ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Васильев Вадим Львович

(2,3)-ПОРОЖДЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н. М. А. Всемирнов

Санкт-Петербург

2014

Оглавление

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одна из важных областей исследований в теории групп посвящена вопросам нахождения минимального количества элементов, порождающих группу, а также определения порядков данных элементов. Особое место в этой области отводится работам по теории (2,3)-порожденных групп, то есть групп, порождаемых инволюцией и элементом порядка 3. Именно к подобным исследованиям относится данная диссертационная работа. Важность темы (2,3)-порождения групп связана с тем, что, согласно результату Ф. Клейна и Р. Фрике [18], эпиморфные образы модулярной группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, за исключением трех циклических групп $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, — это в точности (2,3)-порожденные группы.

С начала XX века совместными усилиями многих авторов удалось положительно решить вопрос о (2,3)-порождении для большого количества представителей таких важных классов групп, как конечные простые группы и классические матричные группы над конечнопорожденными коммутативными кольцами.

Наиболее «простым» для исследования оказался случай одного из классов конечных простых групп — знакопеременных групп A_n. Еще в 1901 г. Дж. Миллер в [29] доказал, что данные группы, за исключением A_1, A_2, A_3, A_6, A_7, A_8, могут быть порождены инволюцией и элементом порядка 3. Для прочих простых групп, чей порядок меньше миллиона, благодаря работе Г. Брахана [12], вышедшей в свет в 1930 г., удалось лишь показать возможность порождения двумя элементами.

В последующие 30 лет были опубликованы работы, описывающие структуру ряда представителей другого важного класса конечных простых групп — классических матричных групп над конечными полями, а также классических матричных групп над конечнопорожденными коммутативными кольцами. Так, в 1949 г. Хуа Ло-кен и И. Рейнер [21] доказали, что группы $\mathrm{PSp}_{2n}(\mathbb{Z})$ могут быть порождены 4 элементами при $n \geq 2$ и 2 элементами при $n = 1$. Для случая проективных симплектических групп над конечным полем $\mathrm{PSp}_{2n}(p)$, где p — простое число, в 1958 г. в работе Т. Рума и Р. Смита [33] было показано, что они могут быть порождены 2 элементами. А в 1959–1963 гг. этот результат был улучшен в работах Т. Рума [32], П. Станека [35] и [36]: было доказано, что $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ могут быть порождены двумя элементами, один из которых — инволюция, в случае, когда $n \geq 3$ или когда $n = 2$, $q = 2$.

В это же время успешно изучалась структура специальных линейных групп: в 1959 г. А. Альберт и Дж. Томпсон [10] доказали, что группы $\mathrm{PSL}_n(q)$ могут быть порождены 2 элементами, один из которых является инволюцией. Отметим, что в статье случай групп малого ранга разбирается отдельно для каждого значения $2 \leq n \leq 4$, а для случая $n \geq 5$ приводится общее доказательство. В дальнейшем, для некоторых групп $\mathrm{PSL}_n(q)$ малого ранга был положительно разрешен вопрос о (2,3)-порождении: см. работы А. Макбета [28] — для случая $n = 2$ и $q \neq 9$; Д. Гарбе [19] и Дж. Коэна [14] — для случая $n = 3$ и $q \neq 4$.

В работах, упомянутых выше, порождающие группу элементы были построены в явном виде. Дж. Диксон в 1969 г. в [17] предложил «вероятностный» подход к выбору образующих, выдвинув гипотезу:

Гипотеза 1. *Вероятность того, что два произвольным образом выбранных элемента конечной простой группы G порождают ее, стремится к 1 при $|G| \to \infty$.*

Более того, Дж. Диксон представил асимптотическую оценку для случая знакопеременных групп A_n, подтверждающую гипотезу.

В 1990–1995 гг. справедливость гипотезы была доказана в работах У. Кантора и А. Любоцкого [23], М. Либека и А. Шалева [24]. Впоследствии М. Либек и А. Шалев смогли усилить утверждение гипотезы 1, показав в [26], что она остается верной при предположении, что один из элементов будет инволюцией. Затем в работе [25] была доказана теорема:

Теорема 1. *Пусть G пробегает бесконечное семейство групп, состоящее из конечных простых классических или знакопеременных групп, за исключением* $\mathrm{PSp}_4(q)$. *Тогда вероятность того, что G порождается выбранными произвольным образом инволюцией и элементом порядка 3, стремится к 1 при $|G| \to \infty$.*

Если $G = \mathrm{PSp}_4(p^\alpha)$, где $p > 3$ — простое число, то вышеуказанная вероятность стремится к $1/2$ при $|G| \to \infty$.

Работа Дж. Диксона [17], а также последующие исследования, доказывающие справедливость гипотезы 1 и теоремы 1, упомянутые ранее, не дают представления о явном виде образующих групп. Однако за последние 30 лет были опубликовано большое количество работ, доказывающих (2,3)-порождение отдельных серий классических матричных групп над конечнопорожденными коммутативными кольцами (в частности, над конечными полями).

Наиболее хорошо изучены на данный момент полные линейные группы и специальные линейные группы. Еще в конце 1980-х годов М. К. Тамбурини в соавторстве с Дж. Уилсоном в [40] показала, что группа $\mathrm{PSL}_n(q)$ может быть порождена двумя элементами малого порядка при достаточно большом значении n, зависящего от произведения порядков этих элементов. Кроме того, М. К. Тамбурини в [37] представила конструктивное доказательство (2,3)-порожденности групп $\mathrm{SL}_n(q)$ при $n \geq 25$. Использовавшийся в работе метод выбора в качестве образующих единообразных, «почти перестановочных» матриц оказался крайне удачным, и активно использовался М. К. Тамбурини в последующих работах для доказательства (2,3)-порождения разнообразных представвителей классических матричных групп (см., например, [41]). В 1994–1996 гг. Л. Ди Мартино и Н. А. Вавилов в работах [15, 16] улучшили результат М. К. Тамбурини, доказав (2,3)-порожденность групп $\mathrm{SL}_n(q)$, где q — нечетное число и $q \neq 9$, при $n \geq 5$. Отметим, что улучшение оценки на n снизу привело к значительному усложнению доказательства, которое, в том числе, потребовало отдельного рассмотрения случаев малых рангов при каждом значении $n < 12$.

Положительное разрешение вопроса о (2,3)-порождении почти всех $\mathrm{SL}_n(q)$ за исключением конечного числа серий групп дало достаточно оснований полагать, что группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ также должны быть (2,3)-порождены. Эта задача для случая больших размерностей была успешно разрешена М. К. Тамбурини и соавторами в [34], [38], [39]: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ будет (2,3)-порождена при $n \geq 13$, а $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — при $n = 13$ и $n \geq 15$. В случае малых размерностей хорошо известно, что эти группы не будут (2,3)-порождены при $n = 2, 4$. В «Коуровской тетради» [7] М. Кондер поставил вопрос о (2,3)-порождении групп $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. Отрицательный ответ независимо друг от друга был получен Я. Н. Нужиным в работе [8] и М. К. Тамбурини с Р. Цукка в [43]. В 2003 г. А. Ю. Лузгарев и И. М. Певзнер в [6] представили редукционную теорему для группы $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$, сведя задачу поиска образующих к рассмотрению всего десяти вариантов возможных пар матриц, а в 2006 г. аналогичный результат для $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ был доказан М. А. Всемирновым в [4]. Позднее М. А. Всемирнов показал в [5], [48], [49] что группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, где $n = 5, \ldots, 12$, а также $\mathrm{GL}_{14}(\mathbb{Z})$ являются (2,3)-порожденными группами.

Структура гиперболических симплектических групп $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ была менее изучена. Так, в 1980 г. П. Бендер в статье [11] показал, что $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ является $(2, 12)$-порожденной группой, а в 1996 г. Х. Ишибаши в [22] доказал, что $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$, где $n \geq 3$, является $(2, m)$-порожденной, где $m = 12(n-1)$ при четном n и $m = 6(n-1)$ при нечетном n.

При этом для многих симплектических групп над конечными полями известно, что они являются $(2, 3)$-порожденными группами. М. Каццола и

Л. Ди Мартино в 1993 г. в [13] показали, что группы $\mathrm{PSp}_4(p^n)$, где $p \neq 2, 3$, будут (2,3)-порождены. В 1994 г. М. К. Тамбурини, Дж. Уилсон и Н. Гавиоли доказали в [42] (2,3)-порожденность групп $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$, где q — нечетное число, при $n \geq 37$. Данный результат был получен как следствие более общей теоремы для элементарных гиперболических симплектических групп достаточно большого ранга над конечнопорожденными коммутативными кольцами, содержащими обратимую двойку. В работе П. Санкини и М. К. Тамбурини [34] представлена улучшенная оценка на n снизу: группы $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, где q — нечетно, будут (2,3)-порождены при $n \geq 25$.

Вместе с тем, про ряд гиперболических симплектических групп $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ при малом значении n хорошо известно, что они не являются (2,3)-порожденными: при $n = 1$ — в силу того, что $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, при $n = 2$ — в силу того, что $\mathrm{PSp}_4(2)$ и $\mathrm{PSp}_4(3)$ не являются (2,3)-порожденными группами ([25]). Отметим, что $\mathrm{PSp}_4(3^n)$ может быть порождена двумя элементами, один из которых инволюция, что доказано М. Пеллегрини, М. К. Тамбурини и М. А. Всемирновым в 2012 г. в работе [31]. Также М. А. Всемирнов в совместной с соискателем статье [45] доказал, что группа $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{Z})$ не является (2,3)-порожденной. Более того, в этой статье была выдвинута гипотеза:

Гипотеза 2. *Гиперболические симплектические группы* $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ *являются* $(2, 3)$*-порожденными в точности при* $n \geq 4$.

В диссертационной работе автор, в частности, доказывает справедливость гипотезы 2 для случаев $n = 4, 5$ и $n \geq 25$.

Цель работы. Основной целью кандидатской работы является исследование вопроса о (2,3)-порождении гиперболических симплектических групп над конечнопорожденными коммутативными кольцами, в том числе, над кольцом целых чисел и над кольцами с дополнительными условиями (аддитивное порождение определенным множеством).

Методы исследований. В работе используются методы линейной алгебры, методы теории групп, в частности, методы, основанные на применении теоремы Жордана о транзитивных группах перестановок, а также вычислительные методы (применение систем компьютерной алгебры).

Теоретическая и практическая ценность. Кандидатская диссертация носит теоретический характер. Результаты работы могут найти дальнейшее применение в исследованиях структуры матричных групп над конечнопорожденными коммутативными кольцами, в частности при изучении гиперболических симплектических групп.

Научная новизна. В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Доказано, что, если R — коммутативное кольцо, аддитивно порождаемое множеством $\{s^{2k}, 2s^{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ для некоторого $s \in R^*$, то при $n \geq 25$ элементарные гиперболические симплектические группы $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ являются (2,3)-порожденными. В частности, доказана $(2,3)$-порожденность гиперболических симплектических групп $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ при $n \geq 25$.

2. Доказана $(2,3)$-порожденность групп $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$, где R — коммутативное кольцо, порождаемое элементами $1, u_1, \ldots, u_l$, при $n \geq 13 + 12 \cdot 2^l$. В частности, доказана $(2,3)$-порожденность групп $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l])$, где $l \geq 1$, при $n \geq 13 + 12 \cdot 2^l$.

3. Как следствие из результатов пунктов 1 и 2, доказана $(2,3)$-порожденность групп $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\alpha])$, где α — алгебраическое число, при $n \geq 37$. Более того, доказано, что группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}[\omega])$ будут $(2,3)$-порождены при $n \geq 25$.

4. Доказана $(2,3)$-порожденность групп $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$.

Все полученные результаты являются конструктивными, то есть матрицы порядка 2 и 3 соответственно, порождающие рассматриваемые группы, представляются в явном виде.

Апробация работы. Результаты кандидатской работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях: на Санкт-Петербургском городском семинаре по дискретной математике, на Санкт-Петербургском городском семинаре по алгебраическим группам, на Санкт-Петербургском городском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева, на международной конференции «Методы логики в математике V» (1 июня — 7 июня 2008 г., г. Санкт-Петербург), на молодежной школе-конференции «Современные проблемы алгебры и математической логики» (22 сентября — 3 октября 2011 г., г. Казань). Кроме того, работа над темой диссертации была поддержана грантом РФФИ 09-01-00784-а и грантом Правительства Санкт-Петербурга по итогам конкурса грантов для студентов, аспирантов, молодых ученых, молодых кандидатов наук 2011 г. (диплом победителя серия ПСП № 11077).

Публикации. По теме кандидатской диссертации автором опубликовано 7 работ: [3], [45], [46], [47], [1], [2], [44]. В том числе, 3 работы ([45], [46], [47]) опубликованы в международных журналах, индексируемых Web of Science, и одна работа ([3]) опубликована в отечественном журнале, включенном в список ВАК. Все результаты, включенные в диссертационную работу, принадлежат лично соискателю.

Работа [45] написана в соавторстве, соискателю принадлежит теорема 2 (о (2,3)-порожденности группы $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$) и следствие 4 (о (2,3,30;10)-порожденности группы $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$). Соавтору принадлежит доказательство теоремы 1, а также идея поиска подходящих образующих, описанная в разделе 3.

В [44] представлены тезисы выступления на международной конференции, на котором был анонсирован результат для $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$. Подробное доказательство данного результата позднее было опубликовано в [45] (вклад соискателя и соавтора приведен выше).

Работа [46] написана в соавторстве, соискателю принадлежат теорема 2.1 (о (2,3)-порожденности группы $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$) и леммы 3.1–3.6. Соавтору принадлежит общее руководство работой, идея поиска образующих, описанная в замечании 2.2, идея поиска матриц g_i, описанная в начале доказательства леммы 3.2, а также идея о переходе от верхних блочно-треугольных матриц к нижним блочно-треугольным матрицам, описанная в начале доказательства леммы 3.6.

Работа [47] написана в соавторстве, где соавтору принадлежит общая конструкция матриц x, y, представленная в разделе 2 статьи [47], а также общая схема доказательства. Соискателю принадлежат подробные детали доказательств.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 102 страницах и состоит из общей характеристики работы, 3 глав, разделенных на 9 параграфов, и списка литературы. Библиография состоит из 50 наименований.

Глава 1.

Введение

1.1. Основные обозначения и определения.

В начале раздела введем основные обозначения, которые будут использоваться в диссертационной работе:

$R[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_l]$ — кольцо многочленов от l переменных над коммутативным кольцом R (при $l=0$ — коммутативное кольцо R);

R^* — группа обратимых элементов кольца R;

$\mathrm{GL}_n(R)$ — группа обратимых матриц размера $n\times n$ над кольцом R;

I_n — единичная матрица размера $n\times n$;

J_{2n} — кососимметрическая матрица размера $2n\times 2n$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix};$$

$e_{i,j}$ — квадратная матрица, у которой элемент на пересечении i-ой строки и j-ого столбца равен 1, а все остальные — 0. Размер матрицы определяется исходя из контекста рассуждений;

$t_{i,j}(u)$ — элементарные трансвекции в $\mathrm{GL}_n(R)$, то есть $t_{i,j}(u)=I_n+u\cdot e_{i,j}$, где $1\le i\ne j\le n$ и $u\in R$;

g^T — транспонирование матрицы g;

$[U,V]$ — коммутатор элементов U, V, т.е. $[U,V] = U^{-1}V^{-1}UV$;

A_n, S_n — знакопеременная и симметрическая группы порядка n соответственно;

$\varnothing$ — пустое множество.

Теперь представим основные определения, которые будут использоваться в диссертационной работе.

Определение 1.1. Группа G называется (n,m)-*порожденной*, если существуют элементы $x, y \in G$ порядка n и m соответственно, порождающие группу G.

Определение 1.2. Группа G называется $(n,m,k;l)$-*порожденной*, если существуют элементы $x, y \in G$, такие, что $\langle x, y \rangle = G$ и при этом

$$x^n = y^m = (xy)^k = [x,y]^l = 1.$$

Определение 1.3. Пусть R — коммутативное кольцо с 1. Определим *гиперболическую симплектическую группу* $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$ следующим образом:

$$\mathrm{Sp}_{2n}(R) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \;\middle|\; g^T J_{2n} g = J_{2n} \right\}.$$

Замечание 1.1. Определение, представленное выше, в случае, когда R — поле, дает определение классических симплектических групп (см., например, [9, параграф 1.1]).

Определение 1.4. Пусть R — коммутативное кольцо с 1. *Элементарной гиперболической симплектической группой* $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ будем называть подгруппу $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$, которая порождена следующими типами матриц:

- верхнетреугольными матрицами вида

$$E^{(1)}_{i,j}(u) = \begin{cases} I_{2n} + u \cdot (e_{i,n+j} + e_{j,n+i}), & \text{если } 1 \le i \ne j \le n, \\ I_{2n} + u \cdot e_{i,n+i}, & \text{если } 1 \le i = j \le n, \end{cases} \tag{1.1}$$

- нижнетреугольными матрицами вида

$$E_{i,j}^{(2)}(u) = \begin{cases} I_{2n} + u \cdot (e_{n+i,j} + e_{n+j,i}), & \text{если } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ I_{2n} + u \cdot e_{n+i,i}, & \text{если } 1 \leq i = j \leq n, \end{cases} \tag{1.2}$$

- блочно-диагональными матрицами вида

$$E_{i,j}^{(3)}(u) = I_{2n} + u \cdot e_{i,j} - u \cdot e_{n+j,n+i}, \text{ если } 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{1.3}$$

где u пробегает всевозможные элементы из R.

1.2. Вспомогательные факты

В данном параграфе мы представим ряд утверждений о гиперболических симплектических группах и фактов из теории групп перестановок, которые будут использоваться во второй и третьей главах диссертационной работы.

Гиперболические симплектические группы

Из определений в параграфе 1.1 следует, что $\mathrm{ESp}_{2n}(R) \subseteq \mathrm{Sp}_{2n}(R)$. Дополнительные условия на кольцо R позволяют достичь равенства этих групп:

Теорема 1.1 ([20], теорема 5.3.4)**.** *Если R — евклидово кольцо, то справедливо равенство* $\mathrm{ESp}_{2n}(R) = \mathrm{Sp}_{2n}(R)$.

Группы перестановок

Далее мы будем через G обозначать группу перестановок, действующую на множестве Γ. Через $\sigma(a)$ будем обозначать результат действия перестановки $\sigma \in G$ на элемент $a \in \Gamma$. Соответственно, для $\Omega \subseteq \Gamma$ и $\sigma \in G$ введем следующее обозначение:

$$\sigma(\Omega) = \{\sigma(a) \mid a \in \Omega\}.$$

Определение 1.5. Группа перестановок G называется *транзитивной*, если для любых двух элементов a_1 и a_2 из Γ найдется перестановка $\sigma \in G$, такая, что $\sigma(a_1) = a_2$.

Далее мы считаем, что G — транзитивная группа перестановок, действующая на Γ.

Определение 1.6. Под *степенью* транзитивной группы G, действующей на множестве Γ, мы будем понимать $|\Gamma|$.

Определение 1.7. Подмножество $\Omega \subseteq \Gamma$ будем называть *блоком*, если для любой перестановки $\sigma \in G$ либо $\sigma(\Omega) = \Omega$, либо $\sigma(\Omega) \cap \Omega = \varnothing$. При этом под *длиной блока* Ω мы будем понимать количество элементов в Ω.

Легко видеть, что блоками являются $\varnothing$, Γ, а также любое одноэлементное подмножество Γ. Подобные блоки называют *тривиальными блоками.*

Замечание 1.2. Пусть Ω — нетривиальный блок в Γ. Предположим, что в G есть цикл $\sigma = (a_1, \ldots, a_p)$ длины $p \geq 3$, где p — простое число, и найдутся такие индексы $1 \leq i \neq j \leq p$, что $a_i, a_j \in \Omega$. Тогда найдется $1 \leq k \leq p-1$, такое, что $\sigma^k a_i = a_j$, а значит, так как Ω — блок, $\sigma^k a_j = \sigma^{2k} a_i \in \Omega$. Аналогично рассуждая и используя тот факт, что σ — цикл длины p, где p — простое число, мы получаем, что попарно различные элементы $a_i, \sigma^k a_i, \ldots, \sigma^{(p-1)k} a_i$ содержатся в Ω. А значит, верно, что блок Ω содержит все элементы $a_1, \ldots, a_p$ из Γ, которые переставляет σ.

Определение 1.8. Если G не содержит других блоков, кроме тривиальных, то такую группу перестановок называют *примитивной.*

Лемма 1.1 ([50], предложение 6.3)**.** *Пусть G — транзитивная группа перестановок, действующая на Γ, $\Omega \subseteq \Gamma$ — блок и $\Omega \neq \varnothing$. Тогда длина блока Ω должна быть делителем $|\Gamma|$.*

Используя лемму 1.1, можно сформулировать более удобный критерий для проверки — является ли транзитивная группа примитивной:

Лемма 1.2. *Пусть G — транзитивная группа перестановок, действующая на Γ, и $|\Gamma| = d \geq 4$. Если G содержит цикл длины p, где p — простое число и $p > d/2$, то G — примитивная группа перестановок.*

Доказательство. Пусть Ω — нетривиальный блок длины k, тогда $k < d$. В силу леммы 1.1, справедливо, что k — делитель d и $k \leq d/2$. Более того, множество Γ разбивается на $n = d/k > 1$ попарно непересекающихся блоков длины k, один из которых — Ω.

Пусть σ — цикл длины p, где p — простое число и $p > d/2$, содержащийся в G по предположению леммы. Тогда в G есть хотя бы один блок, который содержит 2 элемента из Γ, не являющихся неподвижными точками σ. Тогда, в силу замечания 1.2, мы получаем, что данный блок должен содержать не менее p элементов. Так как $p > d/2$ и $d/2 \geq k$, то мы получили противоречие с предположением о том, что Ω — блок длины k. Следовательно, в G не существует нетривиальных блоков, а значит G — примитивная группа перестановок. □

Лемма 1.3 ([50], теорема 13.9)**.** *Пусть p — простое число, а G — примитивная группа степени $p + k$, где $k \geq 3$. Если G содержит цикл длины p, то G совпадает с A_{p+k} или S_{p+k}.*

Глава 2.

Группы $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ большого ранга

2.1. Формулировка основных результатов

Один из главных результатов главы — доказательство того, что $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ являются (2,3)-порожденными группами при $n \geq 25$. Это утверждение следует из более общего результата о том, что для любого конечнопорожденного коммутативного кольца R и достаточно большого значения n группа $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ будет (2,3)-порожденной. Кроме того, мы покажем, что можно улучшить оценку снизу на n при условии, что на кольцо R будет наложено ограничение в виде аддитивной порожденности определенным множеством. Представленные в главе результаты были опубликованы в работах [3], [47].

Одним из основных результатов главы является следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пусть $l \geq 0$ и $n \geq 13 + 12 \cdot 2^l$. Тогда $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_l])$ является $(2,3)$-порожденной группой.*

Доказательство теоремы 2.1 будет представлено в §2.4 диссертации, а пока отметим, что справедливо следствие из теоремы 2.1:

Следствие 2.1. *Группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ является $(2,3)$-порожденной при $n \geq 25$.*

Доказательство. Из утверждения теоремы 2.1 следует, что группа $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$ является (2,3)-порожденной при $n \geq 25$. Для доказательства следствия остается заметить, что $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ в силу теоремы 1.1. $\square$

Также верно то, что результаты теоремы 2.1 для кольца $\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_l]$ могут быть распространены на случай любого конечнопорожденного коммутативного кольца R с 1:

Теорема 2.2. *Пусть R — коммутативное кольцо с 1, которое порождено элементами $1, u_1, \dots, u_l$, где $l \geq 0$. Если $n \geq 13 + 12 \cdot 2^l$, то $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ является $(2,3)$-порожденной группой.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 мы знаем, что

$$\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_l]) = \langle x, y \rangle, \text{ где } x^2 = y^3 = I_{2n},$$

при $n \geq 13 + 12 \cdot 2^l$.

Далее рассмотрим кольцевой гомоморфизм $\phi : \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_l] \to R$, определенный следующим образом:

$$1_{\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_l]} \mapsto 1_R \text{ и } X_i \mapsto u_i \text{ при } 1 \leq i \leq l.$$

Для доказательства теоремы 2.2 нам осталось применить групповой эпиморфизм $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_l]) \to \mathrm{ESp}_{2n}(R)$, индуцированный гомоморфизмом ϕ, к матрицам x и y. $\square$

Пусть α — алгебраическое число. Так как кольцо $\mathbb{Z}[\alpha]$ порождается семейством $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots\}$, то справедливо следствие из теоремы 2.2:

Следствие 2.2. *Пусть α — алгебраическое число. Тогда $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\alpha])$ является $(2,3)$-порожденной группой при $n \geq 37$.*

Наконец, отметим, что дополнительные условия на аддитивное порождение кольца R в ряде случаев позволяют улучшить оценку снизу на n по сравнению с результатом теоремы 2.2. Точнее, справедлива теорема:

Теорема 2.3. *Пусть R — коммутативное кольцо с 1, $s \in R^*$. Дополнительно предположим, что R аддитивно порождается множеством*

$$\left\{s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2s^{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Тогда $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ является $(2,3)$-порожденной группой при $n \geq 25$.

Доказательство теоремы 2.3 будет представлено в параграфе 2.5 диссертационной работы, но сначала заметим, что справедливы следствия из теоремы 2.3:

Следствие 2.3. *Пусть α — корень уравнения $x^{2k+1} - 1 = 0$. Тогда группа $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}[\alpha])$ является $(2,3)$-порожденной при $n \geq 25$.*

Доказательство. Пусть $R = \mathbb{Z}[\alpha]$, где α — корень уравнения $x^{2k+1} - 1 = 0$. Из определения α следует, что R аддитивно порождается множеством $\left\{\alpha^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Для завершения доказательства осталось применить теорему 2.3, определив $s = \alpha$. $\square$

В частности, из следствия 2.3 и теоремы 1.1 следует, что группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}[\omega])$ является $(2,3)$-порожденной при $n \geq 25$.

