}(a) \in \mathrm{St}(n,\, B)$, где $a \in B$, которые обобщают образующие ван дер Каллена $X(u, v)$, а именно $X_{u,v}(1) = X(u, v)$. Образующие Туленбаева отличаются тем, что условие ван дер Каллена $u \in \mathrm{Um}(n, B)$ заменено на более слабое условие $a \in I(u)$, эквивалентное тому, что u станет унимодулярным после локализации в a.

Для $u \in R^n$ обозначим через $D(u)$ множество, состоящее из таких векторов $v \in B^n$, которые раскладываются в сумму $v = \sum_{k=1}^{N} v_k$, где $v_1, \ldots, v_N \in B^n$ такие, что $u^t v_k = 0$ и каждый v_k имеет хотя бы две нулевые координаты.

Например, если u, $v \in B^n$ такие, что $v^t u = 0$, и $b \in I(u)$, то $vb \in D(u)$. Нужно взять вектор $w \in B^n$ такой, что $w^t u = b$ и рассмотреть в качестве разложения vb вектора $v_{ij} = (e_i u_j - e_j u_i)(v_i w_j - v_j w_i)$.

В частности, если $a \in B$ и идеал $I \trianglelefteq B$ как в формулировке леммы о поднятии, то есть, для любого $x \in I$ существует единственный $y \in I$ такой, что $ya = x$, а вектора $u \in B^n$ и $v \in I^n$, причём $u^t v = 0$, то автоматически $v \in D(u)$.

Для $a \in I(u)$ и $v \in D(u)$ Туленбаев строит элементы $X_{u,v}(a)$ (см. [21, Лемма 1.1] и пояснения после неё), при этом $\phi(X_{u,v}(a)) = t(u,\, va)$.

Обратим внимание, что Туленбаев использует обозначения, отличающиеся от обозначений ван дер Каллена, а именно, он пишет $X_{u,v}$ вместо $X(u,\, v)$. Мы придерживаемся обозначений ван дер Каллена.

Туленбаев доказывает следующие свойства своих образующих [21, Лемма 1.1, Лемма 1.3], а также [41].

Лемма 1.12. *Для $u,\, w \in B^n$, $v, v' \in D(u)$ таких, что $u^t w = 0$, $a,\, b \in I(u)$, $c \in B$, $g \in \mathrm{St}(n,\, B)$ имеют место следующие утверждения:*

1. $X_{u,vc}(a) = X_{u,v}(ca)$,
2. $X_{uc,v}(ca) = X_{u,vc^2}(a)$,
3. $X_{u,v}(a) X_{u,v'}(a) = X_{u,v+v'}(a)$,
4. $g\, X_{u,wb}(a) g^{-1} = X_{\phi(g)u, \phi(g)^* wb}(a)$.

Как мы уже делали выше, мы воспользуемся автоморфизмом * взятия контраградиентного элемента на группе Стейнберга. Нам снова нужно будет проверить, что и для более широкого семейства образующих Туленбаева имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.13. *Пусть $u,\, v,\, x,\, y$ — элементы B^n, $b \in I(u) \cap I(v)$, $r \in B$ такие, что $u^t v = 0$, $x^t y = b$, $x^t v = 0$, $u^t y = 0$, $x^t u = 0$, $y^t v = 0$. Тогда верно, что $X_{u,vb^4r}(b) = X_{v,-ub^4r}(b)^*$.*

Доказательство. Вычислим двумя способами коммутатор $g = [X_{v,xbr}(b)^*,\, X_{u,yb}(b)]$ пользуясь леммой выше:

$$g = X_{t(xb^2r,-v)u,\, t(xb^2r,-v)^* yb}(b) X_{u,-yb}(b) = X_{u,\, yb+vb^4r}(b)\, X_{u,-yb}(b) = X_{u,vb^4r}(b),$$

$$g = X_{v,xbr}(b)^* X_{t(u,yb^2)^* v,\, -t(u,yb^2)xbr}(b)^* = X_{v,xbr}(b)^*\, X_{v,-xbr-ub^4r}(b)^* = X_{v,-ub^4r}(b)^*.$$

□

Теперь мы готовы построить отображение $\mathrm{T}\colon\ \mathrm{St}(n,\, B_a,\, I) \to \mathrm{St}(n,\, B)$.

Доказательство леммы о поднятии. Рассмотрим $u = Me_1$, $M \in \mathrm{E}(n,\, B_a)$ и $v \in I^n$ такие, что $u^t v = 0$. Положим $w = M^* e_1$. Так как $w^t u = 1$, существуют вектора $\tilde{w},\, \tilde{u} \in B^n$ и натуральное m такие, что

$$\lambda_a(\tilde{w}) = wa^m,\ \lambda_a(\tilde{u}) = ua^m \text{ и более того } \tilde{u}^t v = 0 \text{ и } \tilde{w}^t \tilde{u} = a^{2m}.$$

Тогда $a^{2m} \in I(\tilde{u})$, и, как мы отмечали выше, $v/a^{3m} \in D(\tilde{u})$, поэтому мы можем положить $\mathrm{T}(F(u,\, v)) = X_{\tilde{u}, v/a^{3m}}(a^{2m})$.

Из двух первых пунктов Леммы 1.12 следует, что такое определение не зависит от выбора m и подъёмов $\tilde{u}$ и $\tilde{w}$.

Точно также, мы положим $\mathrm{T}(S(u,\, v)) = X_{\tilde{v}, -u/a^{3m},}(a^{2m})^*$. Из Леммы 1.12 следует, что отображение T сохраняет соотношения R1–R3.

Остаётся проверить, что для $u = Me_1$, $v = M^* e_2$ и $c \in I$ имеет место

$$\mathrm{T}(F(u, cv)) = X_{\tilde{u},\, \tilde{v}c/a^{4m}}(a^{2m}) = X_{\tilde{v},\, -\tilde{u}c/a^{4m}}(a^{2m})^* = \mathrm{T}(S(uc, v)).$$

Здесь $\tilde{u}, \tilde{v} \in B^n$ — это такие подъёмы u и v, что $\lambda_a(\tilde{u}) = ua^m$, $\lambda_a(\tilde{v}) = va^m$ и $\tilde{u}^t\tilde{v} = 0$. Мы можем выбрать m достаточно большим, чтобы выполнялось $a^{2m} \in I(\tilde{u}) \cap I(\tilde{v})$ и нашлись $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$\lambda_a(\tilde{x}) = Me_3 a^m,\ \lambda_a(\tilde{y}) = M^* e_3 a^m \text{ и } \tilde{x}^t\tilde{y} = a^{2m},\ \tilde{x}^t\tilde{v} = 0,\ \tilde{u}^t\tilde{y} = 0,\ \tilde{x}^t\tilde{u} = 0,\ \tilde{y}^t\tilde{v} = 0.$$

Теперь, чтобы получить R4, остаётся применить Лемму 1.13 (для $b = a^{2m}$, $r = c/a^{12m}$). Таким образом, отображение T корректно определено.

Коммутативность диаграммы напрямую вытекает из совпадения элементов ван дер Каллена $X(u,\, v)$ и элементов Туленбаева $X_{u,v}(1)$, замеченного выше. $\square$

1.3.3 Приложение: центральность ортогонального K_2

Напомним, что по каждой приведённой неприводимой системе корней Φ и коммутативному кольцу R можно построить расщепимую простую односвязную группу $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\Phi, R)$, называемую *группой Шевалле*. *Элементарная группа* $\mathrm{E}(\Phi, R)$ — это по-определению подгруппа $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\Phi, R)$ порождённая элементарными корневыми унипотентами $t_\alpha(\xi)$, $\xi \in R$, $\alpha \in \Phi$. Для системы корней Φ с простыми связями ранга $\geqslant 2$ группа Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, R)$ задаётся множеством образующих $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Phi$, $r \in R$, которые моделируют поведение унипотентов $t_\alpha(\xi)$, и соотношениями Стейнберга между ними:

$$\begin{aligned}
&x_\alpha(r)x_\alpha(s) = x_\alpha(r+s), && \\
&[x_\alpha(r), x_\beta(s)] = x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta} \cdot rs), && \alpha, \beta \in \Phi,\ \alpha+\beta \in \Phi, \\
&[x_\alpha(r), x_\beta(s)] = 1, && \alpha, \beta \in \Phi,\ \alpha+\beta \notin \Phi \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Здесь $N_{\alpha,\beta}$ — это структурные константы Φ, которые равны ± 1. Подробное изложение теории групп Шевалле можно найти в [63, 57].

Для расщепимого идеала $I \trianglelefteq R$ относительная группа Стейнберга определяется как $\mathrm{St}(\Phi, R, I) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{St}(\Phi, R) \to \mathrm{St}(\Phi, R/I)\big)$.

В случае $\Phi = \mathsf{A}_\ell = \{\chi_i - \chi_j \mid i \neq j,\ \chi_i \text{ базисные вектора } \mathbb{R}^{l+1}\}$ мы получаем обычное определение группы Стейнберга $\mathrm{St}(l+1,\, R)$, если сделать переобозначение $x_{ij}(r) = x_{\chi_i - \chi_j}(r)$.

Из группы Стейнберга есть отображение в группу Шевалле $\phi\colon \mathrm{St}(\Phi,R) \to \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\Phi,R)$, отправляющее $x_\alpha(\xi)$ в $t_\alpha(\xi)$, а его образ, как уже отмечено выше, — это $\mathrm{E}(\Phi,R)$.

По теореме Таддеи, (см. [63]) элементарная группа $\mathrm{E}(\Phi,R)$ является нормальной подгруппой $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\Phi,R)$ когда ранг Φ больше или равен 2. Поэтому аналогично алгебраическим SK_1 и K_2-функторам, определяются $\mathrm{K}_1(\Phi,R)$ и $\mathrm{K}_2(\Phi,R)$ как коядро и ядро ϕ:

$$1 \longrightarrow \mathrm{K}_2(\Phi,R) \longrightarrow \mathrm{St}(\Phi,R) \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\Phi,R) \longrightarrow \mathrm{K}_1(\Phi,R) \longrightarrow 1.$$

Сергей Синчук показал, что для всех групп Шевалле имеют место следующие импликации, см. [52, доказательства Леммы 15, Теорем 1,2].

Предложение (Синчук)**.** *Для любой неприводимой системы корней Φ с простыми связями и ранга $\geqslant 3$ верны импликации*

$$1. \implies 2. \implies 3.$$

1. *Для функтора $\mathrm{St}(\Phi,-)$ группы Стейнберга верна лемма о поднятии Туленбаева, то есть для любого кольца R и любого не нильпотента $a \in R$ существует отображение T_Φ, дополняющее диаграмму*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{St}(\Phi,\, R \ltimes tR_a[t],\, tR_a[t]) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{St}(\Phi, R \ltimes tR_a[t]) \arrow[d, "\lambda_a^*"'] \\ \mathrm{St}(\Phi,\, R_a[t],\, tR_a[t]) \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{T}_\Phi"'] & \mathrm{St}(\Phi, R_a[t]) \end{tikzcd} \tag{1.3.2}$$

   до коммутативной;

2. *для $\mathrm{St}(\Phi,-)$ верен локально-глобальный принцип, то есть, $g \in \mathrm{St}(\Phi,\, R[t])$, удовлетворяющий условию $g(0) = 1 \in \mathrm{St}(\Phi,\, R)$, является нейтральным элементом $1 \in \mathrm{St}(\Phi,\, R[t])$ тогда и только тогда, когда его образы $\lambda_{\mathfrak{m}}^*(g) \in \mathrm{St}(\Phi,\, R_{\mathfrak{m}}[t])$ при отображении локализации $\lambda_{\mathfrak{m}}\colon R \to R_{\mathfrak{m}}$ тривиальны для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$;*

3. *$\mathrm{K}_2(\Phi,R)$ является центральной подгруппой $\mathrm{St}(\Phi,R)$.*

Кроме того, Сергей Синчук показал, что относительная группа Стейнберга является амальгамированным произведением нескольких относительных групп Стейнберга меньшего ранга. Чуть точнее, он получил следующий результат [52, Лемма 5, Теорема 9 и Замечание 3.16, доказательство Леммы 14] и [41].

Теорема (Синчук)**.** *Пусть R — коммутативное кольцо, $I \trianglelefteq R$ — расщепимый идеал, Φ — неприводимая система корней с простыми связями.*

1. *Для $s \in I$, $r \in R$ и $\alpha \in \Phi$ обозначим $z_\alpha(s,r) := x_\alpha(s)^{x_{-\alpha}(r)} \in \mathrm{St}(\Phi,R,I)$. Если Φ имеет хотя бы ранг 2, то $\mathrm{St}(\Phi,R,I)$ порождена множеством элементов $z_\alpha(s,r)$.*

2. *Обозначим через* G_0 *свободное произведение групп Стейнберга* $\mathrm{St}(\Psi, R, I)$, *где* Ψ *пробегает все подсистемы корней* Φ, *которые имеют тип* A_3. *Обозначим через* $z_\alpha^\Psi(s,r)$ *образ* $z_\alpha(s,r) \in \mathrm{St}(\Psi, R, I)$ *при каноническом вложении* $\mathrm{St}(\Psi, R, I) \hookrightarrow G_0$. *Обозначим теперь через* G *фактор-группу* G_0 *по модулю всех соотношений вида* $z_\alpha^{\Psi_1}(s,r) = z_\alpha^{\Psi_2}(s,r)$, *где* $\alpha \in \Psi_1 \cap \Psi_2$, $s \in I$, $r \in I$ *и обе* Ψ_1 *и* Ψ_2 *— это подсистемы типа* A_3. *Если* Φ *имеет ранг* $\geqslant 3$, *то каноническое отображение* $G \to \mathrm{St}(\Phi, R, I)$ *является изоморфизмом групп.*

3. *Если ранг* Φ *больше или равен 3,* T_Ψ *— это отображения Туленбаева для подсистем* $\Psi \subseteq \Phi$ *типа* A_3, *построенные в предыдущем пункте, то для всех* Ψ_1, Ψ_2 *типа* A_3, *содержащих общий корень* α, *выполнено* $\mathrm{T}_{\Psi_1}(z_\alpha(s,r))^{\Psi_1} = \mathrm{T}_{\Psi_2}(z_\alpha(s,r))^{\Psi_2} \in \mathrm{St}(\Phi, R \ltimes tR_a[t])$. *Другими словами, по универсальному свойству копредела, корректно определено отображение Туленбаева* T_Φ, *а значит выполнены все пункты предыдущего предложения.*

Сергей Синчук сначала использовал этот метод для доказательства центральности K_2 для групп типа E_l. При этом вместо построенного соискателем отображения Туленбаева для групп типа A_3, он рассматривал отображение для групп типа A_4, построенное самим Туленбаевым. Однако для ортогональных групп, соответствующих типу D_l, уже не удавалось свести доказательство к подсистемам типа A_4, редукцию удавалось провести только к подсистемам ранга 3.

Совместно, Сергей Синчук и соискатель получили следующий результат.

Теорема 2 (Центральность ортогонального K_2)**.** *Пусть* R *— произвольное коммутативное кольцо. Тогда для* $l \geqslant 4$ *группа* $\mathrm{K}_2(\mathsf{D}_l, R)$ *является центральной подгруппой* $\mathrm{St}(\mathsf{D}_l, R)$.

Замечание. В действительности, $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\mathsf{D}_l, R)$ является чётной *спинорной* группой $\mathrm{Spin}(2l, R)$, при этом, так как расширение ортогональной группы $\mathrm{SO}(2l, R)$ спинорной является центральным, то результат о центральности $\mathrm{K}_2(\mathsf{D}_l, R)$ влечёт также и результат о центральности ядра гомоморфизма $\mathrm{St}(\mathsf{D}_l, R) \to \mathrm{O}(2l, R)$. Тем не менее, так как эти результаты приводятся только как приложения, мы не перегружаем диссертацию обсуждением теории представлений групп Шевалле и используем только обозначение $\mathrm{K}_2(\mathsf{D}_l, R)$ вместо возможных $\mathrm{K}_2\mathrm{Spin}(2l, R)$ или $\mathrm{K}_2\mathrm{O}(2l, R)$.

Глава 2

Симплектическая группа Стейнберга

2.1 Симплектическая группа

2.1.1 Короткое доказательство нормальности Ep

В этой главе R обозначает произвольное ассоциативное коммутативное кольцо с 1, R^{2l} обозначает свободный правый R-модуль, базис которого мы нумеруем следующим образом: e_{-l}, …, e_{-1}, e_1, …, e_l, $l \geq 3$. Для вектора $v \in R^{2l}$ его i-ая координата обозначается v_i, то есть $v = \sum_{i=-l}^{l} e_i v_i$. Через $\langle\ ,\ \rangle$ мы обозначаем стандартную симплектическую форму на R^{2l}, то есть $\langle e_i, e_j \rangle = \operatorname{sgn}(i)\delta_{i,-j}$. Мы часто пишем ε_i вместо $\operatorname{sgn}(i)$. Напомним, что $\langle u, u \rangle = 0$ для любого $u \in V$.

Определение. *Симплектической группой* $\operatorname{Sp}(2l, R)$ называется группа автоморфизмов R^{2l}, сохраняющих симплектическую форму $\langle\ ,\ \rangle$,

$$\operatorname{Sp}(V) = \{f \in \operatorname{GL}(V) \mid \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle \ \ \forall\, u, v \in V\}.$$

Определение (Преобразования Эйхлера–Зигеля–Диксона)**.** Для $a \in R$ и $u, v \in R^{2l}$ таких, что $\langle u, v \rangle = 0$, обозначим через $T(u, v, a)$ автоморфизм R^{2l}, действующий по следующему правилу: для $w \in R^{2l}$ выполнена формула

$$T(u, v, a)\colon w \mapsto w + u(\langle v, w \rangle + a\langle u, w \rangle) + v\langle u, w \rangle.$$

Мы будем называть элементы $T(u, v, a)$ (*симплектическими*) *ESD-преобразованиями.*

Такое же определение даёт Виктор Петров в [49]. Эти элементы обобщают одновременно и унипотенты короткого типа $T_{u,v}(a) = T(u, va, 0)$, и унипотенты длинного типа $T_u(a) = T(u, 0, a)$ [59]. Общее ESD-преобразование является произведением двух унипотентов: короткого и длинного типа, $T(u, v, a) = T_u(a)\, T_{u,v}(1)$.

Прямое вычисление показывает, что имеют место следующие свойста ESD-преобразований. Подробное доказательство можно найти, например, в [49].

Лемма 2.1. *Пусть u, v, $w \in R^{2l}$ — три вектора такие, что $\langle u, v\rangle = 0$, $\langle u, w\rangle = 0$, и пусть a, $b \in R$. Тогда*

a) $T(u, v, a) \in \mathrm{Sp}(2l, R)$,

b) $T(u, v, a)\,T(u, w, b) = T(u, v + w, a + b + \langle v, w\rangle)$,

c) $T(u, va, 0) = T(v, ua, 0)$,

d) $T(u + v, 0, a) = T(u, 0, a)T(v, 0, a)T(u, va, 0)$,

e) $g\,T(u, v, a)g^{-1} = T(gu, gv, a) \quad \forall\, g \in \mathrm{Sp}(2l, R)$.

Замечание. Отметим, что $T(u, 0, 0) = 1$ и $T(u, v, a)^{-1} = T(u, -v, -a)$.

В следующем частном случае у нас есть простая формула для коммутатора двух ESD-преобразований.

Лемма 2.2. *Для u, $v \in R^{2l}$ таких, что $u_i = u_{-i} = v_i = v_{-i} = 0$, $\langle u, v\rangle = 0$, и $a \in R$ имеет место тождество*

$$[T(e_i, u, 0), T(e_{-i}, v, a)] = T(u, v\varepsilon_i, a)T(e_{-i}, -ua\varepsilon_{-i}, 0).$$

Доказательство. Доказательство — это простое вычисление с использованием свойств ESD-преобразований, приведённых выше. Сначала воспользуемся формулой для сопряжённого элемента и перепишем коммутатор следующим образом:

$$\begin{aligned}
&[T(e_i, u, 0), T(e_{-i}, v, a)] = T(e_i, u, 0)\cdot {}^{T(e_{-i}, v, a)}T(e_i, -u, 0) = \\
&\quad = T(e_i, u, 0)T(T(e_{-i}, v, a)e_i, -T(e_{-i}, v, a)u, 0) = T(e_i, u, 0)T(e_i + e_{-i}a\varepsilon_{-i} + v\varepsilon_{-i}, -u, 0).
\end{aligned}$$

Теперь, пользуясь *b*) и *c*) из Леммы 2.1, получаем

$$\begin{aligned}
&T(e_i, u, 0)T(e_i + e_{-i}a\varepsilon_{-i} + v\varepsilon_{-i}, -u, 0) = T(u, e_i, 0)T(u, -e_i + e_{-i}a\varepsilon_i + v\varepsilon_i, 0) = \\
&\quad = T(u, e_{-i}a\varepsilon_i + v\varepsilon_i, a) = T(u, v\varepsilon_i, a)T(u, e_{-i}a\varepsilon_i, 0) = T(u, v\varepsilon_i, a)T(e_{-i}, -ua\varepsilon_{-i}, 0).
\end{aligned}$$

□

Дадим определение элементарной симплектической группы, аналога группы элементарных преобразований $\mathrm{E}(n, R)$ в линейном случае.

Определение. Обозначим $T_{ij}(a) = T(e_i, e_{-j}a\varepsilon_{-j}, 0)$ и $T_{i,-i}(a) = T(e_i, 0, a)$, где $a \in R$, i, $j \in \{-l, \ldots, -1, 1, \ldots, l\}$, $i \notin \{\pm j\}$. Эти элементы называются *элементарными симлектическими трансвекциями*. Подгруппа $\mathrm{Sp}(2l, R)$, которую они порождают, называется *элементарной симплектической группой*

$$\mathrm{Ep}(2l, R) = \langle T_{ij}(a) \mid i \neq j,\ a \in R\rangle \leq \mathrm{Sp}(2l, R).$$

Наш выбор знака в длиннокорневых элементарных трансвекциях совпадает, например, с выбором в [49]. Часто знак выбирают иначе, а именно для длинного корня $2\chi_i \in \mathsf{C}_l$ соответствующий элементарный корневой унипотент $x_{2\chi_i}(a) = T_{i,-i}(a\varepsilon_i)$. Отметим также, что элементы $T_{ii}(a)$ не определены.

Лемма 2.3. *Для $v \in R^{2l}$ такого, что $v_{-i} = 0$ обозначим*

$$v_- = \sum_{i<0} e_i v_i \qquad \text{и} \qquad v_+ = \sum_{i>0} e_i v_i.$$

Тогда

$$T(e_i,\, v,\, a) = T_{i,-i}(a + 2v_i - v_i\varepsilon_i - \langle v_-,\, v_+\rangle)\cdot \\ \cdot T_{-l,-i}(v_{-l}\varepsilon_i)\dots T_{-1,-i}(v_{-1}\varepsilon_i)T_{1,-i}(v_1\varepsilon_i)\dots T_{l,-i}(v_l\varepsilon_i).$$

Доказательство. Будем считать для определённости, что $i > 0$. Так как для $j \neq -i$, верно $T_{j,-i}(v_j\varepsilon_i) = T(e_i,\, e_jv_j,\, 0)$, а $T_{i,-i}(2v_i) = T(e_i,\, 0,\, 2v_i) = T(e_i,\, e_iv_i,\, 0)$, поэтому получаем, что

$$T_{-l,-i}(v_{-l}\varepsilon_i)\dots T_{-1,-i}(v_{-1}\varepsilon_i) = T(e_i,\, e_{-l}v_{-l},\, 0)\dots T(e_i,\, e_{-1}v_{-1},\, 0) = T(e_i,\, v_-,\, 0),$$

а также

$$T_{i,-i}(2v_i)T_{i,-i}(-v_i\varepsilon_i)T_{1,-i}(v_1\varepsilon_i)\dots T_{l,-i}(v_l\varepsilon_i) = T(e_i,\, e_1v_1,\, 0)\dots T(e_i,\, e_lv_l,\, 0) = T(e_i,\, v_+,\, 0).$$

Здесь сомножители $T_{i,-i}(-v_i\varepsilon_i)$ и $T_{i,-i}(v_i\varepsilon_i)$ просто сокращаются. Таким образом, правая часть искомого тождества равна

$$T_{i,-i}(a - \langle v_-,\, v_+\rangle)T(e_i,\, v_-,\, 0)T(e_i,\, v_+,\, 0) = \\ = T(e_i,\, 0,\, a - \langle v_-,\, v_+\rangle)T(e_i, v, \langle v_-,\, v_+\rangle) = T(e_i,\, v,\, a).$$

$\square$

Лемма 2.3 показывает, что $T(e_i,\, v,\, a)$ лежат в элементарной симплектической группе $\mathrm{Ep}(2l,\, R)$. В действительности, мы можем легко вывести следующее утверждение, называемое обычно леммой Уайтхеда–Васерштейна.

Лемма 2.4. *Пусть $u,\, v \in R^{2l}$ такие, что u имеет пару симметричных нулевых координат, $u_i = u_{-i} = 0$ для некоторого i, $\langle u,\, v\rangle = 0$, $a \in R$. Тогда $T(u,\, v,\, a) \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)$.*

Доказательство. Обозначим $v' = e_iv_i + e_{-i}v_{-i}$ и $\tilde{v} = v - v'$. Тогда, пользуясь Леммой 2.1 *b*), получаем

$$T(u,\, v,\, a) = T(u,\, \tilde{v},\, a)T(u,\, v',\, 0),$$

где $T(u,\, v',\, 0)$ в свою очередь раскладывается в силу того же утверждения Леммы 2.1 *b*), как произведение

$$T(u,\, v',\, 0) = T(u,\, e_iv_i,\, 0)T(u,\, e_{-i}v_{-i},\, 0)T(u,\, 0,\, -v_iv_{-i}).$$

По Лемме 2.1 c), $T(u,\, e_i v_i,\, 0) = T(e_i,\, uv_i,\, 0)$ лежит в элементарной симплектической группе, и точно так же $T(u,\, e_{-i}v_{-i},\, 0) \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)$.

В силу Леммы 2.2,

$$T(u,\, \tilde{v},\, a) = [T(e_i,\, u,\, 0),\, T(e_{-i},\, \tilde{v}\varepsilon_i,\, a)]T(e_{-i},\, ua\varepsilon_{-i},\, 0)$$

тоже лежит в элементарной симплектической группе, и точно так же $T(u,\, 0,\, -v_i v_{-i}) \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)$. $\square$

Теперь всё готово, чтобы доказать нормальность $\mathrm{Ep}(2l,\, R)$ в $\mathrm{Sp}(2l,\, R)$. Впервые этот факт был доказан Копейко в [8]. Его доказательство работает также для случая $l = 2$, но доказательство, приведённое здесь, гораздо проще, и поэтому мы будем следовать именно ему в следующем разделе настоящей главы, работая с симплектической группой Стейнберга.

Теорема (Копейко)**.** *Элементарная симплектическая группа* $\mathrm{Ep}(2l,\, R)$ *является нормальной подгруппой в* $\mathrm{Sp}(2l,\, R)$*. Более того, она совпадает с подгруппой* $\mathrm{Sp}(2l,\, R)$*, порождённой всеми ESD-преобразованиями* $T(u,\, v,\, a)$*.*

Доказательство. В силу Леммы 2.1 e), достаточно проверить только второе утверждение, то есть, показать, что любое ESD-преобразование $T(u,\, v,\, a)$ элементарно. Пусть $u, v \in R^{2l}$ такие, что $\langle u,\, v\rangle = 0$, $a \in R$. Как уже отмечено выше, можно представить ESD-преобразование в виде следующего произведения пользуясь Леммой 2.1 b)

$$T(u,\, v,\, a) = T(u,\, v,\, 0)T(u,\, 0,\, a),$$

а затем разложить

$$T(u,\, v,\, 0) = T(v,\, 0,\, -1)T(u,\, 0,\, -1)T(u+v,\, 0,\, 1)$$

по Лемме 2.1 d). Таким образом, достаточно проверить, что для любого $u \in R^{2l}$ и $a \in R$ трансвекция $T(u,\, 0,\, a)$ элементарна.

Обозначим $u' = e_i u_i + e_{-i} u_{-i}$ и $\tilde{u} = u - u'$. Тогда

$$T(u,\, 0,\, a) = T(\tilde{u},\, 0,\, a)T(u',\, 0,\, a)T(\tilde{u},\, u'a,\, 0).$$

Все сомножители в правой части равенства элементарны по Лемме 2.4. $\square$

Важным отличием этой теоремы от теоремы нормальности Суслина из прошлой главы является тот факт, что *любое* ESD-преобразование $T(u,\, v,\, a)$ оказывается элементарным. В линейном случае матрица $1 + uv^t$ оказывалась элементарной только при условии унимодулярности вектора u. Вопрос о том, является ли произвольная линейная трансвекция элементарной, то есть, верно ли, что для любых $u,\, v \in R^n$ таких, что $u^t v = 0$, выполнено $1 + uv^t \in \mathrm{E}(n,\, R)$, является открытым вопросом.

Кроме того, приведённое доказательство даёт оценку на длину $T(u,\, v,\, a)$ в элементарных образующих. То есть, независимо от кольца R, любое ESD-преобразование представляется как произведение не более $2l \times 12 \times 3 \times 4 = 288l$ элементарных трансвекций.

2.1.2 Определение симплектической группы Стейнберга

Аналогично линейному случаю, симплектическая группа Стейнберга моделирует поведение элементарных симплектических трансвекций.

Определение. *Симплектической группой Стейнберга* $\mathrm{StSp}(2l,\,R)$ называется группа, заданная формальными образующими $X_{ij}(a)$, $i \neq j$, $a \in R$ и следующими соотношениями между ними:

$$X_{ij}(a) = X_{-j,-i}(-a\varepsilon_i\varepsilon_j), \tag{P0}$$

$$X_{ij}(a)X_{ij}(b) = X_{ij}(a+b), \tag{P1}$$

$$[X_{ij}(a),\, X_{hk}(b)] = 1,\ \text{при } h \notin \{j,-i\},\ k \notin \{i,-j\}, \tag{P2}$$

$$[X_{ij}(a),\, X_{jk}(b)] = X_{ik}(ab),\ \text{при } i \notin \{-j,-k\},\ j \neq -k, \tag{P3}$$

$$[X_{i,-i}(a),\, X_{-i,j}(b)] = X_{ij}(ab\varepsilon_i)X_{-j,j}(-ab^2), \tag{P4}$$

$$[X_{ij}(a),\, X_{j,-i}(b)] = X_{i,-i}(2ab\varepsilon_i). \tag{P5}$$

Разумеется, мы накладываем соотношение только в том случае, когда и правая, и левая части равенства определены, в частности, элементы $X_{ii}(a)$ не появляются. Так, P3 и P4 можно написать только для $i \neq k$, так что у нас нет соотношений на коммутаторы вида $[X_{kj}(a),\, X_{jk}(b)]$.

Замечание. Такое определение совпадает с определением, данным в первой главе. Действительно, симплектическая группа отвечает системе корней

$$\mathsf{C}_l = \{\pm\chi_i \pm \chi_j,\, \pm 2\chi_i \mid i \neq j,\ \chi_i \text{ базисный вектор } \mathbb{R}^l\},$$

и дополнительно обозначив $\chi_{-i} = -\chi_i$, получаем, что коротким корням соответствуют образующие $y_{\chi_i+\chi_j}(a) = X_{ij}(a)$, а длинным: $y_{2\chi_i}(a) = X_{i,-i}(a\varepsilon_i)$.

Из Лемм 2.1 и 2.2 легко следует, что элементарные симплектические трансвекции $T_{ij}(a)$ удовлетворяют соотношениям P1–P6, другими словами, корректно определён эпиморфизм $\phi\colon \mathrm{StSp}(2l,\,R) \twoheadrightarrow \mathrm{Ep}(2l,\,R)$, отправляющий образующие $X_{ij}(a)$ в соответствующие элементарные трансвекции.

