

Отзыв научного руководителя  
о диссертации Павла Борисовича Затицкого  
“Масштабирующая энтропийная последовательность  
как метрический инвариант динамических систем”,  
представленной на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

В конце 1950-х годов А. Н. Колмогоров, опираясь на работы Шеннона по теории информации, определил энтропию преобразования с инвариантной мерой, что позволило решить старую задачу о (не)изоморфизме сдвигов Бернулли. С тех пор инварианты энтропийного типа продолжают оставаться одной из ключевых тем метрической эргодической теории. Диссертация Затицкого посвящена исследованию *масштабирующей энтропийной последовательности*, введенной А. М. Вершиком в конце 1990-х. Идея Вершика состоит в рассмотрении динамики метрик под действием динамической системы (действием группы на стандартном вероятностном пространстве). Ключевым понятием этой теории является *допустимая метрика* — метрика, задающая сепарабельное пространство на множестве полной меры.

Первая глава диссертации относится по существу к теории меры и функциональному анализу. В ней строится общая теория допустимых метрик на стандартном вероятностном пространстве  $(X, \mu)$ , множество которых рассматривается как конус в банаховом пространстве с так называемой  *$t$ -нормой*. Ключевым свойством  $t$ -нормы, делающей ее адекватной в приложениях, является то, что сходимость метрик по ней сохраняет допустимость (что не так для более слабых интегральных норм). В этом пространстве доказываются теоремы об аппроксимации и критерии компактности, находящие затем приложения в изучении динамики метрик. Эти результаты, как и некоторые последующие, получены в работе диссертанта, Вершика и моей. Отмечу также полезную для работы с допустимыми метриками и полуметриками лемму об исправлении почти-метрик (удовлетворяющих неравенству треугольника почти всюду) до настоящих (полу)метрик. Она была получена в совместной работе диссертанта со мной и уже нашла дальнейшее развитие в непрерывной комбинаторике. Считаю вклад соавторов в каждую из двух упомянутых работ равным.

Во второй главе исследуется *динамика* допустимых метрик под действием сохраняющего меру автоморфизма. Здесь доказывается следующий базовый результат диссертации: если некоторое асимптотическое поведение так называемой *эпсилон-энтропии* конечных усреднений имеет место для одной допустимой метрики на пространстве, то то же верно и для любой другой — тем самым, класс масштабирующих последовательностей является метрическим инвариантом. Отметим, что в отличие от обычной энтропии, которая сопоставляет динамической системе неотрицательное число, тут инвариантом является *класс последовательностей*, задающих асимптотический рост под действием автоморфизма метрики. Ограниченность эпсилон-энтропий усреднений метрики равносильна дискретности спектра автоморфизма, и этот результат был получен в упомянутой совместной работе трех авторов. Обобщение на

произвольный случай потребовало новых идей, оно сделано в работе диссертанта, другие результаты которой, касающиеся масштабирующей энтропийной последовательности, также представлены в диссертации. Это, прежде всего, количественная теорема, связывающая масштабирующую последовательность с  $A$ -энтропией Кушнirenко, и остроумное вычисление масштабирующей энтропийной последовательности для подстановочных систем, по существу использующее независимость от метрики: оказывается, что удобно брать инвариантную относительно подстановки метрику на словах. Видимо, это наиболее простой способ доказать критерий Камае – Деккинга дискретности спектра подстановочной динамической системы. Завершается диссертация указанием ряда дальнейших направлений исследований по её теме, часть из которых уже ведётся.

Считаю представленную диссертацию цельным научным исследованием, соответствующим самым высоким требованиям, какие можно предъявлять к кандидатским диссертациям. Отмечу, что помимо трех вошедших в текст диссертации работ ее автор написал еще около десятка. Некоторые — совместные с Вершиком и со мной (виртуальная непрерывность функций многих переменных — эта работа непосредственно связана с диссертационной тематикой), некоторые (вложения метрических пространств в нормированные) выполнены под моим руководством, однако большая часть — также на аналитические, но другие темы (метод функции Беллмана в гармоническом анализе, формулы для регуляризованных следов дифференциальных операторов). Всё это позволяет заключить, что Павел Затицкий — состоявшийся активно работающий аналитик, который несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель  
кандидат физико-математических наук  
старший научный сотрудник ПОМИ РАН  
Ф. В. Петров