Следствие 2.4. *Группа $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ является $(2,3)$-порожденной при $n \geq 25$.*

Доказательство. Пусть R — конечное поле, состоящее из $q = p^t$ элементов. Обозначим через s элемент, порождающий R^*. Тогда справедливо, что $s^{q-1} = 1$ и любой элемент R^* представим как s^i, где $i \in \{1, \ldots, q-1\}$.

Если $p = 2$, то $q-1$ — нечетное число, а значит, R аддитивно порождается множеством $\{s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Теперь рассмотрим случай, когда $p \neq 2$, то есть $p = 2\bar{p} + 1$. Так как $\mathrm{char} K = p$, то $-s^i = 2\bar{p}s^i$. Таким образом, R аддитивно порождается множеством $\{s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\bar{p}s^{2k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Для завершения доказательства следствия осталось применить теорему 2.3. $\square$

Прежде чем перейти к следующему разделу, отметим, что в доказательствах теоремы 2.1 и теоремы 2.3, представленных в работах [3] и [47] соответственно, использовались сходные конструкции образующих матриц. С целью избежать повторного изложения материала в диссертационной работе, в параграфе 2.2, будет представлена обобщенная конструкция параметрических матриц x, y порядка 2 и 3 соответственно. Затем, в параграфе 2.3, мы докажем ряд вспомогательных фактов, в частности, о том, какие элементы содержатся в группе $\langle x, y\rangle$. Наконец, в параграфах 2.4 и 2.5 мы будем использовать матрицы x и y, построенные в параграфе 2.2, с определенными значениями параметров для доказательства теорем 2.1 и 2.3 соответственно.

2.2. Построение образующих

Пусть R — коммутативное кольцо с 1, $s \in R^*$ и $L \in \mathbb{N}$. Определим параметр $n \in \mathbb{N}$, такой, что $n \geq 13 + 12L$ (в частности, $n \geq 25$), и рассмотрим модуль R^n со стандартным базисом $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и $\mathrm{GL}_n(R)$, действующую слева на него. Будем обозначать $n = 3m + r$, где $1 \leq r \leq 3$, а значит $m \geq 4 + 4L$.

Далее, до конца второй главы диссертационной работы, через $\mathrm{Sym}(\Gamma)$ и $\mathrm{Alt}(\Gamma)$, где $\Gamma \subseteq B$, мы будем обозначать подгруппу в $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящую из перестановочных матриц (соответственно, четных перестановочных матриц), переставляющих элементы из Γ и фиксирующих элементы из $B \setminus \Gamma$. Кроме того, мы будем отождествлять перестановки и соответствующие им матрицы. Например, через $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ мы будем обозначать матрицу, соответствующую циклической перестановке базисных элементов $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$.

Рассмотрим оператор $y_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$, действующий следующим образом на элементы из B:

- $v_{3i+3} \mapsto v_{3i+2} \mapsto v_{3i+1} \mapsto v_{3i+3}$, где $0 \leq i \leq m-1$;

- $v_{3m+3} \mapsto v_{3m+2} \mapsto v_{3m+1} \mapsto v_{3m+3}$, если $r = 3$;

- y_1 оставляет неподвижными v_{3m+i}, где $1 \leq i \leq r$, если $r \leq 2$.

Из приведенных выше соотношений следует, что $y_1 \in \mathrm{Alt}(B)$ и $y_1^3 = I_n$.

Определим $x_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$ на базисных элементах R^n:

- x_1 меняет местами v_{3i+1} и v_{3i} при $1 \leq i \leq m-1$;

- x_1 оставляет неподвижными v_{3i+2} при $0 \leq i \leq m-2$;

- $v_1 \mapsto sv_2 - v_1$;

- если $r = 1$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} и v_{3m+1}, а v_{3m} оставляет неподвижным;

- если $r = 2$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} с v_{3m+2} и v_{3m} с v_{3m+1};

- если $r = 3$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} с v_{3m+3} и v_{3m+1} с v_{3m+2}, а v_{3m} оставляет неподвижным.

Из соотношений выше легко видеть, что подмодули $\langle v_1, v_2 \rangle$ и $\langle v_3, \ldots, v_{3m+r} \rangle$ инвариантны относительно действия x_1, причем x_1 индуцирует на $\langle v_1, v_2 \rangle$ оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix},$$

а на $\langle v_3, \ldots, v_{3m+r} \rangle$ действует как перестановка порядка 2. Следовательно, x_1 — инволюция.

Теперь рассмотрим копию базиса B, обозначив ее элементы как $v_{n+1}, \ldots, v_{2n}$, и определим вложение $\pi : \mathrm{GL}_n(R) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}(R)$,

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^T)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Далее определим оператор $z_{i,j}(p,q) \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$, где $1 \le i \ne j \le n$ и $p \in R^*$, $q \in R$, следующим образом: $z_{i,j}(p,q)$ действует тождественно на всех v_k, $k \in \{1,\ldots,2n\} \setminus \{i,j,n+i,n+j\}$, а на подмодуле $\langle v_i, v_j, v_{n+i}, v_{n+j}\rangle$ в R^{2n} действует как оператор, заданный матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^{-1} \\ q & 0 & -p^{-1} & 0 \\ 0 & -p & 0 & q \\ p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

то есть

- $v_i \mapsto qv_j + pv_{n+j}$;
- $v_j \mapsto -pv_{n+i}$;
- $v_{n+i} \mapsto -p^{-1}v_j$;
- $v_{n+j} \mapsto p^{-1}v_i + qv_{n+i}$.

Легко проверяется, что $A_1^2 = I_4$, а значит, $z_{i,j}(p,q)$ является инволюцией.

Рассмотрим пары элементов $(p_0,q_0),\ldots,(p_{L-1},q_{L-1})$, где $p_i \in R^*, q_i \in R$ при $0 \le i \le L-1$, и построим следующую матрицу:

$$z = \prod_{i=0}^{L-1} z_{12i+11,12i+14}(p_i,q_i), \tag{2.3}$$

то есть

- $v_{12i+11} \mapsto q_i v_{12i+14} + p_i v_{n+12i+14}$, где $0 \le i \le L-1$;
- $v_{12i+14} \mapsto -p_i v_{n+12i+11}$, где $0 \le i \le L-1$;

- $v_{n+12i+11} \mapsto -p_i^{-1} v_{12i+14}$, где $0 \le i \le L-1$;
- $v_{n+12i+14} \mapsto p_i^{-1} v_{12i+11} + q_i v_{n+12i+11}$, где $0 \le i \le L-1$.

Кроме того, z оставляет неподвижными базисные элементы v_k при

$$k \in \{1, \dots, 2n\} \setminus \{12i+11, 12i+14, n+12i+11, n+12i+14 \mid 0 \le i \le L-1\}.$$

Замечание 2.1. Так как отдельные сомножители в определении z в (2.3) друг с другом попарно коммутируют, то результат их произведения не зависит от порядка сомножителей.

Наконец, определим

$$x = \pi(x_1)z, \ y = \pi(y_1). \tag{2.4}$$

Замечание 2.2. Ранее мы уже отмечали, что y_1 действует на $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ как перестановка на базисных элементах, а значит, в силу определения гомоморфизма π в (2.1), y действует на $v_{n+1}, \dots, v_{2n}$ таким же образом, как y_1 — на $v_1, \dots, v_n$. Аналогично, используя то, что x_1 действует на $\langle v_3, \dots v_n \rangle$ как перестановка порядка 2, мы получаем следующее: x действует на $v_{n+3}, \dots, v_{2n}$ так же, как x_1 — на $v_3, \dots, v_n$. Далее мы будем пользоваться этими фактами без дополнительного упоминания.

Замечание 2.3. Конструкция матриц x_1, $y_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$, построенных выше, восходит к совместной работе П. Санкини и М. К. Тамбурини [34] за одним исключением: у нас x_1 действует на $\langle v_3, \dots, v_n \rangle$ как перестановка на базисных элементах, а в [34] — как перестановка со знаками.

Принципиальное отличие предложенной выше конструкции матриц x, y от конструкции П. Санкини и М. К. Тамбурини заключается в виде матрицы z, используемой при построении матрицы x.

Лемма 2.1. *Матрицы x, y имеют порядок 2 и 3 соответственно.*

Доказательство. Из определения π в (2.1) и того, что $x_1^2 = y_1^3 = I_n$, следует, что $\pi(x_1)$ — инволюция и $y = \pi(y_1)$ имеет порядок 3.

Рассмотрим в R^{2n} модули $M_1^{(i)}$, где $0 \leq i \leq L-1$, и M_2:

$$\begin{aligned} M_1^{(i)} &= \langle v_{12i+11}, v_{12i+14}, v_{n+12i+11}, v_{n+12i+14} \rangle, \\ M_2 &= \langle v_k \mid k \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \\ &\qquad \{12i+11, 12i+14, n+12i+11, n+12i+14 \mid 0 \leq i \leq L-1\} \rangle. \end{aligned}$$

Из построений выше мы знаем, что модули $M_1^{(i)}$ при любом $0 \leq i \leq L-1$ и M_2 инварианты относительно $z_{12j+11,12j+14}(p_j, q_j)$, где $0 \leq j \leq L-1$, и $\pi(x_1)$. При этом для каждого из модулей $M_1^{(i)}$, M_2 существует ровно один оператор из перечисленных, сужение которого на модуль является нетождественным оператором: для модуля $M_1^{(i)}$, где $0 \leq i \leq L-1$, — оператор $z_{12i+11,12i+14}(p_i, q_i)$, для M_2 — оператор $\pi(x_1)$ соответственно. Следовательно, все операторы $\pi(x_1)$, $z_{12i+11,12i+14}(p_i, q_i)$, где $0 \leq i \leq L-1$, попарно коммутируют друг с другом. Используя то, что каждый из этих операторов — инволюция, мы получаем, что x также является инволюцией. $\square$

Замечание 2.4. Несложно убедиться, что матрицы x, y содержатся в группе $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$. Мы этого здесь делать не будем, однако отметим, что позднее (см. лемму 2.7 в параграфе 2.4 и лемму 2.8 в параграфе 2.5) будет показано, что при дополнительных предположениях о структуре кольца R и определенных значениях параметров s, $p_0, \ldots, p_{L-1}$, $q_0, \ldots, q_{L-1}$, матрицы x и y содержатся в группе $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$.

2.3. Вспомогательные леммы

Определим $\Delta_1 = \{v_{3m-6}, v_{3m-5}\} \cup \{v_{3m-3}, \ldots, v_{3m}\} \cup \{v_{3m+1}, \ldots, v_{3m_+r}\}$ — подмножество в B и покажем, что верно утверждение:

Лемма 2.2. *Справедливо включение* $(y^{-1}xyx)^{12} \in \pi(\mathrm{Alt}(\Delta_1))$.

Доказательство. Разложим R^{2n} в прямую сумму следующих модулей:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \langle v_1, v_2, v_5\rangle \oplus \langle v_3, v_4, v_8\rangle,\\
S_2 &= \langle v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}\rangle \oplus \langle v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}\rangle,\\
S_3^{(i)} &= \langle v_{12i+6}, v_{12i+7}, v_{12i+11}\rangle \oplus \langle v_{12i+9}, v_{12i+10}, v_{12i+14}\rangle \oplus\\
&\quad \oplus\langle v_{n+12i+6}, v_{n+12i+7}, v_{n+12i+11}\rangle \oplus\\
&\quad \oplus\langle v_{n+12i+9}, v_{n+12i+10}, v_{n+12i+14}\rangle, \text{ где } 0 \le i \le L-1,\\
S_4^{(i)} &= \langle v_{12i+12}, v_{12i+13}, v_{12i+17}\rangle \oplus \langle v_{12i+15}, v_{12i+16}, v_{12i+20}\rangle \oplus\\
&\quad \oplus\langle v_{n+12i+12}, v_{n+12i+13}, v_{n+12i+17}\rangle \oplus\\
&\quad \oplus\langle v_{n+12i+15}, v_{n+12i+16}, v_{n+12i+20}\rangle, \text{ где } 0 \le i \le L-1,\\
S_5^{(i)} &= \langle v_{3i}, v_{3i+1}, v_{3i+5}\rangle, \text{ где } 4L+2 \le i \le m-3,\\
S_6^{(i)} &= \langle v_{n+3i}, v_{n+3i+1}, v_{n+3i+5}\rangle, \text{ где } 4L+2 \le i \le m-3,\\
S_7 &= \langle v_{3m-6}, v_{3m-5}, v_{3m-3}, v_{3m-2}, \dots, v_{3m+r}\rangle,\\
S_8 &= \langle v_{n+3m-6}, v_{n+3m-5}, v_{n+3m-3}, v_{n+3m-2}, \dots, v_{n+3m+r}\rangle,
\end{aligned}$$

и проверим, что каждый из них инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и, более того, матрица сужения оператора $(y^{-1}xyx)^{12}$ на каждый из этих подмодулей, кроме S_7 и S_8, — единичная.

Замечание 2.5. Для удобства дальнейшего изложения мы будем проверять действие $y^{-1}xyx = y^{-1}\pi(x_1)zy\pi(x_1)z$, учитывая действие каждого из сомножителей.

Случай 1: $S_1 = \langle v_1, v_2, v_5\rangle \oplus \langle v_3, v_4, v_8\rangle$. Сначала рассмотрим действие $y^{-1}xyx$ на образующие v_1, v_2, v_5:

$$\begin{aligned}
v_1 &\xmapsto{z} v_1 \xmapsto{\pi(x_1)} sv_2 - v_1 \xmapsto{y} sv_1 - v_3 \xmapsto{z}\\
&\quad sv_1 - v_3 \xmapsto{\pi(x_1)} s^2v_2 - sv_1 - v_4 \xmapsto{y^{-1}} s^2v_3 - sv_2 - v_5,
\end{aligned}$$

$$v_2 \xmapsto{z} v_2 \xmapsto{\pi(x_1)} v_2 \xmapsto{y} v_1 \xmapsto{z} v_1 \xmapsto{\pi(x_1)} sv_2 - v_1 \xmapsto{y^{-1}} sv_3 - v_2,$$
$$v_5 \xmapsto{z} v_5 \xmapsto{\pi(x_1)} v_5 \xmapsto{y} v_4 \xmapsto{z} v_4 \xmapsto{\pi(x_1)} v_3 \xmapsto{y^{-1}} v_1.$$

Кроме того, легко видеть, что $y^{-1}xyx$ циклично переставляет образующие v_3, v_8, v_4, а именно:

$$v_3 \xmapsto{z} v_3 \xmapsto{\pi(x_1)} v_4 \xmapsto{y} v_6 \xmapsto{z} v_6 \xmapsto{\pi(x_1)} v_7 \xmapsto{y^{-1}} v_8,$$
$$v_8 \xmapsto{z} v_8 \xmapsto{\pi(x_1)} v_8 \xmapsto{y} v_7 \xmapsto{z} v_7 \xmapsto{\pi(x_1)} v_6 \xmapsto{y^{-1}} v_4,$$
$$v_4 \xmapsto{z} v_4 \xmapsto{\pi(x_1)} v_3 \xmapsto{y} v_2 \xmapsto{z} v_2 \xmapsto{\pi(x_1)} v_2 \xmapsto{y^{-1}} v_3.$$

Значит, модуль S_1 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и матрица сужения $y^{-1}xyx$ на S_1 в базисе v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_8 равна

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & s & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $A_2^{12} = I_6$, а значит $(y^{-1}xyx)^{12}$ действует тождественно на S_1.

Случай 2: $S_2 = \langle v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}\rangle \oplus \langle v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}\rangle$. Из построения x_1 и определения π в (2.1) видно, что матрица $\pi(x_1)$ действует на $\langle v_{n+1}, v_{n+2}\rangle$ как

$$\begin{pmatrix} -1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть $v_{n+1} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+1}$, $v_{n+2} \xmapsto{\pi(x_1)} sv_{n+1} + v_{n+2}$. Тогда $y^{-1}xyx$ действует на $\langle v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}\rangle$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&v_{n+1} \xmapsto{z} v_{n+1} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+1} \xmapsto{y} -v_{n+3} \xmapsto{z} -v_{n+3} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+4} \xmapsto{y^{-1}} -v_{n+5},\\
&v_{n+2} \xmapsto{z} v_{n+2} \xmapsto{\pi(x_1)} sv_{n+1} + v_{n+2} \xmapsto{y} sv_{n+3} + v_{n+1} \xmapsto{z}\\
&\qquad sv_{n+3} + v_{n+1} \xmapsto{\pi(x_1)} sv_{n+4} - v_{n+1} \xmapsto{y^{-1}} sv_{n+5} - v_{n+2},\\
&v_{n+5} \xmapsto{z} v_{n+5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+5} \xmapsto{y} v_{n+4} \xmapsto{z} v_{n+4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+3} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим далее действие $y^{-1}xyx$ на образующие v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}:

$$
\begin{aligned}
&v_{n+3} \xmapsto{z} v_{n+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+4} \xmapsto{y} v_{n+6} \xmapsto{z} v_{n+6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+7} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+8},\\
&v_{n+4} \xmapsto{z} v_{n+4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+3} \xmapsto{y} v_{n+2} \xmapsto{z}\\
&\qquad v_{n+2} \xmapsto{\pi(x_1)} sv_{n+1} + v_{n+2} \xmapsto{y^{-1}} sv_{n+2} + v_{n+3},\\
&v_{n+8} \xmapsto{z} v_{n+8} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+8} \xmapsto{y} v_{n+7} \xmapsto{z} v_{n+7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+6} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+4}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, подмодуль S_2 инвариантен относительно оператора $y^{-1}xyx$, и матрица сужения $y^{-1}xyx$ в базисе v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}, v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8} на этот подмодуль равна

$$
A_3 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & s & 0\\
-1 & s & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Непосредственно проверяется, что $A_3^{12} = I_6$, а значит $(y^{-1}xyx)^{12}$ действует тождественно на S_2.

Случай 3: $S_3^{(i)}$ при $0 \le i \le L-1$. Вначале докажем, что $y^{-1}xyx$ циклично переставляет образующие модуля

$$
\begin{aligned}
M_3^{(i)} = \langle & v_{12i+6}, v_{12i+11}, q_i v_{12i+10} + p_i v_{n+12i+10},\\
&\qquad q_i v_{12i+9} + p_i v_{n+12i+9}, q_i v_{12i+14} + p_i v_{n+12i+14}, v_{12i+7}\rangle.
\end{aligned}
$$

Действительно, нетрудно проверить, что

$$
\begin{aligned}
&v_{12i+6} \xmapsto{z} v_{12i+6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+7} \xmapsto{y} v_{12i+9} \xmapsto{z} v_{12i+9} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+10} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+11},\\
&v_{12i+11} \xmapsto{z} q_iv_{12i+14} + p_iv_{n+12i+14} \xmapsto{\pi(x_1)} q_iv_{12i+14} + p_iv_{n+12i+14} \xmapsto{y}\\
&\qquad q_iv_{12i+13} + p_iv_{n+12i+13} \xmapsto{z} q_iv_{12i+13} + p_iv_{n+12i+13} \xmapsto{\pi(x_1)}\\
&\qquad q_iv_{12i+12} + p_iv_{n+12i+12} \xmapsto{y^{-1}} q_iv_{12i+10} + p_iv_{n+12i+10},\\
&q_iv_{12i+10} + p_iv_{n+12i+10} \xmapsto{z} q_iv_{12i+10} + p_iv_{n+12i+10} \xmapsto{\pi(x_1)}\\
&\qquad q_iv_{12i+9} + p_iv_{n+12i+9} \xmapsto{y} q_iv_{12i+8} + p_iv_{n+12i+8} \xmapsto{z}\\
&\qquad q_iv_{12i+8} + p_iv_{n+12i+8} \xmapsto{\pi(x_1)} q_iv_{12i+8} + p_iv_{n+12i+8} \xmapsto{y^{-1}} q_iv_{12i+9} + p_iv_{n+12i+9},\\
&q_iv_{12i+9} + p_iv_{n+12i+9} \xmapsto{z} q_iv_{12i+9} + p_iv_{n+12i+9} \xmapsto{\pi(x_1)}\\
&\qquad q_iv_{12i+10} + p_iv_{n+12i+10} \xmapsto{y} q_iv_{12i+12} + p_iv_{n+12i+12} \xmapsto{z}\\
&\qquad q_iv_{12i+12} + p_iv_{n+12i+12} \xmapsto{\pi(x_1)} q_iv_{12i+13} + p_iv_{n+12i+13} \xmapsto{y^{-1}}\\
&\qquad q_iv_{12i+14} + p_iv_{n+12i+14},\\
&q_iv_{12i+14} + p_iv_{n+12i+14} \xmapsto{z} v_{12i+11} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+11} \xmapsto{y} v_{12i+10} \xmapsto{z}\\
&\qquad v_{12i+10} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+9} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+7},\\
&v_{12i+7} \xmapsto{z} v_{12i+7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+6} \xmapsto{y} v_{12i+5} \xmapsto{z} v_{12i+5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+5} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+6}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $M_3^{(i)}$ — инвариантный модуль относительно $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $M_3^{(i)}$ тождественно. Теперь проверим, что $y^{-1}xyx$ действует циклично на образующие модуля

$$M_4^{(i)} = \langle v_{12i+9}, v_{12i+14}, -p_iv_{n+12i+7}, -p_iv_{n+12i+6}, -p_iv_{n+12i+11}, v_{12i+10}\rangle :$$

$$
\begin{aligned}
&v_{12i+9} \xmapsto{z} v_{12i+9} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+10} \xmapsto{y} v_{12i+12} \xmapsto{z} v_{12i+12} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+13} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+14},\\
&v_{12i+14} \xmapsto{z} -p_iv_{n+12i+11} \xmapsto{\pi(x_1)} -p_iv_{n+12i+11} \xmapsto{y} -p_iv_{n+12i+10} \xmapsto{z}\\
&\qquad -p_iv_{n+12i+10} \xmapsto{\pi(x_1)} -p_iv_{n+12i+9} \xmapsto{y^{-1}} -p_iv_{n+12i+7},\\
&-p_iv_{n+12i+7} \xmapsto{z} -p_iv_{n+12i+7} \xmapsto{\pi(x_1)} -p_iv_{n+12i+6} \xmapsto{y} -p_iv_{n+12i+5} \xmapsto{z}\\
&\qquad -p_iv_{n+12i+5} \xmapsto{\pi(x_1)} -p_iv_{n+12i+5} \xmapsto{y^{-1}} -p_iv_{n+12i+6},
\end{aligned}
$$

$$-p_i v_{n+12i+6} \xmapsto{z} -p_i v_{n+12i+6} \xmapsto{\pi(x_1)} -p_i v_{n+12i+7} \xmapsto{y} -p_i v_{n+12i+9} \xmapsto{z}$$
$$-p_i v_{n+12i+9} \xmapsto{\pi(x_1)} -p_i v_{n+12i+10} \xmapsto{y^{-1}} -p_i v_{n+12i+11},$$
$$-p_i v_{n+12i+11} \xmapsto{z} v_{12i+14} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+14} \xmapsto{y} v_{12i+13} \xmapsto{z} v_{12i+13} \xmapsto{\pi(x_1)}$$
$$v_{12i+12} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+10},$$
$$v_{12i+10} \xmapsto{z} v_{12i+10} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+9} \xmapsto{y} v_{12i+8} \xmapsto{z} v_{12i+8} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+8} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+9}.$$

Таким образом, $M_4^{(i)}$ инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $M_4^{(i)}$ тождественно. Наконец, заметим, что

$$\begin{aligned} M_3^{(i)} \oplus M_4^{(i)} &= \langle v_{12i+6}, v_{12i+7}, v_{12i+11}\rangle \oplus \\ &\oplus \langle v_{12i+9}, v_{12i+10}, v_{12i+14}\rangle \oplus \langle v_{n+12i+6}, v_{n+12i+7}, v_{n+12i+11}\rangle \oplus \\ &\oplus \langle v_{n+12i+9}, v_{n+12i+10}, v_{n+12i+14}\rangle = S_3^{(i)}, \end{aligned}$$

и поэтому $S_3^{(i)}$ инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $S_3^{(i)}$ тождественно.