Определение. Рассмотрим ϕ как отображение из симплектической группы Стейнберга $\mathrm{StSp}(2l,\,R)$ в симплектическую группу $\mathrm{Sp}(2l,\,R)$. Тогда его коядро обозначается $\mathrm{K_1Sp}(2l,\,R)$, а его ядро — $\mathrm{K_2Sp}(2l,\,R)$,

$$\mathrm{K_2Sp}(2l,\,R) \rightarrowtail \mathrm{StSp}(2l,\,R) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Sp}(2l,\,R) \twoheadrightarrow \mathrm{K_1Sp}(2l,\,R),$$

и называются симплектическими K_1- и K_2-функторами.

Первым важным результатом этой главы будет доказательство того, что $\mathrm{K_2Sp}(2l,\,R)$ является центральной подгруппой группы Стейнберга.

В заключение этого пункта дадим введём определения относительной элементарной симплектической группы и относительной симплектической группы Стейнберга.

Определение. Пусть $I \trianglelefteq R$. Следующая нормальная подгруппа группы $\mathrm{Ep}(2l,\,R)$

$$\mathrm{Ep}(2l,\,R,\,I) = {}^{\mathrm{Ep}(2l,\,R)}\langle T_{ij}(a) \mid i \neq j,\; a \in I\rangle$$

называется относительной элементарной симплектической группой, отвечающей идеалу I.

Введём следующие обозначения. Если группа G действует на группе H слева, мы будем обозначать образ $h \in H$ под действием гомоморфизма, отвечающего элементу $g \in G$, через ${}^g h$, кроме того, элемент ${}^g h \cdot h^{-1}$ через $[\![g,\,h]\!]$ и элемент $h \cdot {}^g h^{-1}$ через $[\![h,\,g]\!]$.

Следующее определение — это симплектическая версия копредставления Койне и Лодея для относительной группы Стейнберга [37, 44].

Определение. Определим для $I \trianglelefteq R$ *относительную симплектическую группу Стейнберга* $\mathrm{StSp}(2l,\,R,\,I)$ как группу с действием абсолютной группы Стейнберга $\mathrm{StSp}(2l,\,R)$, заданную множеством (относительных) образующих $\{Y_{ij}(a) \mid i \neq j,\; a \in I\}$ и следующими соотношениями между ними

$$Y_{ij}(a) = Y_{-j,-i}(-a\varepsilon_i\varepsilon_j), \tag{KL0}$$

$$Y_{ij}(a)Y_{ij}(b) = Y_{ij}(a+b), \tag{KL1}$$

$$[\![X_{ij}(r),\,Y_{hk}(a)]\!] = 1,\ \text{при } h \notin \{j,-i\},\; k \notin \{i,-j\}, \tag{KL2}$$

$$[\![X_{ij}(r),\,Y_{jk}(a)]\!] = Y_{ik}(ra),\ \text{при } i \notin \{-j,-k\},\; j \neq -k, \tag{KL3}$$

$$[\![X_{i,-i}(r),\,Y_{-i,j}(a)]\!] = Y_{ij}(ra\varepsilon_i)Y_{-j,j}(-ra^2), \tag{KL4}$$

$$[\![Y_{i,-i}(a),\,X_{-i,j}(r)]\!] = Y_{ij}(ar\varepsilon_i)Y_{-j,j}(-ar^2), \tag{KL5}$$

$$[\![X_{ij}(r),\,Y_{j,-i}(a)]\!] = X_{i,-i}(2ra\varepsilon_i), \tag{KL6}$$

$${}^{X_{ij}(a)}\left({}^{X_{hk}(r)}Y_{st}(b)\right) = {}^{Y_{ij}(a)}\left({}^{X_{hk}(r)}Y_{st}(b)\right). \tag{KL7}$$

Другими словами, мы рассматриваем свободную группу, порождённую парами $(g,\,x) = {}^g x$, где g из абсолютной группы Стейнберга, а x из множества относительных образующих, $\mathrm{StSp}_{2l}(R)$ действует на этой свободной группе естественным образом, ${}^f(g,\,x) = (fg,\,x)$, и мы определяем относительную группу Стейнберга как фактор свободной группы выше по эквивариантной нормальной подгруппе, заданной соотношениями KL0–KL7.

Разумеется, естественное отображение $\varphi : \mathrm{StSp}(2l,\,R,\,I) \to \mathrm{Ep}(2l,\,R,\,I)$ корректно определено. Кроме того, определено естественное эквивариантное отображение из $\mathrm{StSp}(2l,\,R,\,I)$ в $\mathrm{StSp}(2l,\,R)$, переводящее $Y_{ij}(a)$ в $X_{ij}(a)$, и его образ — это нормальная подгруппа, порождённая образующими $\{X_{ij}(a) \mid a \in I\}$, другими словами, его образ совпадает с $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{StSp}_{2n}(R) \twoheadrightarrow \mathrm{StSp}_{2n}(R/I)\right)$. Если же идеал I расщепляющийся, то это ядро в действительности изоморфно относительной группе Стейнберга.

Лемма 2.5. *Пусть $I \trianglelefteq R$ — расщепляющийся идеал. Тогда естественное отображение*

$$\iota\colon\ \mathrm{StSp}(2l,\,R,\,I) \to \mathrm{StSp}(2l,\,R)$$

инъективно.

Доказательство. Обозначим через $\rho\colon R \twoheadrightarrow R/I$ естественную проекцию и через $\sigma\colon R/I \to R$ её сечение. Тогда $\mathrm{StSp}(2l,\, R/I)$ действует на $\mathrm{StSp}(2l,\, R,\, I)$ через σ^* и можно рассмотреть полупрямое произведение $\mathrm{StSp}(2l,\, R,\, I) \leftthreetimes \mathrm{StSp}(2l,\, R/I)$, которое отображается в $\mathrm{StSp}(2l,\, R)$ при помощи $\iota \leftthreetimes \sigma^*$

$$\mathrm{StSp}(2l,\, R,\, I) \leftthreetimes \mathrm{StSp}(2l,\, R/I) \to \mathrm{StSp}(2l,\, R), \quad (x,\, y) \mapsto \iota(x) \cdot \sigma^*(y).$$

Мы построим обратное отображение

$$\psi\colon\ \mathrm{StSp}(2l,\, R) \to \mathrm{StSp}(2l,\, R,\, I) \leftthreetimes \mathrm{StSp}(2l,\, R/I)$$

по правилу

$$X_{ij}(r) \mapsto \big(Y_{ij}(r - \sigma\rho(r)),\, X_{ij}(\rho(r))\big).$$

Ясно, что если $\iota \leftthreetimes \sigma^*$ — изоморфизм, то ι инъективно.

Чтобы показать, что ψ корректно определено, нужно проверить, что соотношения P0–P5 выполняются для образов образующих группы Стейнберга. Рассмотрим соотношение P4. Мы покажем, что образы

$$X_{i,-i}(a)X_{-i,j}(b)X_{i,-i}(-a) \text{ и } X_{ij}(ab\varepsilon_i)X_{-j,j}(-ab^2)X_{-i,j}(b)$$

при ψ совпадают. Действительно,

$$\begin{aligned}\psi\Big(X_{i,-i}(a)X_{-i,j}(b)X_{i,-i}(-a)\Big) &= \\ = \Big(Y_{i,-i}(a - \sigma\rho(a))\, {}^{X_{i,-i}(\sigma\rho(a))}Y_{-i,j}(b - \sigma\rho(b)) &\cdot {}^{X_{i,-i}(\sigma\rho(a))X_{-i,j}(\sigma\rho(b))}Y_{i,-i}(-a + \sigma\rho(a)), \\ &X_{i,-i}(\rho(a))X_{i,-j}(\rho(b))X_{i,-i}(-\rho(a))\Big).\end{aligned}$$

Перепишем

$${}^{X_{-i,j}(\sigma\rho(b))}Y_{i,-i}(-a + \sigma\rho(a)) = Y_{i,-i}(-a + \sigma\rho(a))[Y_{i,-i}(a - \sigma\rho(a)),\, X_{-i,j}(\sigma\rho(b))]\!],$$

и получим с помощью KL7

$$\begin{aligned}&\psi\Big(X_{i,-i}(a)X_{-i,j}(b)X_{i,-i}(-a)\Big) = \\ &= \Big({}^{X_{i,-i}(a)}Y_{-i,j}(b - \sigma\rho(b))[Y_{i,-i}(a - \sigma\rho(a)),\, X_{-i,j}(\sigma\rho(b))]\!],\, X_{i,-i}(\rho(a))X_{i,-j}(\rho(b))X_{i,-i}(-\rho(a))\Big),\end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned}\psi\Big(X_{i,-i}(a)X_{-i,j}(b)X_{i,-i}(-a)\Big) &= \\ = \Big(Y_{ij}((ab - \sigma\rho(ab))\varepsilon_i) \cdot Y_{-i,j}(b - \sigma\rho(b))&Y_{-j,j}(-ab^2 + 2\,\sigma\rho(ab)b - \sigma\rho(ab^2)), \\ &X_{ij}(\sigma\rho(ab)\varepsilon_i)X_{-j,j}(-\sigma\rho(ab^2))X_{-i,j}(\sigma\rho(b))\Big).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\psi\Big(X_{ij}(ab\varepsilon_i)X_{-j,j}(-ab^2)X_{-i,j}(b)\Big) =$$
$$= \Big(Y_{ij}((ab-\sigma\rho(ab))\varepsilon_i)\cdot Y_{-j,j}(-ab^2+\sigma\rho(ab^2))\cdot {}^{X_{ij}(\sigma\rho(ab)\varepsilon_i)}Y_{-i,j}(b-\sigma\rho(b)),$$
$$X_{ij}(\sigma\rho(ab)\varepsilon_i)X_{-j,j}(-\sigma\rho(ab^2))X_{-i,j}(\sigma\rho(b))\Big).$$

Остальные соотношения проверяются так же и проще.

Ясно, что $\iota \leftthreetimes \sigma^* \circ \psi = 1$, и остаётся только заметить, что ψ сюръективно. Действительно, все элементы вида $(1,\, X_{ij}(s))$ или $(Y_{ij}(a),\, 1)$ лежат в образе ψ, а тогда и элементы вида $({}^{X_{hk}(r)}Y_{ij}(a),\, 1)$ тоже. $\square$

2.2 Другое копредставление

2.2.1 Формулировка результатов и план доказательства

В этом разделе мы перенесём идею ван дер Каллена о другом копредставлении для группы Стейнберга на симплектический случай. Приведём формулировку основного результата.

Теорема 3. *Пусть R — произвольное коммутативное кольцо, $l \geq 3$. Тогда симплектическая группа Стейнберга $\mathrm{StSp}(2l,\, R)$ может быть задана множеством образующих*

$$\big\{X(u,\, v,\, a)\,\big|u,\, v \in R^{2l},\; u \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)e_1,\; \langle u,\, v\rangle = 0,\; a \in R\big\}$$

и соотношениями

$$X(u,\, v,\, a)X(u,\, w,\, b) = X(u,\, v+w,\, a+b+\langle v,\, w\rangle), \tag{Q1}$$
$$X(u,\, va,\, 0) = X(v,\, ua,\, 0),\;\; \text{где } v \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)e_1,\; a \in R, \tag{Q2}$$
$$X(u',\, v',\, b)X(u,\, v,\, a)X(u',\, v',\, b)^{-1} = X(T(u',\, v',\, b)u,\, T(u',\, v',\, b)v,\, a). \tag{Q3}$$

При этом для обычных образующих группы Стейнберга выполняются следующие соотношения

$$X_{ij}(a) = X(e_i,\, e_{-j}a\varepsilon_{-j},\, 0) \text{ при } j \neq -i, \qquad X_{i,-i}(a) = X(e_i,\, 0,\, a),$$

и кроме того естественная проекция ϕ переводит $X(u,\, v,\, a)$ в $T(u,\, v,\, a)$. Более того, следующие соотношения вытекают из P1–P3*:*

$$X(ub,\, ua,\, 0) = X(u,\, 0,\, 2ab), \tag{Q4}$$
$$X(ub,\, 0,\, a) = X(u,\, 0,\, ab^2), \tag{Q5}$$
$$X(u+vr,\, 0,\, a) = X(u,\, 0,\, a)X(v,\, 0,\, ar^2)X(v,\, uar,\, 0) \;\text{ при } \langle u,\, v\rangle = 0, \tag{Q6}$$

если ub в Q4, Q5 *или v и $u+vr$ в* Q6 *— тоже столбцы элементарных симплектических матриц.*

Приведём сначала план доказательства этой теоремы, который будет реализован в п. 2–7 этого раздела.

Наша цель состоит в том, чтобы построить элементы $X(u,\, v,\, a) \in \phi^{-1}T(u,\, v,\, a)$, удовлетворяющие определяющим соотношениям. Сначала, в п. 2, мы даём определение элементам $X(e_i,\, v,\, a)$, то есть, рассматриваем частный случай, когда $u = e_i$ — базисный вектор. А именно, каждый элемент унипотентного радикала типа U_1 в $\mathrm{Ep}(2l,\, R)$ имеет вид $T(e_i,\, v,\, a)$. А так как соответствующие унипотентные радикалы в группе Стейнберга и элементарной группе изоморфны (см. Лемму 2.8), мы можем выбрать $X(e_i,\, v,\, a)$, пользуясь этим изоморфизмом. После этого мы проверяем, что так определённые элементы $X(e_i,\, v,\, a)$ имеют искомые свойства, то есть, такие же, какие были сформулированы в Леммах 2.1 и 2.2, см. Леммы 2.10, 2.11, 2.12, 2.13.

В п. 3 мы обобщаем определение $X(u,\, v,\, a)$ на более широкий класс векторов u. А именно, удовлетворяющих условию $u_i = u_{-i} = 0$. Заметим, что сформулированное в Лемме 2.2 свойство,

$$[X(e_i,\, u,\, 0),\, X(e_{-i},\, v,\, a)] = X(u,\, v\varepsilon_i,\, a)X(e_{-i},\, -ua\varepsilon_{-i},\, 0),$$

следует из искомых соотношений между ESD-образующими Q1–Q3 (сравни Лемму 2.42). В этой формуле только $X(u,\, v\varepsilon_i,\, a)$ ещё не определён, поэтому мы можем использовать тождество выше как определение $X(u,\, v\varepsilon_i,\, a) \in \phi^{-1}T(u,\, v\varepsilon_i,\, a)$. Разумеется, это можно сделать только в ситуации, когда $u_i = v_i = u_{-i} = v_{-i} = 0$ (сравни условия Леммы 2.2). При этом нужно проверять корректность такого определения (Лемма 2.17). Далее мы обобщаем результаты и на случай произвольного v, как и в доказательстве нормальности элементарной симплектической группы (корректность доказана в Лемме 2.21).

В п, 4 мы переходим к произвольному u. Так как $X(u,\, 0,\, a)$ порождают группу Стейнберга (см. Лемму 2.31), мы можем предположить, что $v = 0$. Мы используем соотношение

$$T(v + w,\, 0,\, a) = T(v,\, 0,\, a)T(w,\, 0,\, a)T(w,\, va,\, 0)$$

как определение образующий группы Стейнберга. В качестве векторов v и w мы выбираем $w = e_iu_i + e_{-i}u_{-i}$ и $v = u - w$. Тогда левая часть равенства выше равна $T(u,\, 0,\, a)$, а все ESD-преобразования в правой части к этому моменту уже подняты в группу Стейнберга в п. 3. Пункт 4 посвящён доказательству корректности такого определения (Лемма 2.26) и некоторым промежуточным результатам.

После того, как мы определили длиннокорневые унипотенты $X(u,\, 0,\, a)$, в п. 5 мы доказываем свойство сопряжённости

$$g\, X(u,\, 0,\, a)g^{-1} = X(\phi(g)u,\, 0,\, a).$$

Достаточно рассмотреть только случаи $g = X_{i,-i}(b)$ (Лемма 2.27) И $g = X_{jk}(b)$ (Лемма 2.30). В этот момент в действительности завершается доказательство центральности симплектического K_2, но не теоремы о другом копредставлении.

Цель п. 6 — это доказательство соотношений Q1–Q6. Мы начинаем с Q5 (Лемма 2.34). Затем мы определяем короткокорневые унипотенты $X(v,\, u,\, 0)$ при помощи соотношения

$$X(u+v,\, 0,\, 1) = X(u,\, 0,\, 1)X(v,\, 0,\, 1)X(v,\, u,\, 0).$$

Далее, мы приводим доказательство Q4 (Лемма 2.35) и Q6 (Лемма 2.38). Наконец, мы даём определение $X(u,\, v,\, a) = X(u,\, v,\, 0)X(u,\, 0,\, a)$ и проверяем Q1–Q3 (Лемма 2.41).

В следующем пункте 7 мы определяем при помощи соотношений Q1–Q3 симплектическую группу ван дер Каллена $\mathrm{StSp}^*(2l,\, R)$ и доказываем, что она в действительности изоморфна симплектической группе Стейнберга.

2.2.2 Унипотентные радикалы в группах Стейнберга

Нашей первой целью будет определить аналоги ESD-трансвекций $T(u,\, v,\, a)$ в группе Стейнберга для частного случая, когда u является базисным вектором.

Определение. Определим *унипотентный радикал* в группе Стейнберга

$$^{(i)}U_1 = \langle X_{ij}(a) \mid j \neq i,\ a \in R\rangle$$

и *параболическую подгруппу* в группе Стейнберга

$$^{(i)}P_1 = \langle X_{kh}(a) \mid \{h, -k\} \not\ni i,\ a \in R\rangle.$$

Следующий результат хорошо известен. Он легко следует из соотношений Стейнберга.

Лемма 2.6 (Разложение Леви). *Для $g \in {}^{(i)}P_1$, $u \in {}^{(i)}U_1$ верно, что*

$$gug^{-1} \in {}^{(i)}U_1.$$

Следующая лемма является ещё одним очевидным следствием соотношений Стейнберга.

Лемма 2.7. *Верны следующие утверждения*

$$[{}^{(i)}U_1,\, {}^{(i)}U_1] \leq \langle X_{i,-i}(a)\rangle, \qquad [{}^{(i)}U_1,\, \langle X_{i,-i}(a)\rangle] = 1.$$

Другими словами, эта лемма утверждает, что корневая подгруппа $X_{i,-i}$ лежит в центре ${}^{(i)}U_1$ и класс нильпотентности ${}^{(i)}U_1$ не превосходит 2. Теперь легко видеть следующее следствие.

Следствие. *Каждый элемент ${}^{(i)}U_1$ может быть выражен в форме*

$$X_{i,-l}(a_{-l}) \ldots X_{i,-1}(a_{-1})X_{i,1}(a_1) \ldots X_{i,l}(a_l).$$

Разумеется, имеется в виду, что несуществующий сомножитель $X_{ii}(a_i)$ опущен в данном произведении.

Лемма 2.8. *Ограничение естественной проекции* $\phi\colon \mathrm{StSp}(2l,\, R) \twoheadrightarrow \mathrm{Ep}(2l,\, R)$ *на* ${}^{(i)}U_1$ *инъективно,*

$$ {}^{(i)}U_1 \cong \phi({}^{(i)}U_1). $$

Доказательство. Возьмём элемент $x \in {}^{(i)}U_1$. Используя следствие выше, разложим x как

$$ x = X_{i,-l}(a_{-l}) \ldots X_{i,-1}(a_{-1}) X_{i,1}(a_1) \ldots X_{i,l}(a_l). $$

Тогда $\phi(x) = 1$ влечёт, что $a_i = 0$ для всех i. □

Определение. Для $v \in V$ такого, что $v_{-i} = 0$, $a \in R$, определим

$$ Y(e_i,\, v,\, a) = (\phi|_{{}^{(i)}U_1})^{-1}\big(T(e_i,\, v,\, a)\big). $$

Замечание. Согласно Лемме 2.3, $T(e_i,\, v,\, a)$ действительно лежит в $\phi({}^{(i)}U_1)$. Более того, та же лемма даёт следующее разложение.

Лемма 2.9. *Для* $v \in V$ *такого, что* $v_{-i} = 0$, $a \in R$, *верно, что*

$$ Y(e_i,\, v,\, a) = X_{i,-i}(a + 2v_i - v_i\varepsilon_i - \langle v_-,\, v_+\rangle)\cdot \\ \cdot X_{-l,-i}(v_{-l}\varepsilon_i) \ldots X_{-1,-i}(v_{-1}\varepsilon_i) X_{1,-i}(v_1\varepsilon_i) \ldots X_{l,-i}(v_l\varepsilon_i). $$

Следствие 1. *В частности,* $Y(e_{-j},\, -e_i a\varepsilon_j,\, 0) = X_{ij}(a)$ *для* $i \notin \{\pm j\}$ *и* $Y(e_i,\, 0,\, a) = X_{i,-i}(a)$.

Следствие 2. *Для* $j \neq -i$, $v \in V$ *таких, что* $v_{-i} = v_{-j} = 0$, $a \in R$, *верно, что* $Y(e_i,\, v,\, a) \in {}^{(j)}P_1$.

Лемма 2.10. *Для* $v,\, w \in V$ *таких, что* $v_{-i} = w_{-i} = 0$ *и* $a,\, b \in R$, *верно, что*

$$ Y(e_i,\, v,\, a) Y(e_i,\, w,\, b) = Y(e_i,\, v + w,\, a + b + \langle v,\, w\rangle). $$

Доказательство. Очевидно, $(v + w)_{-i} = 0$, поэтому правая часть данного равенства корректно определена. Теперь остаётся заметить, что образы элементов обеих частей равенства под действием ϕ совпадают. □

Следствие. *Верны равенства* $Y(e_i,\, 0,\, 0) = 1$ *и* $Y(e_i,\, v,\, a)^{-1} = Y(e_i,\, -v,\, -a)$.

Лемма 2.11. *Для* $g \in {}^{(i)}P_1$, $v \in V$ *такого, что* $v_{-i} = 0$, $a \in R$, *верно, что*

$$ g\,Y(e_i,\, v,\, a) g^{-1} = Y(e_i,\, \phi(g)v,\, a). $$

Доказательство. Во-первых, заметим, что, так как $T_{kh}(a)e_i = e_i$ для $i \notin \{h, -k\}$, имеем $\phi(g)e_i = e_i$. Таким образом,

$$ \langle e_i,\, \phi(g)v\rangle = \langle \phi(g)e_i,\, \phi(g)v\rangle = \langle e_i,\, v\rangle = 0. $$

Следовательно, $(\phi(g)v)_{-i} = 0$ и правая часть искомого равенства корректно определена. Наконец, заметим, что образы двух частей выражения под действием ϕ совпадают. □

Лемма 2.12. *Для $j \neq -i$, $a \in R$, верно $Y(e_i,\, e_j a,\, 0) = Y(e_j,\, e_i a,\, 0)$.*

Доказательство. Для $i = j$ утверждение очевидно. Пусть $i \neq j$, тогда

$$Y(e_i,\, e_j a,\, 0) = X_{-j,i}(a\varepsilon_i) = X_{-i,j}(-a\varepsilon_j) = Y(e_j,\, e_i a,\, 0),$$

где второе равенство выполняется по P0. □

Следующая лемма является аналогом Леммы 2.2 для $Y(e_i,\, v,\, a)$-ов.

Лемма 2.13. *Для $v \in V$ такого, что $v_{-j} = v_k = v_{-k} = 0$, $k \notin \{\pm j\}$, $a,\, b \in R$, верно*

$$[Y(e_k,\, e_j b,\, 0),\, Y(e_{-k},\, v,\, a)] = Y(e_j,\, vb\varepsilon_k,\, ab^2)Y(e_{-k},\, -e_j ab\varepsilon_{-k},\, 0).$$

Доказательство. Так как $Y(e_k,\, e_j b,\, 0)$ лежит в ${}^{(j)}U_1$ и $Y(e_{-k},\, v,\, a)$ лежит в ${}^{(j)}P_1$, обе части искомого равенства лежат в ${}^{(j)}U_1$. Теперь остаётся воспользоваться тем, что их образы в $\mathrm{Ep}(2l,\, R)$ совпадают по Лемме 2.2. □

Следствие. *Для $v \in V$ такого, что $v_{-j} = v_k = v_{-k} = 0$, $k \notin \{\pm j\}$, $a, b \in R$ имеем следующее разложение*

$$Y(e_j,\, vb,\, ab^2) = [Y(e_k,\, e_j b,\, 0),\, Y(e_{-k},\, v\varepsilon_k,\, a)]Y(e_{-k},\, e_j ab\varepsilon_{-k},\, 0).$$

Определение. Для $i \notin \{\pm j\}$, $\alpha \in R^\times$ определим

$$W_{ij}(\alpha) = X_{ij}(\alpha)X_{ji}(-\alpha^{-1})X_{ij}(\alpha).$$

Следующий факт хорошо известен. Его можно доказать, применяя соотношения Стейнберга или применяя формулу сопряжения, полученную выше.

Лемма 2.14. *Для $i \notin \{\pm j\}$, $k \notin \{\pm i, \pm j\}$, $\alpha \in R^\times$, $a \in R$, верны следующие равенства*

1. ${}^{W_{ij}(\alpha)}X_{kj}(a) = X_{ki}(\alpha^{-1}a)$,
2. ${}^{W_{ij}(\alpha)}X_{k,-j}(a) = X_{k,-i}(\alpha a\varepsilon_i\varepsilon_j)$,
3. ${}^{W_{ij}(\alpha)}X_{j,-j}(a) = X_{i,-i}(\alpha^2 a)$,
4. ${}^{W_{ij}(\alpha)}X_{-j,j}(a) = X_{-i,i}(\alpha^{-2}a)$.

Лемма 2.15. *Рассмотрим $v \in V$ такое, что $v_i = v_{-i} = v_j = v_{-j} = 0$, $i \notin \{\pm j\}$, $\alpha \in R^\times$. Тогда*

1. ${}^{W_{ij}(\alpha)}Y(e_j,\, v,\, a) = Y(e_i,\, v\alpha,\, \alpha^2 a)$,
2. ${}^{W_{ij}(\alpha)}Y(e_{-j},\, v,\, a) = Y(e_{-i},\, v\alpha^{-1}\varepsilon_i\varepsilon_j,\, \alpha^{-2}a)$.

Доказательство. Согласно Лемме 2.9, имеем

$$Y(e_j,\,v,\,a) = X_{j,-j}(a - \langle v_-,\,v_+\rangle)X_{-l,-j}(v_{-l}\varepsilon_j)\ldots X_{-1,-j}(v_{-1}\varepsilon_j)X_{1,-j}(v_1\varepsilon_j)\ldots X_{l,-j}(v_l\varepsilon_j).$$

Заметим, что элементы вида $X_{-i,-j}(v_{-i}\varepsilon_j)$ и $X_{i,-j}(v_i\varepsilon_j)$ могут быть опущены в этом произведении, так как $v_i = v_{-i} = 0$. Поэтому, согласно предыдущей лемме, верно, что

$$\begin{aligned}
&{}^{W_{ij}(\alpha)}Y(e_j,\,v,\,a) = \\
&= {}^{W_{ij}(\alpha)}X_{j,-j}(a - \langle v_-,\,v_+\rangle)\cdot {}^{W_{ij}(\alpha)}\big(X_{-l,-j}(v_{-l}\varepsilon_j)\ldots X_{-1,-j}(v_{-1}\varepsilon_j)X_{1,-j}(v_1\varepsilon_j)\ldots X_{l,-j}(v_l\varepsilon_j)\big) = \\
&\quad = X_{i,-i}((a - \langle v_-,\,v_+\rangle)\alpha^2)\cdot X_{-l,-i}(v_{-l}\alpha\varepsilon_i)\ldots X_{-1,-i}(v_{-1}\alpha\varepsilon_i)X_{1,-i}(v_1\alpha\varepsilon_i)\ldots X_{l,-i}(v_l\alpha\varepsilon_i) = \\
&\qquad\qquad = Y(e_i,\,v\alpha,\,\alpha^2 a).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно доказать b). □

2.2.3 Определение ESD-образующих для векторов, имеющих нули

В предыдущем пункте мы в числе прочего доказали разложение такого же вида, что и в формулировке Леммы 2.2, для ESD-образующих группы Стейнберга $X(u,\,v,\,a)$ в частном случае, когда $u = e_i$. Теперь мы собираемся использовать это разложение, чтобы определить ESD-образующие в большей общности, когда u не обязательно является базисным вектором, но имеет хотя бы одну пару нулевых координат. Как и всегда, основная техническая задача — проверить корректность данного определения.

Ниже предполагается, если явно не оговорено обратное, что индексы, обозначенные разными буквами, не равны и не дают в сумме ноль, то есть $i \notin \{\pm j\}$.

Определение. Для $u,\,v \in V$ таких, что $\langle u,\,v\rangle = 0$, $u_i = u_{-i} = v_i = v_{-i} = 0$, $a \in R$ обозначим

$$Y_{(i)}(u,\,v,\,a) = [Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)]Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0).$$

Замечание 1. Согласно Лемме 2.2 верно, что $\phi\big(Y_{(i)}(u,\,v,\,a)\big) = T(u,\,v,\,a)$.

Замечание 2. По Лемме 2.13 для $v \in V$ такого, что $v_{-j} = v_i = v_{-i} = 0$, $a \in R$ верно, что

$$Y_{(i)}(e_j,\,v,\,a) = Y(e_j,\,v,\,a).$$

Аналогичным образом можно получить следующий результат.

Лемма 2.16. *Для $v \in V$ такого, что $v_{-j} = v_i = v_{-i} = 0$, $b \in R$ верно равенство*

$$Y_{(i)}(v,\,e_j b,\,0) = Y(e_j,\,vb,\,0).$$

Доказательство. Так как $Y(e_i,\,v,\,0) \in {}^{(j)}P_1$, обе части лежат в ${}^{(j)}U_1$. □

Лемма 2.17. *Рассмотрим $u,\,v \in V$ такие, что $\langle u,\,v\rangle = 0$, $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$ и $v_i = v_{-i} = v_j = v_{-j} = 0$, $a \in R$. Тогда верно следующее равенство*

$$Y_{(i)}(u,\,v,\,a) = Y_{(j)}(u,\,v,\,a).$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что, так как $u_i = u_{-i} = v_i = v_{-i} = 0$, верно, что

$$Y(e_j,\, u,\, 0),\;\; Y(e_{-j},\, v\varepsilon_j,\, a),\;\; Y(e_{-j},\, ua\varepsilon_{-j},\, 0) \in {}^{(i)}P_1 \cap {}^{(-i)}P_1.$$

Таким образом, $Y_{(j)}(u,\, v,\, a)$ также принадлежит ${}^{(i)}P_1 \cap {}^{(-i)}P_1$. Тогда

$${}^{Y_{(j)}(u,v,a)}X_{ij}(1) = {}^{Y_{(j)}(u,v,a)}Y(e_i,\, e_{-j}\varepsilon_{-j},\, 0) = Y(e_i,\, e_{-j}\varepsilon_{-j},\, 0) = X_{ij}(1),$$

или, что то же самое, $[Y_{(j)}(u,\, v,\, a),\, X_{ij}(1)] = 1$. Рассуждая аналогично, можно проверить, что $[Y_{(j)}(u,\, v,\, a),\, X_{ji}(-1)] = 1$. Таким образом, $Y_{(j)}(u,\, v,\, a)$ коммутирует с $W_{ij}(1)$, и, используя Лемму 2.15, получаем

$$\begin{aligned} Y_{(j)}(u,\, v,\, a) = {}^{W_{ij}(1)}Y_{(j)}(u,\, v,\, a) &= {}^{W_{ij}(1)}\big([Y(e_j,\, u,\, 0),\, Y(e_{-j},\, v\varepsilon_j,\, a)]Y(e_{-j},\, ua\varepsilon_{-j},\, 0)\big) = \\ &= [Y(e_i,\, u,\, 0),\, Y(e_{-i},\, v\varepsilon_i,\, a)]Y(e_{-i},\, ua\varepsilon_{-i},\, 0) = Y_{(i)}(u,\, v,\, a). \end{aligned}$$

□

Замечание. Для u и v, имеющих только одну пару нулевых координат, еще не доказано, что $Y_{(i)}(u,\, v,\, a) = Y_{(-i)}(u,\, v,\, a)$. Поэтому на данный момент необходимо сохранять индекс при обозначении ESD-образующих.

