ОТЗЫВ

официального оппонента
на диссертацию СМОЛЕНСКОГО Андрея Вадимовича
«Факторизации и ширина групп Шевалле над маломерными кольцами»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Основы теории групп Шевалле были заложены в 50–60-х годах XX века в работах К. Шевалле, Ж. Титса, А. Бореля, А. Вейля, А. Гротендика, М. Демазюра, Р. Стейнберга и других. Как понятие и объект исследования эти группы возникли на пересечении магистральных направлений математики XIX–XX веков. Важнейшей предпосылкой их рождения стали блестящие продвижения в теории групп и алгебр Ли, прежде всего, классификации Картана–Киллинга. В 1956–1958 годах К. Шевалле получил классификацию полупростых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем. Позднее Шевалле показал, что все полупростые группы над алгебраически замкнутым полем в действительности определены над $\mathbb{Z}$. Иначе говоря, они получаются в результате расширения базы из некоторых групповых схем над кольцом целых чисел, (т. н. схем Шевалле–Демазюра). Группы точек этих схем над коммутативными кольцами называются группами Шевалле.

Для современной теории групп (прежде всего, конечных) группы Шевалле и их скрученные аналоги имеют фундаментальное значение. Над полями элементарные подгруппы таких групп в присоединенном представлении почти всегда просты. Более того, этими группами (т. н. группами лиева типа) над конечными полями почти исчерпываются (за исключением серии знакопеременных групп и 26 спорадических групп) конечные простые неабелевы группы согласно теореме о классификации. Доказательство практически любого утверждения о конечных группах, использующее классификацию конечных простых групп, — это не менее, чем на 3/4, работа с группами лиева типа, причем указанная оценка, как правило, сильно занижена.

В диссертации А. В. Смоленского для групп Шевалле и их скрученных аналогов, а также для конгруэнц-подгрупп, элементарных и относительных элементарных подгрупп исследуются тесно связанные между собой вопросы о факторизациях некоторыми естественными подгруппами (унипотентные подгруппы, подгруппы $\mathrm{SL}_2(R)$, $\mathrm{SL}_{n-1}(R)$ и другие) и вопросы о ширине этих групп относительно важных систем образующих (для элементарных подгрупп исследуется коммутаторная ширина, а для относительных элементарных подгрупп — ширина в образующих Васерштейна–Титса).

Диссертантом получена серия первоклассных результатов высокого мирового уровня. Изучаемые в работе вопросы остро актуальны, а за аналогичные результаты идет серьезная конкурентная борьба.

Одним из таких результатов является теорема о разложении произвольной простой группы лиева типа над конечным полем в произведение четырех унипотентных подгрупп (теорема 2.2 во второй главе). Это же утверждение, спустя совсем небольшое время после публикации автора, независимо получили М. Гаронци, Д. Леви, А. Мароти и И. Симион.

По определению элементарная группа Шевалле $\mathrm{E}(\Phi, R)$ порождается унипотентными подгруппами $U = \mathrm{U}(\Phi, R)$ и $U^- = \mathrm{U}^-(\Phi, R)$. Поэтому для элементарной Шевалле группы естественна проблема существования такого числа m, что

$$\mathrm{E}(\Phi, R) = UU^-UU^- \dots U^\pm$$

с m сомножителями в правой части. Из результата В. ван дер Каллена следует, что изучать проблему имеет смысл лишь при определенных ограничениях на основное кольцо R. В 2001 году Либек и Пибер доказали для конечных групп лиева типа над полем существование указанной факторизации с 25 сомножителями. В 2011 году соискатель совместно с Н. А. Вавиловым и Б. Сури, опираясь на редукционный результат О. И. Тавгеня, получили элементарное доказательство того факта, что над кольцом стабильного ранга 1 (в частности, над полем) группа $\mathrm{E}(\Phi, R)$ допускает факторизацию $\mathrm{E}(\Phi, R) = UU^-UU^-$. Теорема Тавгеня допускает использование и в скрученном случае, поэтому существование аналогичной факторизации скрученных групп достаточно проверять для групп ранга 1: унитарных групп $\mathrm{SU}_3(F)$, групп Судзуки и малых групп Ри. Это и проделано во второй главе диссертации в разделе 2.1 для групп над конечными полями. Доказано также, что конечность поля является существенным условием для факторизации $G = UU^-UU^-$ скрученных групп: существуют поля F, не допускающие унитреугольной факторизации группы $\mathrm{SU}_3(F)$ длины меньше 5. Таким будет, например, поле комплексных чисел, для которого длина в точности равна 5.

Ясно, получен очень сильный результат, который найдет множество применений. Одно из них автор демонстрирует в следующей главе при исследовании коммутаторной ширины элементарных подгрупп.

Некоторая техника использования подобных разложений развивается уже в главе 2. Остаток главы посвящен исследованию главных конгруэнц-подгрупп и относительных элементарных подгрупп. Доказано существование короткого разложения Гаусса для относительных элементарных подгрупп в группах Шевалле над кольцом стабильного ранга 1. Отсюда получается конечность ширины относительных элементарных групп в образующих Васерштейна–Титса (при некоторых ограничениях на основное кольцо или идеал) и даже удается получить оценки ширины. Аналогичные исследования проведены для главных конгруэнц-подгрупп.