Случай 4: $S_4^{(i)}$ при $0 \leq i \leq L-1$. Этот случай будем рассматривать по схеме, аналогичной случаю 3. Для этого рассмотрим модуль

$$\begin{aligned} M_5^{(i)} = \langle & v_{12i+12}, v_{12i+17}, v_{12i+13}, q_i v_{12i+15} + p_i v_{n+12i+15}, \\ & q_i v_{12i+20} + p_i v_{n+12i+20}, q_i v_{12i+16} + p_i v_{n+12i+16}\rangle \end{aligned}$$

и проверим, что $y^{-1}xyx$ циклично переставляет его образующие:

$$v_{12i+12} \xmapsto{z} v_{12i+12} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+13} \xmapsto{y} v_{12i+15} \xmapsto{z} v_{12i+15} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+16} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+17},$$
$$v_{12i+17} \xmapsto{z} v_{12i+17} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+17} \xmapsto{y} v_{12i+16} \xmapsto{z} v_{12i+16} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+15} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+13},$$
$$v_{12i+13} \xmapsto{z} v_{12i+13} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+12} \xmapsto{y} v_{12i+11} \xmapsto{z}$$
$$q_i v_{12i+14} + p_i v_{n+12i+14} \xmapsto{\pi(x_1)} q_i v_{12i+14} + p_i v_{n+12i+14} \xmapsto{y^{-1}} q_i v_{12i+15} + p_i v_{n+12i+15},$$

$$
\begin{aligned}
&q_iv_{12i+15}+p_iv_{n+12i+15}\xmapsto{z}q_iv_{12i+15}+p_iv_{n+12i+15}\xmapsto{\pi(x_1)}\\
&\quad q_iv_{12i+16}+p_iv_{n+12i+16}\xmapsto{y}q_iv_{12i+18}+p_iv_{n+12i+18}\xmapsto{z}\\
&\quad q_iv_{12i+18}+p_iv_{n+12i+18}\xmapsto{\pi(x_1)}q_iv_{12i+19}+p_iv_{n+12i+19}\xmapsto{y^{-1}}q_iv_{12i+20}+p_iv_{n+12i+20},\\
&q_iv_{12i+20}+p_iv_{n+12i+20}\xmapsto{z}q_iv_{12i+20}+p_iv_{n+12i+20}\xmapsto{\pi(x_1)}\\
&\quad q_iv_{12i+20}+p_iv_{n+12i+20}\xmapsto{y}q_iv_{12i+19}+p_iv_{n+12i+19}\xmapsto{z}\\
&\quad q_iv_{12i+19}+p_iv_{n+12i+19}\xmapsto{\pi(x_1)}q_iv_{12i+18}+p_iv_{n+12i+18}\xmapsto{y^{-1}}q_iv_{12i+16}+p_iv_{n+12i+16},\\
&q_iv_{12i+16}+p_iv_{n+12i+16}\xmapsto{z}q_iv_{12i+16}+p_iv_{n+12i+16}\xmapsto{\pi(x_1)}\\
&\quad q_iv_{12i+15}+p_iv_{n+12i+15}\xmapsto{y}q_iv_{12i+14}+p_iv_{n+12i+14}\xmapsto{z}\\
&\quad v_{12i+11}\xmapsto{\pi(x_1)}v_{12i+11}\xmapsto{y^{-1}}v_{12i+12}.
\end{aligned}
$$

В частности, мы пользуемся тем, что, так как по предположению $m \geq 4+4L$, x действует тождественно на v_i и v_{n+i}, если

$$
i \equiv 2 \pmod 3, i \leq 12(L-1)+20 = 12L+8 \leq 3(m-2)+2.
$$

Следовательно, модуль $M_5^{(i)}$ инвариантен относительно оператора $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $M_5^{(i)}$ тождественно. Кроме того, $y^{-1}xyx$ циклично переставляет образующие модуля

$$
M_6^{(i)} = \langle v_{12i+15}, v_{12i+20}, v_{12i+16}, -p_iv_{n+12i+12}, -p_iv_{n+12i+17}, -p_iv_{n+12i+13}\rangle.
$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
&v_{12i+15}\xmapsto{z}v_{12i+15}\xmapsto{\pi(x_1)}v_{12i+16}\xmapsto{y}v_{12i+18}\xmapsto{z}v_{12i+18}\xmapsto{\pi(x_1)}v_{12i+19}\xmapsto{y^{-1}}v_{12i+20},\\
&v_{12i+20}\xmapsto{z}v_{12i+20}\xmapsto{\pi(x_1)}v_{12i+20}\xmapsto{y}v_{12i+19}\xmapsto{z}v_{12i+19}\xmapsto{\pi(x_1)}v_{12i+18}\xmapsto{y^{-1}}v_{12i+16},\\
&v_{12i+16}\xmapsto{z}v_{12i+16}\xmapsto{\pi(x_1)}v_{12i+15}\xmapsto{y}v_{12i+14}\xmapsto{z}-p_iv_{n+12i+11}\xmapsto{\pi(x_1)}\\
&\quad -p_iv_{n+12i+11}\xmapsto{y^{-1}}-p_iv_{n+12i+12},\\
&-p_iv_{n+12i+12}\xmapsto{z}-p_iv_{n+12i+12}\xmapsto{\pi(x_1)}-p_iv_{n+12i+13}\xmapsto{y}-p_iv_{n+12i+15}\xmapsto{z}\\
&\quad -p_iv_{n+12i+15}\xmapsto{\pi(x_1)}-p_iv_{n+12i+16}\xmapsto{y^{-1}}-p_iv_{n+12i+17},
\end{aligned}
$$

$$-p_i v_{n+12i+17} \xmapsto{z} -p_i v_{n+12i+17} \xmapsto{\pi(x_1)} -p_i v_{n+12i+17} \xmapsto{y} -p_i v_{n+12i+16} \xmapsto{z}$$
$$-p_i v_{n+12i+16} \xmapsto{\pi(x_1)} -p_i v_{n+12i+15} \xmapsto{y^{-1}} -p_i v_{n+12i+13},$$
$$-p_i v_{n+12i+13} \xmapsto{z} -p_i v_{n+12i+13} \xmapsto{\pi(x_1)} -p_i v_{n+12i+12} \xmapsto{y} -p_i v_{n+12i+11} \xmapsto{z}$$
$$v_{12i+14} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12i+14} \xmapsto{y^{-1}} v_{12i+15}.$$

Таким образом, $M_6^{(i)}$ инвариантен относительно оператора $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $M_6^{(i)}$ тождественно. Наконец, заметим, что

$$\begin{aligned} M_5^{(i)} \oplus M_6^{(i)} &= \langle v_{12i+12}, v_{12i+13}, v_{12i+17} \rangle \oplus \\ &\oplus \langle v_{12i+15}, v_{12i+16}, v_{12i+20} \rangle \oplus \langle v_{n+12i+12}, v_{n+12i+13}, v_{n+12i+17} \rangle \oplus \\ &\oplus \langle v_{n+12i+15}, v_{n+12i+16}, v_{n+12i+20} \rangle = S_4^{(i)}, \end{aligned}$$

и поэтому $(y^{-1}xyx)^6$ тождественен на $S_4^{(i)}$.

Случай 5: $S_5^{(i)}$ при $4L + 2 \leq i \leq m - 3$. Отметим, что данный случай возникает только, если $m \geq 5 + 4L$. Рассмотрим действие $y^{-1}xyx$ на $S_5^{(i)}$:

$$v_{3i} \xmapsto{z} v_{3i} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+1} \xmapsto{y} v_{3i+3} \xmapsto{z} v_{3i+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3i+5},$$
$$v_{3i+5} \xmapsto{z} v_{3i+5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+5} \xmapsto{y} v_{3i+4} \xmapsto{z} v_{3i+4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3i+1},$$
$$v_{3i+1} \xmapsto{z} v_{3i+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i} \xmapsto{y} v_{3i-1} \xmapsto{z} v_{3i-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3i}.$$

Здесь мы пользуемся тем, что, так как $3i - 1 > 12(L-1) + 14$, то z действует тождественно на векторы v_{3i-1}, v_{3i+5}. Таким образом, модули $S_5^{(i)}$ инвариантны относительно действия $y^{-1}xyx$, и матрица сужения $y^{-1}xyx$ на каждый из модулей $S_5^{(i)}$ равна

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $(y^{-1}xyx)^3$ действует тождественно на модуле $S_5^{(i)}$, где $4L + 2 \leq i \leq m - 3$.

Случай 6: $S_6^{(i)}$ при $4L+2 \leq i \leq m-3$. Данный случай, как и предыдущий, возникает только при $m \geq 4L+5$. Из (2.1), (2.4) и проведенных вычислений в случае 5 следует, что $S_6^{(i)}$ инвариантны относительно $y^{-1}xyx$ и матрица сужения $y^{-1}xyx$ на каждый из этих подмодулей также равна A_4, а поэтому $(y^{-1}xyx)^3$ тождественен на $S_6^{(i)}$ при $4L+2 \leq i \leq m-3$.

Таким образом, в результате изучения случаев 1–6 мы знаем, что оператор $(y^{-1}xyx)^{12}$ действует тождественно на всех модулях, кроме S_7 и S_8. Для завершения доказательства нам осталось рассмотреть действие оператора на этих подмодулях.

Случай 7: S_7 и S_8. Так как $m \geq 4L+4$, то $3m-7 > 12(L-1)+14$. В частности, z действует тождественно на

$$v_{3m-7}, \ldots, v_{3m+r} \text{ и } v_{n+3m-7}, \ldots, v_{n+3m+r}. \tag{2.5}$$

По отдельности рассмотрим каждое из возможных значений параметра r. Пусть $r=1$. Опишем действие $y^{-1}xyx$ на S_7:

$$\begin{aligned}
&v_{3m-6} \xmapsto{z} v_{3m-6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-5} \xmapsto{y} v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-1},\\
&v_{3m-5} \xmapsto{z} v_{3m-5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-6} \xmapsto{y} v_{3m-7} \xmapsto{z} v_{3m-7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-7} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-6},\\
&v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y} v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-2},\\
&v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y} v_{3m-4} \xmapsto{z} v_{3m-4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-3},\\
&v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y} v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m},\\
&v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y} v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+1},\\
&v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y} v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-5}.
\end{aligned}$$

Следовательно, модуль S_7 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_7 как перестановка

$$(v_{3m-3}, v_{3m-2})(v_{3m-5}, v_{3m-6}, v_{3m-1}, v_{3m}, v_{3m+1}).$$

Отметим, что из приведенных выше вычислений, из (2.1) и того, что на

S_7 матрицы x_1 и y_1 действуют перестановочно, а z — тождественно не только на S_7, но и на векторы из (2.5), следует, что S_8 также инвариантен относительно $y^{-1}xyx$ и $y^{-1}xyx$ действует на S_8 как перестановка

$$(v_{n+3m-3}, v_{n+3m-2})(v_{n+3m-5}, v_{n+3m-6}, v_{n+3m-1}, v_{n+3m}, v_{n+3m+1}).$$

Таким образом, так как $(y^{-1}xyx)^{12}$ тождественен на всех подмодулях, кроме S_7 и S_8, то

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi((v_{3m-6}, v_{3m}, v_{3m-5}, v_{3m-1}, v_{3m+1})).$$

Теперь рассмотрим случай $r = 2$ и опишем действие $y^{-1}xyx$ на S_7:

$$\begin{aligned}
&v_{3m-6} \xmapsto{z} v_{3m-6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-5} \xmapsto{y} v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-1},\\
&v_{3m-5} \xmapsto{z} v_{3m-5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-6} \xmapsto{y} v_{3m-7} \xmapsto{z} v_{3m-7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-7} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-6},\\
&v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y} v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+1},\\
&v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y} v_{3m-4} \xmapsto{z} v_{3m-4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-3},\\
&v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y} v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m},\\
&v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y} v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-2},\\
&v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y} v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+2},\\
&v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y} v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-5}.
\end{aligned}$$

Таким образом, S_7 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_7 как перестановка

$$(v_{3m-6}, v_{3m-1}, v_{3m}, v_{3m-2}, v_{3m-3}, v_{3m+1}, v_{3m+2}, v_{3m-5}).$$

Аналогичным образом, $y^{-1}xyx$ действует на S_8 как

$$(v_{n+3m-6}, v_{n+3m-1}, v_{n+3m}, v_{n+3m-2}, v_{n+3m-3}, v_{n+3m+1}, v_{n+3m+2}, v_{n+3m-5}).$$

Следовательно,

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi\big((v_{3m-6}, v_{3m-3})(v_{3m-5}, v_{3m-2})(v_{3m-1}, v_{3m+1})(v_{3m}, v_{3m+2})\big).$$

Наконец, рассмотрим случай $r = 3$. Опишем действие оператора $y^{-1}xyx$ на S_7:

$$\begin{aligned}
&v_{3m-6} \xmapsto{z} v_{3m-6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-5} \xmapsto{y} v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-1},\\
&v_{3m-5} \xmapsto{z} v_{3m-5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-6} \xmapsto{y} v_{3m-7} \xmapsto{z} v_{3m-7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-7} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-6},\\
&v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y} v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-2},\\
&v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y} v_{3m-4} \xmapsto{z} v_{3m-4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-3},\\
&v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+3} \xmapsto{y} v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+2},\\
&v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y} v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+1},\\
&v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y} v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+3},\\
&v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y} v_{3m+3} \xmapsto{z} v_{3m+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m},\\
&v_{3m+3} \xmapsto{z} v_{3m+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y} v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-5}.
\end{aligned}$$

Тогда модуль S_7 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_7 как перестановка

$$(v_{3m-3}, v_{3m-2})(v_{3m-6}, v_{3m-1}, v_{3m+2}, v_{3m}, v_{3m+1}, v_{3m+3}, v_{3m-5}).$$

Аналогичным образом, S_8 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_8 как

$$(v_{n+3m-3}, v_{n+3m-2})(v_{n+3m-6}, v_{n+3m-1}, v_{n+3m+2}, v_{n+3m}, v_{n+3m+1}, v_{n+3m+3}, v_{n+3m-5}).$$

Следовательно,

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi\big((v_{3m-6}, v_{3m+3}, v_{3m}, v_{3m-1}, v_{3m-5}, v_{3m+1}, v_{3m+2})\big).$$

Таким образом, при каждом значении параметра r верно, что $(y^{-1}xyx)^{12}$ содержится в $\pi(\mathrm{Alt}(\Delta_1))$. $\square$

Далее в разделе мы покажем, что $\pi(\mathrm{Alt}(B))$ содержится в $\langle x, y\rangle$. Для удобства чтения доказательство этого факта будет представлено в виде нескольких лемм. Но сперва определим

$$\Delta = \{v_{3m-8}, v_{3m-7}, \ldots, v_{3m+r}\} \subseteq B$$

и заметим, что $\Delta_1 \subseteq \Delta$.

Лемма 2.3. *Для матриц x, y, определенных в* (2.4)*, справедливо включение $\pi(\mathrm{Alt}(\Delta)) \subseteq \langle x, y\rangle$.*

Доказательство. Из леммы 2.2 мы знаем, что

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi(\alpha), \text{ где } \alpha \in \mathrm{Alt}(\Delta_1) \subseteq \mathrm{Alt}(\Delta).$$

Так как π — гомоморфизм и $y = \pi(y_1)$, то справедливо следующее:

$$y^{-i}(y^{-1}xyx)^{12}y^{i} = \pi(y_1^{-i}\alpha y_1^{i}), \text{ где } i = 1, 2.$$

Положим $\beta_i = y_1^{-i}\alpha y_1^{i}$, где $i = 1, 2$. Так как множества Δ и $B \setminus \Delta$ инвариантны относительно действия y_1 и так как $\alpha \in \mathrm{Alt}(\Delta)$, то $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Alt}(\Delta)$. Таким образом,

$$\left\langle (y^{-1}xyx)^{12}, y^{-1}(y^{-1}xyx)^{12}y, y^{-2}(y^{-1}xyx)^{12}y^{2}\right\rangle = \pi\left(\langle\alpha, \beta_1, \beta_2\rangle\right) \subseteq \pi(\mathrm{Alt}(\Delta)).$$

Для завершения доказательства нам достаточно показать справедливость включения $\mathrm{Alt}(\Delta) \subseteq \langle\alpha, \beta_1, \beta_2\rangle$. Доказательство будем вести отдельно для каждого значения параметра r.

Случай 1: $r = 1$. Из доказательства леммы 2.2 мы знаем, что

$$\alpha = (v_{3m-6}, v_{3m}, v_{3m-5}, v_{3m-1}, v_{3m+1}),$$

а значит,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (v_{3m-8}, v_{3m-2}, v_{3m-4}, v_{3m}, v_{3m+1}),\\
\beta_2 &= (v_{3m-7}, v_{3m-1}, v_{3m-3}, v_{3m-2}, v_{3m+1}).
\end{aligned}$$

Из определений α, β_1, β_2 легко видеть, что справедлива следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
v_{3m-3} \arrow[drr, "\beta_2^2"] & & v_{3m-8} \arrow[rr, "\beta_1"] & & v_{3m-2} \arrow[d, "\beta_1"] \\
v_{3m-7} \arrow[u, "\beta_2^2"] & & v_{3m+1} \arrow[ll, "\beta_2"'] \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[dr, "\alpha"] & & v_{3m-4} \arrow[ll, "\beta_1^2"'] \\
& v_{3m-1} \arrow[ur, "\alpha"] & & v_{3m-6} \arrow[d, "\alpha"] & \\
& v_{3m-5} \arrow[u, "\alpha"] & & v_{3m} \arrow[ll, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Диаграмма 2.1. Транзитивность действия

группы перестановок $\langle \alpha, \beta_1, \beta_2 \rangle$ на Δ при $r = 1$.

Из диаграммы 2.1 следует, что $\langle \alpha, \beta_1, \beta_2 \rangle$ — транзитивная группа перестановок степени $10 = |\Delta|$. Кроме того, она содержит цикл длины 7:

$$(\alpha\beta_1)^3(\alpha\beta_2)^3(\beta_1\beta_2)^3 = (v_{3m-3}, v_{3m-7}, v_{3m+1}, v_{3m-6}, v_{3m-2}, v_{3m-5}, v_{3m-1}).$$

Следовательно, в силу леммы 1.2, группа $\langle \alpha, \beta_1, \beta_2 \rangle$ является примитивной группой степени 10. Для завершения доказательства в случае $r = 1$ нам осталось заметить, что группа содержит цикл длины 5, и применить лемму 1.3.

Случай 2: $r = 2$. Из доказательства леммы 2.2

$$\alpha = (v_{3m-6}, v_{3m-3})(v_{3m-5}, v_{3m-2})(v_{3m-1}, v_{3m+1})(v_{3m}, v_{3m+2}),$$

а значит,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (v_{3m-8}, v_{3m-5})(v_{3m-4}, v_{3m-1})(v_{3m}, v_{3m+1})(v_{3m-2}, v_{3m+2}),\\
\beta_2 &= (v_{3m-7}, v_{3m-4})(v_{3m-3}, v_{3m})(v_{3m-2}, v_{3m+1})(v_{3m-1}, v_{3m+2}).
\end{aligned}$$

Из определений α, β_1, β_2 легко видеть, что справедлива следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
v_{3m-6} \arrow[r, bend left, "\alpha"] & v_{3m-3} \arrow[l, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta_2"] & v_{3m} \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] & v_{3m+2} \arrow[l, bend left, "\alpha"] \arrow[d, equal] \\
v_{3m-7} \arrow[r, bend left, "\beta_2"] & v_{3m-4} \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \arrow[r, bend left, "\beta_1"] & v_{3m-1} \arrow[l, bend left, "\beta_1"] \arrow[r, bend left, "\beta_2"] & v_{3m+2} \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \arrow[d, equal] \\
v_{3m-6} \arrow[r, bend left, "\beta_1"] & v_{3m-3} \arrow[l, bend left, "\beta_1"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] & v_{3m} \arrow[l, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta_1"] & v_{3m+2} \arrow[l, bend left, "\beta_1"]
\end{tikzcd}$$

Диаграмма 2.2. Транзитивность действия
группы перестановок $\langle \alpha, \beta_1, \beta_2 \rangle$ на Δ при $r = 2$.

Из диаграммы 2.2 следует, что $\langle \alpha, \beta_1, \beta_2 \rangle$ — транзитивная группа перестановок степени $11 = |\Delta|$. Следовательно, в силу леммы 1.1, $\langle \alpha, \beta_1, \beta_2 \rangle$ — примитивная группа. Кроме того, она содержит цикл длины 7:

$$(\alpha(\alpha\beta_1)^4(\alpha\beta_2)^4(\beta_1\beta_2)^4)^3 = (v_{3m-8}, v_{3m-3}, v_{3m}, v_{3m-5}, v_{3m-1}, v_{3m-4}, v_{3m-7}).$$

Применив лемму 1.3, мы завершаем доказательство для случая $r = 2$.

Случай 3: $r = 3$. Из доказательства леммы 2.2

$$\alpha = (v_{3m-6}, v_{3m+3}, v_{3m}, v_{3m-1}, v_{3m-5}, v_{3m+1}, v_{3m+2}),$$

а значит,

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= (v_{3m-8}, v_{3m+1}, v_{3m-2}, v_{3m}, v_{3m-4}, v_{3m+2}, v_{3m+3}),\\
\beta_2 &= (v_{3m-7}, v_{3m+2}, v_{3m-1}, v_{3m-2}, v_{3m-3}, v_{3m+3}, v_{3m+1}).
\end{aligned}
$$

Из определений α, β_1, β_2 легко видеть, что справедлива следующая диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
v_{3m-4} \arrow[rr, "\beta_1^3"] & & v_{3m-8} \arrow[d, "\beta_1"] & & v_{3m-1} \arrow[rr, "\beta_2^2"] & & v_{3m-3} \arrow[d, "\beta_2^3"] \\
v_{3m-2} \arrow[u, "\beta_1^2"] & & v_{3m+1} \arrow[ll, "\beta_1"'] \arrow[rr, "\alpha"] & & v_{3m+2} \arrow[u, "\beta_2"] \arrow[dl, "\beta_1"] & & v_{3m-7} \arrow[ll, "\beta_2"'] \\
& & & v_{3m+3} \arrow[ul, "\beta_2"] \arrow[drr, "\alpha"] & & & \\
& v_{3m-6} \arrow[urr, "\alpha"] & & & & v_{3m} \arrow[dll, "\alpha^2"] & \\
& & & v_{3m-5} \arrow[ull, "\alpha^3"] & & &
\end{tikzcd}
$$

Диаграмма 2.3. Транзитивность действия

группы перестановок $\langle \alpha, \beta_1, \beta_2 \rangle$ на Δ при $r = 3$.

Из диаграммы 2.3 следует, что $\langle \alpha, \beta_1, \beta_2 \rangle$ — транзитивная группа перестановок степени $12 = |\Delta|$. Так как группа содержит цикл длины 7, то, применив леммы 1.2 и 1.3, мы завершаем доказательство для случая $r = 3$. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть* $\Gamma \subsetneq B$ *и* $|\Gamma| \geq 3$. *Рассмотрим перестановку*

$$\xi = (c, a_1)(a_2, a_3) \in \mathrm{Alt}(B),$$

где $c \in B \setminus \Gamma$, *а* $a_1, a_2, a_3 \in \Gamma$ *и попарно различны. Тогда*

$$\langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{c\}).$$

Доказательство. Очевидно, что $\langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle \subseteq \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{c\})$. Проверим обратное включение. Так как $\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{c\})$ порождается всевозможными 3–циклами, достаточно показать, что все 3–циклы вида (c, d_1, d_2), где $d_1, d_2 \in \Gamma$ и различны, содержатся в $\langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle$.

Заметим, что $(c, a_1, a_2) = \xi \cdot (a_1, a_3, a_2) \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle$. Тогда и

$$(c, a_2, a_1) = (c, a_1, a_2)^2 \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle.$$

Если $\{d_1, d_2\} \cap \{a_1, a_2\} = \emptyset$, то

$$(c, d_1, d_2) = (d_1, a_1)(d_2, a_2) \cdot (c, a_1, a_2) \cdot (d_1, a_1)(d_2, a_2) \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle.$$

Если $d \notin \{a_1, a_2\}$, то

$$\begin{aligned}
(c, a_1, d) &= (c, a_1, a_2)(a_1, d, a_2) \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle, \\
(c, d, a_1) &= (c, a_1, d)^2 \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle, \\
(c, a_2, d) &= (c, a_2, a_1)(a_2, d, a_1) \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle, \\
(c, d, a_2) &= (c, a_2, d)^2 \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma) \rangle.
\end{aligned}$$

□

Теперь, используя лемму 2.4, мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 2.5. *Пусть* $1 \leq i \leq m - 3$ *и* $\Gamma = \{v_{3i+1}, \ldots, v_{3m+r}\} \subsetneq B$. *Если* $\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma)) \subseteq \langle x, y \rangle$, *то* $\pi(\mathrm{Alt}(\{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\} \cup \Gamma)) \subseteq \langle x, y \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим перестановку

$$\gamma = (v_{3i+1}, v_{3m-5})(v_{3m-3}, v_{3m-2}) \in \mathrm{Alt}(\Gamma).$$

Тогда $x\pi(\gamma)x^{-1} \in \langle x, y \rangle$, так как $\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma)) \subseteq \langle x, y \rangle$ по условию леммы. Так как

$z = z^{-1}$ действует нетождественно только на

$$\langle v_k \mid k \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \\ \{12i+11, 12i+14, n+12i+11, n+12i+14 \mid 0 \leq i \leq L-1\}\rangle,$$

то $z\pi(\gamma)z^{-1} = \pi(\gamma)$. В частности, $x\pi(\gamma)x^{-1} = \pi(x_1\gamma x_1^{-1})$. Так как по построению x_1 действует перестановочно на $\{v_3, \ldots, v_n\}$, то

$$\xi = x_1\gamma x_1^{-1} = (v_{3i}, v_{3m-6})(v_{3m-3}, v_{3m-2}).$$

Применяя лемму 2.4, получаем, что

$$\langle x_1\gamma x_1^{-1}, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\}),$$

и поэтому

$$\pi\left(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})\right) = \pi(\langle x_1\gamma x_1^{-1}, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle) = \langle x\pi(\gamma)x^{-1}, \pi(\mathrm{Alt}(\Gamma))\rangle \subseteq \langle x, y\rangle. \quad (2.6)$$

Теперь рассмотрим перестановку

$$\delta = (v_{3i}, v_{3m-2})(v_{3m-1}, v_{3m}) \in \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\}).$$

Тогда $y\pi(\delta)y^{-1}$ и $y^2\pi(\delta)y^{-2}$ лежат в $\langle x, y\rangle$, так как по доказанному

$$\pi(\delta) \in \pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})) \subseteq \langle x, y\rangle. \quad (2.7)$$

Более того, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} y\pi(\delta)y^{-1} &= \pi(y_1\delta y_1^{-1}) = \pi(\epsilon_1), \text{ где } \epsilon_1 = (v_{3i-1}, v_{3m})(v_{3m-2}, v_{3m-1}), \\ y^2\pi(\delta)y^{-2} &= \pi(y_1^2\delta y_1^{-2}) = \pi(\epsilon_2), \text{ где } \epsilon_2 = (v_{3i-2}, v_{3m-1})(v_{3m}, v_{3m-2}). \end{aligned}$$

Дважды применяя лемму 2.4, получаем, что

$$\langle \epsilon_1, \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})\rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-1}, v_{3i}\}),$$
$$\langle \epsilon_2, \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-1}, v_{3i}\}\rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\}),$$

а значит, используя (2.6) и (2.7),

$$\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\})) = \pi(\langle \epsilon_1, \epsilon_2, \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})\rangle) =$$
$$= \langle y\pi(\delta)y^{-1}, y^2\pi(\delta)y^{-2}, \pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\}))\rangle \subseteq \langle x, y\rangle.$$

□

Лемма 2.6. *Справедливо включение* $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x, y\rangle$.