Определение. Определим *подгруппу Леви* ${}^{(i)}L_1 = {}^{(i)}P_1 \cap {}^{(-i)}P_1$ (*в группе Стейнберга*).

Замечание. Заметим, что для $g \in {}^{(i)}L_1$ имеем $\phi(g)e_i = e_i$ и $\phi(g)e_{-i} = e_{-i}$. Действительно, если $h \neq k$, то первое равенство выполняется для $g = X_{kh}(a)$ при $\{-k, h\} \not\ni i$, а второе — для $g = X_{kh}(a)$ при $\{-k, h\} \not\ni -i$.

Лемма 2.18. *Для $u,\, v \in V$ таких, что $\langle u,\, v\rangle = 0$, $u_i = u_{-i} = v_i = v_{-i} = 0$, $a \in R$, $g \in {}^{(i)}L_1$, верно следующее утверждение*

$$g\,Y_{(i)}(u,\, v,\, a)g^{-1} = Y_{(i)}(\phi(g)u,\, \phi(g)v,\, a).$$

Замечание. Так как $\langle \phi(g)u,\, e_i\rangle = \langle \phi(g)u,\, \phi(g)e_i\rangle = \langle u,\, e_i\rangle = 0$, видно, что $(\phi(g)u)_{-i} = 0$ и аналогично $(\phi(g)u)_i = (\phi(g)v)_{-i} = (\phi(g)v)_i = 0$. Таким образом, $Y_{(i)}(\phi(g)u,\, \phi(g)v,\, a)$ корректно определён.

Доказательство. Используя то, что $g \in {}^{(i)}P_1 \cap {}^{(-i)}P_1$, и Лемму 2.11, получаем

$$\begin{aligned} {}^{g}Y_{(i)}(u,\, v,\, a) &= {}^{g}\big([Y(e_i,\, u,\, 0),\, Y(e_{-i},\, v\varepsilon_i,\, a)]Y(e_{-i},\, ua\varepsilon_{-i},\, 0)\big) = \\ &= [Y(e_i,\, \phi(g)u,\, 0),\, Y(e_{-i},\, \phi(g)v\varepsilon_i,\, a)]Y(e_{-i},\, \phi(g)ua\varepsilon_{-i},\, 0) = Y_{(i)}(\phi(g)u,\, \phi(g)v,\, a). \end{aligned}$$

□

Замечание 1. Из Леммы 2.3 следует, что для v такого, что $v_{-i} = v_j = v_{-j} = 0$, верно, что $Y(e_i,\, v,\, a) \in {}^{(j)}L_1$.

Замечание 2. Для w ортогонального u и v, $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$, имеем $T(u, v, a)w = w$. В вычислениях ниже этот факт часто используется без указания каких-либо ссылок.

Лемма 2.19. *Для $u, v \in V$ таких, что $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$, $v_i = v_{-i} = 0$ и $\langle u, v\rangle = 0$, и для $a, b \in R$, верно, что*

$$Y_{(i)}(u, v, a)Y_{(i)}(u, e_jb, 0) = Y_{(i)}(u, v + e_jb, a + v_{-j}b\varepsilon_{-j}).$$

Доказательство. Начнём с правой части

$$Y_{(i)}(u, v + e_jb, a + v_{-j}b\varepsilon_{-j}) = \\ = [Y(e_i, u, 0), Y(e_{-i}, (v + e_jb)\varepsilon_i, a + v_{-j}b\varepsilon_{-j})]Y(e_{-i}, u(a + v_{-j}b\varepsilon_{-j})\varepsilon_{-i}, 0).$$

Разложим $Y(e_{-i}, (v + e_jb)\varepsilon_i, a + v_{-j}b\varepsilon_{-j})$ внутри коммутатора и воспользуемся хорошо известным равенством $[a, bc] = [a, b] \cdot {}^b[a, c]$, чтобы получить

$$[Y(e_i, u, 0), Y(e_{-i}, (v + e_jb)\varepsilon_i, a + v_{-j}b\varepsilon_{-j})] = \\ = [Y(e_i, u, 0), Y(e_{-i}, v\varepsilon_i, a)Y(e_{-i}, e_jb\varepsilon_i, 0)] = \\ = [Y(e_i, u, 0), Y(e_{-i}, v\varepsilon_i, a)] \cdot {}^{Y(e_{-i}, v\varepsilon_i, a)}Y(e_j, ub, 0).$$

Заметим, что, вообще говоря, $Y(e_{-i}, v\varepsilon_i, a)$ не лежит в ${}^{(j)}P_1$, но $Y(e_j, ub, 0)$ всегда лежит в ${}^{(-i)}P_1$. Поэтому можно вычислить сопряжённый элемент следующим образом

$${}^{Y(e_{-i}, v\varepsilon_i, a)}Y(e_j, ub, 0) = \\ = Y(e_j, ub, 0)[Y(e_j, -ub, 0), Y(e_{-i}, v\varepsilon_i, a)] = Y(e_j, ub, 0)Y(e_{-i}, -ubv_{-j}\varepsilon_i\varepsilon_j, 0).$$

Таким образом,

$$Y_{(i)}(u, v + e_jb, a + v_{-j}b\varepsilon_{-j}) = [Y(e_i, u, 0), Y(e_{-i}, v\varepsilon_i, a)]Y(e_j, ub, 0)Y(e_{-i}, ua\varepsilon_{-i}, 0).$$

Наконец, остаётся заметить, что $Y(e_j, ub, 0) \in {}^{(-i)}P_1$ коммутирует с $Y(e_{-i}, ua\varepsilon_{-i}, 0)$ и

$$Y_{(i)}(u, v + e_jb, a + v_{-j}b\varepsilon_j) = Y_{(i)}(u, v, a)Y_{(i)}(u, e_jb, 0).$$

□

Мы определили $Y_{(i)}(u, v, a)$ при условии, что оба элемента, u и v, имеют пары нулей. Теперь определим образующие для произвольного v.

Определение. Для $u, v \in V$ таких, что $u_i = u_{-i} = 0$, $\langle u, v\rangle = 0$, и $a \in R$ определим

$$Y_{(i)}(u, v, a) = Y_{(i)}(u, v - e_iv_i - e_{-i}v_{-i}, a - v_iv_{-i}\varepsilon_i)Y(e_i, uv_i, 0)Y(e_{-i}, uv_{-i}, 0).$$

Замечание. Заметим, что определение выше совпадает с предыдущим для v такого, что $v_i = v_{-i} = 0$, поэтому можно использовать то же обозначение для образующей. Также заметим, что правая часть корректно определена. А именно, $v - e_iv_i - e_{-i}v_{-i}$ имеет нули в позициях $\pm i$ и ортогонален u. Действительно, это ясно, так как v, e_i и e_{-i} ортогональны u.

Лемма 2.20. *Для $g \in {}^{(i)}L_1$, $u,\ v \in V$ таких, что $u_i = u_{-i} = 0$, $\langle u,\ v\rangle = 0$, и $a \in R$ верно следующее равенство*
$$gY_{(i)}(u,\ v,\ a)g^{-1} = Y_{(i)}(\phi(g)u,\ \phi(g)v,\ a).$$

Доказательство. Так как $g \in {}^{(i)}L_1$, получаем
$$\big(\phi(g)v\big)_i = \langle \phi(g)v,\ e_{-i}\rangle\varepsilon_i = \langle \phi(g)v,\ \phi(g)e_{-i}\rangle\varepsilon_i = \langle v,\ e_{-i}\rangle\varepsilon_i = v_i$$
и, аналогичным образом, $\big(\phi(g)v\big)_{-i} = v_{-i}$. Тогда
$$\begin{aligned}{}^{g}Y_{(i)}(u,\ v,\ a) &= {}^{g}Y_{(i)}(u, v - e_iv_i - e_{-i}v_{-i}, a - v_iv_{-i}\varepsilon_i)\cdot {}^{g}Y(e_i,\ uv_i,\ 0)\cdot {}^{g}Y(e_{-i},\ uv_{-i},\ 0) = \\ &= Y_{(i)}(\phi(g)u, \phi(g)v - e_i\big(\phi(g)v\big)_i - e_{-i}\big(\phi(g)v\big)_{-i}, a - \big(\phi(g)v\big)_i\big(\phi(g)v\big)_{-i}\varepsilon_i)\cdot \\ &\quad\cdot Y(e_i,\ \phi(g)u\big(\phi(g)v\big)_i,\ 0)Y(e_{-i},\ \phi(g)u\big(\phi(g)v\big)_{-i},\ 0) = Y_{(i)}(\phi(g)u,\ \phi(g)v,\ a).\end{aligned}$$

□

Замечание. Разумеется, для $u, v \in V$ таких, что $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$ и $v_j = v_{-j} = 0$, $a \in R$, верно, что $Y_{(i)}(u,\ v,\ a) \in {}^{(j)}L_1$. Действительно, по определению она является произведением элементов из ${}^{(j)}L_1$.

Лемма 2.21. *Для $u,\ v \in V$ таких, что $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$, $\langle u,\ v\rangle = 0$, и $a \in R$ верно, что*
$$Y_{(i)}(u,\ v,\ a) = Y_{(j)}(u,\ v,\ a).$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{v} = v - e_iv_i - e_{-i}v_{-i}$, $\tilde{a} = a - v_iv_{-i}\varepsilon_i$. Тогда согласно Лемме 2.19 получаем
$$\begin{aligned}Y_{(i)}(u,\ \tilde{v},\ \tilde{a}) &= Y_{(i)}(u,\ \tilde{v} - e_{-j}v_{-j},\ \tilde{a} - v_jv_{-j}\varepsilon_j)Y_{(i)}(u,\ e_{-j}v_{-j},\ 0) = \\ &= Y_{(i)}(u,\ \tilde{v} - e_{-j}v_{-j} - e_jv_j,\ \tilde{a} - v_jv_{-j}\varepsilon_j)Y_{(i)}(u,\ e_jv_j,\ 0)Y_{(i)}(u,\ e_{-j}v_{-j},\ 0).\end{aligned}$$

Далее обозначим $\tilde{\tilde{v}} = \tilde{v} - e_jv_j - e_{-j}v_{-j}$ и $\tilde{\tilde{a}} = \tilde{a} - v_jv_{-j}\varepsilon_j$. Тогда верно, что
$$Y_{(i)}(u,\ v,\ a) = Y_{(i)}(u,\ \tilde{\tilde{v}},\ \tilde{\tilde{a}})Y(e_j,\ uv_j,\ 0)Y(e_{-j},\ uv_{-j},\ 0)Y(e_i,\ uv_i,\ 0)Y(e_{-i},\ uv_{-i},\ 0).$$

Поменяв местами i и j, получаем
$$Y_{(j)}(u,\ v,\ a) = Y_{(j)}(u,\ \tilde{\tilde{v}},\ \tilde{\tilde{a}})Y(e_i,\ uv_i,\ 0)Y(e_{-i},\ uv_{-i},\ 0)Y(e_j,\ uv_j,\ 0)Y(e_{-j},\ uv_{-j},\ 0).$$

Но, согласно Лемме 2.17, $Y_{(i)}(u,\ \tilde{\tilde{v}},\ \tilde{\tilde{a}}) = Y_{(j)}(u,\ \tilde{\tilde{v}},\ \tilde{\tilde{a}})$. Наконец, остаётся заметить, что элементы $Y(e_{-i},\ uv_{-i},\ 0)$ и $Y(e_i,\ uv_i,\ 0)$ коммутируют с обоими $Y(e_j,\ uv_j,\ 0)$ и $Y(e_{-j},\ uv_{-j},\ 0)$. Это очевидно следует из того, что эти элементы лежат в ${}^{(j)}L_1$. □

Замечание. Для u, равного базисному вектору e_j, используя Лемму 2.13, получаем
$$\begin{aligned}&Y_{(i)}(e_j,\ v,\ a) = \\ &\quad = Y(e_j, v - e_iv_i - e_{-i}v_{-i}, a - v_iv_{-i}\varepsilon_i)Y(e_i,\ e_jv_i,\ 0)Y(e_{-i},\ e_jv_{-i},\ 0) = Y(e_j,\ v,\ a).\end{aligned}$$

Определение. Для u, имеющего не менее двух пар симметричных нулей, по Лемме 2.21 элемент $Y_{(i)}(u,\,v,\,a)$ не зависит от выбора i. В данной ситуации мы будем часто опускать индекс в обозначении,

$$Y(u,\,v,\,a) = Y_{(i)}(u,\,v,\,a).$$

2.2.4 Элементы длиннокорневого типа

Определение. Для $u \in V$ и $a \in R$ определим

$$X_{(i)}(u,\,0,\,a) = Y_{(i)}(u - e_i u_i - e_{-i}u_{-i},\,0,\,a)Y(e_i u_i + e_{-i}u_{-i},\,0,\,a)\cdot \\ \cdot Y(e_i u_i + e_{-i}u_{-i},\,(u - e_i u_i - e_{-i}u_{-i})a,\,0).$$

В этом пункте наша цель — показать, что $X_{(i)}(u,\,0,\,a)$ не зависит от выбора i.

Лемма 2.22. *Для $u,\,v \in V$ таких, что $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$, $v_i = v_{-i} = 0$, $\langle u,\,v\rangle = 0$, a, $b \in R$ верно равенство*

$$Y(u,\,v,\,a+b) = Y(u,\,v,\,a)Y(u,\,0,\,b).$$

Доказательство. Разложим $Y(u,\,v,\,a+b)$ в произведение унипотентов

$$Y(u,\,v,\,a+b) = Y_{(i)}(u,\,v,\,a+b) = [Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a+b)]Y(e_{-i},\,u(a+b)\varepsilon_{-i},\,0).$$

Используя $[a,\,bc] = [a,\,b]\cdot{}^{b}[a,\,c]$, получим

$$[Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a+b)] = \\ = [Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)]\cdot{}^{Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)}[Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,0,\,b)].$$

Так как $\langle u,\,v\rangle = 0$, имеем

$${}^{Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)}Y(e_{-i},\,ub\varepsilon_{-i},\,0) = Y(e_{-i},\,ub\varepsilon_{-i},\,0),$$

и поэтому

$$Y(u,\,v,\,a+b) = [Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a+b)]Y(e_{-i},\,ub\varepsilon_{-i},\,0)Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0) = \\ = [Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)]\cdot{}^{Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)}[Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,0,\,b)]\cdot \\ \cdot{}^{Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)}Y(e_{-i},\,ub\varepsilon_{-i},\,0)\cdot Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0) = \\ = [Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,0)]\cdot{}^{Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)}Y_{(i)}(u,\,0,\,b)\cdot Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0).$$

Напомним, что $Y_{(j)}(u,\,0,\,b) \in {}^{(i)}L_1$ коммутирует с обоими $Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,0)$ и $Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0)$, поэтому

$$Y(u,\,v,\,a+b) = [Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)]Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0)Y(u,\,0,\,b) = Y_{(i)}(u,\,v,\,a)Y(u,\,0,\,b).$$

□

Замечание. Для $u \in V$, имеющего не менее двух пар нулей, верно, что $Y(u,\,0,\,0) = 1$ и $Y(u,\,0,\,a)^{-1} = Y(u,\,0,\,-a)$.

Лемма 2.23. *Для $u,\,v \in V$ таких, что $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$, $\langle u,\,v\rangle = 0$, и $a \in R$ верно, что*

$$Y(u,\,v,\,a) = Y(u,\,v - e_iv_i - e_{-i}v_{-i},\,a)Y(u,\,e_iv_i + e_{-i}v_{-i},\,0).$$

Доказательство. По определению

$$Y(u,\,v,\,a) = Y_{(i)}(u,\,v,\,a) = Y_{(i)}(u, v - e_iv_i - e_{-i}v_{-i}, a - v_iv_{-i}\varepsilon_i)Y(e_i,\,uv_i,\,0)Y(e_{-i},\,uv_{-i},\,0).$$

Обозначим $\tilde{v} = v - e_iv_i - e_{-i}v_{-i}$, тогда согласно предыдущей лемме

$$Y(u, \tilde{v}, a - v_iv_{-i}\varepsilon_i) = Y(u,\,\tilde{v},\,a)Y(u,\,0,\,-v_iv_{-i}\varepsilon_i),$$

и поэтому

$$Y(u,\,v,\,a) = Y(u,\,\tilde{v},\,a)Y(u,\,0,\,-v_iv_{-i}\varepsilon_i)Y(e_i,\,uv_i,\,0)Y(e_{-i},\,uv_{-i},\,0) = \\ = Y(u,\,\tilde{v},\,a)Y_{(i)}(u,\,e_iv_i + e_{-i}v_{-i},\,0).$$

$\square$

Следствие. *Рассмотрим $u \in V$, $a \in R$, и обозначим $v = e_iu_i + e_{-i}u_{-i}$, $v' = e_ju_j + e_{-j}u_{-j}$, $\tilde{u} = u - v$, $\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u} - v'$. Тогда верно следующее*

$$X_{(i)}(u,\,0,\,a) = Y_{(i)}(\tilde{u},\,0,\,a)Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,\tilde{u}a,\,0) = Y_{(i)}(\tilde{u},\,0,\,a)Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v,\,v'a,\,0).$$

Доказательство. Так как $l \geq 3$, вектор v имеет как минимум две пары нулей, и можно использовать предыдущую лемму. $\square$

Лемма 2.24. *Рассмотрим $j,\,k \notin \{\pm i\}$ но не обязательно различные или с ненулевой суммой; $u,\,v \in V$ такие, что $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$ и $v_i = v_{-i} = v_k = v_{-k} = 0$, $\langle u,\,v\rangle = 0$, $a \in R$. Тогда верно равенство*

$$Y_{(i)}(u + v,\,0,\,a) = Y(u,\,0,\,a)Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,ua,\,0).$$

Доказательство. Раскладывая $Y(e_i,\,u + v,\,0) = Y(e_i,\,v,\,0)Y(e_i,\,u,\,0)$ внутри коммутатора и используя $[ab,\,c] = {}^{a}[b,\,c] \cdot [a,\,c]$, получаем

$$Y_{(i)}(u + v,\,0,\,a) = [Y(e_i,\,u + v,\,0),\,Y(e_{-i},\,0,\,a)]Y(e_{-i},\,(u + v)a\varepsilon_{-i},\,0) = \\ = {}^{Y(e_i,\,v,\,0)}[Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,0,\,a)] \cdot [Y(e_i,\,v,\,0),\,Y(e_{-i},\,0,\,a)]Y(e_{-i},\,va\varepsilon_{-i},\,0)Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0) = \\ = {}^{Y(e_i,\,v,\,0)}[Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,0,\,a)]Y_{(i)}(v,\,0,\,a)Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0).$$

Заметим, что $Y_{(k)}(v,\,0,\,a) \in {}^{(i)}L_1$ коммутирует с обоими $Y(e_i,\,v,\,0)$ и $Y(e_{-i},\,-ua\varepsilon_{-i},\,0)$, и тогда получаем

$$
\begin{aligned}
{}^{Y(e_i,v,0)}[Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,0,\,a)]\cdot Y(v,\,0,\,a)\cdot Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0) &= \\
= {}^{Y(e_i,v,0)}[Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,0,\,a)]\cdot {}^{Y(e_i,v,0)}Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0)\cdot \\
\cdot {}^{Y(e_i,v,0)}Y(e_{-i},\,-ua\varepsilon_{-i},\,0)\cdot Y(v,\,0,\,a)\cdot Y(e_{-i},\,ua\varepsilon_{-i},\,0) &= \\
= {}^{Y(e_i,v,0)}Y_{(i)}(u,\,0,\,a)\cdot Y(v,\,0,\,a)\cdot [Y(e_i,\,v,\,0),\,Y(e_{-i},\,-ua\varepsilon_{-i},\,0)] &= \\
= {}^{Y(e_i,v,0)}Y(u,\,0,\,a)\cdot Y(v,\,0,\,a)\cdot Y(v,\,ua,\,0).
\end{aligned}
$$

Наконец, воспользуемся тем, что $Y_{(j)}(u,\,0,\,a) \in {}^{(i)}L_1$ коммутирует с $Y(e_i,\,v,\,0)$. $\square$

Следствие. *Рассмотрим* $u \in V$, $a \in R$, *и обозначим* $v = e_iu_i + e_{-i}u_{-i}$, $v' = e_ju_j + e_{-j}u_{-j}$, $\tilde{u} = u - v$, $\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u} - v'$. *Тогда*

$$
\begin{aligned}
X_{(i)}(u,\,0,\,a) &= Y_{(i)}(\tilde{u},\,0,\,a)Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v,\,v'a,\,0) = \\
&= Y(\tilde{\tilde{u}},\,0,\,a)Y(v',\,0,\,a)Y(v',\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v,\,v'a,\,0).
\end{aligned}
$$

Лемма 2.25. *Для* $j,\,k \notin \{\pm i\}$, *но не обязательно различных или имеющих ненулевую сумму,* $u,\,v \in V$ *таких, что* $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$ *и* $v_i = v_{-i} = v_k = v_{-k} = 0$, $\langle u,\,v\rangle = 0$, *и* $a \in R$ *верно, что*

$$Y(u,\,va,\,0) = Y(v,\,ua,\,0).$$

Доказательство. По Лемме 2.24 имеем

$$Y(v,\,ua,\,0) = Y(v,\,0,\,-a)Y(u,\,0,\,-a)Y_{(i)}(u+v,\,0,\,a)$$

и, аналогично,

$$Y(u,\,va,\,0) = Y(u,\,0,\,-a)Y(v,\,0,\,-a)Y_{(i)}(v+u,\,0,\,a).$$

Но $Y_{(i)}(u,\,0,\,-a) \in {}^{(i)}L_1$ коммутирует с $Y_{(i)}(v,\,0,\,-a)$. $\square$

Лемма 2.26. *Для* $u \in V$ *и* $a \in R$ *верно равенство*

$$X_{(i)}(u,\,0,\,a) = X_{(j)}(u,\,0,\,a).$$

Доказательство. Возьмём

$$v = e_iu_i + e_{-i}u_{-i}, \quad v' = e_ju_j + e_{-j}u_{-j}, \quad \tilde{u} = u - v, \quad \tilde{\tilde{u}} = \tilde{u} - v'.$$

Как мы уже заметили, из Лемм 2.23 и 2.24 следует, что

$$
\begin{aligned}
X_{(i)}(u,\,0,\,a) &= Y_{(i)}(\tilde{u},\,0,\,a)Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,\tilde{u}a,\,0) = \\
&= Y(\tilde{\tilde{u}},\,0,\,a)Y(v',\,0,\,a)Y(v',\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v,\,v'a,\,0).
\end{aligned}
$$

Поменяв местами i и j, имеем

$$X_{(j)}(u,\,0,\,a)=Y(\tilde{\tilde{u}},\,0,\,a)Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v',\,0,\,a)Y(v',\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v',\,va,\,0).$$

По Лемме 2.25 имеем $Y(v,\,v'a,\,0)=Y(v',\,va,\,0)$. Теперь мы должны проверить, что элемент $Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)$ коммутирует с $Y(v',\,0,\,a)Y(v',\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)$. Для этого выберем $k\notin\{\pm i,\pm j\}$. Заметим, что $Y_{(i)}(v',\,0,\,a)\in{}^{(k)}L_1$ коммутирует с $Y_{(k)}(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)$ по Лемме 2.20. Далее, согласно Лемме 2.25, имеем

$$Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)=Y(\tilde{\tilde{u}},\,va,\,0)\quad\text{и}\quad Y(v',\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)=Y(\tilde{\tilde{u}},\,v'a,\,0).$$

Теперь из Леммы 2.23 следует, что

$$\begin{aligned}Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v',\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)&=Y(\tilde{\tilde{u}},\,va,\,0)Y(\tilde{\tilde{u}},\,v'a,\,0)=\\&=Y(\tilde{\tilde{u}},\,va+v'a,\,0)=Y(\tilde{\tilde{u}},\,v'a,\,0)Y(\tilde{\tilde{u}},\,va,\,0)=Y(v',\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0).\end{aligned}$$

Наконец, остаётся заметить, что по Лемме 2.20 $Y_{(j)}(v,\,0,\,a)\in{}^{(k)}L_1$ коммутирует с обоими элементами $Y_{(k)}(v',\,0,\,a)$ и $Y_{(k)}(v',\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)$. □

Замечание. Так как $X_{(i)}(u,\,0,\,a)$ не зависит от выбора i, мы будем часто опускать индекс в обозначении

$$X(u,\,0,\,a)=X_{(i)}(u,\,0,\,a).$$

2.2.5 Доказательство теоремы о центральности

В данном пункте нашими целями являются доказательство формулы сопряжения для образующих длиннокорневого типа,

$$gX(u,\,0,\,a)g^{-1}=X(\phi(g)u,\,0,\,a),$$

и завершение нашего доказательства теоремы о центральности симплектического K_2.

Лемма 2.27. *Для любого $u\in V$, любых $a,\,b\in R$ и любого индекса i, верно равенство*

$${}^{X_{i,-i}(b)}X(u,\,0,\,a)=X(T_{i,-i}(b)u,\,0,\,a).$$

Доказательство. Выбрав $j\notin\{\pm i\}$ и разложив $X(u,\,0,\,a)$ с помощью Лемм 2.23 и 2.24, имеем

$$X_{(i)}(u,\,0,\,a)=Y(\tilde{\tilde{u}},\,0,\,a)Y(v',\,0,\,a)Y(v',\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v,\,0,\,a)Y(v,\,\tilde{\tilde{u}}a,\,0)Y(v,\,v'a,\,0),$$

где $v=e_iu_i+e_{-i}u_{-i}$, $v'=e_ju_j+e_{-j}u_{-j}$, $\tilde{\tilde{u}}=u-v-v'$. Заметим, что

$$e_i\big(T_{i,-i}(b)u\big)_i+e_{-i}\big(T_{i,-i}(b)u\big)_{-i}=T_{i,-i}(b)v$$

и, очевидно,

$$e_j\big(T_{i,-i}(b)u\big)_j+e_{-j}\big(T_{i,-i}(b)u\big)_{-j}=v'=T_{i,-i}(b)v'$$

и аналогично

$$T_{i,-i}(b)u - T_{i,-i}(b)v - v' = \tilde{\tilde{u}} = T_{i,-i}(b)\tilde{\tilde{u}}.$$

Таким образом, нам только необходимо проверить формулу сопряжения для множителей $X(u,\,0,\,a)$ в разложении выше. Действительно, $X_{i,-i}(b) \in {}^{(j)}L_1 \cap {}^{(k)}L_1$ для любого $k \notin \{\pm i, \pm j\}$, и любой множитель равен либо $Y_{(j)}(\hat{u},\,\hat{v},\,\hat{a})$, либо $Y_{(k)}(\hat{u},\,\hat{v},\,\hat{a})$ для некоторых $\hat{u},\,\hat{v} \in V$, $\hat{a} \in R$. □

Лемма 2.28. *Для $u,\,v,\,w \in V$ таких, что $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$, $v_j = v_{-j} = 0$, $w_j = w_{-j} = 0$, и $\langle u,\,v\rangle = 0$, $\langle u,\,w\rangle = 0$, $\langle v,\,w\rangle = 0$, верно, что*

$$Y(u,\,v,\,0)Y(u,\,w,\,0) = Y(u,\,v+w,\,0).$$

Доказательство. Во-первых, используя $[a,\,bc] = [a,\,b]\cdot {}^{b}[a,\,c]$, получаем

$$Y(u,\,v+w,\,0) = [Y(e_j,\,u,\,0),\,Y(e_{-j},\,(v+w)\varepsilon_j,\,0)] = Y(u,\,v,\,0)\cdot {}^{Y(e_{-j},\,v\varepsilon_j,0)}Y(u,\,w,\,0).$$

Теперь заметим, что $Y_{(i)}(u,\,w,\,0) \in {}^{(-j)}P_1$ коммутирует с $Y(e_{-j},\,v\varepsilon_j,\,0)$. □

Лемма 2.29. *Пусть вектора $v,\,v' \in V$ имеют только $\pm i$-ую и $\pm j$-ую ненулевые координаты соответственно; рассмотрим также $v'' \in V$ такой, что $(v'')_i = (v'')_{-i} = (v'')_j = (v'')_{-j} = 0$. Положим $w = v' + v''$. Тогда*

$$Y(v'',\,v,\,0)Y(v',\,v,\,0) = Y_{(i)}(w,\,v,\,0).$$

Замечание. Мы используем эту лемму только для случая, когда v'' имеет только $\pm k$-ую ненулевые координаты. Если w имеет хотя бы две пары ненулевых координат, утверждение является очевидным следствием Лемм 2.25 и 2.23. Это означает, что обе Леммы 2.29 и 2.28 необходимы только в случае, если $l = 3$, и не релевантны, когда $l \geq 4$.