В третьей главе получены (теорема 3.1) очень хорошие оценки коммутаторной ширины элементарных групп Шевалле над кольцами стабильного ранга 1. Результаты такого рода сегодня очень востребованы. Так сравнительно недавно научной сенсацией стало завершение М. Либеком, Э. О'Брайеном, А. Шалевом и Ф. Х. Тьепом доказательства знаменитой гипотезы Оре, утверждающей, что в конечной неабелевой простой группе каждый элемент является коммутатором или, что то же самое, коммутаторная ширина неабелевых простых групп равна 1. Ранее эта гипотеза исследовалась многими авторами. Фундаментальный вклад в ее решение для групп лиева типа внесли Н. Л. Гордеев и Э. Эллерс, доказавшие гипотезу Оре для групп над полями из не менее восьми элементов и разработавшими важнейшие технические методы. Изучение коммутаторной ширины в элементарных подгруппах групп Шевалле над кольцами и сегодня является активно развивающимся направлением, где работают многие известные специалисты.

Мне представляется, что третья глава — это украшение диссертации. В ней технический блеск решения по-настоящему сложных вопросов сочетается с использованием глубоких и нетривиальных идей, для которых требуются тонкая математическая интуиция и превосходное знание исследуемого материала.

В четвертой главе получены (теорема 4.2) оценки для числа сомножителей вида $\mathrm{SL}(2, R)$ в разложении на них группы Шевалле над эрмитовыми кольцами. Такого рода факторизации изучались Н. А. Вавиловым, Е. М. Ковачем, М. Либеком, А. Шалевом, Н. Николовым и другими. Отметим, что в группах Шевалле над конечными полями нечетной характеристики такие подгруппы называются фундаментальными. С их помощью М. Ашбахер получил характеризацию групп лиева типа нечетной характеристики в знаменитой теореме о классической инволюции.

На примере элементарных спинорных групп показано, что оценка Николова в 200 сомножителей типа A_{l-1} может быть существенно улучшена (до 9 сомножителей!), если использовать некоторую параболическую факторизацию вместо унитреугольной.

Отмечу недостатки работы. В диссертации присутствует определенное количество опечаток, грамматических несогласованностей и даже непереведенных остатков оригинального англоязычного текста. Далее, для удобства чтения и понимания отдельных доказательств было бы неплохо привести диаграммы Дынкина с указанием нумерации корней, а не отсылать читателя к книге Бурбаки. Формат диссертации вполне позволяет это сделать. Из существенных недочетов отмечу неаккуратность в формулировке теоремы 3.1. В ней найдены очень хорошие, но всё же, лишь оценки коммутаторной ширины элементарных групп, а не сама эта ширина.

На все отмеченные недостатки, впрочем, можно смело закрыть глаза. Они ни сколько не умаляют качества полученных в диссертации результатов и не снижают впечатления о ее авторе как о состоявшемся зрелом математике. Результаты диссертации превосходны и по своей силе, и по виртуозности исполнения. Кроме того, работа представляет несомненный интерес в методическом плане, и в заключении диссертации автор перечисляет ряд интересных задач, которые, по-видимому, удастся решить с помощью развитых им методов.

Подведу итог. Диссертация А. В. Смоленского представляет собой законченное исследование на актуальную тему, имеющую большое значение для теории групп. В работе получены новые исключительно сильные результаты, находящиеся в сфере активного интереса современной математической науки с сильной мировой конкуренцией. Все выносимые на защиту утверждения снабжены корректными доказательствами. Методы исследования в диссертации разнообразны и оригинальны. Автор продемонстрировал виртуозное владение сложной техникой вычислений в группах Шевалле, глубокую интуицию и блестящие знания в различных областях математики. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Все основные результаты своевременно опубликованы. Среди публикаций есть статья в журнале из перечня ВАК и статья в международном журнале, индексируемом в базе данных Web of Science. Кроме того, диссертация прошла солидную апробацию на различных международных математических конференциях, где результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались, а также на научных семинарах Санкт-Петербурга.

Таким образом, диссертация А. В. Смоленского "Факторизации и ширина групп Шевалле над маломерными кольцами" соответствует п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" и удовлетворяет всем необходимым требованиям, предъявляемых ВАК и Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел. Считаю, что Андрей Вадимович заслуживает присуждения этой степени.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук,
лаборатория теории групп,
ведущий научный сотрудник
доктор физико-математических наук
доцент

Ревин Данила Олегович

Почтовый адрес: 630090, г. Новосибирск, ул. Академика Коптюга, д. 4.
Тел.: 8(383)329-76-18. E-mail: revin@math.nsc.ru

Подпись Д. О. Ревина заверяю. Учёный секретарь ИМ СО РАН
к.ф.-м.н.

А. Ф. Воронин

04. 03. 2016 г.