Доказательство. Следует из лемм 2.3 и 2.5. □

2.4. Доказательство теоремы 2.1

Далее в параграфе мы будем предполагать, что $R = \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l]$, где $l \geq 0$. Используя обозначения из §2.2, мы положим $L = 2^l$. Кроме того, в определении матрицы x_1 примем значение параметра s равным 1. Тогда x_1 действует на $\langle v_1, v_2\rangle$ как оператор, определенный матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь положим в определении матрицы z из (2.3) следующие значения параметров p_i, q_i:

$$\begin{aligned} &p_0 = p_1 = \cdots = p_{L-1} = 1, \\ &q_i = \prod_{k:\ s_{i,k}=1} \mathrm{X}_k \text{ при } 0 \leq i \leq L-1, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где значения параметров $s_{i,k}$ определяются из разложения индекса $0 \leq i \leq L-1$ в двоичной системы счисления:

$$i = \sum_{k=1}^{l} s_{i,k} 2^{k-1}, \text{ где } s_{i,k} \in \{0, 1\}.$$

То есть q_i — всевозможные мономы R, в которые каждая переменная входит не более одного раза. Таким образом, матрица сужения оператора $z_{12i+11,12i+14}(1, q_i)$ на модуль $\langle v_{12i+11}, v_{12i+14}, v_{n+12i+11}, v_{n+12i+14} \rangle$ равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ q_i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, введем некоторые обозначения, которые будут использоваться до конца параграфа.

Обозначения.

Через $w_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$, будем обозначать матрицу из $\mathrm{Sym}(B)$, соответствующую транспозиции элементов v_i и v_j.

Через $h_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$, будем обозначать оператор из $\mathrm{GL}_n(R)$, действующий тождественно на v_k, где $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$, а действие сужения оператора на модуль $\langle v_i, v_j \rangle$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $h_{i,j}$ — инволюция и действие x_1 и $h_{1,2}$ совпадает на $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Далее определим следующие диагональные матрицы из $\mathrm{GL}_n(R)$:

$$d_i(u) = I_n + (u-1) \cdot e_{i,i}, \text{ где } 1 \leq i \leq n \text{ и } u \in R.$$

Кроме того, для попарно различных индексов $1 \le k_0, \ldots, k_{2L+3} \le n$ и $\mu \in \{0,1\}$ определим матрицу

$$g(k_0, \ldots, k_{2L-1}; k_{2L}, k_{2L+1}; k_{2L+2}, k_{2L+3}; \mu) = \\ = \pi(h_{k_{2L},k_{2L+1}})\pi(w^{\mu}_{k_{2L+2},k_{2L+3}}) \prod_{i=0}^{L-1} z_{k_{2i},k_{2i+1}}(1, q_i).$$

Для попарно различных индексов $1 \le k_0, \ldots, k_{2L+4} \le n$ и $\mu \in \{0,1\}$ определим матрицу

$$\tilde{g}(k_0, \ldots, k_{2L-1}; k_{2L}, k_{2L+1}; k_{2L+2}, k_{2L+3}; k_{2L+4}; \mu) = \\ = \pi(d_{k_{2L+4}}(-1))\pi(t_{k_{2L},k_{2L+1}}(1))\pi(w^{\mu}_{k_{2L+2},k_{2L+3}}) \prod_{i=0}^{L-1} z_{k_{2i},k_{2i+1}}(1, q_i).$$

Лемма 2.7. *Пусть матрицы x, y определены как в* (2.1)–(2.4)*, где $L = 2^l$, $s = 1$, а значения параметров p_i, q_i при $0 \le i \le L-1$ заданы в* (2.8)*. Тогда справедливо включение $x, y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$.*

Доказательство. Из того, что матрицы x_1 и y_1 являются $\{0,1,-1\}$-матрицами, и определения π в (2.1) следует, что матрицы $\pi(x_1)$, $y = \pi(y_1)$ содержатся в $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$. В силу теоремы 1.1, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) = \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$, а значит справедливо:

$$\pi(x_1), y = \pi(y_1) \in \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{ESp}_{2n}(R).$$

Для завершения доказательства леммы нам осталось показать, что матрицы $z_{12i+11,12i+14}(1, q_i)$ содержатся в $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ при любом $0 \le i \le L-1$. Это следует из равенства:

$$z_{i,j}(1,q) = \left(E^{(1)}_{i,i}(-1)E^{(2)}_{i,i}(2)\right)^2 E^{(2)}_{i,i}(q)E^{(2)}_{i,j}(1)E^{(1)}_{i,j}(-1)E^{(2)}_{i,i}(-q)E^{(2)}_{i,j}(1),$$

где $q \in R$. □

Из леммы 2.7 мы знаем, что $x, y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$, а значит $\langle x, y\rangle$ содержится в $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$. Для доказательства теоремы 2.1 осталось доказать обратное включение:

Теорема 2.4. *Пусть матрицы x, y определены как в (2.1)–(2.4), где $L = 2^l$, $s = 1$, а значения параметров p_i, q_i при $0 \leq i \leq L-1$ заданы в (2.8). Тогда группа $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ содержится в $\langle x, y\rangle$.*

Доказательство. Несложно заметить, что для матриц вида (1.1)–(1.3) из первой главы диссертации справедливы следующие равенства:

$$\begin{array}{ll} E^{(k)}_{i,j}(u_1)E^{(k)}_{i,j}(u_2) = E^{(k)}_{i,j}(u_1+u_2), & \text{где } 1 \leq i, j \leq n \text{ и } k \in \{1,2\}, \\ E^{(3)}_{i,j}(u_1)E^{(3)}_{i,j}(u_2) = E^{(3)}_{i,j}(u_1+u_2), & \text{где } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ \left(E^{(k)}_{i,j}(u_1)\right)^{-1} = E^{(k)}_{i,j}(-u_1), & \text{где } 1 \leq i, j \leq n \text{ и } k \in \{1,2\}, \\ \left(E^{(3)}_{i,j}(u_1)\right)^{-1} = E^{(3)}_{i,j}(-u_1), & \text{где } 1 \leq i \neq j \leq n, \end{array}$$

а $u_1, u_2 \in R$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида $E^{(1)}_{i,j}(u), E^{(2)}_{i,j}(u)$, где $1 \leq i, j \leq n$, и $E^{(3)}_{i,j}(u)$, где $1 \leq i \neq j \leq n$, а u представим следующим образом:

$$u = \prod_{i=1}^{l} \mathrm{X}_i^{s_i}, \text{ где } s_i \geq 0. \tag{2.9}$$

Доказательство далее будет разделено на 4 этапа:

- Этап 1: предварительные построения;
- Этап 2: $E^{(3)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle$, где u из R имеет вид (2.9);
- Этап 3: $E^{(2)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle$, где u из R имеет вид (2.9);
- Этап 4: $E^{(1)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle$, где u из R имеет вид (2.9).

Прежде чем приступить к этапу 1, отметим, что все построенные далее матрицы g_i будут содержаться в группе $\langle x, y\rangle$.

Этап 1. Из определений x_1 и $h_{1,2}$ следует, что $x_1h_{1,2} \in \mathrm{Sym}(B)$, а значит, можно найти такую перестановку $\alpha \in \mathrm{Alt}(B)$, что $\alpha x_1 = h_{1,2}w_{3,4}^{\eta}$, где $\eta = 0$ или $\eta = 1$ в зависимости от четности перестановки $x_1h_{1,2}$. Так как $\pi(\mathrm{Alt}(B))$ содержится в $\langle x, y\rangle$ в силу леммы 2.6, то

$$g(11, 14, 23, 26, \ldots, 12(L-1) + 11, 12(L-1) + 14; 1, 2; 3, 4; \eta) =$$
$$= \pi(h_{1,2})\pi(w_{3,4}^{\eta}) \prod_{i=0}^{L-1} z_{12i+11,12i+14}(1, q_i) = \pi(\alpha x_1)z = \pi(\alpha)x \in \langle x, y\rangle.$$

Легко видеть, что в определении матрицы $\pi(\alpha)x$ участвуют $2L + 4$ попарно различных индексов. Выберем произвольные попарно различные индексы $1 \le k_0, \ldots, k_{2L+3} \le n$. Так как $n \ge 13 + 12L$, то можно выбрать попарно различные индексы $1 \le k_{2L+4}, \ldots k_{4L+7} \le n$, не содержащиеся в множестве

$$\{1, \ldots, 4\} \cup \{12i + 11, 12i + 14 \mid 0 \le i \le L-1\} \cup \{k_0, \ldots, k_{2L+3}\}.$$

Рассмотрим теперь следующие перестановки из $\mathrm{Alt}(B)$:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \prod_{i=1}^{4} w_{i,k_{4L+3+i}} \cdot \prod_{i=0}^{L-1} w_{12i+11,k_{2L+4+2i}} \cdot \prod_{i=0}^{L-1} w_{12i+14,k_{2L+5+2i}}, \\ \beta_2 &= \prod_{i=0}^{2L+3} w_{k_{2L+4+i},k_i}. \end{aligned}$$

Так как $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x, y\rangle$ в силу леммы 2.6, то при помощи несложных вычислений проверяется, что в $\langle x, y\rangle$ содержится матрица вида

$$\begin{aligned} g_1 &= \pi(\beta_2\beta_1)\pi(\alpha)x\pi(\beta_2\beta_1)^{-1} = \pi(h_{k_{2L},k_{2L+1}})\pi(w^{\eta}_{k_{2L+2},k_{2L+3}}) \prod_{i=0}^{L-1} z_{k_{2i},k_{2i+1}}(1, q_i) = \\ &= g(k_0, \ldots, k_{2L-1}; k_{2L}, k_{2L+1}; k_{2L+2}, k_{2L+3}; \eta) \qquad (2.10) \end{aligned}$$

для попарно различных индексов $1 \le k_0, \ldots, k_{2L+3} \le n$.

Замечание 2.6. Так как индексы $k_0, \ldots, k_{2L+3}$ попарно различны, то матрицы $\pi(h_{k_{2L},k_{2L+1}})$, $\pi(w^{\eta}_{k_{2L+2},k_{2L+3}})$ и $z_{k_{2i},k_{2i+1}}(1, q_i)$, где $0 \leq i \leq L-1$, в (2.10) попарно коммутируют друг с другом. Далее будем использовать этот факт без дополнительного упоминания.

В связи с тем, что матрицы вида (2.10) содержатся в группе $\langle x, y\rangle$, то в ней содержится следующая матрица:

$$\begin{aligned} g_2 = [&g(2, 3, \ldots, 2L+1; 2L+2, 2L+3; 2L+4, 2L+5; \eta),\\ &\qquad\qquad g(2L+6, \ldots, 4L+5; 2, 3; 4L+6, 4L+7; \eta)]. \end{aligned}$$

Здесь при выборе индексов в матрицах вида (2.10) мы пользуемся тем, что $n \geq 13 + 12L$. Легко видеть, что

$$g_2 = [z_{2,3}(1, q_0), \pi(h_{2,3})] = [z_{2,3}(1, 1), \pi(h_{2,3})] = (z_{2,3}(1, 1)\pi(h_{2,3}))^2.$$

Из определений $z_{2,3}(1, 1)$ и $\pi(h_{2,3})$ следует, что g_2 действует тождественно на всех v_i, где $i \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \{2, 3, n+2, n+3\}$, а сужение g_2 на модуль $M_7 = \langle v_2, v_3, v_{n+2}, v_{n+3}\rangle$ определяется следующей матрицей:

$$A_5 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = -I_4.$$

Таким образом, $g_2 = \pi(d_2(-1)d_3(-1))$.

Покажем теперь, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся все матрицы вида $\pi(d_i(-1)d_j(-1))$, где $1 \leq i \neq j \leq n$. Так как $n \geq 13 + 12L$, то можно выбрать такие индексы $1 \leq k_0 \neq k_1 \leq n$, что k_0, k_1 не содержатся в $\{2, 3, i, j\}$. Рассмотрим четные перестановки

$$\beta_1 = w_{2,k_0}w_{3,k_1} \text{ и } \beta_2 = w_{k_0,i}w_{k_1,j}.$$

Так как $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x, y \rangle$ в силу леммы 2.6, то $\pi(\beta_1), \pi(\beta_2) \in \langle x, y \rangle$, а значит, в $\langle x, y \rangle$ содержится матрица вида

$$\pi(\beta_2\beta_1)g_2\pi(\beta_2\beta_1)^{-1} = \pi(d_i(-1)d_j(-1)), \text{ где } 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{2.11}$$

Кроме того, несложно видеть, что $d_i(-1)h_{i,j} = t_{j,i}(1)$. Следовательно, используя тот факт, что в $\langle x, y \rangle$ содержатся матрицы вида (2.10) и (2.11), мы получаем следующее: в группе $\langle x, y \rangle$ содержится матрица вида

$$\begin{aligned} g_3 &= \pi(d_{k_{2L+1}}(-1)d_{k_{2L+4}}(-1))g(k_0, \ldots, k_{2L-1}; k_{2L+1}, k_{2L}; k_{2L+2}, k_{2L+3}; \eta) = \\ &= \pi(d_{k_{2L+4}}(-1))\pi(t_{k_{2L},k_{2L+1}}(1))\pi(w^{\eta}_{k_{2L+2},k_{2L+3}}) \prod_{i=0}^{L-1} z_{k_{2i},k_{2i+1}}(1, q_i) = \\ &= \tilde{g}(k_0, \ldots, k_{2L-1}; k_{2L}, k_{2L+1}; k_{2L+2}, k_{2L+3}; k_{2L+4}; \eta) \end{aligned} \tag{2.12}$$

при любых попарно различных индексах $1 \leq k_0, \ldots, k_{2L+4} \leq n$.

Используя две подходящие матрицы вида (2.12), мы можем построить следующую матрицу в $\langle x, y \rangle$:

$$\begin{aligned} g_4 = [&\tilde{g}(4, \ldots, 2L+3; 3, 2; 2L+4, 2L+5; 2L+6; \eta), \\ &\qquad \tilde{g}(2L+7, \ldots, 4L+6; 2, 1; 4L+7, 4L+8; 4L+9; \eta)]. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что

$$g_4 = [\pi(t_{3,2}(1)), \pi(t_{2,1}(1))] = \pi([t_{3,2}(1), t_{2,1}(1)]) = \pi(t_{3,1}(1)) = E^{(3)}_{3,1}(1).$$

Здесь мы воспользовались тем, что π — гомоморфизм, а также коммутаторным тождеством для элементарных трансвекций (см., например, [30, следствие 10.3]):

$$[t_{i,j}(u_1), t_{j,k}(u_2)] = t_{i,k}(u_1u_2), \tag{2.13}$$

где $1 \leq i, j, k \leq n$ — попарно различные индексы и $u_1, u_2 \in R$.

Тем самым мы показали, что $E^{(3)}_{3,1}(1) \in \langle x, y \rangle$. Следовательно, сопрягая данную матрицу при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что справедливо следующее включение:

$$E^{(3)}_{i,j}(1) \in \langle x, y \rangle \text{ при всех } 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{2.14}$$

Этап 2. Аналогично тому, как была получена матрица g_2, мы можем показать, что, подбирая соответствующие индексы у двух матриц вида (2.10), в $\langle x, y \rangle$ можно построить следующие матрицы:

$$\begin{aligned} g_5 = [g(3, 2, 4, \ldots, &2L+1; 2L+2, 2L+3; 2L+4, 2L+5; \eta), \\ &g(2L+6, \ldots, 4L+5; 1, 2; 4L+6, 4L+7; \eta)], \\ g_6(k) = [g(\Upsilon; 2L+2, &2L+3; 2L+4, 2L+5; \eta), \\ &g(2L+6, \ldots, 4L+5; 1, 2; 4L+6, 4L+7; \eta)], \end{aligned}$$

где $0 \leq k \leq L-1$, а через Υ мы обозначаем следующий набор индексов:

$$\Upsilon = \begin{cases} 2, \ldots, 2L+1, & \text{если } k = 0, \\ 4, \ldots, 3+2k, 2, 3, 4+2k, \ldots, 2L+1, & \text{если } 1 \leq k \leq L-2, \\ 4, \ldots, 2L+1, 2, 3, & \text{если } k = L-1. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} g_5 &= [z_{3,2}(1, q_0), \pi(h_{1,2})] = (z_{3,2}(1,1)\pi(h_{1,2}))^2, \\ g_6(k) &= [z_{2,3}(1, q_k), \pi(h_{1,2})] = (z_{2,3}(1, q_k)\pi(h_{1,2}))^2. \end{aligned}$$

Напомним, что $q_0 = 1$. Из определений $z_{2,3}(1, q_k)$, $z_{3,2}(1,1)$ и $\pi(h_{1,2})$ следует, что g_5 и $g_6(k)$ действуют тождественно на

$$v_i, \text{ где } i \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \{1, 2, 3, n+1, n+2, n+3\},$$

а на модуле $M_8 = \langle v_1, v_2, v_3, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}\rangle$ их действие определяется матрицами $(A_6 A_8)^2$ и $(A_7(k)\cdot A_8)^2$ соответственно, где

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & q_k & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & q_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При помощи несложных матричных вычислений получаем, что

$$\begin{aligned} g_5 &= I_{2n} + e_{2,1} - e_{n+1,n+2} + e_{n+1,3} + e_{n+3,1} = E^{(2)}_{1,3}(1) E^{(3)}_{2,1}(1), \\ g_6(k) &= I_{2n} + e_{2,1} - e_{n+1,n+2} - q_k e_{3,1} + q_k e_{n+1,n+3} - e_{n+1,3} - e_{n+3,1}, \end{aligned}$$

где $0 \le k \le L-1$. В силу (2.14), $E^{(3)}_{2,1}(-1) = \left(E^{(3)}_{2,1}(1)\right)^{-1} \in \langle x, y\rangle$, а значит, $E^{(2)}_{1,3}(1) = g_5 E^{(3)}_{2,1}(-1) \in \langle x, y\rangle$. Как и выше, используя сопряжение при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что справедливо следующее включение:

$$E_{i,j}^{(2)}(1) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n. \tag{2.15}$$

Используя (2.14), (2.15) и уже доказанный факт, что $g_6(k) \in \langle x, y\rangle$, мы можем получить, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы

$$g_6(k)E_{1,3}^{(2)}(1)\left(E_{2,1}^{(3)}(1)\right)^{-1} = I_{2n} - q_k e_{3,1} + q_k e_{n+1,n+3} + q_k e_{n+1,1}$$

при всех $0 \le k \le L-1$.

Следовательно, используя сопряжение при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что справедливо следующее включение:

$$g_7(i,j;k) = I_{2n} - q_k e_{i,j} + q_k e_{n+j,n+i} + q_k e_{n+j,j} \in \langle x, y\rangle \tag{2.16}$$

при всех $1 \le i \ne j \le n$ и $0 \le k \le L-1$.

Используя (2.14) и (2.16), мы можем построить в $\langle x, y\rangle$ следующие матрицы:

$$g_8(k) = g_7(3,1;k)[g_7(3,2;k)^{-1}, E_{2,1}^{(3)}(1)] = E_{1,2}^{(2)}(-q_k),$$

где $0 \le k \le L-1$. Следовательно, сопрягая $(g_8(k))^{-1}$ при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида

$$E_{i,j}^{(2)}(q_k) = \left(E_{i,j}^{(2)}(-q_k)\right)^{-1} \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n \text{ и } 0 \le k \le L-1. \tag{2.17}$$

Рассмотрим теперь следующую матрицу вида (2.10) из $\langle x, y\rangle$:

$$g_9 = g(2, \ldots, 2L+1; 2L+2, 2L+3; 2L+4, 2L+5; \eta).$$

Несложные матричные вычисления показывают, что

$$g_9 E^{(2)}_{1,2}(-u) g_9^{-1} = z_{2,3}(1,1) E^{(2)}_{1,2}(-u) z_{2,3}(1,1)^{-1} = E^{(3)}_{3,1}(u), \tag{2.18}$$

где $u \in R$. В силу (2.17), $E^{(2)}_{1,2}(q_k) \in \langle x, y\rangle$ при всех $0 \le k \le L-1$, а значит, используя формулу (2.18), получаем, что $E^{(3)}_{3,1}(q_k)$ содержатся в $\langle x, y\rangle$. Следовательно, используя сопряжение при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы можем показать, что справедливо включение:

$$E^{(3)}_{i,j}(q_k) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n \text{ и } 0 \le k \le L-1. \tag{2.19}$$

В силу (2.19) и определений q_k в (2.8), мы знаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(1), E^{(3)}_{i,j}(\mathrm{X}_k) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n \text{ и } 1 \le k \le l.$$

Тогда, используя коммутаторное тождество для элементарных трансвекций из (2.13) и применяя вложение π, мы получаем, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида

$$E^{(3)}_{i,j}(u) \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n \text{ и } u \text{ из } R, \text{ имеющих вид (2.9).} \tag{2.20}$$

Этап 3. Перепишем формулу (2.18) в виде:

$$E^{(2)}_{1,2}(u) = g_9^{-1} E^{(3)}_{3,1}(-u) g_9, \text{ где } u \in R.$$

Используя данную формулу и (2.20), а также сопряжение при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что

$$E^{(2)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n \text{ и } u \text{ из } R, \text{ имеющих вид (2.9).} \tag{2.21}$$

Для завершения этапа 3 доказательства нам остается лишь показать, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида $E_{i,i}^{(2)}(u)$, где $1 \le i \le n$ и элемент u из R имеет вид (2.9). Для начала докажем справедливость последнего утверждения для случая, когда $u = q_k$, где $0 \le k \le L-1$. Так как $g_7(i,j;k)$ в силу (2.16) и g_9 в силу (2.10) содержатся в $\langle x, y\rangle$, то следующие матрицы также принадлежат группе $\langle x, y\rangle$:

$$g_{10}(k) = g_9 g_7(3,1;k) g_9^{-1} = z_{2,3}(1,1) g_7(3,1;k) z_{2,3}(1,1)^{-1} = E_{1,1}^{(2)}(q_k) E_{1,2}^{(2)}(q_k),$$

где $0 \le k \le L-1$. Мы знаем, что, в силу (2.17), $E_{1,2}^{(2)}(q_k) \in \langle x, y\rangle$ при всех $0 \le k \le L-1$, а значит, $E_{1,1}^{(2)}(q_k) \in \langle x, y\rangle$. Тогда, используя сопряжение при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что

$$E_{i,i}^{(2)}(q_k) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \le n \text{ и } 0 \le k \le L-1. \tag{2.22}$$

Теперь рассмотрим общий случай, то есть когда элемент u имеет вид (2.9). Из определений q_k в (2.8) следует, что найдется такой индекс $0 \le k_0 \le L-1$, что

$$u = q_{k_0} \cdot \prod_{i=1}^{l} \mathrm{X}_i^{2s_i}, \text{ где } s_i \ge 0.$$

Из построений выше мы знаем, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся следующие матрицы: $E_{2,1}^{(3)}\left(\prod_{i=1}^{l} \mathrm{X}_i^{s_i}\right)$ в силу (2.20), $E_{1,2}^{(2)}\left(q_{k_0} \cdot \prod_{i=1}^{l} \mathrm{X}_i^{s_i}\right)$ в силу (2.21), $E_{2,2}^{(2)}(q_{k_0})$ в силу (2.22), а значит, применяя следующее равенство:

$$\left[E_{2,1}^{(3)}(u_1), \left(E_{2,2}^{(2)}(u_2)\right)^{-1}\right] \left(E_{1,2}^{(2)}(u_1 u_2))\right)^{-1} = E_{1,1}^{(2)}(u_1^2 u_2), \text{ где } u_1, u_2 \in R,$$

получаем, что $E_{1,1}^{(2)}(u) \in \langle x, y\rangle$. Как и выше, используя сопряжение при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что справедливо следующее включение:

$$E_{i,i}^{(2)}(u) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \le n \text{ и } u \text{ из } R, \text{ имеющих вид (2.9).} \tag{2.23}$$

Этап 4. Для завершения доказательства нам осталось показать, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида $E^{(1)}_{i,j}(u)$, где $1 \le i, j \le n$ и элемент u из R имеет вид (2.9). Для этого отметим, что справедливы следующие матричные равенства:

$$\begin{aligned} g_9 E^{(3)}_{1,2}(u) g_9^{-1} = z_{2,3}(1,1) E^{(3)}_{1,2}(u) z_{2,3}(1,1)^{-1} &= E^{(1)}_{1,3}(u), \\ g_9 \left(E^{(2)}_{2,2}(u)\right)^{-1} g_9^{-1} = z_{2,3}(1,1) \left(E^{(2)}_{2,2}(u)\right)^{-1} z_{2,3}(1,1)^{-1} &= E^{(1)}_{3,3}(u), \end{aligned}$$

где $u \in R$. Так как $E^{(3)}_{1,2}(u) \in \langle x, y\rangle$ в силу (2.20) и $\left(E^{(2)}_{2,2}(u)\right)^{-1} \in \langle x, y\rangle$ в силу (2.23), где u из R имеет вид (2.9), то $E^{(1)}_{1,3}(u), E^{(1)}_{3,3}(u) \in \langle x, y\rangle$. А значит, используя сопряжение при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы получаем, что $E^{(1)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle$ при всех $1 \le i, j \le n$ и всех элементах u из R, имеющих вид (2.9).

Из этапов 2, 3 и 4 с учетом замечания, сделанного в начале доказательства, следует справедливость теоремы. □

2.5. Доказательство теоремы 2.3

Как и в §2.2, мы будем предполагать, что $s \in R^*$. Кроме того, далее в параграфе мы накладываем на коммутативное кольцо R следующее условие: оно аддитивно порождается множеством

$$\left\{s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2s^{2k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{2.24}$$

Далее определим $L = 1$ и $p_0 = s$, $q_0 = s^{-1}$. Из определения матрицы z в (2.3) следует, что $z = z_{11,14}(s, s^{-1})$. Отметим, что матрица сужения оператора $z_{i,j}(s, s^{-1})$

на подмодуль $\langle v_i, v_j, v_{n+i}, v_{n+j}\rangle$ в R^{2n} равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s^{-1} \\ s^{-1} & 0 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & -s & 0 & s^{-1} \\ s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично параграфу 2.4, введем некоторые обозначения, которые будем использовать до конца второй главы диссертационной работы

Обозначения

Как и в параграфе 2.4, через $w_{i,j}$, $1 \le i \ne j \le n$, будем обозначать матрицу из $\mathrm{Sym}(B)$, соответствующую перестановке базисных элементов v_i и v_j. Кроме того, определим диагональные матрицы из $\mathrm{GL}_n(R)$:

$$d_i(u) = I_n + (u-1)\cdot e_{i,i}, \text{ где } 1 \le i \le n \text{ и } u \in R.$$

Дополнительно определим $h_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(R)$, $1 \le i \ne j \le n$, следующим образом: $h_{i,j}$ действует тождественно на всех v_k, $k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i,j\}$, а на подмодуле $\langle v_i, v_j\rangle$ действует как оператор, заданный матрицей

$$A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $A_9^2 = I_2$, то $h_{i,j}$ — инволюция. Более того, из определения x_1 в параграфе 2.2 следует, что x_1 и $h_{1,2}$ действуют одинаково на $\langle v_1, v_2\rangle$.