Доказательство. Используя Лемму 2.24, имеем

$$\begin{aligned}Y_{(i)}(w,\,v,\,0) = Y_{(i)}(w,\,0,\,-v_iv_{-i}\varepsilon_i)Y(e_i,\,wv_i,\,0)Y(e_{-i},\,wv_{-i},\,0) = \\ = Y(v'',\,0,\,-v_iv_{-i}\varepsilon_i)Y(v',\,0,\,-v_iv_{-i}\varepsilon_i)Y(v'',\,-v'v_iv_{-i}\varepsilon_i,\,0)\cdot \\ \cdot Y(e_i,\,v''v_i,\,0)Y(e_i,\,v'v_i,\,0)Y(e_{-i},\,v''v_{-i},\,0)Y(e_{-i},\,v'v_{-i},\,0).\end{aligned}$$

Мы хотим изменить порядок множителей в произведении выше, чтобы получить $Y(v'',\,v,\,,0)$, а именно, мы хотим поместить $Y(e_i,\,v''v_i,\,0)$ и $Y(e_{-i},\,v''v_{-i},\,0)$ сразу после первого множителя. Так как $Y_{(k)}(v',\,0,\,-v_iv_{-i}\varepsilon_i)$ и $Y_{(j)}(v'',\,-v'v_iv_{-i}\varepsilon_i,\,0)$ лежат в ${}^{(i)}L_1$, эти элементы коммутируют с обоими элементами $Y(e_i,\,v''v_i,\,0)$ и $Y(e_{-i},\,v''v_{-i},\,0)$. Но $Y(e_i,\,v'v_i,\,0)$ не коммутирует с $Y(e_{-i},\,v''v_{-i},\,0)$, таким образом, мы получаем следующее.

$$\begin{aligned}Y_{(i)}(w,\,v,\,0) = Y(v'',\,v,\,0)Y(v',\,0,\,-v_iv_{-i}\varepsilon_i)Y(v'',\,-v'v_iv_{-i}\varepsilon_i,\,0)Y(e_i,\,v'v_i,\,0)\cdot \\ \cdot [Y(e_i,\,-v'v_i,\,0),\,Y(e_{-i},\,-v''v_{-i},\,0)]Y(e_{-i},\,v'v_{-i},\,0)\end{aligned}$$

Заметим, что

$$[Y(e_i,\, -v'v_i,\, 0),\, Y(e_{-i},\, -v''v_{-i},\, 0)] = Y(-v'v_i,\, -v''v_{-i}\varepsilon_i,\, 0) = Y(v'',\, v'v_iv_{-i}\varepsilon_i,\, 0) \in {}^{(i)}L_1$$

по Лемме 2.25, и поэтому этот элемент коммутирует с $Y(e_i,\, v'v_i,\, 0)$. Далее, по Лемме 2.28 имеем

$$Y(v'',\, -v'v_iv_{-i}\varepsilon_i,\, 0)Y(v'',\, v'v_iv_{-i}\varepsilon_i,\, 0) = Y(v'',\, 0,\, 0) = 1.$$

Помещая это в формулу выше, мы получаем искомое утверждение. □

Лемма 2.30. *Для любого $j \notin \{\pm k\}$, любого $u \in V$ и любых $a,\, b \in R$, верно равенство*

$${}^{X_{jk}(b)}X(u,\, 0,\, a) = X(T_{jk}(b)u,\, 0,\, a).$$

Доказательство. Зафиксируем $i \notin \{\pm j, \pm k\}$. Объединив Леммы 2.23, 2.25 и 2.29, получаем

$$X_{(i)}(u,\, 0,\, a) = Y_{(i)}(\tilde{u},\, 0,\, a)Y(v,\, 0,\, a)Y(v,\, \tilde{\tilde{\tilde{u}}}a,\, 0)Y(v,\, v''a,\, 0)Y(v,\, v'a,\, 0) =$$
$$= Y_{(i)}(\tilde{u},\, 0,\, a)Y(v,\, 0,\, a)Y(v,\, \tilde{\tilde{\tilde{u}}}a,\, 0)Y_{(i)}(w,\, va,\, 0),$$

где

$$v = e_iu_i + e_{-i}u_{-i}, \qquad \tilde{u} = u - v, \qquad v' = e_ju_j + e_{-j}u_{-j}, \qquad \tilde{\tilde{u}} = \tilde{u} - v',$$
$$v'' = e_ku_k + e_{-k}u_{-k}, \qquad \tilde{\tilde{\tilde{u}}} = \tilde{\tilde{u}} - v'', \qquad w = v' + v''.$$

Заметим, что

$$e_i\big(T_{jk}(b)u\big)_i + e_{-i}\big(T_{jk}(b)u\big)_{-i} = v = T_{jk}(b)v,$$
$$e_j\big(T_{jk}(b)u\big)_j + e_{-j}\big(T_{jk}(b)u\big)_{-j} + e_k\big(T_{jk}(b)u\big)_k + e_{-k}\big(T_{jk}(b)u\big)_{-k} = T_{jk}(b)w,$$
$$T_{jk}(b)u - v = T_{jk}(b)\tilde{u} \quad \text{и} \quad T_{jk}(b)u - v - T_{jk}(b)w = T_{jk}(b)\tilde{\tilde{\tilde{u}}}.$$

Так как $Y_{(j)}(v,\, 0,\, a)$ и $Y_{(j)}(v,\, \tilde{\tilde{\tilde{u}}}a,\, 0)$ лежат в подгруппе Леви ${}^{(k)}L_1$, они коммутируют с элементом $X_{jk}(b) = Y(e_{-k},\, -e_ja\varepsilon_k,\, 0)$. Теперь, используя то, что $X_{jk}(b) \in {}^{(i)}L_1$, мы получаем искомое утверждение. □

Следствие. *Из Лемм 2.27 и 2.30 следует, что для любого $g \in \mathrm{StSp}(2l,\, R)$ имеет место равенство*

$$gX(u,\, 0,\, a)g^{-1} = X(\phi(g)u,\, 0,\, a).$$

Лемма 2.31. *Множество элементов $\{X(u,\, 0,\, a) \mid u \in V,\ a \in R\}$ порождает $\mathrm{StSp}(2l,\, R)$ как группу.*

Доказательство. Во-первых, выбрав некоторые i и j такие, что $\mathrm{Card}\{\pm i, \pm j\} = 4$, имеем

$$X_{(j)}(e_i,\, 0,\, a) = Y(e_i,\, 0,\, a)Y(0,\, 0,\, a)Y(0,\, e_ia,\, 0) = Y(e_i,\, 0,\, a) = X_{i,-i}(a).$$

Теперь, выбрав $k \notin \{\pm i, \pm j\}$, взяв $u = e_{-k}$, $v = -e_j \varepsilon_k$ и любой $a \in R$, воспользовавшись Леммой 2.24, мы получаем

$$\begin{aligned}X_{jk}(a) = Y(u,\, va,\, 0) = Y(v,\, 0,\, -a)Y(u,\, 0,\, -a)Y_{(i)}(u+v,\, 0,\, a) = \\ = X_{(i)}(v,\, 0,\, -a)X_{(i)}(u,\, 0,\, -a)X_{(i)}(u+v,\, 0,\, a).\end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы центральности. Мы хотим показать, что

$$\operatorname{Ker}\phi \subseteq \operatorname{Cent}\operatorname{StSp}(2l,\, R).$$

Действительно, согласно Леммам 2.27 и 2.30, любой элемент $g \in \operatorname{Ker}\phi$ коммутирует с трансвекциями длинного типа $X(u,\, 0,\, a)$, поэтому он централен по Лемме 2.31. □

2.2.6 Соотношения между ESD-образующими

В двух оставшихся пунктах мы доказываем теорему о другом копредставлении для симплектической группы Стейнберга, аналогичное тому, что было получено ван дер Калленом в линейном случае [34].

Лемма 2.32. *Для $u \in V$, a, $b \in R$ верно, что*

$$X(u,\, 0,\, a)X(u,\, 0,\, b) = X(u,\, 0,\, a+b).$$

Доказательство. Выбрав $j \notin \{\pm i\}$ и разложив $X(u,\, 0,\, a)$ с помощью Лемм 2.23, 2.24 и 2.25, имеем

$$X(u,\, 0,\, a) = Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, a)Y(v',\, 0,\, a)Y(\tilde{\tilde{u}},\, v'a,\, 0)Y(v,\, 0,\, a)Y(\tilde{\tilde{u}},\, va,\, 0)Y(v,\, v'a,\, 0).$$

Поскольку $\tilde{\tilde{u}}$, v и v' ортогональны $\tilde{\tilde{u}}$, вектор u также ортогонален $\tilde{\tilde{u}}$, и поэтому

$$^{Y(\tilde{\tilde{u}},0,b)}X(u,\, 0,\, a) = X(T(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, b)u,\, 0,\, a) = X(u,\, 0,\, a).$$

Из Леммы 2.22 следует, что

$$\begin{aligned}&X(u,\, 0,\, a)Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, b) = \\ &\qquad = Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, a+b)Y(v',\, 0,\, a)Y(\tilde{\tilde{u}},\, v'a,\, 0)Y(v,\, 0,\, a)Y(\tilde{\tilde{u}},\, va,\, 0)Y(v,\, v'a,\, 0).\end{aligned}$$

Тот же аргумент, что и выше, показывает, что $Y(v',\, 0,\, b)$ коммутирует с обоими элементами $X(u,\, 0,\, a)$ и $Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, a+b)$, поэтому снова по Лемме 2.22

$$\begin{aligned}&X(u,\, 0,\, a)Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, b)Y(v',\, 0,\, b) = \\ &\qquad = Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, a+b)Y(v',\, 0,\, a+b)Y(\tilde{\tilde{u}},\, v'a,\, 0)Y(v,\, 0,\, a)Y(\tilde{\tilde{u}},\, va,\, 0)Y(v,\, v'a,\, 0).\end{aligned}$$

Повторяя эту процедуру, в конечном итоге получаем искомый результат. □

Лемма 2.33. *Для $u \in V$ такого, что $u_i = u_{-i} = u_j = u_{-j} = 0$ и $a, b \in R$, верно, что*

$$Y(ub,\, 0,\, a) = Y(u,\, 0,\, ab^2).$$

Доказательство. Разложим $Y(ub,\, 0,\, a)$ следующим образом

$$\begin{aligned} Y_{(i)}(ub,\, 0,\, a) &= [Y(e_i,\, ub,\, 0),\, Y(e_{-i},\, 0,\, a)]Y(e_{-i},\, uba\varepsilon_{-i},\, 0) = \\ &= [Y_{(j)}(-u,\, -e_i b),\, Y(e_{-i},\, 0,\, a)]Y(e_{-i},\, uba\varepsilon_{-i},\, 0) = \\ &= [[Y(e_j,\, -u,\, 0),\, Y(e_{-j},\, -e_i b\varepsilon_j,\, 0)],\, Y(e_{-i},\, 0,\, a)]Y(e_{-i},\, uba\varepsilon_{-i},\, 0). \end{aligned}$$

Теперь мы используем тождество Холла–Витта

$${}^{y}[[y^{-1},\, z],\, x] = {}^{z}[y,\, [z^{-1},\, x]] \cdot {}^{x}[z,\, [x^{-1},\, y]]$$

для $x = Y(e_{-i},\, 0,\, a)$, $y = Y(e_j,\, u,\, 0)$ и $z = Y(e_{-j},\, -e_i b\varepsilon_j,\, 0)$. Заметим, что

$$Y_{(i)}(ub,\, 0,\, a) = [[y^{-1},\, z],\, x] \cdot Y(e_{-i},\, uba\varepsilon_{-i},\, 0).$$

Воспользовавшись тем фактом, что оба элемента $Y(e_i,\, ub,\, 0),\, Y(e_{-i},\, 0,\, a) \in {}^{(j)}L_1$ коммутируют с $Y(e_j,\, u,\, 0)$, получаем

$$[[y^{-1},\, z],\, x] = {}^{y}[[y^{-1},\, z],\, x].$$

Затем заметим, что $[x^{-1},\, y] = 1$, по формуле сопряжения для x^{-1}. Далее,

$$\begin{aligned} [z^{-1},\, x] = z^{-1} \cdot {}^{x}z &= Y(e_{-j},\, e_i b\varepsilon_j,\, 0)Y(e_{-j},\, e_i b\varepsilon_{-j} + e_{-i}a\varepsilon_{-i}b\varepsilon_{-j},\, 0) = \\ &= Y(e_{-j},\, e_{-i}ab\varepsilon_i\varepsilon_j,\, ab^2) = Y(e_{-j},\, 0,\, ab^2)Y(e_{-j},\, e_{-i}ab\varepsilon_i\varepsilon_j,\, 0). \end{aligned}$$

Тогда, используя $[a,\, bc] = [a,\, b] \cdot {}^{b}[a,\, c]$, получаем

$$\begin{aligned} [y,\, [z^{-1},\, x]] &= [Y(e_j,\, u,\, 0),\, Y(e_{-j},\, 0,\, ab^2)Y(e_{-j},\, e_{-i}ab\varepsilon_i\varepsilon_j,\, 0)] = \\ &= [Y(e_j,\, u,\, 0),\, Y(e_{-j},\, 0,\, ab^2)] \cdot {}^{Y(e_{-j},\, 0,\, ab^2)}Y_{(j)}(u,\, e_{-i}ab\varepsilon_i,\, 0) = \\ &= [Y(e_j,\, u,\, 0),\, Y(e_{-j},\, 0,\, ab^2)] \cdot Y(e_{-i},\, uab\varepsilon_i,\, 0). \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} Y(ub,\, 0,\, a) &= {}^{y}[[y^{-1},\, z],\, x]Y(e_{-i},\, uba\varepsilon_{-i},\, 0) = {}^{z}[y,\, [z^{-1},\, x]]Y(e_{-i},\, uba\varepsilon_{-i},\, 0) = \\ &= {}^{z}[Y(e_j,\, u,\, 0),\, Y(e_{-j},\, 0,\, ab^2)][Y(e_{-j},\, -e_i b\varepsilon_j,\, 0),\, Y(e_{-i},\, uab\varepsilon_i,\, 0)]. \end{aligned}$$

Наконец, используя

$$\begin{aligned} [Y(e_{-j},\, -e_i b\varepsilon_j,\, 0),\, Y(e_{-i},\, uab\varepsilon_i,\, 0)] &= Y_{(i)}(-e_{-j}b\varepsilon_j,\, uab,\, 0) = \\ &= Y(e_{-j},\, uab^2\varepsilon_{-j},\, 0) = {}^{z}Y(e_{-j},\, uab^2\varepsilon_{-j},\, 0), \end{aligned}$$

мы в итоге получаем

$$\begin{aligned} &Y(ub,\, 0,\, a) = \\ &\quad = {}^{z}[Y(e_j,\, u,\, 0),\, Y(e_{-j},\, 0,\, ab^2)] \cdot {}^{z}Y(e_{-j},\, uab^2\varepsilon_{-j},\, 0) = {}^{z}Y_{(j)}(u,\, 0,\, ab^2) = Y_{(j)}(u,\, 0,\, ab^2). \end{aligned}$$

□

Лемма 2.34. *Для $u \in V$, a, $b \in R$, верно равенство*

$$X(ub,\, 0,\, a) = X(u,\, 0,\, ab^2).$$

Доказательство. Разложив $X(ub,\, 0,\, a)$ при помощи Лемм 2.23, 2.24 и 2.25 и воспользовавшись Леммами 2.33 и 2.25, получаем

$$\begin{aligned} X(ub,\, 0,\, a) = Y(\tilde{\tilde{u}}b,\, 0,\, a)Y(v'b,\, 0,\, a)Y(\tilde{\tilde{u}}b,\, v'ba,\, 0)Y(vb,\, 0,\, a)\cdot \\ \cdot Y(\tilde{\tilde{u}}b,\, vba,\, 0)Y(vb,\, v'ba,\, 0) = Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, ab^2)Y(v',\, 0,\, ab^2)Y(\tilde{\tilde{u}},\, v'ab^2,\, 0)\cdot \\ \cdot Y(v,\, 0,\, ab^2)Y(\tilde{\tilde{u}},\, vab^2,\, 0)Y(v,\, v'ab^2,\, 0) = X(u,\, 0,\, ab^2). \end{aligned}$$

□

Теперь нам необходимо определить короткокорневые ESD-образующие.

Определение. Для u, $v \in V$ таких, что $\langle u,\, v\rangle = 0$, положим

$$X(v,\, u,\, 0) = X(v,\, 0,\, -1)X(u,\, 0,\, -1)X(u+v,\, 0,\, 1).$$

Лемма 2.35. *Для $g \in \mathrm{StSp}(2l,\, R)$, u, $v \in V$ таких, что $\langle u,\, v\rangle = 0$, a, $b \in R$, верно, что*

a) $X(v,\, u,\, 0) = X(u,\, v,\, 0)$,

b) $g\,X(v,\, u,\, 0)g^{-1} = X(\phi(g)u,\, \phi(g)v,\, 0)$,

c) $X(ub,\, ua,\, 0) = X(u,\, 0,\, 2ab)$.

Доказательство. Так как *a)* и *b)* очевидны, нам остаётся только проверить *c)*. По определению имеем

$$X(ub,\, ua,\, 0) = X(ub,\, 0,\, -1)X(ua,\, 0,\, -1)X(ua+ub,\, 0,\, 1).$$

Далее, используя Лемму 2.34, а затем Лемму 2.32, получаем

$$\begin{aligned} X(ub,\, 0,\, -1)X(ua,\, 0,\, -1)X(ua+ub,\, 0,\, 1) = \\ = X(u,\, 0,\, -b^2)X(u,\, 0,\, -a^2)X(u,\, 0,\, (a+b)^2) = X(u,\, 0,\, 2ab). \end{aligned}$$

□

Лемма 2.36. *Рассмотрим u, $w \in V$ такие, что $\langle u,\, w\rangle = 0$, $w_i = w_{-i} = w_j = w_{-j} = 0$. Тогда*

$$X(u+w,\, 0,\, a) = X(u,\, 0,\, a)X(w,\, 0,\, a)Y(w,\, ua,\, 0).$$

Доказательство. Возьмём $v = e_iu_i + e_{-i}u_{-i}$, $\tilde{u} = u - v$ и заметим, что $\langle w,\, v\rangle = \langle w,\, \tilde{u}\rangle = 0$. По тому же определению имеем

$$X(u+w,\, 0,\, a) = Y_{(i)}(\tilde{u}+w,\, 0,\, a)Y(v,\, 0,\, a)Y(v,\, (\tilde{u}+w)a,\, 0).$$

Затем возьмём $v' = e_j u_j + e_{-j} u_{-j}$ и $\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u} - v'$. Так как $X(\hat{u},\, 0,\, \hat{a})$ корректно определён по Лемме 2.26, имеем

$$Y_{(i)}(\tilde{u} + w,\, 0,\, a) = X(\tilde{u} + w,\, 0,\, a) = Y_{(j)}(\tilde{\tilde{u}} + w,\, 0,\, a) Y(v',\, 0,\, a) Y(v',\, (\tilde{\tilde{u}} + w)a,\, 0).$$

Более того,

$$Y(\tilde{\tilde{u}} + w,\, 0,\, a) = Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, a) Y(w,\, 0,\, a) Y(w,\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0)$$

по Лемме 2.24 и

$$Y(v',\, (\tilde{\tilde{u}} + w)a,\, 0) = Y(v',\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) Y(v',\, wa,\, 0)$$

по Лемме 2.28, тогда как Лемма 2.23 влечёт, что

$$Y(v,\, (\tilde{u} + w)a,\, 0) = Y(v,\, (\tilde{\tilde{u}} + w)a,\, 0) Y(v,\, v'a,\, 0).$$

Сравнивая эти формулы, получаем

$$\begin{aligned} X(u + w,\, 0,\, a) = Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, a) Y(w,\, 0,\, a) Y(w,\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) Y(v',\, 0,\, a) Y(v',\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) \cdot \\ \cdot Y(v',\, wa,\, 0) Y(v,\, 0,\, a) Y(v,\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) Y(v,\, wa,\, 0) Y(v,\, v'a,\, 0). \end{aligned}$$

Рассуждая точно так же, как в доказательствах выше, легко показать, что множители в произведении выше могут быть переставлены следующим образом

$$\begin{aligned} X(u + w,\, 0,\, a) = Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, a) Y(v',\, 0,\, a) Y(v',\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) Y(v,\, 0,\, a) Y(v,\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) \cdot \\ \cdot Y(v,\, v'a,\, 0) Y(w,\, 0,\, a) Y(w,\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) Y(v,\, wa,\, 0) Y(v',\, wa,\, 0). \end{aligned}$$

Наконец, напомним, что

$$Y(\tilde{\tilde{u}},\, 0,\, a) Y(v',\, 0,\, a) Y(v',\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) Y(v,\, 0,\, a) Y(v,\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) Y(v,\, v'a,\, 0) = X(u,\, 0,\, a)$$

и что

$$Y(w,\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) Y(v,\, wa,\, 0) Y(v',\, wa,\, 0) = Y(w,\, \tilde{\tilde{u}}a,\, 0) Y(w,\, va,\, 0) Y(w,\, v'a,\, 0) = Y(w,\, ua,\, 0)$$

по Леммам 2.25 и 2.23. □

Следующая лемма является простым следствием предыдущей.

Лемма 2.37. *Для $v \in V$ такого, что $v_{-i} = 0$, верно, что*

$$X(e_i,\, v,\, 0) = Y(e_i,\, v,\, 0).$$

Доказательство. В утверждении Леммы 2.36 возьмём $u = v$, $w = e_i$, $a = 1$. □

Лемма 2.38. *Рассмотрим $a \in R$ и $u,\, v \in V$ такие, что $\langle u,\, v \rangle = 0$ и также предположим, что v является столбцом симплектической элементарной матрицы. Тогда*

$$X(u + v,\, 0,\, a) = X(u,\, 0,\, a) X(v,\, 0,\, a) X(v,\, ua,\, 0).$$

Доказательство. Возьмём $g \in \mathrm{StSp}(2l,\, R)$ такой, что $\phi(g)v = e_i$. Тогда

$$g\, X(u+v,\, 0,\, a)g^{-1} = X(\phi(g)u + e_i,\, 0,\, a).$$

Теперь из Леммы 2.36 (и Леммы 2.37) следует, что

$$X(\phi(g)u + e_i,\, 0,\, a) = X(\phi(g)u,\, 0,\, a)X(e_i,\, 0,\, a)X(e_i,\, \phi(g)ua,\, 0) = \\ = g\, X(u,\, 0,\, a)X(v,\, 0,\, a)X(v,\, ua,\, 0)g^{-1}.$$

□

Следующая лемма является очевидным следствием предыдущей.

Лемма 2.39. *Предположим, что оба элемента u и v являются столбцами симплектических элементарных матриц, такими, что $\langle u,\, v\rangle = 0$. Тогда для любого $a \in R$ верно равенство*

$$X(u,\, va,\, 0) = X(v,\, ua,\, 0).$$

Лемма 2.40. *Пусть $u \in V$ является столбцом симплектической элементарной матрицы и пусть $v,\, w \in V$ являются произвольными столбцами, такими, что $\langle u,\, v\rangle = \langle u,\, w\rangle = 0$. Тогда*

$$X(u,\, v,\, 0)X(u,\, w,\, 0) = X(u,\, v+w,\, 0)X(u,\, 0,\, \langle v,\, w\rangle).$$

Доказательство. Используем тот же трюк, что и в Лемме 2.38. □

Определение. Для $u,\, v \in V$ таких, что $\langle u,\, v\rangle = 0$, $a \in R$, возьмём

$$X(u,\, v,\, a) = X(u,\, v,\, 0)X(u,\, 0,\, a).$$

Лемма 2.41. *Предположим, что $u,\, u'$ — столбцы симплектических элементарных матриц, и пусть $v,\, v',\, w \in V$ являются произвольными столбцами, такими, что $\langle u,\, v\rangle = \langle u,\, w\rangle = 0$, $\langle u',\, v'\rangle = 0$. Тогда для любых $a,\, b \in R$ верно, что*

- *a)* $X(u,\, v,\, a)X(u,\, w,\, b) = X(u,\, v+w,\, a+b+\langle v,\, w\rangle)$,
- *b) если также $v \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)e_1$, то* $X(u,\, va,\, 0) = X(v,\, ua,\, 0)$,
- *c)* $X(u',\, v',\, b)X(u,\, v,\, a)X(u',\, v',\, b)^{-1} = X(T(u',\, v',\, b)u,\, T(u',\, v',\, b)v,\, a)$.

Доказательство. Для *a)* воспользуемся Леммами 2.40 и 2.32, *b)* и *c)* были уже проверены.

□

2.2.7 Симплектическая группа ван дер Каллена

Определение. Определим симплектическую группу ван дер Каллена $\mathrm{StSp}^*(2l,\, R)$ как группу, заданную множеством образующих

$$\left\{X^*(u,\, v,\, a)\,\middle|\, u,\, v \in R^{2l},\ u \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)e_1,\ \langle u,\, v\rangle = 0,\ a \in R\right\}$$

и соотношениями

$$X^*(u,\,v,\,a)X^*(u,\,w,\,b) = X^*(u,\,v+w,\,a+b+\langle v,\,w\rangle), \tag{Q1}$$

$$X^*(u,\,va,\,0) = X^*(v,\,ua,\,0),\ \text{ где также } v \in \mathrm{Ep}(2l,\,R)e_1, \tag{Q2}$$

$$X^*(u',\,v',\,b)X^*(u,\,v,\,a)X^*(u',\,v',\,b)^{-1} = X^*(T(u',\,v',\,b)u,\,T(u',\,v',\,b)v,\,a). \tag{Q3}$$

Замечание. Ясно, что Лемма 2.41 эквивалентна существованию гомоморфизма

$$\varpi\colon\ \mathrm{StSp}^*(2l,\,R) \twoheadrightarrow \mathrm{StSp}(2l,\,R),$$

отправляющего $X^*(u,\,v,\,a)$ в $X(u,\,v,\,a)$, который очевидно сюръективен. Более того, из Q3 следует, что ϖ является в действительности центральным расширением.

Нам необходимо построить обратный изоморфизм из группы Стейнберга в группу ван дер Каллена. Начнём со следующей леммы.

Лемма 2.42. *Для $u,\,v \in V$, где $u \in \mathrm{Ep}(2l,\,R)e_1$ такой, что $\langle u,\,v\rangle = 0$, $u_i = u_{-i} = v_i = v_{-i} = 0$, и для любых $a,\,b \in R$ верно равенство*

$$[X^*(e_i,\,ub,\,0),\,X^*(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)] = X^*(u,\,vb,\,ab^2)X^*(e_{-i},\,uab\varepsilon_i,\,0).$$

Доказательство. Заметим, что $X^*(\hat{u},\,\hat{v},\,0)^{-1} = X^*(\hat{u},\,-\hat{v},\,0)$ по Q1, поэтому

$$[X^*(e_i,\,ub,\,0),\,X^*(e_{-i},\,v\varepsilon_i,\,a)] = X^*(u,\,e_ib,\,0)\cdot {}^{X^*(e_{-i},v\varepsilon_i,a)}X^*(u,\,-e_ib,\,0)$$

по Q2. Тогда

$$X^*(u,\,e_ib,\,0)\cdot {}^{X^*(e_{-i},v\varepsilon_i,a)}X^*(u,\,-e_ib,\,0) = \ = X^*(u,\,e_ib,\,0)X^*(u,\,-e_ib+e_{-i}ab\varepsilon_i+vb,\,0)$$

по Q3 и, наконец,

$$X^*(u,\,e_ib,\,0)X^*(u,\,-e_ib+e_{-i}ab\varepsilon_i+vb,\,0) = \\ = X^*(u,\,e_{-i}ab\varepsilon_i+vb,\,ab^2) = X^*(u,\,vb,\,ab^2)X^*(u,\,e_{-i}ab\varepsilon_i,\,0)$$

по Q1. Теперь утверждение очевидно по Q2. □

Определение. Положим

$$X^*_{ij}(a) = X^*(e_i,\,e_{-j}a\varepsilon_{-j},\,0) \text{ для } i \notin \{\pm j\},$$
$$X^*_{i,-i}(a) = X^*(e_i,\,0,\,a).$$

Лемма 2.43. *Соотношения Стейнберга* P0–P5 *выполняются для $X^*_{ij}(a)$ и $X^*_{i,-i}(a)$.*

Доказательство. Действительно, Q2 влечёт P0, а Q1 влечёт P1 (чтобы проверить P1, необходимо рассмотреть два случая, когда $j \neq -i$ и когда $j = -i$, соответственно). Чтобы установить Q2, поступим следующим образом. Для начала необходимо рассмотреть три случая, когда $j \neq -i$, $k \neq -h$, когда $j \neq -i$, $k = -h$, и, наконец, когда $j = -i$, $k = -h$. В каждом случае, используя Q3, покажем, что $X^*_{ij}(a)$ коммутирует с $X^*_{hk}(b)$. Соотношения P3 и P4 следуют напрямую из Леммы 2.42. Если быть точнее, проще получить версию P4, где множители в коммутаторе переставлены местами. Наконец, приступим к P5. Используя Q2 и затем Q1, получаем

$$[X^*_{ij}(a),\, X^*_{j,-i}(b)] = [X^*(e_i,\, -e_{-j}a\varepsilon_j,\, 0),\, X^*(e_i,\, -e_j b\varepsilon_{-i},\, 0)] = X^*(e_i,\, 0,\, 2ab\varepsilon_i).$$

□

Замечание. Из Леммы 2.42 следует, что

$$X^*(e_i,\, 0,\, 2a) = X^*_{i,-i}(2a) = [X^*_{ij}(a),\, X^*_{j,-i}(\varepsilon_i)] = X^*(e_i,\, e_i a,\, 0).$$

Следствие. *Существует гомоморфизм*

$$\varrho\colon \operatorname{StSp}(2l,\, R) \to \operatorname{StSp}^*(2l,\, R),$$

переводящий $X_{ij}(a)$ в $X^*_{ij}(a)$. Очевидно, $\varpi\varrho = 1$, т.е. ϱ является расщеплением для ϖ.

Остаётся только проверить, что $\varrho\varpi = 1$. С технической точки зрения, намного удобнее не действовать напрямую, а воспользоваться Леммой 1.4. Приведём снова её формулировку.

Лемма. *Пусть $\epsilon\colon H \twoheadrightarrow G$ — это расщепимое центральное расширение, а H совершенна. Тогда H и G в действительности изоморфны.*

Остаётся показать, что группа ван дер Каллена является совершенной.

Лемма 2.44. *Для $v \in V$ такого, что $v_{-i} = 0$, обозначим*

$$v_- = \sum_{i<0} e_i v_i \qquad \text{и, аналогично,} \qquad v_+ = \sum_{i>0} e_i v_i.$$

Тогда

$$X^*(e_i,\, v,\, a) = X^*_{i,-i}(a + 2v_i - v_i\varepsilon_i - \langle v_-,\, v_+\rangle)\cdot$$
$$\cdot X^*_{-l,-i}(v_{-l}\varepsilon_i)\ldots X^*_{-1,-i}(v_{-1}\varepsilon_i) X^*_{1,-i}(v_1\varepsilon_i)\ldots X^*_{l,-i}(v_l\varepsilon_i).$$

Доказательство. Можно повторить доказательство Леммы 2.3 почти дословно. Необходимо только заметить, что $[X^*(e_i,\, 0,\, b),\, X^*(e_i,\, \hat{v},\, \hat{a})] = 1$ по Q1 и что $X^*(e_i,\, 0,\, 2a) = X^*(e_i,\, e_i a,\, 0)$. □

Лемма 2.45. *Группа* $\operatorname{StSp}^*(2l,\, R)$ *является совершенной.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что $X^*_{ij}(a)$ лежит в $[\operatorname{StSp}^*(2l,\, R),\, \operatorname{StSp}^*(2l,\, R)]$ по соотношениям P3 и P4. Таким образом, $X^*(e_i,\, v,\, a)$ тоже лежит в коммутанте по Лемме 2.44. Теперь из Q3 следует, что любая образующая $X^*(u,\, v,\, a)$ лежит в коммутанте. Действительно, это очевидно, так как u является столбцом симплектической элементарной матрицы. □

Итак, мы показали, что $\operatorname{StSp}^*(2l,\, R) \cong \operatorname{StSp}(2l,\, R)$, и тем самым доказали теорему о другом копредставлении симплектической группы Стейнберга.

2.3 Локально-глобальный принцип

2.3.1 Другое копредставление для относительной группы

Как и в случае полной линейной группы, для доказательства локально-глобального принципа нам понадобится рассмотреть другое копредставление для относительной группы Стейнберга. Кроме того, как и там, достаточно ограничиться случаем расщепимого идеала $I \trianglelefteq R$, то есть, такого идеала, для которого естественная проекция $\rho\colon R \twoheadrightarrow R/I$ имеет сечение. Очевидно, что $tR[t] \trianglelefteq R[t]$ — это расщепимый идеал.

В качестве другого копредставления мы будем использовать группу из следующего определения. Целью этого пункта будет показать, что в случае расщепимого идеала она совпадает с относительной группой Стейнберга (определённой в первом разделе настоящей главы).

Определение. Назовём *симплектической группой Туленбаева* $\mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\, R,\, I)$ следующую группу, задаваемую множеством образующих

$$\{[u,\, v,\, a,\, b] \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)e_1 \times R^{2l} \times I \times I \mid \langle u,\, v\rangle = 0\}$$

и следующими соотношениями между ними:

$$[u,\, vr,\, a,\, b] = [u,\, v,\, ra,\, b] \quad \forall\, r \in R, \tag{T0}$$

$$[u,\, v,\, a,\, b][u,\, w,\, a,\, c] = [u,\, v,\, a,\, b + c + a^2\langle v,\, w\rangle], \tag{T1}$$

$$[u,\, v,\, a,\, 0][u,\, v,\, b,\, 0] = [u,\, v,\, a + b,\, 0], \tag{T2}$$

$$[u,\, u,\, a,\, 0] = [u,\, 0,\, 0,\, 2a], \tag{T3}$$

$$[u,\, v,\, a,\, 0] = [v,\, u,\, a,\, 0] \quad \forall\, (u,\, v) \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)(e_1,\, e_2), \tag{T4}$$

$$\begin{aligned}[u + vr,\, 0,\, 0,\, a] = [u,\, 0,\, 0,\, a][v,\, 0,\, 0,\, ar^2][u,\, v,\, ar,\, 0]& \\ \forall\, r \in R \;\; \forall\, (u,\, v) \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)(e_1,\, e_2),&\end{aligned} \tag{T5}$$

$$[u',\, v',\, a',\, b'][u,\, v,\, a,\, b][u',\, v',\, a',\, b']^{-1} = [T(u',\, v'a',\, b')u,\, T(u',\, v'a',\, b')v,\, a,\, b]. \tag{T6}$$

Лемма 2.46. *Корректно определено естественное отображение*

$$\kappa\colon\ \mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\, R,\, I) \to \mathrm{StSp}(2l,\, R),$$

переводящее $[u,\, v,\, a,\, b]$ *в* $X(u,\, va,\, b)$.

Доказательство. Из формулировки теоремы о другом копредставлении очевидны все соотношения, кроме соотношения T5. Докажем, что действительно

$$X(u + vr,\, 0,\, a) = X(u,\, 0,\, a)X(v,\, 0,\, ar^2)X(u,\, var,\, 0).$$

Пусть $M \in \mathrm{Ep}(2l,\, R)$ такое, что $u = Me_1$ и $v = Me_2$, положим $w = Me_{-1}$ и $z = Me_{-2}$. Вычислим двумя способами коммутатор

$$[X(v,\, -wr,\, 0),\, X(u,\, 0,\, a)].$$

С одной стороны, используя соотношения Q1 и Q3, мы получаем

$$[X(v,\,-wr,\,0),\,X(u,\,0,\,a)] = {}^{X(v,\,-wr,\,0)}X(u,\,0,\,a)\cdot X(u,\,0,\,-a) =$$
$$= X(u+v\langle -wr,\,u\rangle,\,0,\,a)X(u,\,0,\,-a) = X(u+vr,\,0,\,a)X(u,\,0,\,-a).$$

С другой стороны,

$$[X(v,\,-wr,\,0),\,X(u,\,0,\,a)] = X(v,\,-wr,\,0)\cdot {}^{X(u,\,0,\,a)}X(v,\,wr,\,0) =$$
$$= X(v,\,-wr,\,0)X(v,\,wr+uar,\,0) = X(v,\,uar,\,\langle -wr,\,wr+uar\rangle) =$$
$$= X(v,\,uar,\,ar^2) = X(v,\,0,\,ar^2)X(v,\,uar,\,0).$$

Остаётся заметить, что ${}^{X(u+vr,\,0,\,a)}X(u,\,0,\,-a) = X(u,\,0,\,-a)$. □

Ясно, что образ κ содержится в $\operatorname{Ker}\big(\mathrm{StSp}(2l,\,R) \twoheadrightarrow \mathrm{StSp}(2l,\,R/I)\big)$ и содержит в себе все элементы вида ${}^{g}X_{ij}(a) = X(\phi(g)e_i,\,\phi(g)e_{-j}\,a\,\varepsilon_{-j},\,0)$ и ${}^{g}X_{i,-i}(a) = X(\phi(g)e_i,\,0,\,a)$ для любого $a \in I$, то есть, в действительности, совпадает с с этим ядром.

Каждая тройка $(u,\,v,\,a) \in R^{2l}\times R^{2l}\times R$, где $\langle u,\,v\rangle = 0$, определяет гомоморфизм

$$\alpha_{u,v,a}\colon\ \mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\,R,\,I) \to \mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\,R,\,I),$$

переводящий образующую $[u',\,v',\,a',\,b']$ в $[T(u,\,v,\,a)u',\,T(u,\,v,\,a)v',\,a',\,b']$. Такой $\alpha_{u,v,a}$ действительно корректно определён: устная проверка показывает, что соотношения T0–T6 имеют место для образов образующих. Более того, корректно определён гомоморфизм

$$\mathrm{StSp}(2l,\,R) \to \operatorname{Aut}(\mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\,R,\,I)),$$

переводящий $X(u,\,v,\,a)$ в $\alpha_{u,v,a}$, то есть, абсолютная группа Стейнберга действует на группе Туленбаева. Разумеется, нужно проверить, что соотношения Q1–Q3 выполняются для $\alpha_{u,v,a}$, но это также почти очевидно.

Мы завершаем этот пункт следующим утверждением.

Лемма 2.47. *Пусть $I \trianglelefteq R$ — это расщепимый идеал. Тогда группа Туленбаева совпадает с относительной группой Стейнберга,*

$$\mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\,R,\,I) = \mathrm{StSp}(2l,\,R,\,I).$$

Доказательство. Мы уже знаем, что в случае расщепимого идеала $\mathrm{StSp}(2l,\,R,\,I)$ совпадает с ядром $\operatorname{Ker}\big(\mathrm{StSp}(2l,\,R) \twoheadrightarrow \mathrm{StSp}(2l,\,R/I)\big)$, так что остаётся построить стрелку, обратную к κ. Для этого определим

$$Y^*_{ij}(a) = [e_i,\,e_{-j},\,a\,\varepsilon_{-j},\,0] \quad \text{и} \quad Y^*_{i,-i}(a) = [e_i,\,0,\,0,\,a]$$

внутри $\mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\,R,\,I)$. Эти элементы удовлетворяют соотношениям KL0–KL7 из определения относительной группы Стейнберга. Соотношения KL0–KL2 и KL7 очевидны. Рассмотрим для примера KL4.

$$\begin{aligned}[\![X_{i,-i}(r),\, Y^*_{-i,j}(b)]\!] &= [e_{-j},\, T(e_i,\, 0,\, r)e_{-i},\, b\varepsilon_{-j},\, 0][e_{-j},\, e_{-i},\, b\varepsilon_{-j},\, 0]^{-1} = \\ &= [e_{-j},\, e_i r\varepsilon_i,\, b\varepsilon_{-j},\, -rb^2] = [e_{-j},\, e_i r\varepsilon_i,\, b\varepsilon_{-j},\, 0][e_{-j},\, 0,\, b\varepsilon_{-j},\, -rb^2] = Y^*_{ij}(rb\varepsilon_i)\cdot Y^*_{-j,j}(-rb^2);\end{aligned}$$

Остальные соотношения проверяются точно так же. Для проверки KL5 нужно воспользоваться T5, а для проверки KL6 — соотношением T3. Таким образом, мы получаем отображение $\theta\colon \mathrm{StSp}(2l,\, R,\, I) \to \mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\, R,\, I)$, сохраняющее действие. Очевидно, что $\kappa\theta = 1$, так что θ инъективно. Остаётся показать, что оно также сюръективно. Сначала заметим, что $[e_1,\, v,\, a,\, b] = [e_1,\, 0,\, 0,\, b - a^2\sum v_k v_{-k}]\prod[e_1,\, e_k,\, v_k a,\, 0]$ лежит в образе θ (здесь v_k как обычно обозначает k-ую координату вектора v; мы пользуемся тем, что $v_{-1} = 0$). Но тогда все образующие $[u,\, v,\, a,\, b]$ лежат в образе θ, так как это отображение сохраняет действие. □

Ниже для расщепимых идеалов мы отождествляем относительную группу Стейнберга и группу Туленбаева.

2.3.2 Сведение к лемме о поднятии

В этом пункте мы начинаем доказательство ещё одного важного результата этой главы, локально-глобального принципа для симплектической группы Стейнберга.

Теорема 4 (Локально-глобальный принцип)**.** *Пусть R — произвольное коммутативное кольцо (с 1), $n \geq 3$, и $g \in \mathrm{StSp}(2l,\, R[t],\, tR[t])$. Тогда $g = 1$ (соотв., лежит в образе $\mathrm{StSp}(2l-2,\, R[t])$) тогда и только тогда, когда $g_{\mathfrak{m}} = 1 \in \mathrm{StSp}(2l,\, R_{\mathfrak{m}}[t])$ (соотв., лежит в образе $\mathrm{StSp}(2l-2,\, R_{\mathfrak{m}}[t])$) для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ в R.*

Как и в линейном случае, мы покажем, что эта теорема сводится к подходящей версии «леммы о поднятии».

Выберем элемент $a \in R$, не являющийся нильпотентом. Пусть $\lambda_a\colon R \to R_a$ обозначает главную локализацию R в a.

Для каждого $x \in R[t]$ рассмотрим отображение эвалюации $\mathrm{ev}_x\colon R[t] \to R[t]$, то есть (единственный) гомоморфизм R-алгебр, переводящий t в x. Для $p \in R[t]$ будем обозначать его образ под действием ev_x через $p(x)$, например, $p = p(t)$. Точно так же, для $g \in \mathrm{StSp}(2l,\, R[t])$ будем обозначать его образ под действием ev_x^* через $g(x)$. Мы покажем, что верно следующее утверждение.

Лемма 2.48. *Рассмотрим $g(t) \in \mathrm{StSp}(2l,\, R[t],\, tR[t])$ такой, что*

$$\lambda_a^*(g(t)) = 1 \in \mathrm{StSp}(2l,\, R_a[t]).$$

Тогда найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $g(a^N t) = 1$. Точно так же, предположим, что

$$\lambda_a^*(g(t)) \in \mathrm{Im}\big(\mathrm{StSp}(2l-2,\, R_a[t]) \to \mathrm{StSp}(2l,\, R_a[t])\big).$$

Тогда найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$g(a^N t) \in \operatorname{Im}\big(\operatorname{StSp}(2l-2,\, R[t],\, tR[t]) \to \operatorname{StSp}(2l,\, R[t],\, tR[t])\big).$$

Теперь определим симплектический аналог стрелки Туленбаева, который понадобится нам для доказательства Леммы 2.48.

Сначала напомним определения из Главы 1. Обозначим через $B = R \ltimes tR_a[t]$ кольцо с покомпонентным сложением и умножением, определяемым формулой

$$(r,\, f) \cdot (s,\, g) = (rs,\, \lambda_a(r)g + f\lambda_a(s) + fg).$$

Можно представлять себе элементы B как многочлены от переменной t со свободным членом из R, а остальными коэффициентами — из R_a.

Рассмотрим направленную систему колец

$$R[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_{at}} R[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_{at}} R[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_{at}} \cdots$$

то есть, $(S_i,\, \psi_{ij})_{0 \leq i \leq j}$, где $S_i = R[t]$ и $\psi_{ij} \colon t \mapsto a^{j-i}t$. Она индуцирует направленную систему групп Стейнберга. В Лемме 1.9 мы показали, что система отображений $\varphi_i \colon S_i \to B$, переводящих

$$p(t) \mapsto \big(p(0),\, \lambda_a^*(p)(a^{-i}t) - \lambda_a^*(p)(0)\big)$$

индуцирует изоморфизм $\varinjlim S_i \xrightarrow{\sim} B$. Взятие (симплектической) группы Стейнберга коммутирует с направленными пределами, так что индуцированная стрелка

$$\varinjlim \operatorname{StSp}_{2n}(S_i) \xrightarrow{\sim} \operatorname{StSp}_{2n}(B)$$

также является изоморфизмом.

Теперь мы утверждаем, что композиция φ_0^* и вложения

$$\mu\colon\ \operatorname{StSp}_{2n}(R[t],\, tR[t]) \hookrightarrow \operatorname{StSp}_{2n}(R[t]) \xrightarrow{\varphi_0^*} \operatorname{StSp}_{2n}(B)$$

пропускается через отображение локализации в a. Более общо, имеет место следующее утверждение (ср. Лемму 1.10).

Лемма 2.49 (Лемма о поднятии). *Пусть B — кольцо, $a \in B$, и $I \trianglelefteq B$ такой идеал, что для любого $x \in I$ существует единственный $y \in I$ такой, что $ya = x$ (эквивалентное условие: отображение локализации $\lambda_a \colon I \to I_a = I \otimes_R R_a$ является изоморфизмом). Тогда существует отображение*

$$\mathrm{T}\colon\ \operatorname{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\, B_a,\, I_a) \to \operatorname{StSp}(2l,\, B)$$

замыкающее диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\, B,\, I) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_a^*"'] & \operatorname{StSp}(2l,\, B) \arrow[d, "\lambda_a^*"] \\
\operatorname{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\, B_a,\, I_a) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{T}"'] & \operatorname{StSp}(2l,\, B_a)
\end{tikzcd}$$

до коммутативной. Более того, если $g \in \operatorname{Im}\big(\mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l-2,\, B_a, I_a) \to \mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\, B_a,\, I_a)\big)$*, то также верно, что* $\mathrm{T}(g) \in \operatorname{Im}\big(\mathrm{StSp}(2l-2,\, B) \to \mathrm{StSp}(2l,\, B)\big)$.

Мы докажем Лемму 2.49 в следующем пункте. Сейчас мы выведем Лемму 2.48 из неё, а в действительности, в точности повторим доказательство Леммы 1.8.

Доказательство Леммы 2.48. Применим Лемму 2.49 к $a \in R \subseteq B$, $B = R \ltimes tR_a[t]$ как выше, $I = tR_a[t] \trianglelefteq B$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{StSp}(2l,\, R[t],\, tR[t]) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\varphi_0^*"] \arrow[dd, "\lambda_a^*"'] & & \mathrm{StSp}(2l,\, R[t]) \arrow[dd, "\varphi_0^*"] \\
& \mathrm{StSp}(2l,\, B,\, I) \arrow[dl, "\lambda_a^*"'] \arrow[dr, hook] & \\
\mathrm{StSp}(2l,\, R_a[t],\, tR_a[t]) \arrow[rr, "\mathrm{T}"] & & \mathrm{StSp}(2l,\, B).
\end{tikzcd}$$

Возьмём $g(t) \in \mathrm{StSp}_{2n}(R[t],\, tR[t])$ такую, что $\lambda_a^*(g(t)) = 1$. Тогда

$$\varphi_0^*(g(t)) = (T \circ \lambda_a^*)(g(t)) = 1$$

тоже, то есть, $g(t)$ становится тривиальным в пределе. Но это возможно только если для некоторого натурального N выполнено $\psi_{0,N}^*(g(t)) = 1$. Доказательство второго утверждения леммы точно такое же. $\square$

Доказательство следующей леммы повторяет (как и в линейном случае) доказательство Леммы 16 из [52]. В доказательстве происходит две ссылки: вместо Леммы 8 из [52] нужно воспользоваться Леммой 2.47, а вместо Леммы 15 из [52] — Леммой 2.48.

Лемма 2.50. *Рассмотрим* $a,\, b \in R$*, которые порождают* R *как идеал,* $Ra + Rb = R$*. Предположим, что для* $g \in \mathrm{StSp}(2l,\, R[t],\, tR[t])$ *верно, что* $\lambda_a^*(g) = \lambda_b^*(g) = 1$ *. Тогда* $g = 1$*. Точно так же, предположим, что* $\lambda_a^*(g) \in \mathrm{StSp}(2l-2,\, R_a[t],\, tR_a[t])$ *и* $\lambda_b^*(g) \in \mathrm{StSp}(2l-2,\, R_b[t],\, tR_b[t])$*. Тогда* $g \in \mathrm{StSp}(2l-2,\, R[t],\, tR[t])$*.*

Второе утверждение леммы не доказано в [52], но оно доказывается точно так же, как и первое.

Теперь, как и в линейном случае, доказательство локально-глобального принципа тоже завершается при помощи стандартного рассуждения. Первое утверждение теоремы дословно повторяет доказательство Теоремы 2 из [52]. Единственная ссылка в этом доказательстве происходит на Лемму 16 из [52], вместо которой нужно воспользоваться доказанной выше Леммой 2.50. Второе утверждение теоремы о локально-глобальном принципе доказывается так же, как и первое.

2.3.3 Доказательство леммы о поднятии

Сформулируем некоторые свойства «других образующих» $X(u,\,v,\,a)$, которые уже были доказаны.

Лемма 2.51. *Для любых* $u,\,v\in R^{2l}$, $\langle u,\,v\rangle=0$, $a,\,b\in R$, $g\in\mathrm{StSp}(2l,\,R)$ *верно, что*

$$\phi\big(X(u,\,v,\,a)\big)=T(u,\,v,\,a), \tag{X0}$$

$$g\,X(u,\,v,\,a)g^{-1}=X(\phi(g)u,\,\phi(g)v,\,a), \tag{X1}$$

$$X(ub,\,0,\,a)=X(u,\,0,\,b^2a), \tag{X2}$$

$$X(u,\,0,\,a)X(u,\,0,\,b)=X(u,\,0,\,a+b), \tag{X3}$$

$$X(u,\,v,\,0)=X(v,\,u,\,0), \tag{X4}$$

$$X(ua,\,ub,\,0)=X(u,\,0,\,2ab), \tag{X5}$$

$$X(u+v,\,0,\,1)=X(u,\,0,\,1)X(v,\,0,\,1)X(u,\,v,\,0), \tag{X6}$$

$$X(u,\,v,\,a)=X(u,\,v,\,0)X(u,\,0,\,a). \tag{X7}$$

Напомним, где приведены доказательства этих утверждений: для X0 см. первый пункт предыдущего раздела настоящей главы, «Формулировка результатов и план доказательства», свойства X1–X5 доказаны в Леммах 2.27, 2.30, 2.32, 2.34, 2.35, а X6 и X7, в действительности, определения.

Кроме того, нам понадобятся некоторые другие их свойства, которые мы приводим в Лемме 2.54 ниже. Чтобы доказать их, нам нужно вернуться к элементам $Y(u,\,v,\,a)$.

Напомним, что для $u\in R^{2l}$, имеющего пару нулей в симметричных позициях, то есть, таких, что $u_i=u_{-i}=0$ для некоторого i, и $v\in R^{2l}$ такого, что $\langle u,\,v\rangle=0$, $a\in R$ определены элементы $Y_{(i)}(u,\,v,\,a)$. Если в дополнение к этому u имеет ещё одну пару симметричных нулей, то есть, $u_i=u_{-i}=u_j=u_{-j}=0$ для $i\neq\pm j$, то $Y_{(i)}(u,\,v,\,a)=Y_{(j)}(u,\,v,\,a)$ (см. Y1 ниже) и в этой ситуации мы опускаем индексы и обозначаем элементы просто $Y(u,\,v,\,a)$. Мы уже доказали следующие свойства этих элементов.

Лемма 2.52. *Для индексов* i *и* $j\neq\pm i$, *векторов* $u,\,v,\,v',\,w,\,w',\,q,\,q',\,r,\,r'\;s\in R^{2l}$ *таких, что выполнены следующие условия:* $u_i=u_{-i}=0$, $\langle u,\,v\rangle=\langle u,\,v'\rangle=0$, $\langle w,\,e_i\rangle=\langle w',\,e_i\rangle=0$, $v'_i=v'_{-i}=q_i=q_{-i}=r_i=r_{-i}=r_j=r_{-j}=0$, $q'=e_iq'_i+e_{-i}q'_{-i}$, $r'=e_jr'_j+e_{-j}r'_{-j}$,

$s = e_i s_i + e_{-i} s_{-i}$, *и элементов* $a,\, a' \in R$, *верно следующее*

$$\phi\big(Y_{(i)}(u,\, v,\, a)\big) = T(u,\, v,\, a), \tag{Y0}$$

$$Y_{(i)}(u,\, v,\, a) = Y_{(j)}(u,\, v,\, a) \;\; \text{если также } u_j = u_{-j} = 0, \tag{Y1}$$

$$Y(e_i,\, w,\, a)Y(e_i,\, w',\, a') = Y(e_i,\, w + w',\, a + a' + \langle w,\, w'\rangle), \tag{Y2}$$

$$Y(e_i,\, w,\, a) = X(e_i,\, w,\, a), \tag{Y3}$$

$$Y_{(i)}(u,\, v',\, a) = [Y(e_i,\, u,\, 0),\, Y(e_{-i},\, v'\varepsilon_i,\, a)]Y(e_i,\, ua\,\varepsilon_{-i},\, 0), \tag{Y4}$$

$$Y_{(i)}(u,\, v,\, a) = Y_{(i)}(u,\, v - e_i v_i - e_{-i} v_{-i},\, a - v_i v_{-i}\,\varepsilon_i)Y(e_i,\, uv_i,\, 0)Y(e_{-i},\, uv_{-i},\, 0), \tag{Y5}$$

$$X(q + q',\, 0,\, a) = Y_{(i)}(q,\, 0,\, a)Y(q',\, 0,\, a)Y(q',\, qa,\, 0), \tag{Y6}$$

$$Y(r,\, s,\, 0)Y(r',\, s,\, 0) = Y_{(i)}(r + r',\, s,\, 0). \tag{Y7}$$

Также напомним, где приведены доказательства этих утверждений. Для Y0 см. первый пункт предыдущего раздела, для Y1 и Y2 см. Леммы 2.17 и 2.10, для Y3 нужно воспользоваться Леммой 2.37, Y6, Леммой 2.51(X7) и Y2, Y4–Y6 в действительности определения, Y7 — это Лемма 2.29.

Докажем теперь некоторые новые свойства $Y_{(i)}(u,\, v,\, a)$.

Лемма 2.53. *Для индекса* i *и векторов* $u,\, v,\, w \in R^{2l}$ *таких, что* $u_i = u_{-i} = 0$, $\langle u,\, v\rangle = \langle u,\, w\rangle = 0$, *элементов* $a,\, b \in R$, *имеет место*

$$Y_{(i)}(u,\, v,\, a + b) = Y_{(i)}(u,\, v,\, a)Y_{(i)}(u,\, 0,\, b), \tag{Y8}$$

$$Y_{(i)}(u,\, v,\, a) = Y_{(i)}(u,\, v - e_i v_i - e_{-i} v_{-i},\, a)Y_{(i)}(u,\, e_i v_i + e_{-i} v_{-i},\, 0), \tag{Y9}$$

$$X(u + v,\, 0,\, a) = X(u,\, 0,\, a)X(v,\, 0,\, a)Y_{(i)}(u,\, va,\, 0), \tag{Y10}$$

$$Y_{(i)}(u,\, va,\, 0) = Y_{(i)}(v,\, ua,\, 0) \;\; \text{если также } v_i = v_{-i} = 0, \tag{Y11}$$

$$Y_{(i)}(u,\, v,\, a) = X(u,\, v,\, a), \tag{Y12}$$

$$Y_{(i)}(u,\, v,\, 0)Y_{(i)}(u,\, w,\, 0) = Y_{(i)}(u,\, v + w,\, \langle v,\, w\rangle). \tag{Y13}$$

Доказательство. Докажем одновременно Y8 и Y9.

Сначала предположим, что $v_i = v_{-i} = 0$. В этом предположении можно получить Y8, повторив доказательство Леммы 2.22 предыдущего раздела. Нужно использовать Y2 и Y4, чтобы разложить элементы, и Y3 и X1, чтобы показать, что некоторые из сомножителей коммутируют (вместо сложных рассуждений в изначальном доказательстве). Мы смогли доказать более сильное утверждение, потому что теперь мы пользуемся центральностью K_2. Теперь используем этот результат, чтобы доказать Y9, чуть точнее, повторим доказательство Леммы 2.23, используя только что полученное тождество вместо Леммы 2.22. Теперь Y8 следует из Y9 в полной общности. Нужно воспользоваться тем, что $Y_{(i)}(u,\, 0,\, b) = X(u,\, 0,\, b)$ по Y6, и коммутирует с $Y_{(i)}(u,\, e_i v_i + e_{-i} v_{-i},\, 0)$ по X1.

Чтобы доказать Y10–Y13, мы также действуем в несколько этапов.

Сначала обратимся к Y10 и предположим, что $v_i = v_{-i} = 0$. Тогда повторим доказательство Леммы 2.24, поменяв местами роли u и v и воспользовавшись Y3 и X1 вместо исходных рассуждений. Очевидно, по X1, $X(u,\,0,\,a)$ и $X(v,\,0,\,a)$ коммутируют. Воспользовавшись этим фактом, получаем Y11. Далее, мы можем получить Y12 в тех же предположениях на v. Для $a = 0$ это следует из Y10 и X6, для общего случая нужно воспользоваться Y8 и X7.

Далее, рассмотрим Y13 и предположим, что $v_i = v_{-i} = w_i = w_{-i} = 0$. По Y4 имеем

$$Y(u,\,v+w,\,\langle v,\,w\rangle) = [Y(e_i,\,u,\,0),\,Y(e_{-i},\,(v+w)\,\varepsilon_i,\,\langle v,\,w\rangle)]Y(e_{-i},\,u\langle v,\,w\rangle\varepsilon_{-i}).$$

Теперь мы получаем, что

$$Y(e_{-i},\,(v+w)\,\varepsilon_i,\,\langle v,\,w\rangle) = Y(e_{-i},\,v\,\varepsilon_i,\,0)Y(e_{-i},\,w\,\varepsilon_i,\,0)$$

по Y2 и используем тождество $[a,\,bc] = [a,\,b]\cdot[a,\,c]\cdot[[c,\,a],\,b]$ для

$$a = Y(e_i,\,u,\,0),\quad b = Y(e_{-i},\,v\,\varepsilon_i,\,0),\quad c = Y(e_{-i},\,w\,\varepsilon_i,\,0).$$

Как и выше, $[a,\,b] = Y_{(i)}(u,\,v,\,0)$ и $[a,\,c] = Y_{(i)}(u,\,w,\,0)$. Легко проверить, что

$$[[c,\,a],\,b] = Y(e_{-i},\,-u\langle w,\,v\rangle\varepsilon_i,\,0)$$

при помощи Y3, X1 и Y2.

Теперь мы докажем Y13 для произвольных v, w и u, имеющего две пары симметричных нулей, то есть такого, что также $u_j = u_{-j} = 0$ для $j \neq \pm i$. Разложим $v = \tilde{v} + v'$, где $v' = e_i v_i + e_{-i} v_{-i}$, и так же разложим w. Воспользуемся Y9, затем Y8, потом Y6 и X1 чтобы поменять сомножители местами, и затем Y8, чтобы получить

$$Y(u,\,v+w,\,\langle v,\,w\rangle) = Y(u,\,\tilde{v}+\tilde{w},\,\langle\tilde{v},\,\tilde{w}\rangle)Y(u,\,v'+w',\,\langle v',\,w'\rangle).$$

Для каждого из сомножителей мы можем воспользоваться предыдущими шагами. Для того, чтобы переупорядочить сомножители в получившемся произведении, воспользуемся тем, что $Y(u,\,v',\,0) = X(u,\,v',\,0)$ (мы уже проверили Y12 в этой ситуации) и X1. Затем снова воспользуемся Y9.

Далее, мы докажем Y10 в полной общности. Разложим $v = \tilde{v} + v'$ как выше и воспользуемся Y6, чтобы получить

$$X(u+v,\,0,\,a) = X(u+\tilde{v},\,0,\,a)X(v',\,0,\,a)Y(v',\,(u+\tilde{v})a,\,0).$$

Для первого сомножителя мы уже можем воспользоваться Y10, а для последнего — уже можем воспользоваться Y13. Переставляя сомножители при помощи X1, мы получаем

$$X(u+v,\,0,\,a) = X(u,\,0,\,a)Y_{(i)}(u,\,\tilde{v}a,\,0)Y(v',\,ua,\,0)X(v,\,0,\,a)$$

при помощи Y6. Разложим $u = \tilde{u} + u'$, где $u' = e_j u_j + e_{-j} u_{-j}$, затем разложим $Y(v',\,ua,\,0)$ по Y9, применим Y11 к каждому множителю и воспользуемся Y7, чтобы получить

$$Y(v',\,ua,\,0) = Y(v',\,\tilde{u}a,\,0)Y(v',\,u'a,\,0) = Y_{(j)}(\tilde{u},\,v'a,\,0)Y_{(k)}(u',\,v'a,\,0) = Y(u,\,v'a,\,0).$$

Теперь Y9 завершает рассуждение. Действуя в точности как выше, мы получаем также Y12 в полной общности.

Наконец, рассмотрим Y13. Как и выше, разложим $v = \tilde{v} + v'$ и $w = \tilde{w} + w'$, и получим

$$Y_{(i)}(u,\, v + w,\, \langle v,\, w\rangle) = Y_{(i)}(u,\, \tilde{v} + \tilde{w},\, \langle \tilde{v},\, \tilde{w}\rangle)Y_{(i)}(u,\, v' + w',\, \langle v',\, w'\rangle).$$

Для первого множителя выполняется Y13, как показано в предыдущих шагах, для второго воспользуемся Y5, затем Y8 и Y2. Затем изменим порядок сомножителей. Для того, чтобы поменять местами $Y(e_i,\, uw_i,\, 0)$ и $Y(e_{-i},\, uv_{-i},\, 0)$, мы должны добавить к произведению их коммутатор, который равен

$$Y_{(i)}(-uw_i,\, -uv_{-i}\,\varepsilon_i,\, 0) = X(u,\, 0,\, 2w_iv_{-i}\,\varepsilon_i)$$

по Y12 и X5. При помощи Y5 и Y8 получаем

$$Y_{(i)}(u,\, v' + w',\, \langle v',\, w'\rangle) = Y_{(i)}(u,\, v',\, 0)Y_{(i)}(u,\, w',\, 0).$$

Остаётся изменить порядок сомножителей и воспользоваться Y9. □

В следующей лемме сформулированы новые соотношения между X-ами, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 2.54. *Рассмотрим $u,\, v,\, w \in R^{2l}$, $a,\, b \in R$ такие, что $\langle u,\, v\rangle = \langle u,\, w\rangle = 0$. Предположим, что либо $u_i = u_{-i} = 0$, либо $v_i = v_{-i} = w_i = w_{-i} = 0$. Тогда верно следующее.*

$$X(u + vr,\, 0,\, a) = X(u,\, 0,\, a)X(v,\, 0,\, r^2a)X(u,\, vra,\, 0), \tag{X8}$$

$$X(u,\, va,\, 0) = X(v,\, ua,\, 0), \tag{X9}$$

$$X(u,\, v,\, a)X(u,\, w,\, b) = X(u,\, v + w,\, a + b + \langle v,\, w\rangle). \tag{X10}$$

Доказательство. Сначала предположим, что $u_i = u_{-i} = 0$. Тогда X8 следует из Y10, X2 и Y12. Обозначим $u' = e_ju_j + e_{-j}u_{-j}$ и $v' = e_iv_i + e_{-i}v_{-i}$ для некоторого $j \neq \pm i$ и разложим $u = \tilde{u} + u'$, $v = \tilde{v} + v'$. Тогда

$$X(u,\, va,\, 0) = Y_{(i)}(u,\, \tilde{v}a,\, 0)Y(\tilde{u},\, v'a,\, 0)Y(u',\, v'a,\, 0)$$

по Y9 и Y7. Теперь применим Y11 дважды к каждому сомножителю

$$X(u,\, va,\, 0) = Y_{(i)}(ua,\, \tilde{v},\, 0)Y(\tilde{u}a,\, v',\, 0)Y(u'a,\, v',\, 0).$$

Далее, для $a = b = 0$, X10 следует из Y12 и Y13, а общий случай из Y8, X7 и X3.