Наконец, через $z_{i,j}$ мы будем обозначать матрицу $z_{i,j}(s, s^{-1})$.

Лемма 2.8. *Пусть матрицы x, y определены как в* (2.1)–(2.4), *где* $L = 1$, $p_0 = s$ *и* $q_0 = s^{-1}$. *Тогда справедливо включение* $x, y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$.

Доказательство. В силу определения π (см. (2.1)) мы знаем, что $\pi(x_1)$ и $y = \pi(y_1)$ содержатся в $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$. В случае $R = \mathbb{Z}$ имеем $y \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$. Так как $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) = \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$ согласно теореме 1.1, то $y \in \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$, то есть эта матрица раскладывается в произведение элементарных образующих (1.1)–(1.3) группы $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$. Для произвольного кольца R, так как y состоит из 0 и 1, применим к этому разложению гомоморфизм $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{ESp}_{2n}(R)$, индуцированный естественным кольцевым гомоморфизмом $\mathbb{Z} \to R$, для которого $1_{\mathbb{Z}} \mapsto 1_R$, и получим, что $y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$.

Так как $E^{(3)}_{2,1}(-s) \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$ и $\pi(x_1) \in \mathrm{Sp}_{2n}(R)$, то $\pi(x_1)E^{(3)}_{2,1}(-s) \in \mathrm{Sp}_{2n}(R)$. Кроме того, $\pi(x_1)E^{(3)}_{2,1}(-s)$ состоит из 0, 1 и -1. Тогда, рассуждая аналогичным образом, получаем, что $\pi(x_1)E^{(3)}_{2,1}(-s) \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$, а значит $\pi(x_1) \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$.

Таким образом, для доказательства утверждения леммы для x нам осталось показать, что $z = z_{11,14} \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$, что следует из следующего равенства:

$$z_{i,j} = \left(E^{(1)}_{i,i}(-1)E^{(2)}_{i,i}(2)\right)^2 \cdot E^{(2)}_{i,i}(1)E^{(2)}_{i,j}(s)E^{(1)}_{i,j}(-s^{-1})E^{(2)}_{i,i}(-1)E^{(2)}_{i,j}(s).$$

□

В силу леммы 2.8, справедливо включение $\langle x, y\rangle \subseteq \mathrm{ESp}_{2n}(R)$. Таким образом, для доказательства теоремы 2.3 нам осталось проверить, что верно обратное включение.

Теорема 2.5. *Пусть матрицы x, y определены как в* (2.1)–(2.4), *где* $L = 1$, $p_0 = s$ *и* $q_0 = s^{-1}$. *Тогда справедливо включение* $\mathrm{ESp}_{2n}(R) \subseteq \langle x, y\rangle$.

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы нам достаточно показать, что $\langle x, y\rangle$ содержит все образующие группы $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ вида (1.1)–(1.3). Мы будем последовательно строить элементы из $\langle x, y\rangle$. В частности, ниже все матрицы g_i будут содержаться в $\langle x, y\rangle$ по построению. Доказательство будет разделено на 4 этапа:

- Этап 1: вспомогательные построения;

- Этап 2: $E^{(3)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \ne j \le n$ и $u \in R$;

- Этап 3: $E^{(2)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i, j \le n$ и $u \in R$;
- Этап 4: $E^{(1)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i, j \le n$ и $u \in R$.

Этап 1. Напомним, что $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x, y\rangle$ по лемме 2.6. Далее мы будем постоянно пользоваться этим фактом, не оговаривая его специально. Из определения x_1 и $h_{1,2}$ следует, что $x_1 h_{1,2} = x_1 h_{1,2}^{-1} \in \mathrm{Sym}(B)$. Значит, можно выбрать такую перестановку $\alpha \in \mathrm{Alt}(B)$, что $\alpha x_1 = w^{\eta}_{3,4} h_{1,2} = h_{1,2} w^{\eta}_{3,4}$, где η — 0 или 1 в зависимости от четности перестановки $x_1 h_{1,2}$. Значит,

$$\pi(h_{1,2})\pi(w^{\eta}_{3,4}) z_{11,14} = \pi(\alpha x_1) z = \pi(\alpha) x \in \langle x, y\rangle.$$

Тогда, сопрягая $\pi(\alpha)x$ при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что

$$\pi(h_{k_1,k_2})\pi(w^{\eta}_{k_3,k_4}) z_{k_5,k_6} \in \langle x, y\rangle \quad \begin{array}{l}\text{для всех попарно различных}\\ 1 \le k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 \le n.\end{array} \tag{2.25}$$

Отметим, что сомножители $\pi(h_{k_1,k_2})$, $\pi(w^{\eta}_{k_3,k_4})$ и z_{k_5,k_6} из (2.25) попарно коммутируют друг с другом, если все индексы попарно различны. Мы будем неоднократно использовать этот факт далее, не оговаривая его специально.

Рассмотрим матрицу, лежащую в $\langle x, y\rangle$ в силу (2.25):

$$g_1 = [\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7}) z_{2,3}, \pi(h_{2,3})\pi(w^{\eta}_{6,7}) z_{4,5}] = [z_{2,3}, \pi(h_{2,3})] = (z_{2,3}\pi(h_{2,3}))^2.$$

Последнее равенство верно в силу того, что $\pi(h_{i,j})$ и $z_{i,j}$ — инволюции. Из определений $z_{2,3}$ и $h_{2,3}$ следует, что g_1 действует тождественно на всех v_i, где $i \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \{2, 3, n+2, n+3\}\rangle$, а матрица сужения g_1 на подмодуль

$M_9 = \langle v_2, v_3, v_{n+2}, v_{n+3} \rangle$ равна

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s^{-1} \\ s^{-1} & 0 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & -s & 0 & s^{-1} \\ s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = -I_4.$$

То есть $\pi(d_2(-1)d_3(-1)) = g_1 \in \langle x, y \rangle$. Более того, сопрягая g_1 при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, нетрудно видеть, что

$$\pi(d_i(-1)d_j(-1)) \in \langle x, y \rangle \text{ для всех } 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{2.26}$$

Так как $d_i(-1)h_{i,j}(s) = t_{i,j}(s)$, то, перемножая подходящие матрицы вида (2.25) и (2.26), получаем, что

$$\pi(d_{k_7}(-1))\pi(t_{k_1,k_2}(s))\pi(w^{\eta}_{k_3,k_4})z_{k_5,k_6} \in \langle x, y \rangle \tag{2.27}$$

для всех попарно различных $1 \leq k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7 \leq n$.

Теперь построим следующие матрицы, содержащиеся в $\langle x, y \rangle$ в силу (2.25):

$$\begin{aligned} g_2 &= [\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{3,2}, \pi(h_{1,2})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{4,5}] = [z_{3,2}, \pi(h_{1,2})] = (z_{3,2}\pi(h_{1,2}))^2, \\ g_3 &= [\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{2,3}, \pi(h_{1,2})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{4,5}] = [z_{2,3}, \pi(h_{1,2})] = (z_{2,3}\pi(h_{1,2}))^2. \end{aligned}$$

В заключительных равенствах мы вновь пользуемся тем, что $z_{i,j}$ и $\pi(h_{i,j})$ — инволюции. Отметим, что g_2 и g_3 действуют тождественно на

$$\langle v_i \mid i \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \{1, 2, 3, n+1, n+2, n+3\} \rangle,$$

а их сужения на $M_{10} = \langle v_1, v_2, v_3, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3} \rangle$ задаются матрицами $(A_{10}A_{12})^2$ и $(A_{11}A_{12})^2$, где A_{10}, A_{11}, A_{12} — матрицы сужения на M_{10}, соответственно, $z_{3,2}$,

$z_{2,3}$ и $\pi(h_{1,2})$, то есть

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} & 0 & 0 & -s^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 & s^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^{-1} \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 & s^{-1} \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При помощи несложных матричных вычислений проверяется, что

$$g_2 = I_{2n} + se_{2,1} - se_{n+1,n+2} + s^2 e_{n+3,1} + s^2 e_{n+1,3},$$
$$g_3 = I_{2n} + se_{2,1} - se_{n+1,n+2} - e_{3,1} + e_{n+1,n+3} - s^2 e_{n+3,1} - s^2 e_{n+1,3},$$

а значит, в $\langle x, y \rangle$ содержится и

$$g_4 = g_3 g_2 = I_{2n} + 2se_{2,1} - 2se_{n+1,n+2} - e_{3,1} + e_{n+1,n+3} + s^2 e_{n+1,1}.$$

Используя тот факт, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида (2.25), получаем, что $\langle x, y\rangle$ принадлежит и

$$\begin{aligned} g_5 &= \left(\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{3,2}\right) g_4 \left(\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{3,2}\right)^{-1} = \\ &= z_{3,2}g_4z_{3,2}^{-1} = I_{2n} + s^{-1}(e_{n+1,n+2} - e_{2,1}) + s^2e_{n+1,1} - \\ &\quad -s(e_{n+2,1} + e_{n+1,2}) - 2s^2(e_{n+3,1} + e_{n+1,3}). \end{aligned}$$

Второе равенство следует из того, что g_4 коммутирует с $\pi(h_{i,j})$ и $\pi(w_{i,j})$ при $i, j > 3$.

Далее, из того, что в $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы вида (2.27) и g_5, следует, что $\langle x, y\rangle$ принадлежат следующие матрицы:

$$\begin{aligned} g_6 &= [g_5, \pi(d_8(-1))\pi(t_{2,1}(s))\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{4,5}] = [g_5, \pi(t_{2,1}(s))], \\ g_7 &= [g_5, \pi(d_8(-1))\pi(t_{3,2}(s))\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{4,5}] = [g_5, \pi(t_{3,2}(s))]. \end{aligned}$$

Последние равенства в каждой строке верны в силу того, что g_5 действует тождественно на $\langle v_i \mid i \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \{1, 2, 3, n+1, n+2, n+3\}\rangle$. Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} g_6 &= I_{2n} - 2s^2e_{n+1,1} = E^{(2)}_{1,1}(-2s^2), \\ g_7 &= I_{2n} + e_{3,1} - e_{n+1,n+3} + 4s^2e_{n+1,1} - 2s^3(e_{n+2,1} + e_{n+1,2}). \end{aligned}$$

Сопрягая g_6 при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что

$$E^{(2)}_{i,i}(-2s^2) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \le n. \tag{2.28}$$

Этап 2. Из того, что $\langle x, y\rangle$ содержит матрицы вида (2.27) и (2.28), следует, что

$$\begin{aligned}
g_8 &= [E^{(2)}_{2,2}(-2s^2), \pi(d_8(-1))\pi(t_{2,1}(s))\pi(w^\eta_{6,7})z_{4,5}] = \\
&= [E^{(2)}_{2,2}(-2s^2), \pi(t_{2,1}(s))], \\
g_9 &= [\pi(d_8(-1))\pi(t_{3,2}(s))\pi(w^\eta_{6,7})z_{4,5}, \pi(d_8(-1))\pi(t_{2,1}(s))\pi(w^\eta_{6,7})z_{4,5}] = \\
&= [\pi(t_{3,2}(s)), \pi(t_{2,1}(s))]
\end{aligned}$$

принадлежат $\langle x, y\rangle$. Несложно проверить, что

$$\begin{aligned}
g_8 &= I_{2n} - 2s^4 e_{n+1,1} - 2s^3(e_{n+2,1} + e_{n+1,2}), \\
g_9 &= \pi(t_{3,1}(s^2)) = E^{(3)}_{3,1}(s^2).
\end{aligned}$$

Кроме того, в $\langle x, y\rangle$ содержится матрица

$$\begin{aligned}
g_{10} &= g_9 \cdot [g_3, \pi(d_8(-1))\pi(t_{3,2}(s))\pi(w^\eta_{6,7})z_{4,5}] = g_9 \cdot [g_3, \pi(t_{3,2}(s))] = \\
&= I_{2n} - 2s^4 e_{n+1,1} - s^3(e_{n+2,1} + e_{n+1,2}).
\end{aligned}$$

Второе равенство следует из того, что g_3 коммутирует с $\pi(d_8(-1))$, $\pi(w^\eta_{6,7})$ и $z_{4,5}$.

Наконец, используя полученные выше матрицы из $\langle x, y\rangle$, мы можем построить матрицу

$$g_{11} = g_7 g_6^2 (g_{10} g_8^{-1})^2 = E^{(3)}_{3,1}(1).$$

Сопрягая g_{11} при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(1) = \pi(t_{i,j}(1)) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \leq i \neq j \leq n. \qquad (2.29)$$

Так как в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся всевозможные матрицы вида (2.27) и (2.29), то в $\langle x, y\rangle$ содержится

$$[\pi(t_{3,2}(1)), \pi(d_8(-1))\pi(t_{2,1}(s))\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{4,5}] = [\pi(t_{3,2}(1)), \pi(t_{2,1}(s))] = \\ = \pi([t_{3,2}(1), t_{2,1}(s)]) = \pi(t_{3,1}(s)) = E^{(3)}_{3,1}(s).$$

Сопрягая $E^{(3)}_{3,1}(s)$ при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(s) = \pi(t_{i,j}(s)) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n. \tag{2.30}$$

Положим

$$\begin{aligned} g_{12} &= [g_5, E^{(3)}_{3,2}(1)] = \\ &= I_{2n} + s^{-1}e_{3,1} - s^{-1}e_{n+1,n+3} + 4se_{n+1,1} - 2s^2(e_{n+2,1} + e_{n+1,2}), \\ g_{13} &= [g_5, E^{(3)}_{2,1}(1)] = I_{2n} - 2se_{n+1,1} = E^{(2)}_{1,1}(-2s). \end{aligned}$$

Так как $E^{(3)}_{3,2}(1)$, $E^{(3)}_{2,1}(1) \in \langle x, y\rangle$ (см. (2.29)) и $g_5 \in \langle x, y\rangle$, то и g_{12}, $g_{13} \in \langle x, y\rangle$. Сопрягая $g^{-1}_{13} = E^{(2)}_{1,1}(2s)$ при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что

$$E^{(2)}_{i,i}(2s) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \le n. \tag{2.31}$$

Кроме того, используя (2.30), получаем, что $\langle x, y\rangle$ содержит

$$g_2 \cdot \left(E^{(3)}_{2,1}(s)\right)^{-1} = g_2 \cdot E^{(3)}_{2,1}(-s) = I_{2n} + s^2(e_{n+1,3} + e_{n+3,1}) = E^{(2)}_{1,3}(s^2).$$

Сопрягая $E^{(2)}_{1,3}(s^2)$ при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что

$$E^{(2)}_{i,j}(s^2) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n. \tag{2.32}$$

Отметим, что

$$g_{12}g^2_{13}\left(E^{(2)}_{2,1}(s^2)\right)^2 = I_{2n} + s^{-1}e_{3,1} - s^{-1}e_{n+1,3} = E^{(3)}_{3,1}(s^{-1}),$$

а значит, $E^{(3)}_{3,1}(s^{-1}) \in \langle x, y\rangle$. Как и выше, сопрягая эту матрицу при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, мы заключаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(s^{-1}) = \pi(t_{i,j}(s^{-1})) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n. \qquad (2.33)$$

Используя коммутаторное тождество для элементарных трансвекций (2.13) вместе с включениями (2.30) и (2.33), а также то, что π — гомоморфизм, мы заключаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(s^{k}) = \pi(t_{i,j}(s^{k})) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n \text{ и } k \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того, $\left(E^{(3)}_{i,j}(s^k)\right)^{-1} = E^{(3)}_{i,j}(-s^k)$, $E^{(3)}_{i,j}(u_1)E^{(3)}_{i,j}(u_2) = E^{(3)}_{i,j}(u_1+u_2)$, где $u_1, u_2 \in R$. Так как, по предположению теоремы 2.3, R аддитивно порождается множеством (2.24), то

$$E^{(3)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \ne j \le n \text{ и всех } u \in R. \qquad (2.34)$$

Этап 3. Заметим, что

$$g_4 E^{(3)}_{3,1}(1) E^{(3)}_{2,1}(-2s) = I_{2n} + s^2 e_{n+1,1} = E^{(2)}_{1,1}(s^2).$$

Отсюда и из (2.34) следует, что $E^{(2)}_{1,1}(s^2) \in \langle x, y\rangle$. Сопрягая $E^{(2)}_{1,1}(s^2)$ при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что

$$E^{(2)}_{i,i}(s^2) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \le i \le n. \qquad (2.35)$$

Кроме того, несложно проверить, что

$$E^{(3)}_{1,2}(1)E^{(3)}_{2,1}(s-1)E^{(3)}_{1,2}(-s^{-1})E^{(3)}_{2,1}(s-s^2) = \pi(d_1(s)d_2(s^{-1})) \in \langle x, y\rangle.$$

Отсюда и из (2.34) следует, что $\pi(d_1(s^k)d_2(s^{-k})) \in \langle x, y\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Вновь сопрягая при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что

$$\pi(d_i(s^k)d_j(s^{-k})) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } 1 \leq i \neq j \leq n \text{ и } k \in \mathbb{Z}. \tag{2.36}$$

При помощи несложных матричных вычислений проверяется, что

$$\begin{aligned} E^{(2)}_{i,i}(us^{-2k}) &= \pi(d_i(s^k)d_j(s^{-k}))E^{(2)}_{i,i}(u)\pi(d_i(s^{-k})d_j(s^k)), \\ E^{(2)}_{i,j}(us^{-k}) &= \pi(d_i(s^k)d_\ell(s^{-k}))E^{(2)}_{i,j}(u)\pi(d_i(s^{-k})d_\ell(s^k)), \end{aligned}$$

где $1 \leq i, j, \ell \leq n$ и попарно различны, $u \in R$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда, используя эти соотношения вместе с (2.31), (2.32), (2.35) и (2.36), получаем, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся всевозможные матрицы вида $E^{(2)}_{i,j}(s^k)$, где $1 \leq i \neq j \leq n$ и $k \in \mathbb{Z}$, $E^{(2)}_{i,i}(s^{2k})$ и $E^{(2)}_{i,i}(2s^{2k-1})$, где $1 \leq i \leq n$ и $k \in \mathbb{Z}$, а также обратные к ним $E^{(2)}_{i,j}(-s^k)$, $E^{(2)}_{i,i}(-s^{2k})$ и $E^{(2)}_{i,i}(-2s^{2k-1})$. Учитывая, что R аддитивно порождается множеством из (2.24), мы получаем, что

$$E^{(2)}_{i,j}(u) \in \langle x, y\rangle \text{ при всех } u \in R \text{ и } 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.37}$$

Этап 4. Нам осталось проверить, что всевозможные матрицы $E^{(1)}_{i,j}(u)$, где $u \in R$, принадлежат $\langle x, y\rangle$. Положим

$$g_{16} = \pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{2,3}.$$

Заметим, что справедливы следующие матричные равенства, где $u \in R$:

$$\begin{aligned} g_{16}E^{(3)}_{1,2}(us)g_{16}^{-1} = z_{2,3}E^{(3)}_{1,2}(us)z_{2,3}^{-1} &= E^{(1)}_{1,3}(u), \\ g_{16}E^{(2)}_{2,2}(-us^2)g_{16}^{-1} = z_{2,3}E^{(2)}_{2,2}(-us^2)z_{2,3}^{-1} &= E^{(1)}_{3,3}(u). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что g_{16}, $E^{(3)}_{1,2}(us)$, $E^{(2)}_{2,2}(-us^2)$ лежат в $\langle x, y\rangle$ согласно (2.25), (2.34), (2.37). Значит и $E^{(1)}_{1,3}(u)$, $E^{(1)}_{3,3}(u) \in \langle x, y\rangle$. Сопрягая их при помощи подходящих матриц из $\pi(\mathrm{Alt}(B))$, получаем, что $E_{i,j}^{(1)}(u) \in \langle x, y \rangle$, где $1 \leq i, j \leq n$ и $u \in R$.

Из этапов 2, 3 и 4 с учетом замечания, сделанного в начале доказательства, следует справедливость теоремы. $\square$

Глава 3.

Группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ малого ранга

3.1. Группа $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$

В данном параграфе мы докажем, что группа $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ является (2,3)-порожденной, предъявив в явном виде две образующие матрицы порядка 2 и 3 соответственно. Данный результат был опубликован в статье [45].

Теорема 3.1. *Группа* $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ — $(2,3)$*-порожденная группа. Более точно, пусть*

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & -3 & 0 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 6 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 3 & -6 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $x^2 = y^3 = I_8$ *и* $\langle x, y\rangle = \mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$.

Замечание 3.1. В следующем параграфе для случая группы $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ также будут представлены матрицы x и y порядка 2 и 3 соответственно такие, что $\langle x, y\rangle = \mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ (см. формулировку теоремы 3.2). Доказательства теорем 3.1 и 3.2 будут основаны на построении цепочек матриц из соответствующей группы $\langle x, y\rangle$. До конца главы для упрощения чтения доказательств мы будем использовать следующие обозначения для матриц из $\langle x, y\rangle$:

- P_i — верхние блочно-треугольные матрицы из $\langle x, y\rangle$ вида

$$\begin{pmatrix} K & L \\ 0 & M \end{pmatrix}; \tag{3.1}$$

- Q_i — нижние блочно-треугольные матрицы из $\langle x, y\rangle$ вида

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ L & M \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

  где K, L, M — матрицы размера $n \times n$ (здесь и далее значение параметра n определяется следующим образом: если $x, y \in \mathrm{GL}_8(\mathbb{Z})$, то $n = 4$; если $x, y \in \mathrm{GL}_{10}(\mathbb{Z})$, то $n = 5$);

- A_i — верхнетреугольные матрицы из $\langle x, y\rangle$ вида

$$\begin{pmatrix} I_n & L \\ 0 & I_n \end{pmatrix}; \tag{3.3}$$

- B_i — нижнетреугольные матрицы из $\langle x, y\rangle$ вида

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ L & I_n \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

  где L — матрицы размера $n \times n$;

- g_i — произвольная матрица из $\langle x, y\rangle$.

Доказательство теоремы 3.1. При помощи простых матричных вычислений проверяется, что порядки матриц x и y — 2 и 3 соответственно и что x, y содержатся в $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$.

В силу теоремы 1.1, верно равенство $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z}) = \mathrm{ESp}_8(\mathbb{Z})$. Группа $\mathrm{ESp}_8(\mathbb{Z})$ порождается матрицами $E^{(1)}_{i,j}(k)$, $E^{(2)}_{i,j}(k)$, где $1 \le i, j \le 4$ и $k \in \mathbb{Z}$, и $E^{(3)}_{i,j}(k)$, где $1 \le i \ne j \le 4$ и $k \in \mathbb{Z}$, определенными в (1.1)–(1.3) в первой главе диссертационной работы. Тогда, используя тот факт, что

$$\begin{aligned} E^{(t)}_{i,j}(k) &= \left(E^{(t)}_{i,j}(1)\right)^k, \text{ где } 1 \le i, j \le 4,\ t = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}, \\ E^{(3)}_{i,j}(k) &= \left(E^{(3)}_{i,j}(1)\right)^k, \text{ где } 1 \le i \ne j \le 4,\ k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

а также то, что $E^{(t)}_{i,j}(1) = E^{(t)}_{j,i}(1)$, где $1 \le i, j \le 4$ и $t = 1, 2$, мы получаем, что для доказательства теоремы 3.1 нам достаточно показать, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы $E^{(1)}_{i,j}(1), E^{(2)}_{i,j}(1)$, где $1 \le i \le j \le 4$, и $E^{(3)}_{i,j}(1)$, где $1 \le i \ne j \le 4$. Доказательство будем проводить путем построения цепочки матриц, и разделим его на 3 этапа:

- Этап 1: $E^{(1)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \le j \le 4$;
- Этап 2: $E^{(2)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \le j \le 4$;
- Этап 3: $E^{(3)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \ne j \le 4$.