Теперь рассмотрим второй случай, $v_i = v_{-i} = w_i = w_{-i} = 0$. Для X8 воспользуемся предыдущим шагом (X8 и X9). Остаётся доказать X10. Предположим, что $a = b = 0$ (случай произвольных a и b сводится к этому, как и в предыдущем шаге). Обозначим $u' = e_iu_i + e_{-i}u_{-i}$ и $\tilde{u} = u - u'$ (раньше мы брали вместо этого $\pm j$-е компоненты). Используя X4, Y12 и Y9, получаем

$$X(u,\, v,\, 0) = X(\tilde{u},\, v,\, 0)X(u',\, v,\, 0),$$

и также для w. Используя X1 и предыдущий случай (X10), можем вычислить

$$[X(u',\, v,\, 0),\, X(\tilde{u},\, w,\, 0)] = X(\tilde{u},\, u'\langle v,\, w\rangle,\, 0).$$

Таким образом, переставляя множители и пользуясь предыдущим случаем, мы получаем

$$X(u,\, v,\, 0)X(u,\, w,\, 0) = X(\tilde{u},\, v+w,\, \langle v,\, w\rangle)X(u',\, v+w,\, \langle v,\, w\rangle)X(\tilde{u},\, u'\langle v,\, w\rangle,\, 0).$$

Теперь мы можем завершить доказательство, последовательно пользуясь X7, X1, X4, Y12, Y9 и Y6. □

Перейдём к построению стрелки

$$\mathrm{T}\colon\ \mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\, B_a,\, I_a) \to \mathrm{StSp}(2l,\, B)$$

из Леммы 2.49. Как и там, через B обозначим кольцо, через $a \in B$ — элемент, не являющийся нильпотентом, через $I \trianglelefteq B$ такой идеал, что для любого $x \in I$ существует единственный $y \in I$ такой, что $ya = x$. Мы обозначаем такой y как $\frac{x}{a}$. Элементы $\frac{x}{a^N}$ также корректно определены. Отображение локализации $\lambda_a\colon I \to I_a$ является изоморфизмом, и мы отождествляем I и I_a.

Для того, чтобы определить отображение T, нам нужно найти элементы $Z(u,\, v,\, b,\, c) \in \mathrm{StSp}(2l,\, B)$ для всех $u \in \mathrm{Ep}(2l,\, B_a)e_1$, $v \in B_a^{2l}$, $\langle u,\, v\rangle = 0$, и $b, c \in I$, для которых выполняются соотношения T0–T6. Мы начинаем со следующего определения.

Определение. Для $u,\, v_1, \ldots, v_N \in B^{2l}$ таких, что $\langle u,\, v_k\rangle = 0$ при любом k, положим

$$Z(u;\, v_1, \ldots, v_N) = X(u,\, v_1,\, 0) \ldots X(u,\, v_N,\, 0) \cdot X(u,\, 0,\, -\sum_{i<j}\langle v_i,\, v_j\rangle).$$

Лемма 2.55. *Рассмотрим $u,\, v,\, w \in B^{2l}$, $\langle u,\, v\rangle = \langle u,\, w\rangle = 0$. предположим, что w имеет пару симметричных нулевых координат, то есть, $w_i = w_{-i} = 0$ для некоторого i. Тогда*

$$[X(u,\, v,\, 0),\, X(u,\, w,\, 0)] = X(u,\, 0,\, 2\langle v,\, w\rangle).$$

Доказательство. Воспользуемся Леммой 2.51 (X1), чтобы вычислить сопряжённый элемент, и разложим результат по Лемме 2.51 (X6)

$$^{X(u,v,0)}X(u,\, w,\, 0) = X(u,\, 0,\, -1)X(w + u\langle v,\, w\rangle,\, 0,\, -1)X(w + u(1 + \langle v,\, w\rangle),\, 0,\, 1),$$

затем разложим первый и третий сомножители по Лемме 2.54 (X8). Далее, изменим порядок множителей и упростим произведение при помощи Лемм 2.51 и 2.54. Как результат, мы имеем

$$^{X(u,v,0)}X(u,\, w,\, 0) = X(u,\, 0,\, 2\langle v,\, w\rangle)X(w,\, u,\, 0).$$

□

Следующий результат следует из того, что симметрическая группа порождена транспозициями соседних элементов.

Следствие. *Рассмотрим u и $v_1, \dots, v_N \in B^{2l}$ такие, что $\langle u,\, v_k \rangle = 0$ и каждый v_k имеет пару симметричных нулевых координат. Тогда для любой перестановки $\sigma \in S_N$ верно, что*

$$Z(u;\, v_1, \dots, v_N) = Z(u;\, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(N)}).$$

Определение. Для $u,\, v_1, \dots, v_N \in B^{2n}$ таких, что $\langle u,\, v_k \rangle = 0$ и каждый v_k имеет пару симметричных нулевых координат, положим

$$Z(u;\, \{v_k\}_{1 \le k \le N}) = Z(u;\, v_1, \dots, v_N).$$

Заметим также, что имеет место следующий простой факт (он следует из Леммы 2.51 (X2) и Леммы 2.54 (X9).

Лемма 2.56. *Для $u,\, v_1, \dots, v_N \in B^{2l}$ таких, что $\langle u,\, v_k \rangle = 0$ и каждый v_k имеет пару симметричных нулевых координат, $r \in B$, имеет место*

$$Z(ur;\, \{v_k\}_{1 \le k \le N}) = Z(u;\, \{rv_k\}_{1 \le k \le N}).$$

Следующий факт хорошо известен (и проверяется устно).

Лемма 2.57 (Симплектическая лемма Суслина)**.** *Для $w,\, u,\, v \in B^{2l}$ таких, что $\langle w,\, u \rangle = A \in B$, $\langle u,\, v \rangle = 0$, обозначим*

$$v_{ij} = v_{ij}^{w} = (e_i u_{-j}\, \varepsilon_j - e_j u_{-i}\, \varepsilon_i)(v_i w_j - v_j w_i)$$

для любых различных $-n \le i, j \le n$. Тогда верно, что $v_{ij} = v_{ji}$, $\langle u,\, v_{ij} \rangle = 0$, и

$$\sum_{i<j} v_{ij} = vA.$$

Сравните следующий результат с Леммой 2.54 (X10): нам не нужно условие $v_i = v_{-i} = 0$, но мы предполагаем, что $\langle v,\, w \rangle = 0$.

Лемма 2.58. *Рассмотрим $u,\, v,\, w \in B^{2l}$ такие, что $\langle u,\, v \rangle = \langle u,\, w \rangle = \langle v,\, w \rangle = 0$ и $w_i = w_{-i} = 0$. Тогда*

$$X(u,\, v + w,\, 0) = X(u,\, v,\, 0) X(u,\, w,\, 0).$$

Доказательство. По Лемме 2.51 (X6), имеем

$$X(u,\, v + w,\, 0) = X(u,\, 0,\, -1) X(v + w,\, 0,\, -1) X(u + v + w,\, 0,\, 1).$$

Разложим второй и третий множители по Лемме 2.54 (X8). Тогда мы получим новый сомножитель $X(w,\, u+v,\, 0)$, разложим его по Лемме 2.54 (X10). Вектора u, v, w ортогональны, поэтому все сомножители коммутируют. Упростим произведение при помощи Леммы 2.54 (X10) и получим искомое утверждение при помощи Леммы 2.51 (X6). $\square$

Лемма 2.59. *Пусть $w,\, u,\, v \in B^{2l}$ такие, что $\langle w,\, u\rangle = A$ и $\langle u,\, v\rangle = 0$. Предположим также, что v имеет пару симметричных нулевых координат. Тогда*

$$X(u,\, vA,\, 0) = Z(u,\, \{v_{ij}\}_{i\leq j}).$$

Доказательство. Скажем, $v_1 = v_{-1} = 0$. Тогда $v_{1,-1} = 0$. Разложим

$$vA = \sum_{i<j} v_{ij} = \underbrace{\sum_{i\neq\pm1} v_{-1,i}}_{p} + \underbrace{\sum_{i\neq\pm1} v_{1,i}}_{q} + \underbrace{\sum_{i,j\neq\pm1} v_{ij}}_{r}$$

при помощи леммы Суслина (Лемма 2.57). Очевидно,

$$p_{-1} = \Big(\sum_{i\neq\pm1} v_{-1,i}\Big)_{-1} = \Big(\sum_{i<j} v_{ij}\Big)_{-1} = v_{-1}A = 0$$

и также $q_1 = v_1 A = 0$. Кроме того, $p_1 = q_{-1} = r_{-1} = r_1 = 0$. Таким образом, по Лемме 2.54 (X10) мы имеем

$$\begin{aligned}X(u,\, vA,\, 0) &= X(u,\, p+q+r,\, 0) = \\ &= X(u,\, p,\, 0)X(u,\, q,\, 0)X(u,\, r,\, 0)X(u,\, 0,\, -\langle p,\, q\rangle - \langle p,\, r\rangle - \langle q,\, r\rangle).\end{aligned}$$

Для $1 < i \leq n$ обозначим $z_i = v_{-1,i} + v_{-1,-i}$. Тогда $\langle z_i,\, z_j\rangle = 0$ при $i \neq j$, каждый z_i имеет пару симметричных нулевых координат, и $\sum_{i=2}^n z_i = p$. По Лемме 2.58, мы получаем

$$X(u,\, p,\, 0) = \prod_{i=2}^n X(u,\, z_i,\, 0).$$

Далее, заметим, что $v_{-1,i}$ и $v_{-1,-i}$ имеют общую пару симметричных нулевых координат. Тогда по Лемме 2.54 (X10) получаем

$$X(u,\, z_i,\, 0) = X(u,\, v_{-1,i},\, 0)X(u,\, v_{1,i},\, 0)X(u,\, 0,\, -\langle v_{-1,i},\, v_{1,i}\rangle),$$

так что

$$X(u,\, p,\, 0) = Z(u;\, \{v_{-1,i}\}_{i\neq\pm1}).$$

Так же, $X(u,\, q,\, 0) = Z(u;\, \{v_{1,i}\}_{i\neq\pm1})$ и, по Лемме 2.54 (X10), $X(u,\, r,\, 0) = Z(u;\, \{v_{ij}\}_{i,j\neq\pm1})$, что завершает доказательство. □

Лемма 2.60. *Пусть $w,\, u,\, v \in B^{2n}$, $\langle w,\, u\rangle = A$ и $\langle u,\, v\rangle = 0$. Рассмотрим $x^1, \ldots x^N \in B^{2n}$ такие, что каждый x^k имеет пару симметричных нулей, $\langle u,\, x^k\rangle = 0$ и $\sum_{k=1}^N x^k = vA$. Тогда имеет место*

$$Z(u;\, \{x^k A\}_{k=1}^N) = Z(u;\, \{v_{ij}A\}_{i<j}).$$

Доказательство. Так как $\langle u,\, x^k\rangle = 0$, рассмотрим $x^k_{ij} = (x^k)^w_{ij}$ из леммы Суслина (Лемма 2.57), и воспользуемся Леммой 2.59, чтобы получить

$$X(u,\, x^k A,\, 0) = Z(u,\, \{x^k_{ij}\}_{i<j}).$$

Тогда

$$Z(u;\, \{x^k A\}_{k=1}^N) = Z(u,\, \{x_{ij}^k\}_{k,\, i<j}).$$

С другой стороны, для фиксированных i и j, все x_{ij}^k — это один и тот же вектор, умноженный на разные скаляры, и имеющий пару симметричных координат, и тогда

$$\sum_{k=1}^N x_{ij}^k = (e_i u_{-j}\, \varepsilon_j - e_j u_{-i}\, \varepsilon_i)\Big((\sum_{k=1}^N x_i^k) w_j - (\sum_{k=1}^N x_j^k) w_i \Big) = v_{ij} A.$$

Таким образом,

$$X(u,\, v_{ij}A,\, 0) = \prod_{k=1}^N X(u,\, x_{ij}^k,\, 0)$$

по Лемме 2.54 (X10), и

$$Z(u;\, \{v_{ij}A\}_{i<j}) = Z(u,\, \{x_{ij}^k\}_{k,\, i<j}).$$

□

Определение. Пусть $u,\, v \in B^{2l}$ такие, что $\langle u,\, v\rangle = 0$, и обозначим через

$$I(u) = \sum_{k=-n}^{n} B u_k$$

идеал, порождённый элементами u. Тогда для $A \in I(u)$ рассмотрим любой $w \in B^{2l}$ такой, что $\langle w,\, u\rangle = A$, и обозначим

$$Z^A(u,\, v) = Z(u;\, \{v_{ij}^w A\}_{i<j}).$$

По предыдущей лемме, этот элемент не зависит от выбора w. Проекция $Z^A(u,\, v)$ в элементарную группу равна

$$\phi(Z^A(u,\, v)) = T(u,\, vA^2,\, 0).$$

Докажем теперь ряд свойств элементов $Z^A(u,\, v)$.

Лемма 2.61. *Пусть $u,\, v \in B^{2l}$ такие, что $\langle u,\, v\rangle = 0$, $A \in I(u)$ и $g \in \mathrm{StSp}(2l,\, B)$. Тогда*

$$g\, Z^A(u,\, v) g^{-1} = Z^A(\phi(g)u,\, \phi(g)v).$$

Замечание. Рассмотрим w такой, что $\langle w,\, u\rangle = A$. Тогда $\langle \phi(g)w,\, \phi(g)u\rangle = \langle w,\, u\rangle = A$, так что $A \in I(\phi(g)u)$ и правая часть тождества корректно определена.

Доказательство. Можно предположить, что $g = X_{ij}(b)$. Очевидно,

$$g\, X(u,\, v_{hk}A,\, 0) g^{-1} = X(\phi(g)u,\, \phi(g)v_{hk}A,\, 0)$$

и

$$-\sum \langle v_{hk}A,\, v_{st}A\rangle = -\sum \langle \phi(g)v_{hk}A,\, \phi(g)v_{st}A\rangle,$$

таким образом,

$$g\, Z^A(u,\, v) g^{-1} = Z(\phi(g)u;\, \{\phi(g)v_{hk}A\}_{h<k}).$$

Для $n \geq 4$ каждый из $T_{ij}(b)v_{hk}$ всё ещё имеет по меньшей мере одну пару симметричных нулей, и в этом случае Лемма 2.60 завершает доказательство.

Теперь рассмотрим случай $n = 3$. Для $j = -i$ каждый $T_{ij}(b)v_{hk}$ всё ещё имеет пару симметричных нулей. Предположим, что $j \neq \pm i$. Если $h,\ k \notin \{j, -i\}$, то $\phi(g)v_{hk} = v_{hk}$. Если $\{h, k\} = \{j, -i\}$, мы тоже получаем, что $T_{ij}(b)v_{hk}$ имеет пару симметричных нулевых координат. Таким образом, мы можем предположить, что $h \in \{j, -i\}$, скажем, $h = -i$, и $k \notin \{\pm i, \pm j\}$.

Положим

$$u_{k,-i} = e_k u_i\, \varepsilon_{-i} - e_{-i} u_{-k}\, \varepsilon_k,$$

тогда $v_{k,-i} = u_{k,-i}(v_k w_{-i} - v_{-i} w_k)$. Мы имеем

$$T_{ij}(b)u = u + e_i u_j b - e_{-j} u_{-i}\, b\, \varepsilon_i \varepsilon_j,$$
$$T_{ij}(b)u_{k,-i} = u_{k,-i} + e_{-j} u_{-k}\, b\, \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k.$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\langle T_{ij}(b)u,\ u_{k,-i} - e_k u_j\, b\, \varepsilon_i \rangle = 0.$$

Положим

$$q = u_{k,-i} - e_k u_j\, b\, \varepsilon_i \ \text{ и }\ r = e_k u_j\, b\, \varepsilon_i + e_{-j} u_{-k}\, b\, \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k.$$

Получаем, что $T_{ij}(b)u_{k,-i} = q + r$, поэтому r также ортогонален $T_{ij}(b)u$. Оба q и r имеют пару симметричных нулей, и, кроме того, они ортогональны. Положим $c = (v_k w_{-i} - v_{-i} w_k)$, тогда по Лемме 2.58,

$$X(T_{ij}(b)u,\ T_{ij}(b)v_{k,-i}A,\ 0) = X(T_{ij}(b)u,\ qcA,\ 0)X(T_{ij}(b)u,\ rcA,\ 0).$$

Наконец, искомое утверждение следует из Леммы 2.60. □

Следующая лемма тоже следует из Леммы 2.60.

Лемма 2.62. *Пусть $u,\ v,\ w \in B^{2l}$ такие, что $\langle u,\ v\rangle = \langle u,\ w\rangle = 0$, $A \in I(u)$. Тогда*

$$Z^A(u,\ v)Z^A(u,\ w) = Z^A(u,\ v + w)X(u,\ 0,\ \langle v,\ w\rangle \cdot A^4).$$

Следствие. *Для $u,\ v$, $\langle u,\ v\rangle = 0$, $A \in I(u)$ верно, что*

$$Z^A(u,\ 0) = 1,$$
$$Z^A(u,\ v)^{-1} = Z^A(u,\ -v).$$

Лемма 2.63. *Пусть $u,\ v \in B^{2l}$ такие, что $\langle u,\ v\rangle = 0$, $A \in I(u) \cap I(v)$, $b \in B$. Предположим, что существуют $p,\ q \in B^{2l}$ такие, что*

$$\langle u,\ p\rangle = \langle u,\ q\rangle = \langle v,\ p\rangle = \langle v,\ q\rangle = 0,$$

и $\langle p,\ q\rangle = A$. Тогда верно, что

$$Z^A(u,\ vb \cdot A^3) = Z^A(v,\ ub \cdot A^3).$$

Доказательство. Обозначим $g = Z^A(u, pb)$ и $h = Z^A(v, q)$. Вычислим коммутатор двумя способами,

$$ {}^g h \cdot h^{-1} = g \cdot {}^h g^{-1}. $$

Напомним, что $\phi\big(Z^A(u, pb)\big) = T(u, pbA^2, 0)$, и воспользуемся Леммами 2.61 и 2.62, чтобы получить

$$ {}^g h \cdot h^{-1} = Z^A(v, q + ubA^3) Z^A(v, -q) = Z^A(v, ubA^3). $$

Точно так же, $g \cdot {}^h g^{-1} = Z^A(u, vbA^3)$. □

Лемма 2.64. *Рассмотрим $w, u \in B^{2l}$, $b \in B$, обозначим $A = \langle w, u\rangle$. Предположим, что существуют такие $z, v \in B^{2l}$, что $\langle z, v\rangle = A$ и*

$$ \langle u, v\rangle = \langle u, z\rangle = \langle w, v\rangle = \langle w, z\rangle = 0. $$

Тогда верно, что

$$ Z^A(u, ubA^3) = X(u, 0, 2bA^5). $$

Доказательство. Положим $g = Z^A(u, zb)$, $h = Z^A(u, v)$, и вычислим $[g, h]$ двумя способами. С одной стороны,

$$ {}^g h \cdot h^{-1} = Z^A(u, v + ubA^3) Z^A(u, -v) = Z(u, ubA^3) $$

по Лемме 2.61. С другой стороны,

$$ gh \cdot g^{-1} h^{-1} = Z^A(u, zb + v) X(u, 0, bA^5) Z^A(u, -zb - v) X(u, 0, bA^5) = = X(u, 0, 2bA^5) $$

по Лемме 2.62. □

Лемма 2.65. *Пусть $u, v \in B^{2l}$, $A \in I(u) \cap I(v)$, $b, c \in B$. Предположим, что существуют такие $w, z, x, y \in B^{2l}$, что*

$$ \langle w, u\rangle = \langle z, v\rangle = \langle x, y\rangle = A $$

и пары (w, u), (z, v) и (x, y) взаимно ортогональны. Тогда верно, что

$$ X(u + vb, 0, cA^{11}) = X(u, 0, cA^{11}) X(v, 0, b^2 cA^{11}) Z^A(u, vbcA^9). $$

Доказательство. Сначала воспользуемся Леммой 2.62,

$$ Z^A(u + vb, xA^3) Z^A(u + vb, ycA^3) = Z^A(u + vb, (x + yc)A^3) X(u + vb, 0, cA^{11}). $$

Мы хотим показать, что $Z^A(u+vb, xA^3) = Z^A(x, (u+vb)A^3)$. Для этого применим Лемму 2.63, взяв $p = z - wb$ и $q = v$. Далее, разложим

$$ Z^A(x, (u + vb)A^3) = Z^A(x, uA^3) Z^A(x, vbA^3) $$

по Лемме 2.62 и воспользуемся Леммой 2.63, взяв $p = z$ и $q = v$, чтобы показать, что

$$ Z^A(x, uA^3) = Z^A(u, xA^3) $$

и, взяв $p = w$, $q = u$, чтобы показать, что $Z^A(x,\, vbA^3) = Z^A(v,\, xbA^3)$. Точно также, можно проверить, что

$$Z^A(u + vb,\, ycA^3) = Z^A(u,\, ycA^3)Z^A(v,\, ybcA^3)$$

и

$$Z^A(u + vb,\, -(x + yc)A^3) = Z^A(u,\, -(x + yc)A^3)Z^A(v,\, -(x + yc)bA^3).$$

Разложим также

$$Z^A(u,\, -(x + yc)A^3) = Z^A(u,\, -ycA^3)Z^A(u,\, -xA^3)X(u,\, 0,\, cA^{11}),$$
$$Z^A(v,\, -(x + yc)bA^3) = Z^A(v,\, -ybcA^3)Z^A(v,\, -xbA^3)X(v,\, 0,\, b^2cA^{11})$$

по Лемме 2.62. Теперь мы можем выразить $X(u + vb,\, 0,\, cA^{11})$ через эти десять элементов. Большинство сомножителей сократят друг друга, но нам нужно будет поменять местами $Z^A(u,\, xA^3)$ и $Z^A(v,\, ybcA^3)$, поэтому появится их коммутатор в качестве ещё одного множителя,

$$[Z^A(u,\, xA^3),\, Z^A(v,\, ybcA^3)] = Z^A(u,\, vbcA^9).$$

□

Теперь мы сосредоточим внимание на случае $A = a^N$.

Определение. Пусть $b \in I$ и $u,\, v \in B^{2l}$ такие, что $a^N \in I(u)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$, $\langle u,\, v\rangle = 0$. Тогда положим

$$Z(u,\, v,\, b) = Z^{(a^N)}\Big(u,\, v\frac{b}{a^{2N}}\Big).$$

Это определение не зависит от выбора N. Возьмём $w \in B^{2l}$ такой, что $\langle w,\, u\rangle = a^N$, тогда $\langle wa^M,\, u\rangle = a^{N+M}$ и прямо по определению

$$\Big(v\frac{b}{a^{2(N+M)}}\Big)^{(wa^M)}_{ij} = v^{(wa^M)}_{ij} \cdot \frac{b}{a^{2(N+M)}} = v^w_{ij} \cdot a^M \cdot \frac{b}{a^{2(N+M)}},$$

так что

$$Z^{(a^{N+M})}\Big(u,\, v\frac{b}{a^{2(N+M)}}\Big) = Z\Big(u;\, \Big\{\big(v^w_{ij}\frac{b}{a^{2N+M}}\big)a^{N+M}\Big\}_{i<j}\Big) = Z^{(a^N)}\Big(u,\, v\frac{b}{a^{2N}}\Big).$$

Отметим, что $\phi\big(Z(u,\, v,\, b)\big) = T(u,\, vb,\, 0)$.

Ниже мы формулируем свойства наших новых элементов $Z(u,\, v,\, b)$. Они напрямую следуют из определения и Лемм 2.61 – 2.65.

Лемма 2.66. *Пусть $u,\, v,\, v' \in B^{2l}$ такие, что $a^N \in I(u)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$, $\langle u,\, v\rangle = \langle u,\, v'\rangle = 0$, $b,\, c \in I$, $r \in B$, $g \in \mathrm{StSp}(2l,\, B)$. Тогда имеет место*

$$\phi\big(Z(u,\, v,\, b)\big) = T(u,\, vb,\, 0), \tag{Z0}$$
$$Z(u,\, vr,\, b) = Z(u,\, v,\, rb), \tag{Z1}$$
$$Z(u,\, v,\, b)Z(u,\, v',\, b) = Z(u,\, v + v',\, b)X(u,\, 0,\, b^2\langle v,\, v'\rangle), \tag{Z2}$$
$$Z(u,\, v,\, b)Z(u,\, v,\, c) = Z(u,\, v,\, b + c), \tag{Z3}$$
$$g\, Z(u,\, v,\, b)g^{-1} = Z(\phi(g)u,\, \phi(g)v,\, b). \tag{Z4}$$

Предположим, что также существуют $w,\, z \in B^{2l}$ такие, что выполнено $\langle w,\, u\rangle = \langle z,\, v\rangle = a^N$ и пары $(w,\, u)$, $(z,\, v)$ ортогональны. Тогда также имеет место

$$Z(u,\, u,\, b) = X(u,\, 0,\, 2b). \tag{Z5}$$

Если в дополнение к этому существуют $x,\, y \in B^{2l}$ такие, что $\langle x,\, y\rangle = a^N$ и пара $(x,\, y)$ ортогональна парам $(w,\, u)$ и $(z,\, v)$, тогда

$$Z(u,\, v,\, b) = Z(v,\, u,\, b), \tag{Z6}$$

$$X(u + vr,\, 0,\, b) = X(u,\, 0,\, b)X(v,\, 0,\, br^2)Z(u,\, v,\, br). \tag{Z7}$$

Нам потребуется также ещё одно свойство $Z(u,\, v,\, b)$.

Лемма 2.67. *Для $u,\, v \in B^{2l}$, $b \in I$, $M,\, N \in \mathbb{N}$ таких, что $a^N \in I(u)$, $\langle u,\, v\rangle = 0$, верно*

$$Z(ua^M,\, v,\, b) = Z(u,\, v,\, a^M b).$$

Доказательство. Сначала уточним обозначения. Выберем $w \in B^{2l}$ такой, что $\langle w,\, u\rangle = a^N$, тогда $\langle w,\, ua^M\rangle = a^{N+M}$. Обозначим $u_{ij} = e_i u_{-j}\,\varepsilon_j - e_j u_{-i}\,\varepsilon_i$, тогда $(ua^M)_{ij} = u_{ij}a^M$. Обозначим как обычно $v_{ij} = u_{ij}(v_i w_j - v_j w_i)$. Тогда в определении

$$Z^{a^{N+M}}\Big(ua^M,\, v\frac{b}{a^{2N+2M}}\Big)$$

мы в действительности используем $(ua^M)_{ij} \cdot (v_i w_j - v_j w_i) = v_{ij}a^M$. Таким образом, мы имеем

$$Z(ua^M,\, v,\, b) = Z^{a^{N+M}}\Big(ua^M,\, v\frac{b}{a^{2N+2M}}\Big) = Z\Big(ua^M;\, \Big\{\big(v_{ij}a^M\frac{b}{a^{2N+2M}}\big)a^{N+M}\Big\}_{i<j}\Big).$$

Теперь воспользуемся Леммой 2.56 и получим

$$Z\Big(ua^M;\, \Big\{\big(v_{ij}\frac{b}{a^{2N}}\big)a^N\Big\}_{i<j}\Big) = Z\Big(u;\, \Big\{\big(v_{ij}\frac{a^M b}{a^{2N}}\big)a^N\Big\}_{i<j}\Big) = Z(u,\, v,\, a^M b).$$

□

Наконец, введём ещё одно обозначение.

Определение. Для $u,\, v \in B^{2l}$ таких, что $a^N \in I(u)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$, $\langle u,\, v\rangle = 0$, b, $c \in I$ обозначим

$$Z(u,\, v,\, b,\, c) = Z(u,\, v,\, b)X(u,\, 0,\, c).$$

Итак, мы готовы построить стрелку Туленбаева

$$\mathrm{T}\colon\ \mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\, B_a,\, I) \to \mathrm{StSp}(2l,\, B).$$

Доказательство Леммы 2.49. Каждой четвёрке

$$(u,\, v,\, b,\, c) \in \Big(\mathrm{Ep}(2l,\, B_a)e_1\Big) \times B_a^{2n} \times I \times I$$

мы сопоставим элемент в $\mathrm{StSp}(2l,\,B)$. Мы действуем следующим образом. Сначала, если $u = Me_1$, обозначим $w = -Me_{-1}$, тогда $\langle w,\,u\rangle = 1$. Далее, $w,\,u,\,v \in B_a$, тогда существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что элементы векторов wa^N, ua^N, va^N не имеют знаменателей, то есть, лежат в образе гомоморфизма локализации $\lambda_a\colon B \to B_a$. Тогда для каждого из этих элементов выберем их прообразы и получим вектора $\tilde{w},\,\tilde{u},\,\tilde{v} \in B^{2l}$. Так как $\langle\tilde{u},\,\tilde{v}\rangle$ локализуется в ноль и $\langle\tilde{w},\,\tilde{u}\rangle$ локализуется в a^{2N}, существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что $\langle\tilde{u},\,\tilde{v}a^M\rangle = 0$ и $\langle\tilde{w}a^M,\,\tilde{u}\rangle = a^{2N+M}$. Тогда элемент

$$Z\Big(\tilde{u},\,\tilde{v}a^M,\,\frac{b}{a^{2N+M}},\,\frac{c}{a^{2N}}\Big)$$

в $\mathrm{StSp}(2l,\,B)$ корректно определён. Используя Лемму 2.51 (X2), Лемму 2.66 (Z1) и Лемму 2.67, можно показать, что этот элемент не зависит от сделанных выше выборов. Таким образом, мы имеем корректно определённое теоретико-множественное отображение из множества образующих группы $\mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\,B_a,\,I)$ в $\mathrm{StSp}(2l,\,B)$.

Далее, нам нужно показать, что образы $[u,\,v,\,b,\,c]$ под действием этого отображения удовлетворяют соотношениям T0–T6. Это очевидное следствие Лемм 2.51 и 2.66, а также факта, что отображение выше корректно определено. Единственный трюк, который нужен, чтобы доказать T3–T5, состоит в следующем. Для $u = Me_1$, где $M \in \mathrm{Ep}(2l,\,B_a)$, можно взять $w = -Me_{-1}$, $v = Me_{-2}$, $z = Me_2$ и использовать их подъёмы, чтобы вывести T3 из Леммы 2.66 (Z5). Точно так же, можно использовать $(e_3,\,e_{-3})$ для T4 и T5.

Теперь мы должны показать, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\,B,\,I) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\lambda_a^*"'] & \mathrm{StSp}(2l,\,B) \arrow[d, "\lambda_a^*"'] \\
\mathrm{StSp}^{\mathrm{T}}(2l,\,B_a,\,I_a) \arrow[r, "\kappa"'] \arrow[ur, "\mathrm{T}"'] & \mathrm{StSp}(2l,\,B_a)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Начнём с верхнего треугольника. Из Леммы 2.66 (Z7) и Леммы 2.54 (X8) следует, что для u с парой симметричных нулей верно, что $Z(u,\,v,\,b,\,c) = X(u,\,vb,\,c)$. Теперь возьмём $[u,\,v,\,b,\,c] \in \mathrm{StSp}(2l,\,B,\,I)$ и возьмём $g \in \mathrm{StSp}(2l,\,B)$ такой, что $\phi(g)u = e_1$. Тогда κ отправляет эту образующую в $X(u,\,vb,\,c)$ и $T \circ \lambda_a^*$ в

$$Z\Big(\lambda_a(u)a^N,\,\lambda_a(v)a^{N+M},\,\frac{b}{a^{2N+M}},\,\frac{c}{a^{2N}}\Big).$$

Теперь сопряжём оба элемента при помощи g и воспользуемся предыдущим соображением. Коммутативность нижнего треугольника доказывается точно так же.