Этап 1. Нашей первой целью будет получение достаточно большого количества верхних блочно-треугольных матриц вида (3.1) из $\langle x, y\rangle$, затем на их основе нами будут построены верхнетреугольные матрицы вида (3.3) из $\langle x, y\rangle$. Положим

$$\begin{aligned} g_1 &= ((xy^2)^2xyxy^2(xy)^2xy^2xy)^3, \\ g_2 &= xy(xy^2)^4xyxy^2xy(xy^2)^4(xy)^2xy^2xyxy^2, \\ g_3 &= (yx)^3(y^2x)^2yxy^2xyxy^2xy. \end{aligned}$$

Тогда при помощи этих матриц мы можем получить первые верхние блочно-треугольные матрицы вида (3.1) из $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned} P_1 &= g_2 g_1 g_2^{-1}, \\ P_2 &= g_3 g_1 g_3^{-1}. \end{aligned}$$

Дополнительно определим

$$\begin{aligned} g_4 &= (y^2x)^3, \\ g_5 &= (y^2x)^3(yx)^2y^2x(yx)^4(y^2x)^2(yx)^3(y^2xyx)^3yxy, \\ g_6 &= (y^2x)^4yx(y^2x)^3yx. \end{aligned}$$

Используя матрицы g_4, g_5, g_6, а также P_1, P_2, мы можем получить новые верхние блочно-треугольные матрицы вида (3.1) из $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2P_1P_2^{-1}P_1^{-1}, \\ P_4 &= g_4^2g_1g_4^{-2}, \\ P_5 &= g_5g_1g_5^{-1}, \\ P_6 &= g_6g_1g_6^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем построить первые верхнетреугольные матрицы вида (3.3) из $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned} A_1 &= (P_3P_4P_3^{-1}P_4^{-1})^4P_3P_5P_3^{-1}P_5^{-1}, \\ A_2 &= (P_3P_6P_3^{-1}P_6^{-1})^{-1}P_3P_4P_3^{-1}P_4^{-1}, \\ A_3 &= (P_3P_6P_3^{-1}P_6^{-1})^4P_3P_5P_3^{-1}P_5^{-1}. \end{aligned}$$

Для того чтобы найти больше верхнетреугольных матриц вида (3.3) мы будем сопрягать матрицы A_1, A_2 и A_3 при помощи матриц вида (3.1) из $\langle x, y\rangle$. Для этого сначала рассмотрим

$$\begin{aligned}
g_7 &= xyxy^2x, \\
g_8 &= (y^2x(yx)^2y^2x)^2, \\
g_9 &= (yx)^2y^2xyxy^2x, \\
g_{10} &= xy(xy^2)^3(xy)^2xy^2(xy)^5, \\
g_{11} &= (yx)^2(y^2x)^3(yx)^2y^2xyxy^2x(yx)^4((y^2x)^4yx)^2 \times \\
&\times y^2xyx(y^2x)^4(yx)^2y^2xyxy^2, \\
g_{12} &= (y^2x)^3yxy^2xy, \\
g_{13} &= y^2x(yx)^2((y^2x)^3yx)^2y^2x(yx)^3y^2xyxy^2x, \\
g_{14} &= (y(xy^2)^2(xy)^4)^4, \\
g_{15} &= (xy)^2(xy^2)^2xy(xy^2)^3xyxy^2xy(xy^2)^3xy.
\end{aligned}$$

С помощи матриц g_1 и $g_7, \ldots, g_{15}$ мы можем получить дополнительные верхние блочно-треугольные матрицы вида (3.1) из $\langle x, y \rangle$:

$$\begin{aligned}
P_7 &= g_7g_1g_7^{-1}, \\
P_8 &= g_8g_1g_8^{-1}, \\
P_9 &= g_4^{-1}g_1g_4, \\
P_{10} &= g_9g_1g_9^{-1}, \\
P_{11} &= g_{10}g_1g_{10}^{-1}, \\
P_{12} &= g_{11}g_1g_{11}^{-1}, \\
P_{13} &= g_{12}g_1g_{12}^{-1}, \\
P_{14} &= g_{13}g_1g_{13}^{-1}, \\
P_{15} &= g_{15}g_{14}g_{15}^{-1}.
\end{aligned}$$

Кроме того, определим

$$\begin{aligned} P_{16} &= P_{15}P_{13}P_{15}^{-1}, \\ P_{17} &= P_{14}^4 P_{13}^{-5} P_{16}. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим

$$\begin{aligned} g_{16} &= (xy)^3(xy^2)^2(xyxy^2)^2(xy)^5(xy^2(xy)^4xy^2)^2(xy)^3, \\ g_{17} &= (xy)^7xy^2(xy)^3xy^2xyxy^2xy(xy^2)^2(xy)^3x, \\ g_{18} &= (xy)^7xy^2(xy)^7xy^2xy(xy^2)^3, \\ g_{19} &= yxy^2xyx(y^2x)^2yxy^2xyx(y^2x)^2(yx)^2(y^2x)^2yx(y^2x)^2(yx)^2(y^2x)^5, \\ g_{20} &= yx(y^2x)^2(yx)^2(y^2x)^8yxy^2xyx, \\ g_{21} &= xyxy^2(xy)^5xy^2(xy)^2(xy^2)^2xy(xy^2)^3x. \end{aligned}$$

Теперь мы можем построить достаточно большое количество верхнетреугольных матриц вида (3.3) из $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned} A_4 &= P_7P_8, \\ A_5 &= P_1A_3P_1^{-1}, \\ A_6 &= P_1A_2P_1^{-1}, \\ A_7 &= P_1^{-1}A_2P_1, \\ A_8 &= P_9A_3P_9^{-1}, \\ A_9 &= P_{10}A_3P_{10}^{-1}, \\ A_{10} &= P_{11}A_3P_{11}^{-1}, \\ A_{11} &= P_{12}A_3P_{12}^{-1}, \\ A_{12} &= P_{14}P_{13}^{-1}A_3P_{13}P_{14}^{-1}, \\ A_{13} &= P_{14}A_2P_{14}^{-1}, \\ A_{14} &= P_{17}A_1P_{17}^{-1}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{15} &= g_{16} g_1 g_{16}^{-1}, \\
A_{16} &= g_{17} g_1 g_{17}^{-1}, \\
A_{17} &= g_{18} g_1 g_{18}^{-1}, \\
A_{18} &= g_{19} g_1 g_{19}^{-1}, \\
A_{19} &= g_{20} g_1 g_{20}^{-1}, \\
A_{20} &= g_{21} g_1 g_{21}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Полученные матрицы $A_4, \ldots, A_{20}$ мы можем записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
A_i \;=\;& I_8 + k_1^{(i)} e_{1,5} + k_2^{(i)}(e_{1,6} + e_{2,5}) + k_3^{(i)}(e_{1,7} + e_{3,5}) + k_4^{(i)}(e_{1,8} + e_{4,5}) + \\
& + k_5^{(i)} e_{2,6} + k_6^{(i)}(e_{2,7} + e_{3,6}) + k_7^{(i)}(e_{2,8} + e_{4,6}) + k_8^{(i)} e_{3,7} + \\
& + k_9^{(i)}(e_{3,8} + e_{4,7}) + k_{10}^{(i)} e_{4,8}.
\end{aligned}
$$

Значения коэффициентов $k_j^{(i)}$ для удобства читателя приведены в таблице 3.1 на следующей странице. При помощи несложных матричных вычислений легко проверить, что матрицы $A_4, \ldots, A_{20}$ попарно коммутируют друг с другом. Используя стандартные методы линейной алгебры, можно показать, что эти матрицы порождают ту же подгруппу в $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$, что и $E_{i,j}^{(1)}(1)$, где $1 \le i \le j \le 4$, а именно:

$$
\begin{aligned}
E_{1,1}^{(1)}(1) &= A_4^{626} A_5^{-3} A_6^{429} A_7^{160} A_8^{-67} A_9^{6} A_{10}^{-45} A_{11}^{90} A_{12}^{-5} A_{13}^{230} A_{15}^{505} \times \\
&\qquad \times A_{16}^{71} A_{17}^{-124} A_{18}^{976} A_{19}^{39} A_{20}^{107}, \\
E_{1,2}^{(1)}(1) &= A_4^{215} A_5^{13} A_6^{472} A_7^{40} A_8^{-90} A_9^{-26} A_{10}^{-8} A_{11}^{79} A_{12}^{11} A_{13}^{-520} A_{14} A_{15}^{-240} \times \\
&\qquad \times A_{16}^{-255} A_{17}^{363} A_{18}^{-728} A_{19}^{68} A_{20}^{-312}, \\
E_{1,3}^{(1)}(1) &= A_4^{441} A_5^{-10} A_6^{159} A_7^{105} A_8^{-15} A_9^{26} A_{10}^{-55} A_{11}^{57} A_{12}^{-6} A_{13}^{415} A_{14}^{-1} A_{15}^{597} \times \\
&\qquad \times A_{16}^{-34} A_{17}^{-295} A_{18}^{881} A_{19}^{163} A_{20}^{292}, \\
E_{1,4}^{(1)}(1) &= A_4^{124} A_5^{14} A_6^{337} A_7^{82} A_8^{-114} A_9^{-40} A_{10}^{-15} A_{11}^{110} A_{12}^{3} A_{13}^{-346} A_{14}^{2} A_{15}^{-218} \times \\
&\qquad \times A_{16}^{443} A_{17}^{431} A_{18}^{456} A_{19}^{154} A_{20}^{-274},
\end{aligned}
$$

Таблица 3.1. Коэффициенты $k_j^{(i)}$.

i	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$	$k_4^{(i)}$	$k_5^{(i)}$	$k_6^{(i)}$	$k_7^{(i)}$	$k_8^{(i)}$	$k_9^{(i)}$	$k_{10}^{(i)}$
4	−24	12	0	0	−6	0	0	0	0	0
5	664	−27	0	610	0	0	−27	0	0	556
6	−18	9	0	0	0	0	9	0	0	18
7	270	−171	0	−72	108	0	45	0	0	18
8	502	−502	−27	−556	502	27	556	0	27	610
9	556	0	−529	27	0	0	0	502	−27	0
10	124	−313	162	−259	502	−162	448	0	−162	394
11	340	−421	54	−448	502	−54	529	0	−54	556
12	0	54	0	54	502	0	529	0	0	556
13	0	18	0	18	0	0	9	0	0	18
14	664	−655	−1292	−646	646	1274	637	2512	1256	628
15	5	−3	−3	−6	1	1	0	1	0	−9
16	7	3	−9	0	−1	−1	0	8	0	0
17	3	7	−15	−8	−5	5	8	0	−10	−12
18	−8	3	−2	−1	−1	1	1	0	1	3
19	0	−4	4	0	7	−6	0	5	0	0
20	−75	15	55	35	−3	−11	−7	−40	−25	−15

$$
\begin{aligned}
E_{2,2}^{(1)}(1) &= A_4^{34}A_5^{7}A_6^{252}A_7^{45}A_8^{-67}A_9^{-19}A_{10}^{-5}A_{11}^{63}A_{12}A_{13}^{-167}A_{14}A_{15}^{112}\times\\
&\qquad\times A_{16}^{183}A_{17}^{136}A_{18}^{267}A_{19}^{-102}A_{20}^{-149},\\
E_{2,3}^{(1)}(1) &= A_4^{329}A_5^{6}A_6^{453}A_7^{94}A_8^{-117}A_9^{-5}A_{10}^{-127}A_{11}^{204}A_{12}^{13}A_{13}^{-290}A_{15}^{126}\times\\
&\qquad\times A_{16}^{273}A_{17}^{325}A_{18}^{-84}A_{19}^{1064}A_{20}^{128},\\
E_{2,4}^{(1)}(1) &= A_4^{59}A_5^{9}A_6^{7}A_7^{33}A_8^{-78}A_9^{-24}A_{10}^{-46}A_{11}^{104}A_{12}^{7}A_{13}^{-284}A_{14}A_{15}^{-772}\times\\
&\qquad\times A_{16}^{-49}A_{17}^{579}A_{18}^{106}A_{19}^{844}A_{20}^{-162},\\
E_{3,3}^{(1)}(1) &= A_4^{-433}A_5^{14}A_6^{456}A_7^{-2}A_8^{-101}A_9^{-39}A_{10}^{49}A_{11}^{52}A_{12}^{2}A_{13}^{-424}A_{14}^{2}A_{15}^{246}\times\\
&\qquad\times A_{16}^{-32}A_{17}^{165}A_{18}^{-17}A_{19}^{-791}A_{20}^{-463},\\
E_{3,4}^{(1)}(1) &= A_4^{394}A_5^{4}A_6^{-869}A_7^{-73}A_8^{63}A_9A_{10}^{64}A_{11}^{-99}A_{12}^{-5}A_{13}^{121}A_{15}^{-553}\times\\
&\qquad\times A_{16}^{-613}A_{17}^{46}A_{18}^{9}A_{19}^{-225}A_{20}^{-152},\\
E_{4,4}^{(1)}(1) &= A_4^{-537}A_5^{-25}A_6^{140}A_7^{5}A_8^{79}A_9^{43}A_{10}^{-27}A_{11}^{-56}A_{12}^{-7}A_{13}^{567}A_{14}^{-2}A_{15}^{-77}\times\\
&\qquad\times A_{16}^{-475}A_{17}^{-289}A_{18}^{377}A_{19}^{383}A_{20}^{365}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы доказали, что $E^{(1)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \le j \le 4$.

Замечание 3.2. Набор образующих $A_4, \dots, A_{20}$ не является минимальным. Например, из него можно исключить матрицу A_{13}, однако это приведет к росту степенных показателей в выражениях для $E^{(1)}_{i,j}(1)$, где $1 \le i \le j \le 4$, аналогичным представленным выше. Здесь мы стараемся соблюсти баланс между количеством образующих и величинами степенных показателей в выражениях для $E^{(1)}_{i,j}(1)$.

Этап 2. Теперь мы будем доказывать, что $E^{(2)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \le j \le 4$. Для этого мы сначала построим нижние блочно-треугольные матрицы вида (3.2) из $\langle x, y\rangle$. Рассмотрим:

$$\begin{aligned}
g_{22} &= ((xy)^2(xy^2)^3xy)^2,\\
g_{23} &= (xy^2xy)^5xyxy^2(xy)^3xy^2(xyxy^2)^2(xy)^2(xy^2)^5(xy)^2(xy^2xy)^5,\\
g_{24} &= y(xy^2xy)^2xyxy^2(xy)^2(xy^2)^5,\\
g_{25} &= yxy^2xy(xy^2)^2(xy^2xy)^2((xy^2)^3xy)^2xy^2(xy)^2,\\
g_{26} &= (xy^2)^2(xy)^6xy^2(xy)^2,\\
g_{27} &= g_{24}g_{22}g_{24}^{-1}.
\end{aligned}$$

Используя матрицы $g_{22}, \dots, g_{27}$, а также то, что $E^{(1)}_{i,j}(1) \in \langle x, y\rangle$ для $1 \le i, j \le 4$ в силу этапа 1 доказательства, мы можем получить следующие нижние блочно-треугольные матрицы вида (3.2), содержащиеся в $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= g_{23}g_{22}g_{23}^{-1}g_{27},\\
Q_2 &= g_{26}E^{(1)}_{1,2}(1)g_{26}^{-1},\\
Q_3 &= g_{26}E^{(1)}_{1,3}(1)g_{26}^{-1},\\
Q_4 &= g_{26}E^{(1)}_{1,4}(1)g_{26}^{-1}.
\end{aligned}$$

Наконец, мы можем построить первую нижнетреугольную матрицу вида (3.4), содержащуюся в $\langle x, y\rangle$:

$$B_1 = Q_2 Q_3 Q_4^{-4} Q_1^{-15} g_{27}^{10} g_{25} g_{22}^{2} g_{25}^{-1} g_{27}^{8}.$$

Далее рассмотрим матрицы

$$\begin{aligned}
g_{28} &= y^2(xy^2)^3xyxy^2xy(xy^2)^6(xy)^2,\\
g_{29} &= y^2xy^2(xy)^2(xy^2)^6(xy)^2,\\
g_{30} &= (y^2x)^4(yx)^2(y^2x)^2(yx)^2y^2x(yx)^2,\\
g_{31} &= y^2(xy)^2xy^2xy((xy^2)^2xy)^3xy^2xy,\\
g_{32} &= yx(y^2xyx)^2(yx)^2,\\
g_{33} &= y^2xy^2(xy)^2(xy^2xy)^2(xy^2)^3(xyxy^2)^2(xy)^4xy^2(xy)^3xy^2xy,\\
g_{34} &= yxy^2(xy)^2(xy^2)^2(xy)^7xy^2(xy)^5xy^2(xy)^6xy^2xy(xy^2)^2(xy)^2xy^2xy,\\
g_{35} &= xy(xy^2)^7xy(xy^2)^5(xy)^2.
\end{aligned}$$

Используя матрицы g_1, g_{22}, построенные ранее в доказательстве, и $g_{28}, \ldots, g_{35}$, мы можем получить новые нижние блочно-треугольные матрицы вида (3.2), содержащиеся в $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned}
Q_5 &= g_{28}g_{22}g_{28}^{-1}g_{29}g_{22}g_{29}^{-1},\\
Q_6 &= g_{29}g_{22}g_{29}^{-1}g_{28}g_{22}g_{28}^{-1},\\
Q_7 &= g_{28}g_{22}^{2}g_{28}^{-1},\\
Q_8 &= g_{31}g_{22}g_{31}^{-1}g_{30}g_{22}g_{30}^{-1},\\
Q_9 &= g_{32}g_{22}g_{32}^{-1},\\
Q_{10} &= g_{33}g_{22}^{2}g_{33}^{-1},\\
Q_{11} &= g_{34}g_{1}g_{34}^{-1},\\
Q_{12} &= g_{35}g_{1}g_{35}^{-1}.
\end{aligned}$$

Прежде, чем перейти к построению нижнетреугольных матриц вида (3.4) из $\langle x, y\rangle$, нам потребуются дополнительные матрицы из $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned}
g_{36} &= yxy^2x(yx)^3y^2xyx(y^2x)^5(yx)^3(y^2xyx)^3(y^2x)^3,\\
g_{37} &= y^2(xy)^2(xy^2)^2(xy)^2(xyxy^2)^2,\\
g_{38} &= y(xy^2)^2xy(xy^2)^3(xy)^3(xy^2)^2xy,\\
g_{39} &= y(xyxy^2)^2xy(xy^2)^3xyxy^2(xy)^4xy^2(xy)^3xy^2(xyxy^2)^4xy(xy^2)^2xy,\\
g_{40} &= xy^2(xy)^4(xy^2)^3xy(xy^2)^{10}xy(xy^2(xy)^4)^2x.
\end{aligned}$$

Наконец, мы можем построить нижнетреугольные матрицы вида (3.4) из $\langle x, y\rangle$, сопрягая B_1 и $E^{(1)}_{i,j}(k) = \left(E^{(1)}_{i,j}(1)\right)^k \in \langle x, y\rangle, 1 \le i \le j \le 4, k \in \mathbb{Z}$, при помощи матриц, построенных ранее в доказательстве (в частности, при помощи матриц $Q_5, \ldots, Q_{12}$). А именно:

$$\begin{aligned}
B_2 &= Q_5B_1Q_5^{-1},\\
B_3 &= Q_8B_1Q_8^{-1},\\
B_4 &= Q_8Q_9B_1Q_9^{-1}Q_8^{-1},\\
B_5 &= Q_6Q_7^{-1}Q_8B_1Q_8^{-1}Q_7Q_6^{-1},\\
B_6 &= Q_{10}Q_9B_1Q_9^{-1}Q_{10}^{-1},\\
B_7 &= Q_9^{-1}Q_7Q_6^{-1}B_1Q_6Q_7^{-1}Q_9,\\
B_8 &= Q_6^{-1}Q_9B_1Q_9^{-1}Q_6,\\
B_9 &= g_{26}E^{(1)}_{1,1}(1)g_{26}^{-1},\\
B_{10} &= Q_{11}g_{26}E^{(1)}_{1,1}(1)g_{26}^{-1}Q_{11}^{-1},\\
B_{11} &= Q_{12}g_{26}E^{(1)}_{1,1}(1)g_{26}^{-1}Q_{12}^{-1},\\
B_{12} &= Q_{11}g_{36}E^{(1)}_{3,3}(1)g_{36}^{-1}Q_{11}^{-1},\\
B_{13} &= g_{37}E^{(1)}_{1,1}(1)g_{37}^{-1},\\
B_{14} &= g_{38}E^{(1)}_{1,1}(-1)g_{38}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{15} &= g_{39} E^{(1)}_{1,1}(1) g_{39}^{-1}, \\ B_{16} &= g_{40} E^{(1)}_{2,2}(1) g_{40}^{-1}. \end{aligned}$$

Полученные матрицы $B_2, \ldots, B_{16}$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} B_i &= I_8 + \bar{k}^{(i)}_1 e_{5,1} + \bar{k}^{(i)}_2 (e_{5,2} + e_{6,1}) + \bar{k}^{(i)}_3 (e_{5,3} + e_{7,1}) + \bar{k}^{(i)}_4 (e_{5,4} + e_{8,1}) + \\ &\quad + \bar{k}^{(i)}_5 e_{6,2} + \bar{k}^{(i)}_6 (e_{6,3} + e_{7,2}) + \bar{k}^{(i)}_7 (e_{6,4} + e_{8,2}) + \bar{k}^{(i)}_8 e_{7,3} + \\ &\quad + \bar{k}^{(i)}_9 (e_{7,4} + e_{8,3}) + \bar{k}^{(i)}_{10} e_{8,4}. \end{aligned}$$

Для удобства читателя коэффициенты $\bar{k}^{(i)}_j$ приведены в таблице 3.2 на следующей странице. Легко видеть, что $E^{(2)}_{3,3}(1) = B_{14}$. Оставшиеся матрицы $E^{(2)}_{i,j}(1)$ из (1.2) могут быть выражены через $B_2, \ldots, B_{16}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} E^{(2)}_{1,1}(1) &= B_2^{33} B_3^{134} B_4^{244} B_5^{-4} B_6^{41} B_7^{-3} B_8^{-48} B_9^{-56} B_{10}^{117} B_{11}^{6} B_{12}^{-3} \times \\ &\qquad \times B_{13}^{660} B_{14}^{-316} B_{15}^{169} B_{16}^{-66}, \\ E^{(2)}_{1,2}(1) &= B_2^{213} B_3^{-192} B_4^{-341} B_5^{-10} B_6^{-65} B_7^{7} B_8^{166} B_9^{-408} B_{10}^{-113} B_{11}^{-5} B_{12}^{3} \times \\ &\qquad \times B_{13}^{-17} B_{14}^{-356} B_{15}^{323} B_{16}^{-38}, \\ E^{(2)}_{1,3}(1) &= B_2^{-141} B_3^{164} B_4^{295} B_5^{7} B_6^{51} B_7^{-5} B_8^{-125} B_9^{642} B_{10}^{114} B_{11}^{6} B_{12}^{-3} \times \\ &\qquad \times B_{13}^{13} B_{14}^{96} B_{15}^{-210} B_{16}^{9}, \\ E^{(2)}_{1,4}(1) &= B_2^{63} B_3^{-142} B_4^{-262} B_5^{-6} B_6^{-45} B_7^{4} B_8^{99} B_9^{-175} B_{10}^{-116} B_{11}^{-5} B_{12}^{3} \times \\ &\qquad \times B_{13}^{-259} B_{14}^{-8} B_{15}^{-584} B_{16}^{37}, \\ E^{(2)}_{2,2}(1) &= B_2^{289} B_3^{-325} B_4^{-570} B_5^{-12} B_6^{-110} B_7^{12} B_8^{261} B_9^{381} B_{10}^{-190} B_{11}^{-8} B_{12}^{5} \times \\ &\qquad \times B_{13}^{-101} B_{14}^{-588} B_{15}^{122} B_{16}^{-24}, \\ E^{(2)}_{2,3}(1) &= B_2^{-166} B_3^{88} B_4^{155} B_5^{8} B_6^{33} B_7^{-4} B_8^{-99} B_9^{385} B_{10}^{36} B_{11} B_{12}^{-1} \times \\ &\qquad \times B_{13}^{-91} B_{14}^{360} B_{15}^{-418} B_{16}^{57}, \\ E^{(2)}_{2,4}(1) &= B_2^{16} B_3^{222} B_4^{391} B_5^{-4} B_6^{52} B_7^{-4} B_8^{-90} B_9^{186} B_{10}^{194} B_{11}^{14} B_{12}^{-5} \times \\ &\qquad \times B_{13}^{-215} B_{14}^{-518} B_{15}^{44} B_{16}^{-103}, \end{aligned}$$

Таблица 3.2. Коэффициенты $\bar{k}_j^{(i)}$.

i	$\bar{k}_1^{(i)}$	$\bar{k}_2^{(i)}$	$\bar{k}_3^{(i)}$	$\bar{k}_4^{(i)}$	$\bar{k}_5^{(i)}$	$\bar{k}_6^{(i)}$	$\bar{k}_7^{(i)}$	$\bar{k}_8^{(i)}$	$\bar{k}_9^{(i)}$	$\bar{k}_{10}^{(i)}$
2	0	0	0	0	0	−17	0	14	14	0
3	−48	−82	−10	79	−136	−20	130	0	20	−124
4	20	38	6	−35	72	12	−66	0	−12	60
5	−48	−69	−23	66	0	−138	0	100	132	0
6	64	36	−12	−42	20	−6	−23	0	6	26
7	170	−137	−30	122	84	36	−66	0	−36	48
8	0	0	−4	0	0	13	0	−10	−10	0
9	0	0	0	0	−1	0	1	0	0	−1
10	0	0	0	0	−16	−20	36	−25	45	−81
11	−16	20	−16	−28	−25	20	35	−16	−28	−49
12	−1	−31	−30	62	−961	−930	1922	−900	1860	−3844
13	−1	−1	0	1	−1	0	1	0	0	−1
14	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
15	0	0	0	0	−1	1	1	−1	−1	−1
16	0	0	0	0	0	0	0	−4	−2	−1

$$\begin{aligned}
E_{3,4}^{(2)}(1) &= B_2^{-166}B_3^{88}B_4^{155}B_5^{8}B_6^{33}B_7^{-4}B_8^{-99}B_9^{386}B_{10}^{36}B_{11}B_{12}^{-1}\times \\
&\qquad\times B_{13}^{-91}B_{14}^{359}B_{15}^{-419}B_{16}^{57}, \\
E_{4,4}^{(2)}(1) &= B_2^{-165}B_3^{88}B_4^{155}B_5^{8}B_6^{33}B_7^{-4}B_8^{-99}B_9^{369}B_{10}^{36}B_{11}B_{12}^{-1}\times \\
&\qquad\times B_{13}^{-91}B_{14}^{358}B_{15}^{-402}B_{16}^{56}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что $E_{i,j}^{(2)}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \le j \le 4$.

Этап 3. Несложно видеть, что матрицы вида (1.1)–(1.3), порождающие группу $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$, где $n \ge 3$, связывает друг с другом равенство

$$E_{i,k}^{(3)}(1) = E_{i,j}^{(1)}(1)E_{j,k}^{(2)}(1)E_{i,j}^{(1)}(-1)E_{j,k}^{(2)}(-1), \tag{3.5}$$

справедливое для любых попарно различных индексов $1 \le i, j, k \le n$. Используя данное тождество, а также то, что $E_{i,j}^{(1)}(1), E_{i,j}^{(2)}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \le j \le 4$, в силу этапов 1 и 2 доказательства, мы получаем, что все матрицы $E_{i,j}^{(3)}(1)$, где $1 \le i \ne j \le 4$, содержатся в группе $\langle x, y\rangle$.

Учитывая этапы 1–3 и замечание в начале доказательства, мы тем самым завершаем доказательство теоремы 3.1. $\square$

Следствие 3.1. *Группа* $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ *является* $(2,3,30;10)$*-порожденной группой.*

Доказательство. Рассмотрим матрицы x, y, определенные в формулировке теоремы 3.1. В силу теоремы 3.1 мы знаем, что $\langle x, y\rangle = \mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$. Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что справедливы равенства

$$(xy)^{30} = I_8 \text{ и } [x,y]^5 = -I_8.$$

$\square$

3.2. Группа $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$

Данный раздел будет посвящен доказательству (2,3)-порожденности группы $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$. Полученный результат, представленный в теореме 3.2, был опубликован в статье [46].

Теорема 3.2. *Группа* $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ — $(2,3)$*-порожденная группа. Более точно, пусть*

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & -3 & -3 & 2 & -5 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & -3 & -4 & 3 & 2 & -7 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & -1 & 2 & 5 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & -3 & -4 & 4 & 2 & -6 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & -3 & -1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 & 7 & -3 & 1 & 4 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -3 & 5 & 3 & -3 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $x^2 = y^3 = I_{10}$ *и* $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z}) = \langle x, y\rangle$.

Замечание 3.3. В процессе доказательства теоремы 3.2 мы будем строить последовательности матриц из $\langle x, y\rangle$. Для удобства чтения мы будем придерживаться тех же принципов обозначения матриц из $\langle x, y\rangle$, что и в доказательстве теоремы 3.1, которые подробно описаны в замечании 3.1 (с одним уточнением: теперь у нас в доказательстве матрицы A_i, B_i, P_i, Q_i будут размера 5×5).

Кроме того, мы будем через R_i обозначать блочно-диагональные матрицы из $\langle x, y\rangle$ вида

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & (K^{-1})^T \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

где K — матрица размера 5×5.

Замечание 3.4. При помощи несложных матричных вычислений проверяется, что порядки матриц x и y — 2 и 3 соответственно, а также то, что $x, y \in \mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$. В силу теоремы 1.1, мы знаем, что $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z}) = \mathrm{ESp}_{10}(\mathbb{Z})$. Кроме того, легко видеть, что

$$\begin{aligned} E^{(t)}_{i,j}(k) &= \left(E^{(t)}_{i,j}(1)\right)^k, \text{ где } 1 \le i, j \le 5,\ t = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}, \\ E^{(3)}_{i,j}(k) &= \left(E^{(3)}_{i,j}(1)\right)^k, \text{ где } 1 \le i \ne j \le 5,\ k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

и $E^{(t)}_{i,j}(1) = E^{(t)}_{j,i}(1)$, где $1 \leq i,j \leq 5$ и $t = 1,2$. Следовательно, как и при доказательстве теоремы 3.1, нам для доказательства справедливости утверждения теоремы 3.2 достаточно показать, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы $E^{(t)}_{i,j}(1)$, где $1 \leq i \leq j \leq 5$, $t = 1,2$, и $E^{(3)}_{i,j}(1)$, где $1 \leq i \neq j \leq 5$.

Для облегчения чтения доказательства теоремы 3.2 оно будет разбито на несколько этапов, каждый из которых будет оформлен в виде отдельной леммы.

Лемма 3.1. *В группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы $E^{(1)}_{1,1}(4)$ и $E^{(1)}_{1,i}(2)$, $E^{(3)}_{1,i}(2)$, где $2 \leq i \leq 5$.*

Доказательство. Вначале определим следующие матрицы из $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned}
g_1 &= y(xy)^3(xy^2)^4, \\
g_2 &= (xy)^2(xy^2)^2(xy)^3, \\
g_3 &= y(xy^2)^2xy(xyxy^2)^2,
\end{aligned}$$

а также построим первую верхнюю блочно-треугольную матрицу вида (3.1) из $\langle x, y\rangle$:

$$P_1 = ((xyxy^2)^3g_1)^4.$$

С помощью этих матриц мы можем получить первые верхнетреугольные матрицы вида (3.3) из $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (y^{-1}g_2yx)^{-1}P_1y^{-1}g_2yx \cdot g_3^{-1}P_1^{-1}g_3 = \\
&= E^{(1)}_{1,1}(4)E^{(1)}_{1,3}(2)E^{(1)}_{1,5}(2), \\
A_2 &= (g_2^{-1}P_1g_2x)^2 = E^{(1)}_{1,1}(-4)E^{(1)}_{1,3}(-4), \\
A_3 &= xA_1A_2xA_1 = E^{(1)}_{1,3}(-4), \\
A_4 &= A_3A_2^{-1} = E^{(1)}_{1,1}(4).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали первое утверждение леммы. Положим

$$
\begin{aligned}
g_4 &= (xy^2)^3, \\
g_5 &= xyxy^2x, \\
g_6 &= y(xy^2)^2(xy)^2(xy^2)^2xy(xy^2)^3x, \\
g_7 &= (xyxy^2)^2(xy^2)^3x, \\
g_8 &= (xy^2)^3((xy)^2xy^2xy(xy^2)^2)^2.
\end{aligned}
$$

Используя эти матрицы, а также матрицы $A_1, \ldots, A_4$, мы можем построить новые верхнетреугольные матрицы вида (3.3) из $\langle x, y\rangle$:

$$
\begin{aligned}
A_5 &= g_5^{-1}P_1g_5 \cdot g_2xP_1xg_2^{-1} \cdot A_3^2A_4^2 = E_{1,2}^{(1)}(4), \\
A_6 &= (xg_5^{-1}P_1g_5)^2 \cdot (g_5xg_1^{-1})^{-1}P_1g_5xg_1^{-1} \times \\
&\quad \times (g_2^2xg_4)^{-1}P_1^{-1}g_2^2xg_4 \cdot A_1 = E_{1,4}^{(1)}(4), \\
A_7 &= (g_2^{-1}g_4x)^{-1}A_1g_2^{-1}g_4x \cdot g_6^{-1}A_1g_6 \times \\
&\quad \times A_1^{-4}A_3^{-1}A_4^{-4}A_5A_6 = E_{1,5}^{(1)}(2), \\
A_8 &= A_4^{-1}A_1A_7^{-1} = E_{1,3}^{(1)}(2), \\
A_9 &= (g_2xg_4)^{-1}A_8g_2xg_4 \cdot A_4^{-1}A_8^{-2} = E_{1,2}^{(1)}(2).
\end{aligned}
$$

Итак, мы доказали, что матрицы $E_{1,2}^{(1)}(2), E_{1,3}^{(1)}(2)$ и $E_{1,5}^{(1)}(2)$ содержатся в $\langle x, y\rangle$. Перед тем, как показать, что $E_{1,4}^{(1)}(2) \in \langle x, y\rangle$, нам необходимо построить несколько блочно-диагональных матриц вида (3.6). Рассмотрим

$$
\begin{aligned}
R_1 &= (xA_6)^2A_4^{-4}A_6^{-1}A_7^2A_9^{-2} = E_{1,2}^{(3)}(-4), \\
R_2 &= xR_1x \cdot A_4^{-8}A_6^{-3}A_7^2A_8^6 = E_{1,4}^{(3)}(-4), \\
R_3 &= g_7^{-1}R_1^{-1}g_7 \cdot R_2A_4^{-8}A_6^3A_7^6 = E_{1,5}^{(3)}(8), \\
R_4 &= g_8^{-1}P_1g_8 \cdot R_2^3R_3^{-1}A_4^{74}A_6^7A_7^4A_8^{-20}A_9^{-5} = E_{1,4}^{(3)}(2), \\
R_5 &= g_4^{-1}P_1^{-1}g_4 \cdot R_4A_4^{-2}A_6^{-1}A_7^{-2}A_8^2A_9 = E_{1,5}^{(3)}(-4).
\end{aligned}
$$

В частности, мы только что показали, что $E^{(3)}_{1,4}(2) \in \langle x, y\rangle$. Наконец, определим

$$\begin{aligned} g_9 &= (xy^2)^6(xy)^2xy^2xy(xy^2)^2, \\ P_2 &= (g_2^{-1}g_4xg_2xg_4)^{-1}A_8g_2^{-1}g_4xg_2xg_4 \times \\ &\quad \times R_4R_5^{-2}A_4^{25}A_6^{-1}A_7^{-4}A_9^2 = E^{(1)}_{1,4}(2)E^{(3)}_{1,5}(2). \end{aligned}$$

Теперь мы можем завершить доказательство леммы, построив следующие матрицы:

$$\begin{aligned} R_6 &= (g_2xg_4)^{-1}P_2g_2xg_4 \cdot A_4^{-1}A_6^2A_8^{-16}A_9^{-6} = E^{(3)}_{1,5}(2), \\ A_{10} &= P_2R_6^{-1} = E^{(1)}_{1,4}(2), \\ R_7 &= g_9^{-1}P_1^{-1}g_9 \cdot R_4^3A_4^{28}A_7^4A_8^{24}A_9^6A_{10}^{-9} = E^{(3)}_{1,2}(2), \\ R_8 &= (g_2^{-1}g_4xg_2xg_4)^{-1}A_9g_2^{-1}g_4xg_2xg_4 \times \\ &\quad \times R_4^{-5}R_6^{-6}A_4^{104}A_7^{10}A_8^{-4}A_9^{-5}A_{10}^9 = E^{(3)}_{1,3}(2). \end{aligned}$$

□

Определим два подмножества в $\mathbb{Z}^{10}$:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ u = (u_1, \ldots, u_{10})^T \;\middle|\; u_6 = u_7 = \cdots = u_{10} = 0 \right\}, \\ U_2 &= \left\{ u = (u_1, \ldots, u_{10})^T \;\middle|\; u_1 = u_2 = \cdots = u_5 = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Замечание 3.5. Пусть $u = (u_1, \ldots, u_{10})^T$ и $v = (v_1, \ldots, v_{10})^T$ содержатся в U_1, то есть $u_6 = \cdots = u_{10} = 0$ и $v_6 = \cdots = v_{10} = 0$. Несложно видеть, что

$$uv^T = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где K — матрица размера 5×5, в которой элемент на пересечении i-ой строки и j-ого столбца равен произведению $u_i v_j$. А значит справедливо, что

$$I_{10} + uv^T J_{10} + vu^T J_{10} = \begin{pmatrix} I_5 & K + K^T \\ 0 & I_5 \end{pmatrix},$$

то есть данная матрица обладает формой (3.3). Более того, из построений выше следует, что матрица $I_{10} + uv^T J_{10} + vu^T J_{10}$ при любых $u, v \in U_1$ будет содержаться в группе $\left\langle \left\{ E_{i,i}^{(1)}(2), E_{i,j}^{(1)}(1) \;\middle|\; 1 \le i < j \le 5 \right\} \right\rangle$.

Аналогично доказывается, что матрица $I_{10} + uv^T J_{10} + vu^T J_{10}$ содержится в группе $\left\langle \left\{ E_{i,i}^{(2)}(2), E_{i,j}^{(2)}(1) \;\middle|\; 1 \le i < j \le 5 \right\} \right\rangle$, если $u, v \in U_2$ (в частности, данная матрица обладает формой (3.4)).

Лемма 3.2. *В группе $\langle x, y \rangle$ содержатся матрицы $E_{1,1}^{(1)}(2)$ и $E_{i,j}^{(1)}(2)$, где $2 \le i \le j \le 5$.*

Доказательство. Сначала мы объясним построения, которые в дальнейшем будут использоваться в доказательстве леммы.

Рассмотрим 2 целочисленных вектора-столбца $u, v \in \mathbb{Z}^{10}$, ортогональных друг другу относительно J_{10}, то есть $v^T J_{10} u = 0$. Теперь покажем, что матрица

$$S = I_{10} + uv^T J_{10} + vu^T J_{10} \tag{3.8}$$

содержится в $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$. Для этого нам достаточно убедиться в том, что для матрицы S справедливо равенство $S^T J_{10} S = J_{10}$ (см. определение 1.3). Так как $J_{10}^T = -J_{10}$, то

$$\begin{aligned} S^T J_{10} S &= \left(J_{10} - J_{10} vu^T J_{10} - J_{10} uv^T J_{10}\right)\left(I_{10} + uv^T J_{10} + vu^T J_{10}\right) = \\ &= J_{10} - J_{10}\left(vu^T J_{10} uv^T + uv^T J_{10} uv^T + vu^T J_{10} vu^T + uv^T J_{10} vu^T\right) J_{10} = J_{10}. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что u и v — изотропные векторы, то есть $u^T J_{10} u = 0$ и $v^T J_{10} v = 0$, и что эти вектора ортогональны друг другу.

Теперь, если мы рассмотрим

$$u = (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)^T \qquad (3.9)$$

и

$$v = \left(\left(a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5\right)/2, b_2, b_3, b_4, b_5, 0, -a_2, -a_3, -a_4, -a_5)\right)^T, \qquad (3.10)$$

где все параметры a_i и b_i — четные, то мы можем записать S следующим образом:

$$S = \prod_{i=2}^{5} E_{1,i}^{(3)}(a_i) \cdot \prod_{i=2}^{5} E_{1,i}^{(1)}(b_i). \qquad (3.11)$$

Другими словами, S может быть выражена через произведение подходящих степеней матриц R_7, R_8, R_4, R_6, A_9, A_8, A_{10} и A_7. Следовательно, S принадлежит $\langle x, y\rangle$ по лемме 3.1. Предположим далее, что $g \in \langle x, y\rangle$ и $g^{-1}u$, $g^{-1}v$ содержатся в U_1. Тогда $g^{-1}Sg \in \langle x, y\rangle$ и

$$\begin{aligned} g^{-1}Sg &= I_{10} + g^{-1}uv^TJ_{10}g + g^{-1}vu^TJ_{10}g = \\ &= I_{10} + g^{-1}u(g^{-1}v)^Tg^TJ_{10}g + g^{-1}v(g^{-1}u)^Tg^TJ_{10}g = \\ &= I_{10} + g^{-1}u(g^{-1}v)^TJ_{10} + g^{-1}v(g^{-1}u)^TJ_{10}. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что $g^TJ_{10}g = J_{10}$, так как $g \in \langle x, y\rangle \subseteq \mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$. Таким образом, $g^{-1}Sg$ имеет вид (3.3) в силу замечания 3.5. Более того, ограничения на v выше гарантируют, что $g^{-1}Sg$ будет содержаться в $\left\langle \left\{ E_{i,i}^{(1)}(4), E_{i,j}^{(1)}(2) \,\middle|\, 1 \le i < j \le 5 \right\} \right\rangle$.

Теперь опишем поэтапно стратегию, которая применяется в дальнейших вычислениях:

1. Мы будем искать такие $g \in \langle x, y\rangle$, что последние пять элементов в первом столбце матрицы g^{-1} нулевые (эквивалентное условие — $g^{-1}u \in U_1$, где u задано в (3.9));

2. Затем мы найдем v вида (3.10) такой, что $g^{-1}v \in U_1$, а также найдем соответствующее разложение S вида (3.11). После этого мы вычисляем $g^{-1}Sg$;

3. Наконец, чтобы упростить дальнейшие вычисления, мы домножаем $g^{-1}Sg$ на подходящие степени $E_{1,1}^{(1)}(4), E_{1,2}^{(1)}(2), \ldots, E_{1,5}^{(1)}(2) \in \langle x, y\rangle$ (т.е. соответственно на степени матриц A_4, A_9, A_8, A_{10} и A_7, построенных в доказательстве леммы 3.1) и получаем матрицы из $\left\langle \left\{ E_{i,i}^{(1)}(4), E_{i,j}^{(1)}(2) \;\middle|\; 2 \le i < j \le 5 \right\} \right\rangle$.

Далее мы представим вычисления, основанные на стратегии, описанной выше. Пусть

$$
\begin{aligned}
g_{10} &= y^2((xy)^7xy^2)^2xy(xy^2)^2xyxy^2,\\
g_{11} &= y^2((xy^2)^3xy(xy^2)^4)^2xyxy^2x,\\
g_{12} &= y^2(xy^2)^4xy(xy^2)^9xy(xy^2)^4xyxy^2x,\\
g_{13} &= yxy^2((xy)^6xy^2(xy)^3)^2,\\
g_{14} &= yxy^2xyxy^2(xy(xy^2)^5)^2((xy^2)^2xy)^2xyxy^2,\\
g_{15} &= y(xy^2)^3(xy)^2(xy^2)^4xyxy^2(xy)^4(xy^2)^4(xy)^4xy^2xyxy^2x,\\
g_{16} &= (xy^2)^2xyxy^2xy(xy^2)^9xy(xy^2)^7x,\\
g_{17} &= y^2xy^2(xy)^2(xy^2)^8xy(xy^2)^2xyxy^2xy(xy^2)^2xy(xy^2)^3,\\
g_{18} &= (xy^2)^2xy(xy^2)^4(xyxy^2)^2xy^2(xy)^2(xy^2)^2xyxy^2(xy)^2 \times\\
&\quad \times(xy^2)^2(xy)^2(xy^2xy)^2(xy^2)^2xyx,\\
g_{19} &= y^2((xy^2)^3xy)^2xy^2xy(xy^2)^2(xy^2xy)^3xy(xy^2)^2xy(xyxy^2)^2xyx,\\
g_{20} &= y^2xyxy^2(xy)^{10}xy^2(xy)^5xy^2xy(xy^2)^3xyx,\\
g_{21} &= (xy^2)^4xy(xy^2)^9(xy(xy^2)^2)^2xyxy^2(xy)^3xy^2xy(xy^2)^3x,\\
g_{22} &= xy^2(xy)^2(xy^2)^2(xy)^7xy^2(xy^2xy)^2.
\end{aligned}
$$

Все эти матрицы, а также $g_{16}g_2xg_4$ и $g_{11}g_2xg_4$, удовлетворяют условию $g^{-1}u \in U_1$. Используя идеи, описанные в начале доказательства, мы можем найти 15 верхних блочно-треугольных матриц

$$A_{11}, \dots, A_{25} \in \langle x, y\rangle \cap \left\langle \left\{ E^{(1)}_{i,i}(4), E^{(1)}_{i,j}(2) \,\middle|\, 2 \le i < j \le 5 \right\} \right\rangle .$$

Данные матрицы строятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= g_{10}^{-1} R_7^{13} A_7^3 A_8^{-1} A_9^{-6} A_{10}^3 g_{10} \cdot A_4^{310} A_7^2 A_8^{708} A_9^{325} A_{10}^{-335},\\
A_{12} &= g_{11}^{-1} R_7 A_7^2 A_8^2 A_9^{-4} A_{10}^{-2} g_{11} \cdot A_4^{11} A_7^2 A_8^{36} A_9^{10} A_{10}^{-17},\\
A_{13} &= g_{12}^{-1} R_7^{-5} A_7^7 A_8^{-22} A_9^{-12} A_{10}^{-15} g_{12} \cdot A_4^{-54} A_7^5 A_8^{-272} A_9^{-92} A_{10}^{107},\\
A_{14} &= g_{13}^{-1} R_7^{45} A_7^{24} A_8^{24} A_9^{-62} A_{10}^{-15} g_{13} \cdot A_4^{2787} A_7^{15} A_8^{16759} A_9^{5571} A_{10}^{-5577},\\
A_{15} &= g_{14}^{-1} R_7 A_7 A_8^2 A_9^{-4} A_{10}^{-2} g_{14} \cdot A_4^{13} A_7^{16} A_8^{41} A_9^{21} A_{10}^{-14},\\
A_{16} &= g_{15}^{-1} R_7^2 A_7 A_8^3 A_9^{-4} A_{10}^{-2} g_{15} \cdot A_4^{12} A_7^{19} A_8^{94} A_9^{59} A_{10}^{-18},\\
A_{17} &= g_{16}^{-1} R_7^{-12} A_7 A_8^{-4} A_9^{11} g_{16} \cdot A_4^{158} A_7^8 A_8^{-867} A_9^{-288} A_{10}^{284},\\
A_{18} &= (g_{16} g_2 x g_4)^{-1} R_7^{-12} A_7 A_8^{-4} A_9^{11} g_{16} g_2 x g_4 \cdot A_4^{147} A_7^8 A_8^{841} A_9^{274} A_{10}^{-289},\\
A_{19} &= (g_{11} g_2 x g_4)^{-1} R_7 A_7^2 A_8^2 A_9^{-4} A_{10}^{-2} g_{11} g_2 x g_4 \cdot A_4^{15} A_7^2 A_8^{-62} A_9^{-20} A_{10}^{17},\\
A_{20} &= g_{17}^{-1} R_7^{-34} A_7^5 A_8^{14} A_9^{33} A_{10}^4 g_{17} \cdot A_4^{1186} A_7^{-18} A_8^{2317} A_9^{28} A_{10}^{-2343},\\
A_{21} &= g_{18}^{-1} R_7^2 A_7^7 A_8^{25} A_9^6 A_{10}^{-9} g_{18} \cdot A_4^{-8} A_7^{-4} A_8^{-18} A_9^{-14} A_{10}^4,\\
A_{22} &= g_{19}^{-1} A_8^{-3} A_9^{-1} A_{10} g_{19} \cdot A_4^{-72} A_7^{-59} A_8^{-150} A_9^{-50} A_{10}^{93},\\
A_{23} &= g_{20}^{-1} R_7^{-1} A_7 A_8^5 A_9^2 A_{10}^{-1} g_{20} \cdot A_4^4 A_8 A_9^4 A_{10}^{-1},\\
A_{24} &= g_{21}^{-1} R_7^{-1} A_7 A_8^{-13} A_9^{-6} A_{10}^6 g_{21} \cdot A_4^{-34} A_7^{-43} A_8^{135} A_9^{34} A_{10}^{-26},\\
A_{25} &= g_{22}^{-1} R_7^{11} A_7^{11} A_8^{61} A_9^5 A_{10}^{-18} g_{22} \cdot A_4^{-176} A_7^{-358} A_8^{-984} A_9^{-134} A_{10}^{530}.
\end{aligned}$$

Полученные матрицы $A_{11}, \dots, A_{25}$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
A_i &= I_{10} + k_1^{(i)} e_{2,7} + k_2^{(i)}(e_{2,8} + e_{3,7}) + k_3^{(i)}(e_{2,9} + e_{4,7}) + k_4^{(i)}(e_{2,10} + e_{5,7}) + \\
&\quad + k_5^{(i)} e_{3,8} + k_6^{(i)}(e_{3,9} + e_{4,8}) + k_7^{(i)}(e_{3,10} + e_{5,8}) + k_8^{(i)} e_{4,9} + k_9^{(i)}(e_{4,10} + e_{5,9}) + \\
&\quad + k_{10}^{(i)} e_{5,10}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Таблица 3.3. Коэффициенты $k_j^{(i)}$.

i	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$	$k_4^{(i)}$	$k_5^{(i)}$	$k_6^{(i)}$	$k_7^{(i)}$	$k_8^{(i)}$	$k_9^{(i)}$	$k_{10}^{(i)}$
11	−340	−738	350	−2	−1592	758	−4	−360	2	0
12	4	0	10	−4	−36	42	−12	−24	4	0
13	152	448	−182	−10	1320	−538	−30	212	10	0
14	−11136	−33500	11148	−30	−100776	33536	−90	−11160	30	0
15	−32	−52	18	−22	−24	10	−22	−4	8	−12
16	−276	−434	82	−88	−680	128	−138	−24	26	−28
17	−520	−1566	512	16	−4716	1542	48	−504	−16	0
18	−508	−1562	538	−16	−4800	1652	−48	−568	16	0
19	−20	−64	14	4	−204	46	12	−8	−4	0
20	0	−56	56	0	−4524	4576	36	−4628	−36	0
21	20	30	−10	10	40	−10	10	0	0	0
22	32	96	−64	40	288	−192	120	120	−76	48
23	0	8	0	0	20	−2	0	0	0	0
24	0	34	0	−34	236	−26	−144	0	26	52
25	92	732	−404	274	5472	−2964	2004	1596	−1078	728

Для удобства читателя значения коэффициентов $k_j^{(i)}$ представлены в таблице 3.3. Несложно видеть, что матрицы $A_{11}, \ldots, A_{25}$ попарно коммутируют. Используя стандартные методы линейной алгебры, мы можем выразить матрицы $E_{i,i}^{(1)}(4)$, $E_{i,j}^{(1)}(2)$, где $2 \le i < j \le 5$, как произведение степеней матриц $A_{11}, \ldots, A_{25}$:

$$\begin{aligned}
A_{26} &= A_{11}^{4} A_{12}^{663} A_{13}^{-539} A_{14}^{41} A_{15}^{-2990} A_{16}^{284} A_{17}^{-1062} A_{18}^{-64} A_{19}^{-130} A_{20}^{-7} \times \\
&\qquad \times A_{21}^{-2758} A_{22}^{-441} A_{23}^{-7712} A_{24}^{-410} A_{25}^{20} = E_{2,2}^{(1)}(4), \\
A_{27} &= A_{11}^{-223} A_{12}^{-1296} A_{13}^{-439} A_{14}^{273} A_{15}^{1344} A_{16}^{-754} A_{17}^{-2481} A_{18}^{-3281} A_{19}^{-115} \times \\
&\qquad \times A_{20}^{16} A_{21}^{-4816} A_{22}^{388} A_{23}^{4726} A_{24}^{176} A_{25}^{-45} = E_{2,3}^{(1)}(2), \\
A_{28} &= A_{11}^{-193} A_{12}^{-544} A_{13}^{-422} A_{14}^{430} A_{15}^{-526} A_{16}^{86} A_{17}^{-6663} A_{18}^{-2402} A_{19}^{-2032} A_{20}^{5} \times \\
&\qquad \times A_{21}^{2806} A_{22}^{365} A_{23}^{4126} A_{24}^{-818} A_{25}^{29} = E_{2,4}^{(1)}(2), \\
A_{29} &= A_{11}^{9} A_{12}^{726} A_{13}^{84} A_{14}^{107} A_{15}^{-1073} A_{16}^{478} A_{17}^{-2505} A_{18}^{295} A_{19}^{-1555} A_{20}^{-6} \times \\
&\qquad \times A_{21}^{4432} A_{22}^{3} A_{23}^{-153} A_{24}^{-595} A_{25}^{43} = E_{2,5}^{(1)}(2), \\
A_{30} &= A_{11}^{-165} A_{12}^{-1434} A_{13}^{-605} A_{14}^{287} A_{15}^{-564} A_{16}^{-147} A_{17}^{-4236} A_{18}^{-1920} A_{19}^{-842} A_{20}^{6} \times \\
&\qquad \times A_{21}^{-1107} A_{22}^{186} A_{23}^{1502} A_{24}^{-423} A_{25}^{3} = E_{3,3}^{(1)}(4),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{31} &= A_{11}^{-288}A_{12}^{-1498}A_{13}^{-1044}A_{14}^{424}A_{15}^{-1500}A_{16}^{-523}A_{17}^{-5165}A_{18}^{-3976}A_{19}^{-1498}A_{20}^{12}\times\\
&\qquad\times A_{21}^{-7035}A_{22}^{101}A_{23}^{-1052}A_{24}^{-413}A_{25}^{-22} = E_{3,4}^{(1)}(2),\\
A_{32} &= A_{11}^{-156}A_{12}^{-858}A_{13}^{189}A_{14}^{144}A_{15}^{2868}A_{16}^{-755}A_{17}^{-402}A_{18}^{-2403}A_{19}^{-604}A_{20}^{16}\times\\
&\qquad\times A_{21}^{-2281}A_{22}^{529}A_{23}^{7875}A_{24}^{453}A_{25}^{-49} = E_{3,5}^{(1)}(2),\\
A_{33} &= A_{11}^{-130}A_{12}^{-333}A_{13}^{-138}A_{14}^{66}A_{15}^{1249}A_{16}^{-787}A_{17}^{1004}A_{18}^{-2361}A_{19}^{196}A_{20}^{13}\times\\
&\qquad\times A_{21}^{-6846}A_{22}^{150}A_{23}^{1666}A_{24}^{552}A_{25}^{-59} = E_{4,4}^{(1)}(4),\\
A_{34} &= A_{11}^{-193}A_{12}^{-1167}A_{13}^{-919}A_{14}^{282}A_{15}^{-2016}A_{16}^{-287}A_{17}^{-3592}A_{18}^{-2583}A_{19}^{-1075}A_{20}^{6}\times\\
&\qquad\times A_{21}^{-6106}A_{22}^{-94}A_{23}^{-3519}A_{24}^{-379}A_{25}^{-11} = E_{4,5}^{(1)}(2),\\
A_{35} &= A_{11}^{-45}A_{12}^{321}A_{13}^{570}A_{14}^{28}A_{15}^{3182}A_{16}^{-439}A_{17}^{713}A_{18}^{-1022}A_{19}^{116}A_{20}^{10}\times\\
&\qquad\times A_{21}^{1505}A_{22}^{494}A_{23}^{8278}A_{24}^{462}A_{25}^{-30} = E_{5,5}^{(1)}(4).
\end{aligned}
$$