Наконец, покажем, что отображение T переводит

$$g \in \mathrm{Im}\Big(\mathrm{StSp}(2l-2,\,B_a,\,I_a) \to \mathrm{StSp}(2l,\,B_a,\,I_a)\Big)$$

в элемент из $\mathrm{Im}\Big(\mathrm{StSp}(2l-2,\,B) \to \mathrm{StSp}(2l,\,B)\Big)$. Для $l = 2$ у нас нет очевидного аналога стрелки Туленбаева, так что при $l = 3$ приведём следующее рассуждение (для $l > 3$ оно тоже работает). Мы можем предположить, что $g = [u,\,v,\,b,\,c]$ для u и v таких, что

$u_n = u_{-n} = v_n = v_{-n} = 0$. Тогда рассмотрим подъёмы $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ элементов ua^N и va^N. Их $\pm n$-ые координаты локализуются в ноль, так что увеличивая N, мы можем считать, что они в действительности равны нулю. Таким образом, остаётся показать, что для u и v таких, что $u_n = u_{-n} = v_n = v_{-n} = 0$ верно, что $Z(u, v, b, c) \in \operatorname{Im} \operatorname{StSp}(2l-2, B)$. Как и выше, в этой ситуации $Z(u, v, b, c) = X(u, vb, c)$. По Лемме 2.51 (X6), достаточно рассмотреть $X(u, 0, c)$ такой, что $u_n = u_{-n} = 0$. При помощи Леммы 2.52 (Y3–Y6) всё сводится к случаю $X(e_i, v, c)$, где $i \neq \pm n$, $v_n = v_{-n} = 0$. Для завершения доказательства разложим этот элемент по Лемме 2.54 (X10) как произведение элементарных образующих группы Стейнберга

$$X(e_i, v, c) = X(e_i, 0, c - \sum v_k v_{-k}) \prod X(e_i, e_k v_k, 0).$$

Все они лежат в $\operatorname{Im} \operatorname{StSp}(2l-2, B)$. $\square$

Итак, на этом завершается доказательство локально-глобального принципа для симплектической группы Стейнберга.

Глава 3

Унитарная группа Стейнберга

3.1 Нечётная унитарная группа

3.1.1 Псевдоинволюция и нечётный форменный параметр

В этой главе мы рассматриваем группы, определённые над *некоммутативными* кольцами. Понятие *нечётной унитарной группы* было введено Виктором Петровым в [49] как единообразное обобщение всех классических групп: линейных, ортогональных, симплектических, а также унитарных групп, определённых над некоммутативными кольцами с инволюцией. Виктор Петров пишет, что название «не обязательно чётная» было бы более точным, но это звучит неуклюже.

Определение. Пусть R — ассоциативное кольцо с 1. Аддитивное отображение $\overline{}: R \to R$ такое, что $\overline{1}$ обратима, $\overline{\overline{a}} = a$ и $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{1}^{-1}\overline{a}$ для любых $a, b \in R$, называется *псевдоинволюцией*. Всюду ниже мы обозначаем через R ассоциативное кольцо с единицей и псевдоинволюцией на нём.

Определение. Биаддитивное отображение $B\colon V_R \times V_R \to R$ называется *антиэрмитовой формой* (на правом R-модуле V_R), если оно удовлетворяет следующим аксиомам

$$1)\ B(ua,\, vb) = \overline{a}\,\overline{1}^{-1}B(u,\, v)b,$$
$$2)\ B(u,\, v) = -\overline{B(v,\, u)}$$

для любых $u,\, v \in V$ и $a,\, b \in R$.

Определение. Пусть B — это антиэрмитова форма на V_R. Тогда множество $V \times R$ вместе с правилом умножения, заданным формулой

$$(u,\, a) \dotplus (v,\, b) = (u + v,\, a + b + B(u,\, v)),$$

называется *группой Гейзенберга* $\mathfrak{H}$ формы B.

Замечание. Ясно, что $\dotplus$ ассоциативна, $(0,\,0)$ — это нейтральный элемент и обратный элемент определяется по формуле

$$\dot{-}(u,\,a) = (-u,\; -a + B(u,u)),$$

так что группа Гейзенберга действительно является группой.

Определение. Пусть B — это антиэрмитова форма на V_R, а $\mathfrak{H}$ — её группа Гейзенберга. Мы можем определить правое действие R на $\mathfrak{H}$ при помощи

$$(u,\,a) \leftharpoondown b = (ub,\, \bar{b}\,\overline{1}^{-1}ab).$$

Замечание. Легко видеть, что

$$\lambda \leftharpoondown a \leftharpoondown b = \lambda \leftharpoondown ab$$

и

$$(\lambda \dotplus \mu) \leftharpoondown a = \lambda \leftharpoondown a \dotplus \mu \leftharpoondown a$$

для всех $\lambda,\, \mu \in \mathfrak{H}$ и $a,\, b \in R$.

Определение. Подгруппы группы Гейзенберга $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{L}_{\min} = \{(0,\, a + \overline{a}) \mid a \in R\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_{\max} = \{(u,\, a) \mid a = \overline{a} + B(u,\, u)\}$$

называются соответственно *минимальным* и *максимальным нечётными форменными параметрами.*

Замечание. Ясно, что $\mathfrak{L}_{\min} \leq \mathfrak{L}_{\max}$, и что $\mathfrak{L}_{\min}$ и $\mathfrak{L}_{\max}$ устойчивы относительно действия R.

Определение. Подгруппа $\mathfrak{L}$ группы Гейзенберга $\mathfrak{H}$ называется (*нечётным*) *форменным параметром*, если $\mathfrak{L}_{\min} \leq \mathfrak{L} \leq \mathfrak{L}_{\max}$ и $\mathfrak{L}$ устойчив относительно действия R.

3.1.2 Определение нечётной унитарной группы

Тройка $(V,\, B,\, \mathfrak{L})$ называется (*нечётным*) *квадратичным пространством.*

Ортогональная сумма двух квадратичных пространств V и V' строится следующим образом: в качестве подлежащего модуля мы берём $V \oplus V'$, антиэрмитова форма определяется тождеством $(B + B')(u + u',\, v + v') = B(u,\, v) + B'(u',\, v')$, а форменный параметр состоит из всех пар $(u + u',\, a + a')$, где $(u,\, a) \in \mathfrak{L}$ и $(u',\, a') \in \mathfrak{L}'$.

Определение. Пусть V' и V — это два модуля над R вместе с билинейными формами B' и B. Гомоморфизм модулей $f : V' \to V$ называется *изометрией*, если $B(fu,\, fv) = B'(u,\, v)$ для всех $u,\, v \in V'$.

Если $\mathfrak{L}$ — это нечётный форменный параметр для V, а f и g — изометрии из V' в V такие, что $(fv - gv,\; B(gv - fv, gv)) \in \mathfrak{L}$ для любого $v \in V$, мы говорим, что f и g эквивалентны по модулю $\mathfrak{L}$ и пишем $f \equiv g \mod \mathfrak{L}$. Легко видеть, что это отношение эквивалентности между изометриями.

Нечётной унитарной группой $\mathrm{U}(V,\,B,\,\mathfrak{L})$ нечётного квадратичного пространства V называется группа всех биективных изометрий из V на себя, которые эквивалентны тождественному отображению по модулю $\mathfrak{L}$.

Далее мы дадим определение гиперболической нечётной унитарной группы.

Определение. Рассмотрим свободный модуль H, натянутый на базисные вектора $e_1,\,e_{-1}$, и антиэрмитову форму B на нём, такую, что $B(e_1,\,e_{-1}) = 1$, $B(e_1,\,e_1) = B(e_{-1},\,e_{-1}) = 0$. Обозначим $\mathfrak{L} = \{(e_1a + e_{-1}b,\,\overline{a}\overline{1}^{-1}b + c + \overline{c}) \mid a,\,b,\,c \in R\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{L}$ является форменным параметром для H.

Обозначим H^n ортогональную сумму n копий H. Её базис, приходящий из базисов слагаемых, мы будем нумеровать следующим образом: $e_1,\ldots,e_n,e_{-n},\ldots,e_{-1}$.

Рассмотрим нечётное унитарное пространство $(V,\,B,\,\mathfrak{L})$. Ортогональная сумма $H^n \oplus V$ называется *нечётным гиперболическим унитарным пространством* ранга n. Унитарная группа $H^n \oplus V$ называется *нечётной гиперболической унитарной группой* и обозначается $\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$.

Рассмотрим нечётное квадратичное пространство $(V,\,B,\,\mathfrak{L})$. Пара векторов $(u,\,v)$ из V, удовлетворяющих $B(u,\,v) = 1$, $(u,\,0), (v,\,0) \in \mathfrak{L}$, называется *гиперболической парой*. Наибольшее такое n, что существует n взаимно ортогональных гиперболических пар в V, называется *индексом Витта* V и обозначается $\mathrm{ind}(V,\,B,\,\mathfrak{L})$. Легко видеть, что индекс Витта совпадает с наибольшим таким n, что существует изометрия f пространства H^n на подпространство V, удовлетворяющая $(fu,\,a) \in \mathfrak{L}$ для всех $(u,\,a)$ из форменного параметра H^n.

Предположим, что индекс Витта V не меньше n. Выберем вложение H^n в V, то есть, выберем такие элементы $e_1,\ldots,e_n,e_{-n},\ldots,e_{-1}$ в V, что $(e_i,\,e_j) = 0$ для $i \neq j$, $(e_i,\,e_{-i}) = 1$ при $i \in \{1,\ldots,n\}$, $(e_i,\,0) \in \mathfrak{L}$. Определим V_0 как ортогональное дополнение к $\sum_{i=1}^{-1} e_iR$ в V (его можно определить, так как ограничение B на это подпространство невырождено), B_0 как ограничение B на V_0, и $\mathfrak{L}_0$ как ограничение $\mathfrak{L}$ на V_0. Тогда легко видеть, что V изометрично нечётному гиперболическому пространству $H^n \oplus V_0$. Таким образом, унитарную группу нечётного квадратичного пространства индекса Витта по крайней мере n можно отождествить с нечётной гиперболической унитарной группой $\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}_0)$, построенной по соответствующему форменному параметру.

Определение. Пусть $\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ — это унитарная группа нечётного гиперболического пространства V, обозначим Ω_+, Ω_- множества $\{1,\ldots,n\}$, $\{-n,\ldots,-1\}$ соответственно, и $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$. Положим $\varepsilon_i = \overline{1}^{-1}$ при $i \in \Omega_+$ и $\varepsilon_i = -1$ при $i \in \Omega_-$.

Для $i \in \Omega$, $j \in \Omega \setminus \{\pm j\}$, $a \in R$, $(u,\,b)$ обозначим через $T_{ij}(a)$ линейные преобразования V на себя, действующие как

$$T_{ij}(a):\ w \mapsto w + e_{-j}\varepsilon_{-j}\overline{a}\overline{1}^{-1}(e_i,\,w) - e_ia\varepsilon_j(e_{-j},\,w),$$

и через $T_i(u,\,b)$ преобразования

$$T_i(u,\,b):\ w \mapsto w - e_i\varepsilon_i(u,\,w) - e_i\varepsilon_ib\varepsilon_{-i}(e_i,\,w) + u\varepsilon_{-i}(e_i,\,w).$$

Эти преобразования $T_{ij}(a)$ и $T_i(u, b)$ называются (*нечётными унитарными*) *элементарными трансвекциями*. Можно проверить, что элементарные трансвекции лежат в $\mathrm{U}(2n, R, \mathfrak{L})$, см. [49]. Подгруппа гиперболической унитарной группы, порождённая элементаными трансвекциями, называется *нечётной гипеболической унитарной элементарной подгруппой* и обозначается $\mathrm{EU}(2n, R, \mathfrak{L})$. В [49] доказано, что эта подгруппа нормальна при $n \geqslant 3$.

Теперь мы готовы дать определение унитарной группы Стейнберга, задаваемой «элементарными» соотношениями между унитарными трансвекциями.

3.1.3 Нечётная унитарная группа Стейнберга

Определение. Пусть $n \geqslant 3$. Нечётной унитарной группой Стейнберга $\mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})$ будем называть группу, заданную множеством образующих $\{X_{ij}(a) \mid i, j \in \Omega,\ i \notin \{\pm j\},\ a \in R\} \cup \{X_i(\xi) \mid i \in \Omega,\ \xi \in \mathfrak{L}\}$ и соотношениями

$$X_{ij}(a) = X_{-j,-i}(\varepsilon_{-j}\overline{a}\varepsilon_i), \tag{U0}$$

$$X_{ij}(a)X_{ij}(b) = X_{ij}(a+b), \tag{U1}$$

$$X_i(\xi)X_i(\zeta) = X_i(\xi \dotplus \zeta), \tag{U2}$$

$$[X_{ij}(a),\, X_{hk}(b)] = 1, \text{ при } h \notin \{j, -i\},\ k \notin \{i, -j\}, \tag{U3}$$

$$[X_i(\xi),\, X_{jk}(a)] = 1, \text{ при } j \neq -i,\ k \neq i, \tag{U4}$$

$$[X_{ij}(a),\, X_{jk}(b)] = X_{ik}(ab), \tag{U5}$$

$$[X_i(u, a),\, X_j(v, b)] = X_{i,-j}(\varepsilon_i B(u,\, v)), \text{ при } i \notin \{\pm j\}, \tag{U6}$$

$$[X_i(u, a),\, X_i(v, b)] = X_i(0, B(u,\, v) - B(v,\, u)), \tag{U7}$$

$$[X_i(u,\, a),\, X_{-i,j}(b)] = X_{ij}(\varepsilon_i ab)X_{-j}((u, -\overline{a}) \leftharpoondown b), \tag{U8}$$

$$[X_{ij}(a),\, X_{j,-i}(b)] = X_i(0, -\varepsilon_{-i}\overline{1}ab + \overline{b}\,\overline{1}^{-1}\overline{a}\varepsilon_i). \tag{U9}$$

Замечание 1. Из соотношения U1 следует, что $X_{ij}(0)^2 = X_{ij}(0)$, то есть $X_{ij}(0) = 1$, и поэтому $X_{ij}(-a) = X_{ij}(-a)X_{ij}(a)X_{ij}(a)^{-1} = X_{ij}(a)^{-1}$. Точно так же, из U2 следует, что $X_i(0,\, 0) = 1$ и $X_i(\dot{-}(u,\, a)) = X_i(u,\, a)^{-1}$.

Замечание 2. Соотношение U7 напрямую следует из соотношения U2. Мы приводим его, чтобы подчеркнуть, что $X_i(u,\, a)$ и $X_i(v,\, b)$, вообще говоря, не коммутируют.

Можно проверить следующий факт, см. [49].

Лемма 3.1. *Соотношения* U0–U9 *выполнены для элементарных унитарных трансвекций* $T_{ij}(a)$ *и* $T_i(u,\, a)$. *Таким образом, для* $n \geq 3$ *существует естественный эпиморфизм из* $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ *в* $\mathrm{EU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$, *переводящий образующие группы Стейнберга в соответствующие элементарные трансвекции.*

Следующий факт следует из соотношений U5 и U8 (и того, что $n \geq 3$).

Лемма 3.2. *Нечётная унитарная группа Стейнберга* $\mathrm{StU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ *совершенна.*

Дадим определение унитарного K_2-функтора.

Определение. Определим $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ как ядро естественного эпиморфизма из группы Стейнберга $\mathrm{StU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ в $\mathrm{EU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$,

$$\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}) \rightarrowtail \mathrm{StU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}) \twoheadrightarrow \mathrm{EU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}).$$

Кроме того, мы можем рассматривать предельные версии всех определённых выше групп.

Определение. Положим $\mathrm{StU}(\infty,\,R,\,\mathfrak{L}) = \mathrm{StU}(R,\,\mathfrak{L})$, $\mathrm{EU}(R,\,\mathfrak{L})$ и $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(R,\,\mathfrak{L})$ равными прямым пределам соответствующих последовательностей.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}) \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n+2,\,R,\,\mathfrak{L}) \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{StU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{StU}(2n+2,\,R,\,\mathfrak{L}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, hook] & \mathrm{EU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}) \arrow[r, hook] & \mathrm{EU}(2n+2,\,R,\,\mathfrak{L}) \arrow[r, hook] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Следующий раздел настоящей главы будет посвящён доказательству центральной замкнутости унитарной группы Стейнберга.

3.2 Центральная замкнутость унитарной группы Стейнберга

3.2.1 План доказательства

Следующая теорема является основным результатом этой главы. Мы формулируем его в технически удобной форме для того, чтобы получить информацию о случае $n = 4$. Как следствие, мы получим, что для $n \geq 5$ верно, что $\mathrm{H}_2(\mathrm{StU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})) = 1$. См. определения в п. 1.1.2 «Центральные расширения».

Теорема 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *такое, что* $n \geq 4$, *или* $n = \infty$, $\epsilon\colon E \twoheadrightarrow \mathrm{StU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ *— центральное расширение такое, что выполняется соотношение*

$$[\epsilon^{-1}X_{ij}(a),\,\epsilon^{-1}X_{kh}(b)] = 1 \in E \tag{†}$$

для всех элементов a, b *из* R *и таких индексов* i, j, k *и* h *из* Ω, *что* $\mathrm{Card}\{\pm i, \pm j, \pm k, \pm h\} = 8$, *то есть, если никакие два из этих индексов не совпадают и не дают в сумме ноль. Тогда расширение* ϵ *расщепляется.*

Всюду ниже n и $\epsilon\colon E \twoheadrightarrow \mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ — такие, как в формулировке Теоремы 5, Ω обозначает $\{-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n\}$ для натурального n и $\{\ldots, -m, \ldots, -1, 1, \ldots, m, \ldots\}$ для $n = \infty$.

Идея доказательства состоит в том, чтобы найти такие элементы $S_{ij}(a) \in \epsilon^{-1}X_{ij}(a)$ и $S_i(u,\, a) \in \epsilon^{-1}X_i(u,\, a)$, для которых выполняются соотношения U0–U9. Это в точности означает, что существует гомоморфизм σ из $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ в группу E, откуда немедленно получится, что ϵ расщепляется. Мы приступаем к подробному доказательству этой теоремы, и, в действительности, каждая из доказанных ниже лемм отвечает одному из соотношений U0–U9.

Следующие тождества с коммутаторами будут постоянно использоваться.

Лемма 3.3. *Пусть G — группа, $x,\, y,\, z,\, y_1, \ldots, y_m$ — элементы G. Тогда*

$$[xy,\, z] = {}^{x}[y,\, z] \cdot [x,\, z], \tag{C1}$$
$$[x,\, yz] = [x,\, y] \cdot {}^{y}[x,\, z], \tag{C2}$$
$$[x,\, y_1 \cdot \ldots \cdot y_m] = [x,\, y_1] \cdot {}^{y_1}[x,\, y_2] \cdot {}^{y_1 y_2}[x,\, y_3] \cdot \ldots \cdot {}^{y_1 \cdot \ldots \cdot y_{m-1}}[x,\, y_m], \tag{C3}$$
$$[x,\, y] \cdot [x,\, z] = [x,\, yz] \cdot [y,\, [z,\, x]], \tag{C4}$$
$${}^{y}[x,\, [y^{-1},\, z]] \cdot {}^{z}[y,\, [z^{-1},\, x]] \cdot {}^{x}[z,\, [x^{-1},\, y]] = 1 \tag{C5}$$
$${}^{z}[y,\, [z^{-1},\, x]] = [{}^{z}y,\, [x,\, z]]. \tag{C6}$$

3.2.2 Построение сечения: корректность

Мы начнём с доказательства следующей леммы, которая усиливает свойство †.

Лемма 3.4. *Пусть $i \in \Omega$, $j \in \Omega \setminus \{\pm i\}$, $k \in \Omega \setminus \{-i, j\}$, $h \in \Omega \setminus \{i, -j, \pm k\}$. Тогда для любых $a,\, b \in R$*

$$[\epsilon^{-1}X_{ij}(a),\, \epsilon^{-1}X_{kh}(b)] = 1.$$

Доказательство. Если $\mathrm{Card}\{\pm i, \pm j, \pm k, \pm h\} \neq 8$, то пользуясь тем, что $n \geq 4$, мы можем выбрать $l \in \Omega \setminus \{\pm i, \pm j, \pm k, \pm h\}$ и $x \in \epsilon^{-1}X_{ij}(a)$, $y \in \epsilon^{-1}X_{kl}(b)$, $z \in \epsilon^{-1}X_{lh}(1)$ (для $n = \infty$ следует работать внутри $\mathrm{StU}(2m,\, R,\, \mathfrak{L})$ с достаточно большим m). Из соотношения U5 следует, что $[y,\, z] \in \epsilon^{-1}X_{kh}(b)$, а из соотношения U3, что $[x,\, y],\, [x,\, z] \in \mathrm{Ker}(\epsilon) \subseteq \mathrm{Cent}(E)$. Тогда используя C2, получаем

$$1 = [x,\, y^{-1}y] = [x,\, y^{-1}] \cdot [x,\, y],$$

то есть, $[x,\, y^{-1}] = [x,\, y]^{-1}$ (так что этот элемент централен), и то же самое про $[x,\, z^{-1}]$. Теперь, пользуясь центральным трюком Стейнберга (Леммой 1.1) и C3, мы получаем, что

$$[\epsilon^{-1}X_{ij}(a),\, \epsilon^{-1}X_{kh}(b)] = [x,\, [y,\, z]] = [x,\, y] \cdot [x,\, z] \cdot [x,\, y^{-1}] \cdot [x,\, z^{-1}] = 1.$$

Если же $\mathrm{Card}\{\pm i, \pm j, \pm k, \pm h\} = 8$, мы можем просто воспользоваться свойством †. □

Замечание. Легко видеть, что при $n \geq 5$ или $n = \infty$ свойство † выполняется для любого центрального расширения $\mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})$. Действительно, если $n \geq 5$, мы можем выбрать $l \notin \{\pm i, \pm j, \pm k, \pm h\}$ в доказательстве выше даже при $\mathrm{Card}\{\pm i, \pm j, \pm k, \pm h\} = 8$.

Доказательство следующей леммы один в один повторяет доказательство предыдущей.

Лемма 3.5. *Пусть $i \in \Omega$, $j \in \Omega \setminus \{-i\}$, $k \in \Omega \setminus \{i, \pm j\}$. Тогда для любых $\lambda \in \mathfrak{L}$, $a \in R$*

$$[\epsilon^{-1} X_i(\lambda),\, \epsilon^{-1} X_{jk}(a)] = 1.$$

Следующая лемма позволит нам дать определение элементам $S_{kh}(a)$.

Лемма 3.6. *Пусть i, j, k, h — такие индексы из Ω, что* $\mathrm{Card}\{\pm i, \pm j, \pm k, \pm h\} = 8$. *Тогда для любых a, $b \in R$*

$$[\epsilon^{-1} X_{ki}(a),\, \epsilon^{-1} X_{ih}(b)] = [\epsilon^{-1} X_{kj}(ab),\, \epsilon^{-1} X_{jh}(1)].$$

Доказательство. Рассмотрим $x \in \epsilon^{-1} X_{ki}(a)$, $y \in \epsilon^{-1} X_{ij}(-b)$, $z \in \epsilon^{-1} X_{jh}(1)$. По Лемме 3.4, $[z^{-1}, x] = 1$, и тогда из тождества C5 следует, что

$$^{y}[x,\, [y^{-1},\, z]] = {}^{x}[[x^{-1},\, y],\, z].$$

Но по U5 мы имеем, что $[y^{-1}, z] \in \epsilon^{-1} X_{ih}(b)$, $[x^{-1}, y] \in \epsilon^{-1} X_{kj}(ab)$ и $[x, [y^{-1}, z]]$, $[[x^{-1}, y], z] \in \epsilon^{-1} X_{kh}(ab)$, и тогда коммутирует с x и y по Лемме 3.4. □

Определение. Для таких $a \in R$, k, $h \in \Omega$, что $k \notin \{\pm h\}$, мы будем обозначать коммутатор $[\epsilon^{-1} X_{ki}(a),\, \epsilon^{-1} X_{ih}(1)]$ через $S_{kh}(a)$, где $i \in \Omega \setminus \{\pm k, \pm h\}$. Это определение не зависит от выбора i по Лемме 3.6.

Замечание. Из Леммы 3.6 также следует, что $[\epsilon^{-1} X_{ki}(a),\, \epsilon^{-1} X_{ih}(b)] = S_{kh}(ab)$.

Мы хотели найти $S_{kh}(a) \in \epsilon^{-1} X_{kh}(a)$ таким образом, что соотношения U0–U9 будут выполняться для них. В частности, соотношение U5 должно иметь место, но, согласно центральному трюку, это соотношение эквивалентно тождеству из замечания выше. Так что совершенно естественно определить правую часть этого тождества через левую.

Лемма 3.7. *Для любых $i \in \Omega$, $j \in \Omega \setminus \{\pm i\}$, a, $b \in R$*

$$S_{ij}(a) S_{ij}(b) = S_{ij}(a + b).$$

Доказательство. Рассмотрим $l \in \Omega \setminus \{\pm i, \pm j\}$, $x \in \epsilon^{-1} X_{il}(1)$, $y \in \epsilon^{-1} X_{lj}(a)$, $z \in \epsilon^{-1} X_{lj}(b)$. По Лемме 3.4, $[y, [z, x]] = [\epsilon^{-1} X_{lj}(a),\, \epsilon^{-1} X_{ij}(-b)] = 1$, и тогда из C4 следует, что

$$[x,\, y][x,\, z] = [x,\, yz].$$

□

Как упоминалось ранее, из Леммы 3.7 следует, что $S_{ij}(0) = 1$ и $S_{ij}(a)^{-1} = S_{ij}(-a)$.

Лемма 3.8. *Для любых $i \in \Omega$, $j \in \Omega \setminus \{\pm i\}$, $a \in R$*

$$S_{ij}(a) = S_{-j,-i}(\varepsilon_{-j}\overline{a}\varepsilon_i).$$

Доказательство. Рассмотрим $l \in \Omega \setminus \{\pm i, \pm j\}$. Очевидно, $\varepsilon_l\, \varepsilon_{-l} = -\overline{1}^{\,-1}$, так что

$$\begin{aligned} S_{ij}(a) = [\epsilon^{-1}X_{il}(a),\, \epsilon^{-1}X_{lj}(1)] = [\epsilon^{-1}X_{-l,-i}(\varepsilon_{-l}\overline{a}\varepsilon_i),\, \epsilon^{-1}X_{-j,-l}(\varepsilon_{-j}\overline{1}\varepsilon_l)] = \\ = [\epsilon^{-1}X_{-j,-l}(\varepsilon_{-j}\overline{1}\varepsilon_l)),\, \epsilon^{-1}X_{-l,-i}(\varepsilon_{-l}\overline{a}\varepsilon_i)]^{-1} = S_{-j,-i}(\varepsilon_{-j}\overline{1}\varepsilon_l\, \varepsilon_{-l}\overline{a}\varepsilon_i)^{-1} = \\ = S_{-j,-i}(-\varepsilon_{-j}\overline{1}\varepsilon_l\, \varepsilon_{-l}\overline{a}\varepsilon_i) = S_{-j,-i}(\varepsilon_{-j}\overline{a}\varepsilon_i). \end{aligned}$$

□

Лемма 3.9. *Для любых $i \in \Omega$, $j \in \Omega \setminus \{\pm i\}$, $(u,\, a)$, $(v,\, b) \in \mathfrak{L}$*

$$[\epsilon^{-1}X_i(u,\, a),\, \epsilon^{-1}X_j(v,\, b)] = S_{i,-j}(\varepsilon_i B(u,\, v)).$$

Доказательство. Рассмотрим $l \in \Omega \setminus \{\pm i, \pm j\}$, $x \in \epsilon^{-1}X_i(u,\, a)$, $y \in \epsilon^{-1}X_{-l}(-v,\, b)$, $z \in \epsilon^{-1}X_{l,-j}(1)$ (заметим, что $(-v,\, b) = (v,\, b) \leftharpoonup (-1) \in \mathfrak{L}$). Пользуясь тем фактом, что $[z^{-1},\, x] = 1$ (Лемма 3.5) и тождеством C5, мы получаем

$${}^{x}[[x^{-1},\, y],\, z] = {}^{y}[x,\, [y^{-1},\, z]].$$

Теперь легко показать, что $[x^{-1},\, y] \in \epsilon^{-1}X_{ik}(\varepsilon_i B(u,\, v))$ и $[y^{-1},\, z] \in \epsilon^{-1}\big(X_j(v,\, b) \cdot X_{-l,-j}(-\varepsilon_{-l}\overline{b})\big)$ (заметим, что $(v,\, b) \in \mathfrak{L} \le \mathfrak{L}_{\max}$, поэтому $y^{-1} \in \epsilon^{-1}X_{-l}(v,\, -\overline{b})$. Далее, из C2 следует, что $[x,\, [y^{-1},\, z]] = [\epsilon^{-1}X_i(u,\, a),\, \epsilon^{-1}X_j(v,\, b)] \cdot 1$. Теперь воспользуемся тем, что $S_{i,-j}(\varepsilon_i B(u,\, v))$ коммутирует с x и y (по Лемме 3.5). □

Лемма 3.10. *Для любых таких i, j, $k \in \Omega$, что $\mathrm{Card}\{\pm i, \pm j, \pm k\} = 6$, $(u,\, a) \in \mathfrak{L}$, $b \in R$,*

$$\begin{aligned} S_{i,-k}(\varepsilon_i\overline{b}\,\overline{1}^{\,-1}\overline{a}b)[\epsilon^{-1}X_i((u,\, -\overline{a}) \leftharpoonup b),\, \epsilon^{-1}X_{-i,-k}(1)] = \\ = S_{j,-k}(\varepsilon_j\overline{a}b)[\epsilon^{-1}X_j(u,\, -\overline{a}),\, \epsilon^{-1}X_{-j,-k}(b)]. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим элементы

$$x \in \epsilon^{-1}X_j(\dot{-}(-u,\, a)), \quad y \in \epsilon^{-1}X_{-j,-i}(-b), \quad z \in \epsilon^{-1}X_{-i,-k}(1), \quad w \in \epsilon^{-1}X_{j,-i}(\varepsilon_j ab).$$

Используя C1, мы получаем $[[x^{-1},\, y]w,\, z] = {}^{[x^{-1},\, y]}[w,\, z] \cdot [[x^{-1},\, y],\, z]$, а используя C5 и тот факт, что $[z^{-1},\, x] = 1$, мы имеем ${}^{x}[[x^{-1},\, y],\, z] = {}^{y}[x,\, [y^{-1},\, z]]$, так что

$$[[x^{-1},\, y]w,\, z] = {}^{[x^{-1},\, y]}[w,\, z] \cdot {}^{x^{-1}}[y,\, [x,\, [y^{-1},\, z]]] \cdot [x^{-1},\, [x,\, [y^{-1},\, z]]] \cdot [x,\, [y^{-1},\, z]].$$

Легко показать, что

$$[x,\, [y^{-1},\, z]] = [\epsilon^{-1}X_j(u,\, -\overline{a}),\, \epsilon^{-1}X_{-j,-k}(b)] \in \epsilon^{-1}\big(X_{j,-k}(-\varepsilon_j\overline{a}b) \cdot X_k((u,\, a) \leftharpoonup b)\big),$$

а также

$$[[x^{-1},\, y]w,\, z] = [\epsilon^{-1}X_i((u,\, -\overline{a}) \leftharpoondown b),\, \epsilon^{-1}X_{-i,-k}(1)] \quad \text{и} \quad [x^{-1},\, [x,\, [y^{-1},\, z]]] = S_{j,-k}(\varepsilon_j B(-u,\, ub))$$

(при помощи Лемм 3.5 и 3.9), что $[y,\, [x,\, [y^{-1},\, z]]] = S_{i,-k}(-\varepsilon_i \overline{b}\,\overline{1}^{-1}\overline{a}b)$ (пользуясь Леммами 3.5 и 3.6), и что $[w,\, z] = S_{j,-k}(\varepsilon_j ab)$. Для завершения доказательства воспользуемся Леммами 3.4, 3.5 и 3.7. □

Определение. Для $k \in \Omega$, $(u,\, a) \in \mathfrak{L}$ мы будем обозначать через $S_k(u,\, a)$ элемент $S_{i,-k}(\varepsilon_i \overline{a}) \cdot [\epsilon^{-1}X_i(u,\, -\overline{a}),\, \epsilon^{-1}X_{-i,-k}(1)]$. Это определение не зависит от выбора i по Лемме 3.10.

Замечание. Заметим, что по определению $S_k((u, a) \leftharpoondown b)$ — это в точности

$$S_{i,-k}(\varepsilon_i \overline{b}\,\overline{1}^{-1}\overline{a}b) \cdot [\epsilon^{-1}X_i((u,\, -\overline{a}) \leftharpoondown b),\, \epsilon^{-1}X_{-i,-k}(1)].$$

Тогда из Леммы 3.10 следует (заменяя a на $-\overline{a}$ и k на $-k$), что

$$S_{jk}(\varepsilon_j ab)S_{-k}((u,\, -\overline{a}) \leftharpoondown b) = [\epsilon^{-1}X_j(u,\, a),\, \epsilon^{-1}X_{-j,k}(b)].$$

Снова, мы хотели найти такие $S_i(u,\, a)$, что соотношения U0–U9 будут выполнены для них, в частности, соотношение U8, то есть, в точности тождество выше. Так что мы определили левую часть этого тождества через правую.

3.2.3 Построение сечения: гомоморфность

Теперь нам остаётся показать, что соотношения U0–U9 действительно выполнены для элементов $S_{ij}(a) \in \epsilon^{-1}X_{ij}(a)$ и $S_i(u,\, a) \in \epsilon^{-1}X_i(u,\, a)$.

Лемма 3.11. *Для любых $i \in \Omega$, $j \in \Omega \setminus \{\pm i\}$, $a \in R$*

$$[\epsilon^{-1}X_{ij}(a),\, \epsilon^{-1}X_{j,-i}(b)] = S_i(0,\, -\varepsilon_{-i}\overline{1}ab + \overline{b}\,\overline{1}^{-1}\overline{a}\varepsilon_i).$$

Доказательство. Выберем $t \in \Omega \setminus \{\pm i, \pm j\}$, $x \in \epsilon^{-1}X_{j,-t}(b)$, $y \in \epsilon^{-1}X_{-j,-t}(-\varepsilon_{-j}\overline{a}\varepsilon_i)$, и $z \in \epsilon^{-1}X_{-t,-i}(1)$. При помощи C1, имеем ${}^{y}[y^{-1} \cdot {}^{z}y,\, [x,\, z]] = {}^{yy^{-1}}[{}^{z}y,\, [x,\, z]] \cdot {}^{y}[y^{-1},\, [x,\, z]]$. Тогда из C5 и C6 следует, что

$${}^{x}[[x^{-1},\, y],\, z] = {}^{y}[x,\, [y^{-1},\, z]] \cdot \big({}^{y}[[y^{-1},\, z],\, [x,\, z]] \cdot {}^{y}[[x,\, z],\, y^{-1}]\big).$$

Легко показать, что $[x^{-1},\, y] \in \epsilon^{-1}X_t(0,\, -\overline{(-\varepsilon_{-i}\overline{1}ab + \overline{b}\,\overline{1}^{-1}\overline{a}\varepsilon_i)})$ при помощи U0 и U9. Из соотношений U5 и U0 следует, что $[y^{-1},\, z] \in \epsilon^{-1}X_{ij}(a)$ и $[x,\, z] \in \epsilon^{-1}X_{j,-i}(b)$. Таким образом мы получаем, что $[x,\, [y^{-1},\, z]] = S_{t,-i}(-\varepsilon_{-t}\overline{b}\,\overline{1}^{-1}\overline{a}\varepsilon_i)$ и $[[x,\, z],\, y^{-1}] = S_{t,-i}(\varepsilon_{-t}\varepsilon_{-i}\overline{1}ab)$. Теперь воспользуемся Леммами 3.4, 3.5 и 3.7 для завершения доказательства. □

Лемма 3.12. *Для любых $i \in \Omega$, $(u,\, a)$, $(v,\, b) \in \mathfrak{L}$,*

$$S_i(u,\, a)S_i(v,\, b) = S_i((u,\, a) \dotplus (v,\, b)).$$

Доказательство. Выберем $t \in \Omega \backslash \{\pm i\}$ и $x \in \epsilon^{-1} X_{-t,-i}(1)$, $y \in \epsilon^{-1} X_t(v, -\overline{b})$, $z \in \epsilon^{-1} X_t(u, -\overline{a})$. Из тождества C4 следует, что

$$[z, x][y, x] = [[z, x], y][yz, x].$$

По C2 мы получаем, что $[[z, x], y] = 1 \cdot S_{t,-i}(\varepsilon_t \overline{B(u, v)})$ (воспользуемся U8 и Леммами 3.9 и 3.8). Теперь Леммы 3.10 и 3.7 завершают доказательство. $\square$

Следующая лемма следует из Леммы 3.12.

Лемма 3.13. *Для любых $i \in \Omega$, (u, a), $(v, b) \in \mathfrak{L}$,*

$$[S_i(u, a), S_i(v, b)] = S_i(0, B(u, v) - B(v, u)).$$

Теперь мы готовы завершить доказательство Теоремы 5.

Доказательство Теоремы 5. Из Лемм 3.4–3.13 следует, что соотношения U3, U4, U5, U1, U0, U6, U8, U9, U2 и U7 соответственно выполняются для $S_{ij}(a)$ и $S_i(u, a)$. Таким образом, существует гомоморфизм групп σ из $\mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})$ в E такой, что $\sigma(X_{ij}(a)) = S_{ij}(a)$ и $\sigma(X_i(u, a)) = S_i(u, a)$ (для $n = \infty$ мы пользуемся здесь универсальным свойством прямого предела). Легко видеть, что $\epsilon\sigma = 1_{\mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})}$, то есть ϵ расщепляется. $\square$

Теперь мы извлечём следствия из Теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть* $\mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})$ *— это нечётная унитарная группа Стейнберга, где $n \geq 5$ или $n = \infty$. Тогда* $\mathrm{H}_2(\mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})) = 1$.

Доказательство. Группа $\mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})$ совершенна по Лемме 3.2, так что у неё существует универсальное центральное расширение $\pi : U \twoheadrightarrow \mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})$. Как мы отмечали в предыдущем пункте, при $n \geq 5$ свойство † из формулировки Теоремы 5 выполняется для любого центрального расширения $\mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})$, в частности, для π. Тогда π — это расщепляющееся расширение. Но его область U совершенна (см. замечание после определения универсального центрального расширения), так что по Лемме 1.4, расширение π в действительности является изоморфизмом. $\square$

Теорема 7. *Пусть $\pi : U \twoheadrightarrow$* $\mathrm{StU}(8, R, \mathfrak{L})$ *— это универсальное центральное расширение. Тогда мультипликатор Шура* $\mathrm{H}_2(\mathrm{StU}(8, R, \mathfrak{L}))$ *совпадает с подгруппой U, порождённой элементами* $\{[\pi^{-1} X_{ij}(a), \pi^{-1} X_{kh}(b)] \mid i, j, k, h \in \Omega,\ \mathrm{Card}\{\pm i, \pm j, \pm k, \pm h\} = 8,\ a, b \in R\}$.

Доказательство. Обозначим через M подгруппу, порождённую элементами

$$\{[\pi^{-1} X_{ij}(a), \pi^{-1} X_{kh}(b)] \mid i, j, k, h \in \Omega,\ \mathrm{Card}\{\pm i, \pm j, \pm k, \pm h\} = 8,\ a, b \in R\}.$$

Она содержится в ядре $\operatorname{Ker} \pi \subseteq \operatorname{Cent} U$, так что она нормальна. Поскольку $\pi(M) = 1$, π индуцирует гомоморфизм $\varpi : U/M \twoheadrightarrow \mathrm{StU}(8, R, \mathfrak{L})$. Очевидно, ϖ — это центральное расширение, его область совершенна и свойство † выполняется для ϖ. Тогда по Теореме 5 и Лемме 1.4, $\mathrm{StU}(8, R, \mathfrak{L}) \cong U/M$. $\square$

Теорема 8. *Пусть $n \geq 5$ или $n = \infty$. Предположим, что*

$$\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{StU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}))$$

(это выполнено, например, когда $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n-2,\,R,\,\mathfrak{L}) \to \mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ сюръективно или $n = \infty$, см. Лемму 3.16 ниже). Тогда из Леммы 1.5 следует, что

$$\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L}) = \mathrm{H}_2(\mathrm{EU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})).$$

В следующем разделе мы докажем, что центральность $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ имеет место в пределе.

3.3 Центральность предельного унитарного K_2

Определение. Обозначим через ${}^{\mathrm{StU}}\mathrm{U}_1(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ подгруппу $\mathrm{StU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$, порождённую

$$\big\{X_{n,i}(a) \mid i \in \Omega \setminus \{\pm n\},\ a \in R\big\} \cup \big\{X_n(\zeta) \mid \zeta \in \mathfrak{L}\big\},$$

и через ${}^{\mathrm{EU}}\mathrm{U}_1(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ её образ в $\mathrm{EU}(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$.

Лемма 3.14. *Сужение естественной проекции индуцирует изоморфизм*

$${}^{\mathrm{StU}}\mathrm{U}_1(2n,\,R,\,\mathfrak{L}) \cong {}^{\mathrm{EU}}\mathrm{U}_1(2n,\,R,\,\mathfrak{L}).$$

Доказательство. Сначала заметим, что $[X_n(\zeta),\,X_{n,i}(a)] = 1 = [X_{n,i}(a),\,X_{n,j}(b)]$ при $i \in \Omega \setminus \{\pm n\}$, $j \in \Omega \setminus \{\pm n, \pm i\}$ и $[X_{n,i}(a),\,X_{n,-i}(b)] = X_n(\xi)$ для некоторого $\xi \in \mathfrak{L}$, так что любой $x \in {}^{\mathrm{StU}}\mathrm{U}_1(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$ может быть разложен как

$$x = X_n(\zeta) \cdot X_{n,-n+1}(a_{-n+1}) \cdot X_{n,-n+2}(a_{-n+2}) \cdot \ldots \cdot X_{n,n-1}(a_{n-1}).$$

Теперь мы проверим, что такое разложение единственно. Пусть

$$X_n(\zeta) \cdot X_{n,-n+1}(a_{-n+1}) \cdot X_{n,-n+2}(a_{-n+2}) \cdot \ldots \cdot X_{n,n-1}(a_{n-1}) = \\ = X_n(\xi) \cdot X_{n,-n+1}(b_{-n+1}) \cdot X_{n,-n+2}(b_{-n+2}) \cdot \ldots \cdot X_{n,n-1}(b_{n-1}).$$

Тогда

$$1 = X_n(\zeta) \cdot X_{n,-n+1}(a_{-n+1}) \cdot \ldots \cdot X_{n,n-1}(a_{n-1}) \cdot X_{n,n-1}(-b_{n-1}) \cdot \ldots \cdot X_{n,-n+1}(-b_{-n+1}) \cdot X_n(\xi) = \\ = X_n(\eta) \cdot X_{n,-n+1}(a_{-n+1} - b_{-n+1}) \cdot \ldots \cdot X_{n,n-1}(a_{n-1} - b_{n-1}).$$

И также $T_n(\eta) \cdot T_{n,-n+1}(a_{-n+1} - b_{-n+1}) \cdot \ldots \cdot T_{n,n-1}(a_{n-1} - b_{n-1}) = 1$, поэтому $a_i = b_i$ для всех $i \in \Omega \setminus \{\pm n\}$, и, следовательно, $\zeta = \xi$. Теперь искомое утверждение очевидно. $\square$

Определение. Определим

$${}^{\mathrm{StU}}\mathrm{U}_1^-(2n,\,R,\,\mathfrak{L}) = \big\langle X_{-n,i}(a),\ X_{-n}(\zeta) \mid i \in \Omega \setminus \{\pm n\},\ a \in R,\ \zeta \in \mathfrak{L}\big\rangle,$$

и её образ ${}^{\mathrm{EU}}\mathrm{U}_1^-(2n,\,R,\,\mathfrak{L})$. Точно так же, как выше, можно проверить, что они изоморфны.

Следующая лемма напрямую вытекает из соотношений U5 и U8.

Лемма 3.15. *Группа Стейнберга* $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ *порождается унипотентными радикалами* ${}^{\mathrm{StU}}\mathrm{U}_1(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ *и* ${}^{\mathrm{StU}}\mathrm{U}_1^-(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$.

Лемма 3.16. *Рассмотрим естественное отображение*

$$\phi_n : \mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L}) \to \mathrm{StU}(2n+2,\, R,\, \mathfrak{L}),$$

переводящее $X_{ij}(a)$ *в* $X_{ij}(a)$ *и* $X_i(\zeta)$ *в* $X_i(\zeta)$. *Тогда*

$$\phi_n(\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{StU}(2n+2,\, R,\, \mathfrak{L})).$$

Доказательство. Выберем $x \in \mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ и $y \in {}^{\mathrm{StU}}\mathrm{U}_1(2n+2,\, R,\, \mathfrak{L})$. Из соотношений Стейнберга следует, что $\phi_n(x) \cdot y \cdot \phi_n(x)^{-1} \in {}^{\mathrm{StU}}\mathrm{U}_1(2n+2,\, R,\, \mathfrak{L})$. Но $\phi_n(x) \in \mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n+2,\, R,\, \mathfrak{L})$, так что образы $\phi_n(x) \cdot y \cdot \phi_n(x)^{-1}$ и y совпадают в ${}^{\mathrm{EU}}\mathrm{U}_1(2n+2,\, R,\, \mathfrak{L})$, и тогда по Лемме 3.14, $\phi_n(x) \cdot y \cdot \phi_n(x)^{-1} = y$. Точно так же, для любого $z \in {}^{\mathrm{StU}}\mathrm{U}_1^-(2n+2,\, R,\, \mathfrak{L})$ верно, что $[\phi_n(x),\, z] = 1$. Теперь воспользуемся Леммой 3.15. □

Замечание 1. Центральность $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ в $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \mathfrak{L})$ установить гораздо сложнее. Частные случаи линейной, ортогональной и симплектической групп обсуждаются в первых двух главах этой диссертации.

Замечание 2. Из Леммы 3.16 следует, что

$$\mathrm{K}_2\mathrm{U}(R,\, \mathfrak{L}) \rightarrowtail \mathrm{StU}(R,\, \mathfrak{L}) \twoheadrightarrow \mathrm{EU}(R,\, \mathfrak{L})$$

является центральным расширением.

3.4 Приложения результатов диссертации

Мы применим наши результаты в трёх следующих ситуациях.

1. Ортогональная группа. Пусть R — произвольное коммутативное кольцо, $l \geq 5$,

$$G = \mathrm{G_{sc}}(D_l,\, R), \quad E = \mathrm{E}(D_l,\, R), \quad \mathrm{St} = \mathrm{St}(D_l,\, R), \quad \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_2(D_l,\, R).$$

2. Симплектическая группа. Пусть R — произвольное коммутативное кольцо, $l \geq 4$,

$$G = \mathrm{Sp}(2l,\, R), \quad E = \mathrm{Ep}(2l,\, R), \quad \mathrm{St} = \mathrm{StSp}(2l,\, R), \quad \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(2l,\, R).$$

3. Стабильная унитарная группа. Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо с псевдоинволюцией, $(V,\, B,\, \mathfrak{L})$ — произвольное нечётное квадратичное пространство над R.

$$G = \mathrm{U}(R,\, \mathfrak{L}) = \mathrm{U}(\infty,\, R,\, \mathfrak{L}), \quad E = \mathrm{EU}(R,\, \mathfrak{L}), \quad \mathrm{St} = \mathrm{StU}(R,\, \mathfrak{L}), \quad \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_2\mathrm{U}(R,\, \mathfrak{L}).$$

В качестве первого следствия, мы получаем, что группа K_2 является мультипликатором Шура группы E. Это следует из стандартной теории центральных расширений, см. п. 1.1.2. В случаях ортогональной и симплектической групп основным вкладом соискателя является доказательство центральности расширения $\mathrm{St} \twoheadrightarrow E$, в то время, как центральная замкнутость групп St была ранее известна (см. [53]). В третьем случае основным вкладом соискателя является доказательство центральной замкнутости группы St.

Теорема 9. *Для групп* K_2 *и* E *как выше верно, что*

$$\mathrm{K}_2 = \mathrm{H}_2(E,\, \mathbb{Z}).$$

Этот результат можно обобщить на случаи $\mathrm{StSp}(6,\, R)$ и $\mathrm{St}(D_4,\, R)$.

Рассмотрим универсальное центральное расширение $\pi\colon U \twoheadrightarrow \mathrm{StSp}(6,\, R)$. Тогда $\phi\pi\colon U \twoheadrightarrow \mathrm{Ep}(6,\, R)$ также является центральным расширением, и мы имеем следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{H}_2(\mathrm{StSp}(6,\, R), \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & \mathrm{StSp}(6,\, R) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{H}_2(\mathrm{Ep}(6,\, R), \mathbb{Z}) \arrow[r] & U \arrow[r] & \mathrm{Ep}(6,\, R) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

с точными строками. По лемме о змее получаем точную последовательность

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_2(\mathrm{StSp}(6,\, R), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}_2(\mathrm{Ep}(6,\, R), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(6,\, R) \longrightarrow 1.$$

Точно так же, в случае ортогональной группы мы получаем точную последовательность

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_2(\mathrm{St}(D_4,\, R), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}_2(\mathrm{E}(D_4,\, R), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{K}_2(D_4,\, R) \longrightarrow 1.$$

Мультипликаторы Шура $\mathrm{H}_2(\mathrm{StSp}(6,\, R), \mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}_2(\mathrm{St}(D_4,\, R), \mathbb{Z})$ вычислены ван дер Калленом и Стайном в [36] для произвольного коммутативного кольца R, так что мы можем сравнить $\mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(6,\, R)$ и $\mathrm{H}_2(\mathrm{Ep}(6,\, R),\, \mathbb{Z})$, а также $\mathrm{K}_2(D_4,\, R)$ и $\mathrm{H}_2(\mathrm{E}(D_4,\, R),\, \mathbb{Z})$.

Теорема (ван дер Каллен–Стайн)**.** *Как показано в* [36],

$$\mathrm{H}_2(\mathrm{StSp}(6,\, R), \mathbb{Z}) = R/\langle t^2 - t \mid t \in R\rangle \quad \textit{и}$$

$$\mathrm{H}_2(\mathrm{St}(D_4,\, R), \mathbb{Z}) = (R/\langle t^2 + t \mid t \in R\rangle) \times (R/\langle 2, (t^2+t)(s^2+s) \mid t, s \in R\rangle).$$

В частности, $\mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(6,\, R) = \mathrm{H}_2(\mathrm{Ep}(6,\, R),\, \mathbb{Z})$ *и* $\mathrm{K}_2(D_4,\, R) = \mathrm{H}_2(\mathrm{E}(D_4,\, R),\, \mathbb{Z})$ *тогда и только тогда, когда* R *не имеет полей вычетов, изоморфных* $\mathbb{F}_2$.

Следствия выше устанавливают совпадение классического определения K_2-функторов, которым мы пользуемся в настоящей диссертации, и определением через $+$-конструкцию Квиллена. Напомним, что связному пунктированному CW-комплексу X и совершенной нормальной подгруппе E в $\pi_1(X) = G$ можно сопоставить новый CW-комплекс X^+, присоединяя только 2-клетки и 3-клетки, так что индуцированное отображение $\pi_1(X) \to \pi_1(X^+)$ будет в точности естественной проекцией $G \twoheadrightarrow G/E$, а индуцированные отображения на гомологиях будут изоморфизмами. Квиллен использовал эту конструкцию, чтобы определить высшую К-теорию. Ту же самую конструкцию можно применить к классическим группам или группам Шевалле, чтобы определить соответствующие версии К-теории. В частности, взяв G и E как в одном из трёх случаев в начале этого раздела, а $X = \mathrm{B}G$, мы получаем определение ортогональной, симплектической или унитарной К-теории Квиллена,

$$\mathrm{K}_i^Q(G) = \pi_i(\mathrm{B}G^+).$$

Из такого определения автоматически следует, что квилленский $\mathrm{K}_1^Q(G)$ совпадает с классическим определением G/E. Можно проверить, что $\mathrm{B}E^+$ гомотопически эквивалентно универсальному накрытию $\mathrm{B}G^+$ (см. [72]). Таким образом, $\mathrm{K}_2^Q(G) = \pi_2(\mathrm{B}G^+) = \pi_2(\mathrm{B}E^+)$, которая равна $\mathrm{H}_2(\mathrm{B}E^+)$ по теореме Гуревича. Так как $+$-конструкция сохраняет гомологии, а гомологии $\mathrm{B}E$ равны гомологиям E, мы заключаем, что $\mathrm{K}_2^Q(G) = \mathrm{H}_2(E, \mathbb{Z})$. Другими словами, в качестве приложения результатов настоящей диссертации, мы получаем, что в трёх рассмотренных ситуациях K_2-функтор, определённый при помощи группы Стейнберга, совпадает с определённым через $+$-конструкцию.

Теорема 10. *Для G, E, St и K_2 как выше, $\mathrm{K}_2^Q(G) = \mathrm{K}_2$. Если кольцо R не имеет полей вычетов из двух элементов, то же самое верно для $G = \mathrm{Sp}(6, R)$ и $G = \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(D_4, R)$.*

Заключение

Итак, подведём итоги настоящей работы

1. Мы доказали локально-глобальный принцип для линейной группы Стейнберга $\mathrm{St}(4, R)$ для произвольного коммутативного кольца R, обобщив результаты Марата Туленбаева.

2. Мы доказали теорему центральности симплектического $\mathrm{K}_2\mathrm{Sp}(2l, R)$, построили другое копредставление для симплектической группы Стейнберга $\mathrm{StSp}(2l, R)$ и доказали локально-глобальный принцип Квиллена–Суслина для этой группы для произвольного коммутативного кольца R и $l \geq 3$.

3. Мы доказали тривиальность мультипликатора Шура нечётной унитарной группы Стейнберга $\mathrm{StU}(2n, R, \mathfrak{L})$ над произвольном кольцом с псевдоинволюцией R и для произвольного нечётного форменного параметра $\mathfrak{L}$ при $n \geq 5$.

Список литературы

[1] З. Боревич, Н. Вавилов, “Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом”, *Тр. МИАН СССР*, **165** (1984), 24–42.

[2] Н. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп*, докторская диссертация, ЛГУ, 1987.

[3] Н. Вавилов, “Строение расщепимых классических групп над коммутативными кольцами”, *Доклады АН СССР*, **37**:2 (1988), 550–553.

[4] Л. Васерштейн, А. Михалев, “О нормальных подгруппах ортогональной группы над кольцом с инволюцией”, *Алгебра и логика*, **9**:6 (1970), 629–632.

[5] Ж. Дьедонне, *Геометрия классических групп*, Мир, М., 1974.

[6] И. Клейн, А. Михалев, “Ортогональная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией”, *Алгебра и логика*, **9**:2 (1970), 145–166.

[7] И. Клейн, А. Михалев, “Унитарная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией”, *Алгебра и логика*, **9**:5 (1970), 510–519.

[8] В. Копейко, “Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов”, *Матем. сб.*, **106 (148)**:1 (5) (1978), 94–107.

[9] А. Лавренов, “Центральная замкнутость унитарной группы Стейнберга”, *Алгебра и анализ*, **24**:5 (2012), 124–140.

[10] А. Меркурьев, “О гомоморфизме норменного вычета степени два”, *Докл. АН СССР*, **261**:3 (1981), 542-–547.

[11] А. Меркурьев, А. Суслин, “K-когомологии многообразий Севери—Брауэра и гомоморфизм норменного вычета”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:5 (1982), 1011-–1046.

[12] В. Петров, *Надгруппы классических групп*, кандидатская диссертация, СПбГУ, 2005.

[13] В. Петров, А. Ставрова, “Элементарные подгруппы в изотропных редуктивных группах”, *Алгебра и анализ*, **20**:4 (2008), 160–188.

[14] С. Синчук, *Параболические факторизации редуктивных групп*, кандидатская диссертация, СПбГУ, 2013.

[15] А. Ставрова, *Строение изотропных редуктивных групп*, кандидатская диссертация, СПбГУ, 2009.

[16] А. Степанов, *Структурная теория и подгруппы групп Шевалле над кольцами*, докторская диссертация, ЛЭТИ, 2014.

[17] А. Суслин, “Проективные модули над кольцами многочленов свободны”, *Доклады АН СССР*, **229**:5 (1976), 1063–1066.

[18] А. Суслин, “О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов”, *Изв. АН СССР*, **41**:2 (1977), 235–252.

[19] А. Суслин, В. Копейко, “Квадратичные модули и ортогональная группа над кольцами многочленов”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **71** (1977), 216–250.

[20] М. Туленбаев, “Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **86** (1979), 162–169.

[21] М. Туленбаев, “Группа Стейнберга кольца многочленов”, *Матем. сб.*, **117 (159)**:1 (1982), 131–144.

[22] A. Bak, *The stable structure of quadratic modules*, Thesis, Columbia University, 1969.

[23] A. Bak, “On modules with quadratic forms”, *Algebraic K-Theory and Its Geometric Applications*, Lecture Notes in Mathematics, **967**, Springer-Verlag, Berlin, 1969, 55–66.

[24] A. Bak, *K-Theory of Forms*, Annals of Mathematics Studies, **98**, Princeton University Press, Princeton, 1981.

[25] A. Bak, Tang Guoping, “Stability for Hermitian K_1”, *J. Pure Appl. Algebra*, **150** (2000), 107–121.

[26] A. Bak, N. Vavilov, “Structure of hyperbolic unitary groups I: Elementary subgroups”, *Algebra Colloq.*, **7**:2 (2000), 159–196.

[27] A. Bak, N. Vavilov, “Normality for elementary subgroup functors”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **118**:1 (1995), 35–47.

[28] H. Bass, “K-theory and stable algebra”, *Publ. IHES*, **22** (1964), 1–60.

[29] H. Bass, J. Milnor, J.-P. Serre, “Solution of the congruence subgroup problem for SL_n, $(n \geq 3)$ and Sp_{2n}, $(n \geq 2)$”, *Publ. IHES*, **33** (1967), 59–137.

[30] A. Hahn, O. O'Meara, *The Classical Groups and K-Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[31] R. Hazrat, “Dimension theory and nonstable K_1 of quadratic modules”, *K-Theory*, **27** (2002), 293–328.

[32] R. Hazrat, *On K -theory of classical-like groups*, Doktorarbeit, Bielefeld Univ., 2002.

[33] R. Hazrat, N. Vavilov, “Bak's work on K-theory of rings”, with an appendix by Max Karoubi, *J. K-Theory*, **4** (2009), 1–65.

[34] W. van der Kallen, “Another presentation for Steinberg groups”, *Indag. Math.*, **39**:4 (1977), 304–312.

[35] W. van der Kallen, “The Schur multipliers of $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ and $\mathrm{SL}(4, \mathbb{Z})$”, *Math. Ann.*, **212** (1974), 47–49.

[36] W. van der Kallen, M. Stein, “On the Schur Multipliers of Steinberg and Chevalley Groups over Commutative Rings”, *Mathematische Zeitschrift*, **155**:1 (1977), 83–94.

[37] F. Keune, “The relativisation of K_2”, *J. Algebra*, **54**:1 (1987), 159–177.

[38] A. Lavrenov, “On odd unitary Steinberg group”, arXiv:1303.6318.

[39] A. Lavrenov, “Another presentation for symplectic Steinberg groups”, *J. Pure Appl. Algebra*, **219**:9 (2015).

[40] A. Lavrenov, “A local-global principle for symplectic K_2”, *Documenta Mathematica*, 2018.

[41] A. Lavrenov, S. Sinchuk, “On centrality of even orthogonal K_2”, *J. Pure Appl. Algebra*, **221**:5 (2017), 1134–1145.

[42] Li Fuan, “The structure of symplectic groups over arbitrary commutative rings”, *Acta Math. Sinica*, **3**:3 (1987), 247–255.

[43] Li Fuan, “The structure of orthogonal groups over arbitrary commutative rings”, *Chin. Ann. Math.*, **10B**:3 (1989), 341–350.

[44] J.-L. Loday, "Cohomologie et groupes de Steinber relatifs", *J. Algebra*, **54**:1 (1978), 178–202.

[45] H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, University of Paris, 1969.

[46] J. Milnor, "Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct", *Annals Math.*, **74** (1961), 575–590.

[47] J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Princeton University Press, 1971.

[48] V. Petrov, "Overgroups of unitary groups", *K-Theory*, **29** (2003), 147–174.

[49] V. Petrov, "Odd Unitary Groups", *Journal of Mathematical Sciences*, **130**:3 (2003), 4752-4766.

[50] D. Quillen, "Projective modules over polynomial rings", *Invent. Math.*, **36** (1976), 167–171.

[51] U. Rehmann, "Zentrale Erweiterungen der speziellen linearen Gruppe eines Schiefk orpers", *J. Reine Angew. Math.*, **301** (1978), 77–104.

[52] S. Sinchuk, "On centrality of K_2 for Chevalley groups of type E_l", *J. Pure Appl. Algebra*, **220**:2 (2016), 857–875.

[53] M. Stein, "Generators, relations, and coverings of Chevalley groups over commutative rings", *Amer. J. Math.*, **93**:4 (1971), 965–1004.

[54] M. Stein, "The Schur multipliers of $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Spin}_8(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{Z})$, and $\mathrm{F}_4(\mathbb{Z})$", *Math. Ann.*, **215** (1975), 165–172.

[55] M. Stein, "Stability theorems for K_1, K_2 and related functors modeled on Chevalley groups", *Japan J. Math.*, **4** (1978), 77–108.

[56] R. Steinberg, "Générateurs, relations et revètements de groupes algébriques", *Colloq. Théorie des Groupes Algébriques*, 1962, 113–127.

[57] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, 1967.

[58] A. Stepanov, "Structure of Chevalley groups over rings via universal localization", *J. Algebra*, **450** (2016), 522–548.

[59] A. Stepanov, N. Vavilov, "Decomposition of transvections: a theme with variations", *K-Theory*, **19** (2000), 109–153.

[60] K. Suzuki, "Normality of the elementary subgroups of twisted Chevalley groups over commutative rings", *J. Algebra*, **175**:2 (1995), 526–536.

[61] R. Swan, "Non-abelian homological algebra and K-theory", *Proc. Symp. Pure Math XVII*, 1970, 88–133.

[62] G. Taddei, *Schémas de Chevalley–Demazure: fonctions représentatives et théorème de normalité*, Thèse, Univ. de Genève, 1985.

[63] G. Taddei, "Invariance du sous-groupe symplectique élémentaires dans le groupe symplectique sur un anneau", *C. R. Acad. Sci. Paris (Sér. I)*, **295**:2 (1982), 47–50.

[64] G. Taddei, "Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau", *Contemp. Math.*, **55**:2 (1986), 693–710.

[65] Tang Guoping, "Hermitian groups and K-theory", *K-Theory*, **13**:3 (1998), 209–267.

[66] J. Tate, "Relation between K_2 and Galois cohomology", *Invent. Math.*, **36** (1976), 257–274.

[67] L. Vaserstein, "On normal subgroups of GL_n over a ring", *Lecture Notes Math.*, **854** (1981), 456–465.

[68] L. Vaserstein, "On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings", *Tôhoku Math. J.*, **38** (1986), 219–230.

[69] L. Vaserstein, "Normal subgroups of orthogonal groups over commutative rings", *Amer. J. Math.*, **110**:5 (1988), 955–973.

[70] L. Vaserstein, "Normal subgroups of symplectic groups over rings", *K-Theory*, **2**:5 (1989), 647–673.

[71] L. Vaserstein, You Hong, "Normal subgroups of classical groups over rings", *J. Pure Appl. Algebra*, **105** (1995), 93–105.

[72] C. A. Weibel, *The K-book: an introduction to algebraic K-theory*, Grad. Studies in Math., **145**, AMS, 2013.

[73] M. Wendt, "On homotopy invariance for homology of rank two groups", *J. Pure Appl. Algebra*, **216**:10 (2012), 2291–2301, doi:10.1016/j.jpaa.2012.03.004.

[74] J. H. C. Whitehead, "Simplicial spaces, nucleii and m-gropus", *Proc. London Math. Soc.*, **45** (1939), 243–327.