Для завершения доказательства нам осталось показать, что $E_{i,i}^{(1)}(2) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \le 5$. Для этого определим следующие матрицы:

$$
\begin{aligned}
g_{23} &= yxy((xy)^4(xy^2)^2)^2,\\
g_{24} &= (xyxy^2)^3(xy)^2(xyxy^2)^2(xy)^3xy^2(xy)^2x,\\
g_{25} &= (xyxy^2)^3,\\
P_3 &= (xy)^3(xyxy^2)^2,
\end{aligned}
$$

а затем построим

$$
\begin{aligned}
A_{36} &= (P_3g_{24})^4A_8^{-1}A_9^{-1}A_{27}^2A_{28}^{-1}A_{30}^4A_{31}^{-3}A_{33} = E_{1,1}^{(1)}(2)E_{4,4}^{(1)}(2),\\
A_{37} &= A_{36}^{-1}(P_3g_{23})^{20}A_4^8A_7^{15}A_8^{60}A_9^{15}A_{10}^{-15}\times\\
&\quad\times A_{26}^8A_{27}^{60}A_{28}^{-15}A_{29}^{15}A_{30}^{120}A_{31}^{-60}A_{32}^{60}A_{33}^8A_{34}^{-15}A_{35}^8 = E_{2,2}^{(1)}(2)E_{5,5}^{(1)}(2),\\
A_{38} &= (A_{37}g_{25}^{-1})^2A_8^{-2}A_9^{-1}A_{26}^{-1}A_{27}^{-2}A_{30}^{-2}A_{35}^{-1} = E_{1,1}^{(1)}(2),\\
A_{39} &= (A_{36}g_{25}^{-1})^2A_7^{-1}A_8^{-4}A_{10}A_{30}^{-8}A_{31}^4A_{32}^{-4}A_{33}^{-1}A_{34}A_{38}^{-3} = E_{5,5}^{(1)}(2),\\
A_{40} &= A_{38}^{-1}A_{36} = E_{4,4}^{(1)}(2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{41} &= A_{39}^{-1}A_{37} = E_{2,2}^{(1)}(2),\\
A_{42} &= (g_2xg_4A_{41}^{-1})^{-2}A_8^{-9}A_9^{-6}A_{27}^{-6}A_{30}^{-4}A_{38}^{-9}A_{41}^{-5} = E_{3,3}^{(1)}(2),
\end{aligned}
$$

Последние 5 равенств завершают доказательство леммы. □

Лемма 3.3. *В группе* $\langle x, y\rangle$ *содержатся матрицы* $E_{1,i}^{(3)}(1)$, *где* $2 \le i \le 5$, *и* $E_{3,5}^{(1)}(1)$, $E_{1,j}^{(1)}(1)$, *где* $1 \le j \le 5$.

Доказательство. Определим следующие матрицы:

$$
\begin{aligned}
g_{26} &= y(xy)^2(xyxy^2)^5(xy)^3(xyxy^2)^2,\\
g_{27} &= y(xy^2xyxy^2)^2xy(xyxy^2)^2,\\
g_{28} &= (xy)^2(xy^2)^2(xyxy^2)^2(xy^2)^3x,\\
g_{29} &= (xyxy^2)^3(xy)^2(xy^2)^2(xyxy^2)^2xy^2xy(xyxy^2)^2,
\end{aligned}
$$

и рассмотрим

$$
\begin{aligned}
R_9 &= (A_{27}g_{26}^{-1}yxy^2g_5)^{-2}A_8A_{27}A_{31}^{-1}A_{32}^2 = E_{3,5}^{(3)}(2),\\
R_{10} &= (g_{26}A_{27}^{-1})^2A_8^{-2}A_{27}A_{31}^2A_{42}^{-10} = E_{3,4}^{(3)}(2),\\
R_{11} &= (A_{31}x)^{-2}A_{27}A_{31}A_{32}^{-1}A_{42}^{-2} = E_{3,2}^{(3)}(2),\\
R_{12} &= (A_{31}g_5^{-1}g_{25}^{-1})^2R_9A_{27}A_{31}^{-2}A_{32}^{-2}A_{42}^2 = E_{3,1}^{(3)}(2),\\
R_{13} &= (g_2xg_4P_1)^2R_4^3R_{10}^2P_1^{-1}A_8^{72}A_9^{31}A_{10}^{-6}\times\\
&\quad \times A_{27}^{26}A_{28}^{-4}A_{31}^{-4}A_{38}^{72}A_{41}^{-12}A_{42}^{64} = E_{2,4}^{(3)}(-4),\\
R_{14} &= (A_{27}g_{27}^{-1})^2A_{27}^{-2}A_{28}^2A_{29}^2A_{41}^{-6} = E_{2,4}^{(3)}(2)E_{2,5}^{(3)}(2),\\
R_{15} &= g_{28}^{-1}R_{14}g_{28}\cdot R_6^{-6}R_9^{-4}R_{13}^{-1}R_{14}^{-2}A_7^{-12}A_8^{-80}A_9^{-33}A_{10}^{12}\times\\
&\quad \times A_{27}^6A_{28}^6A_{29}^{-6}A_{31}^8A_{32}^{-8}A_{38}^{-204}A_{41}^{18}A_{42}^{-16} = E_{2,5}^{(3)}(2).
\end{aligned}
$$

Теперь мы можем получить следующие матрицы:

$$
P_4 = (yxy^2xy(xy^2)^2(xy)^2(xy^2)^2(xy)^5(xyxy^2)^2x)^{15},
$$

$$P_5 = P_4 R_6^2 R_9^4 R_{13} R_{14}^2 A_7^{-4} A_8^{39} A_9^{22} A_{10}^{-6} A_{27}^{39} A_{28}^{-6} A_{29}^{-4} A_{31}^{-16} A_{32}^{-5} A_{34} A_{38}^{22} A_{40}^{6} A_{41}^{22} A_{42}^{70}.$$

Матрицы P_4 и P_5 ценны для дальнейшего доказательства, так как это верхние блочно-треугольные матрицы вида (3.1) из $\langle x, y\rangle$, у которых есть нечетные недиагональные элементы. Более того, с помощью P_5 мы можем построить первую верхнетреугольную матрицу вида (3.3) из $\langle x, y\rangle$, у которой блок L состоит только из 0 и 1:

$$A_{43} = (g_2 x g_4 P_5^{-1})^{-2} R_6^{-1} R_9^{-1} R_{15}^{-1} A_7^{-2} A_8^{-7} A_9^{-6} A_{10}^{4} \times$$
$$\times A_{27}^{-12} A_{28}^{7} A_{29}^{-4} A_{31}^{13} A_{32}^{-8} A_{34}^{2} A_{38}^{-6} A_{40}^{-5} A_{41}^{-8} A_{42}^{-21}.$$

Теперь положим

$$\begin{aligned}
P_6 &= (g_3^{-1} g_6)^{-1} A_{43} g_3^{-1} g_6 \times \\
&\quad \times R_{10}^2 R_{12} R_{14} R_{15}^{-1} A_8^6 A_9^3 A_{27}^7 A_{28}^{-1} A_{31}^{-3} A_{41}^7 A_{42}^2 = E_{2,1}^{(3)}(-1) E_{2,2}^{(1)}(1) E_{2,4}^{(1)}(1), \\
P_7 &= (g_{25} g_4^{-1} x g_2^{-1})^{-1} P_6 g_{25} g_4^{-1} x g_2^{-1} \times \\
&\quad \times R_9^2 R_{10}^2 R_{11} A_8^6 A_{27}^3 A_{31}^{-5} A_{32}^{-1} A_{42}^{34} = E_{3,1}^{(3)}(1) E_{3,2}^{(3)}(1) E_{3,4}^{(3)}(1) E_{3,3}^{(1)}(1) E_{3,5}^{(1)}(1), \\
P_8 &= (g_{26} g_4^{-1})^{-1} P_6 g_{26} g_4^{-1} \cdot R_9^{-3} R_{10} R_{11} R_{12}^2 \times \\
&\quad \times A_8^{-1} A_{27}^{-3} A_{31}^2 A_{32}^4 A_{42}^{36} = E_{3,1}^{(3)}(1) E_{3,2}^{(3)}(1) E_{1,3}^{(1)}(1) E_{2,3}^{(1)}(1) E_{3,3}^{(3)}(-1), \\
P_9 &= (g_{29} g_3^{-1})^{-1} P_6 g_{29} g_3^{-1} \times \\
&\quad \times R_9^{-3} R_{11}^3 R_{12}^{-1} A_{27}^{-3} A_{31}^{-1} A_{32}^6 A_{42}^{75} = E_{3,2}^{(3)}(1) E_{3,5}^{(3)}(1) E_{2,3}^{(1)}(1) E_{3,4}^{(1)}(1), \\
P_{10} &= (g_7 g_2)^{-1} P_6 g_7 g_2 \times \\
&\quad \times R_9^2 R_{11}^{-2} R_{12}^2 A_{27}^5 A_{31} A_{32}^{-3} A_{42}^{28} = E_{3,1}^{(3)}(1) E_{3,2}^{(3)}(1) E_{3,5}^{(3)}(1) E_{3,3}^{(1)}(1), \\
P_{11} &= (g_3^{-1} g_{26})^{-1} P_6 g_3^{-1} g_{26} \times \\
&\quad \times R_9^5 R_{10}^3 R_{11} R_{12}^{-1} A_8^6 A_{27}^4 A_{31}^{-8} A_{32}^{-5} A_{42}^{138} = E_{3,2}^{(3)}(1) E_{3,4}^{(3)}(1) E_{3,5}^{(3)}(1) E_{3,4}^{(1)}(1), \\
P_{12} &= (g_{27} g_3^{-1})^{-1} P_6 g_{27} g_3^{-1} \cdot R_9^{-1} R_{10}^2 R_{11}^2 A_8^4 A_{27}^{-1} A_{31}^{-4} A_{32}^3 A_{42}^{42} = \\
&\quad = E_{3,1}^{(3)}(1) E_{3,2}^{(3)}(1) E_{3,4}^{(3)}(1) E_{3,5}^{(3)}(1) E_{2,3}^{(1)}(1) E_{3,3}^{(1)}(-1) E_{3,5}^{(1)}(1).
\end{aligned}$$

Используя построенные выше матрицы, мы можем доказать некоторые из утверждений леммы, а именно:

$$\begin{aligned}
A_{44} &= P_7P_8^{-1}P_{10}P_{12}^{-1}A_8A_{27}A_{42}^2 = E_{1,3}^{(1)}(1),\\
A_{45} &= P_7P_8^{-1}P_9P_{11}^{-1}A_{44} = E_{3,5}^{(1)}(1),\\
A_{46} &= (g_2xg_4)^{-1}A_{44}g_2xg_4 \cdot A_8^{-1}A_{38}^{-1} = E_{1,2}^{(1)}(1),\\
A_{47} &= (g_2xg_5x)^{-1}A_{44}g_2xg_5x \cdot R_4^{-1}R_6^{-1}A_7^2A_{10}^2A_{38}^3A_{44}^{-3}A_{46}^{-1} = E_{1,5}^{(1)}(1).
\end{aligned}$$

Более того, рассмотрим

$$\begin{aligned}
g_{30} &= (xy^2)^3(xy)^2(xy^2)^2xy(xy^2)^7(xy)^3x,\\
g_{31} &= ((xy^2)^2xy)^2(xy)^2,\\
g_{32} &= y(xy^2)^2(xy)^2(xy^2)^4xyxy^2.
\end{aligned}$$

Теперь мы можем закончить доказательство леммы, построив следующие матрицы из $\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned}
R_{16} &= (g_5g_4)^{-1}A_{44}g_5g_4 \cdot A_{10}A_{38}^{-3}A_{44}^{-3} = E_{1,4}^{(3)}(1),\\
A_{48} &= (g_2xg_{31})^{-1}A_{44}g_2xg_{31} \cdot g_{30}^{-1}A_{47}^{-1}g_{30} \times\\
&\quad \times R_6^7R_7^{-1}R_{16}^5A_{10}^{-6}A_{38}^{180}A_{44}^{-9}A_{46}^6A_{47}^{-20} = E_{1,4}^{(1)}(1),\\
R_{17} &= g_{32}^{-1}R_{16}g_{32} \cdot R_6^{-1}R_7^2R_8^{-2}R_{16}^{-11}A_8^{-4}A_9^{-4}A_{38}^{63}A_{47}^{11}A_{48}^{11} = E_{1,5}^{(3)}(1),\\
R_{18} &= (g_{31}^{-1}g_4xg_2xg_4)^{-1}A_{47}g_{31}^{-1}g_4xg_2xg_4 \times\\
&\quad \times R_6R_7^2R_{16}^5R_{17}^{-1}A_{38}^{31}A_{44}^{14}A_{47}^{-3}A_{48}^{-9} = E_{1,2}^{(3)}(1),\\
A_{49} &= (g_{31}^{-1}g_4x)^{-1}A_{44}g_{31}^{-1}g_4x \cdot R_6^2R_{16}R_{17}^{-1}A_7^{-2}A_9A_{10}^{-1}A_{38}^{10}A_{48}^{-1} = E_{1,1}^{(1)}(1),\\
R_{19} &= g_{30}^{-1}R_{18}g_{30} \cdot R_8^5R_{16}^{14}R_{17}^{-2}R_{18}^{-11}A_{44}^{12}A_{46}^{19}A_{47}^{-14}A_{48}^{-9}A_{49}^{169} = E_{1,3}^{(3)}(1).
\end{aligned}$$

□

Лемма 3.4. *В группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы $E_{i,j}^{(1)}(1)$, где $2 \le i \le j \le 5$.*

Доказательство. Мы будем рассуждать так же, как и в начале доказательства леммы 3.3, но теперь мы рассматриваем $v \in \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}^{10}\right)$ вида (3.10) с a_i, $b_j \in \mathbb{Z}$, то есть без всяких предположений о их четности (взяв u как в (3.9), мы всегда получим, что $I_{10} + uv^T J_{10} + vu^T J_{10}$ — целочисленная матрица). Опять же, матрица S, определенная в (3.8), может быть представлена в виде (3.11), и теперь это произведение содержится в $\langle x, y\rangle$ по лемме 3.3. Другими словами, S — произведение подходящих степеней матриц R_{18}, R_{19}, R_{16}, R_{17}, A_{46}, A_{44}, A_{48} и A_{47}. Положим

$$
\begin{aligned}
g_{33} &= y^2xy^2(xy)^2(xy^2)^5xyxy^2(xy)^4(xy^2)^4(xyxy^2)^3(xy^2)^2(xy)^4(xy^2)^2x,\\
g_{34} &= xy((xy)^7xy^2)^2(xy)^5(xy^2)^2x.
\end{aligned}
$$

Несложно проверить, что последние 5 элементов первого столбца матриц g_{33}^{-1}, g_{34}^{-1}, а также $(g_{16}g_2xg_4)^{-1}$, — нулевые. Вспомним, что таким же свойством обладают матрицы $g_{10}^{-1}, \ldots, g_{22}^{-1}$, построенные в доказательстве леммы 3.2. Следовательно, для этих матриц g верно, что $g^{-1}u \in U_1$. Найдя подходящие векторы v и рассуждая так же, как в доказательстве леммы 3.2, мы можем определить следующие матрицы:

$$
\begin{aligned}
A_{50} &= g_{10}^{-1}R_{18}^{13}A_{44}^{-1}A_{46}^{-6}A_{47}^{3}A_{48}^{3}g_{10}\cdot A_{44}^{396}A_{46}^{169}A_{47}^{2}A_{48}^{-179}A_{49}^{308},\\
A_{51} &= g_{12}^{-1}R_{18}^{-5}A_{44}^{-22}A_{46}^{-12}A_{47}^{7}A_{48}^{-15}g_{12}\cdot A_{44}^{-92}A_{46}^{-32}A_{47}^{5}A_{48}^{47}A_{49}^{-48},\\
A_{52} &= g_{14}^{-1}R_{18}A_{44}^{2}A_{46}^{-4}A_{47}A_{48}^{-2}g_{14}\cdot A_{44}^{29}A_{46}^{17}A_{47}^{12}A_{48}^{-10}A_{49}^{22},\\
A_{53} &= g_{16}^{-1}R_{18}^{-12}A_{44}^{-4}A_{46}^{11}A_{47}g_{16}\cdot A_{44}^{-471}A_{46}^{-156}A_{47}^{8}A_{48}^{152}A_{49}^{184},\\
A_{54} &= (g_{16}g_2xg_{4)}^{-1}R_{18}^{-12}A_{44}^{-4}A_{46}^{11}A_{47}g_{16}g_2xg_4\cdot A_{44}^{445}A_{46}^{142}A_{47}^{8}A_{48}^{-157}A_{49}^{162},\\
A_{55} &= g_{22}^{-1}R_{18}^{11}A_{44}^{61}A_{46}^{5}A_{47}^{11}A_{48}^{-18}g_{22}\cdot A_{44}^{-324}A_{46}^{-24}A_{47}^{-138}A_{48}^{200}A_{49}^{-132},\\
A_{56} &= g_{33}^{-1}R_{18}^{-19}A_{44}^{195}A_{46}^{73}A_{47}^{19}A_{48}^{-43}g_{33}\cdot A_{44}^{39674}A_{46}^{15818}A_{47}^{3983}A_{48}^{-7963}A_{49}^{11901},\\
A_{57} &= g_{34}^{-1}R_{18}^{-1}A_{44}^{12}A_{46}^{5}A_{47}^{3}A_{48}^{-2}g_{34}\cdot A_{44}^{-85}A_{46}^{-28}A_{47}^{2}A_{48}^{25}A_{49}^{35},
\end{aligned}
$$

Таблица 3.4. Коэффициенты $k_j^{(i)}$.

i	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$	$k_4^{(i)}$	$k_5^{(i)}$	$k_6^{(i)}$	$k_7^{(i)}$	$k_8^{(i)}$	$k_9^{(i)}$	$k_{10}^{(i)}$
50	-92	-213	97	-1	-484	223	-2	-102	1	0
51	16	44	-31	-5	120	-89	-15	46	5	0
52	-12	-14	5	-7	24	-7	1	2	0	-2
53	-128	-387	124	8	-1170	375	24	-120	-8	0
54	-122	-385	137	-8	-1212	430	-24	-152	8	0
55	-9	36	-37	27	756	-492	342	303	-209	144
56	-21024	-52732	10584	-5294	-132260	26546	-13278	-5328	2665	-1333
57	-21	-64	18	2	-195	55	6	-15	-2	0

Очевидно, что матрицы $A_{50}, \ldots, A_{57}$ могут быть записаны в форме (3.12). Соответствующие коэффициенты $k_j^{(i)}$ представлены в таблице 3.4. Более того, мы можем упросить полученные матрицы, проведя редукцию элементов блока L в них по модулю 2 (это возможно в силу доказанных лемм 3.1 и 3.3; кроме того, используя равенство $A_{45} = E_{3,5}^{(1)}(1)$, возможно в представлении матриц $A_{50}, \ldots, A_{57}$ обнулить коэффициент $k_7^{(i)}$):

$$
\begin{aligned}
A_{58} &= A_{50}A_{27}^{107}A_{28}^{-48}A_{29}A_{31}^{-111}A_{40}^{51}A_{41}^{46}A_{42}^{242}A_{45}^{2},\\
A_{59} &= A_{51}A_{27}^{-22}A_{28}^{16}A_{29}^{3}A_{31}^{45}A_{34}^{-2}A_{40}^{-23}A_{41}^{-8}A_{42}^{-60}A_{45}^{15},\\
A_{60} &= A_{52}A_{27}^{7}A_{28}^{-2}A_{29}^{4}A_{31}^{4}A_{39}A_{40}^{-1}A_{41}^{6}A_{42}^{-12}A_{45}^{-1},\\
A_{61} &= A_{53}A_{27}^{194}A_{28}^{-62}A_{29}^{-4}A_{31}^{-187}A_{34}^{4}A_{40}^{60}A_{41}^{64}A_{42}^{585}A_{45}^{-24},\\
A_{62} &= A_{54}A_{27}^{193}A_{28}^{-68}A_{29}^{4}A_{31}^{-215}A_{34}^{-4}A_{40}^{76}A_{41}^{61}A_{42}^{606}A_{45}^{24},\\
A_{63} &= A_{55}A_{27}^{-18}A_{28}^{19}A_{29}^{-13}A_{31}^{246}A_{34}^{105}A_{39}^{-72}A_{40}^{-151}A_{41}^{5}A_{42}^{-378}A_{45}^{-342},\\
A_{64} &= A_{56}A_{27}^{26366}A_{28}^{-5292}A_{29}^{2647}A_{31}^{-13273}A_{34}^{-1332}A_{39}^{667}A_{40}^{2664}A_{41}^{10512}A_{42}^{66130}A_{45}^{13278},\\
A_{65} &= A_{57}A_{27}^{32}A_{28}^{-9}A_{29}^{-1}A_{31}^{-27}A_{34}A_{40}^{8}A_{41}^{11}A_{42}^{98}A_{45}^{-6}.
\end{aligned}
$$

Матрицы $A_{58}, \ldots, A_{65}$ имеют вид (3.12) с коэффициентами $k_j^{(i)} \in \{0, 1\}$. Значения коэффициентов $k_j^{(i)}$ представлены в таблице 3.5 на следующей странице.

Напомним, что мы уже доказали в лемме 3.3, что $E_{3,5}^{(1)}(1) \in \langle x, y \rangle$. Для

Таблица 3.5. Коэффициенты $k_j^{(i)}$.

i	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$	$k_4^{(i)}$	$k_5^{(i)}$	$k_6^{(i)}$	$k_7^{(i)}$	$k_8^{(i)}$	$k_9^{(i)}$	$k_{10}^{(i)}$
58	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
59	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0
60	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
61	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
62	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
63	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
64	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
65	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0

завершения доказательства достаточно построить следующие матрицы:

$$
\begin{aligned}
A_{66} &= A_{58}A_{59}^{-1} = E_{2,3}^{(1)}(1),\\
A_{67} &= A_{59}A_{60}^{-1} = E_{4,5}^{(1)}(1),\\
A_{68} &= A_{61}A_{66}^{-1} = E_{3,4}^{(1)}(1),\\
A_{69} &= A_{62}A_{66}^{-1} = E_{2,4}^{(1)}(1),\\
A_{70} &= A_{59}A_{67}^{-1}A_{68}^{-1}A_{69}^{-1} = E_{2,5}^{(1)}(1),\\
A_{71} &= A_{64}A_{67}^{-1} = E_{5,5}^{(1)}(1),\\
A_{72} &= A_{63}A_{67}^{-1}A_{69}^{-1}A_{70}^{-1} = E_{2,2}^{(1)}(1)E_{4,4}^{(1)}(1),\\
A_{73} &= A_{65}A_{68}^{-1}A_{72}^{-1} = E_{3,3}^{(1)}(1),\\
A_{74} &= (g_2xg_4)^{-1}A_{72}g_2xg_4 \times\\
&\quad \times A_{41}^{-4}A_{44}^{-9}A_{46}^{-6}A_{49}^{-9}A_{66}^{-18}A_{68}^{6}A_{69}^{2}A_{73}^{-45} = E_{4,4}^{(1)}(1),\\
A_{75} &= A_{72}A_{74}^{-1} = E_{2,2}^{(1)}(1).
\end{aligned}
$$

□

Из утверждений лемм 3.3 и 3.4 мы знаем, что $E_{i,j}^{(1)}(1) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \le i \le j \le 5$. Зная это, мы можем доказать, что матрицы $E_{i,j}^{(2)}(1)$, где $1 \le i \le j \le 5$, также содержатся в $\langle x, y\rangle$.

Лемма 3.5. *В группе $\langle x, y\rangle$ содержатся матрицы $E^{(2)}_{i,j}(1)$, где $1 \leq i \leq j \leq 5$.*

Доказательство. Несложно заметить, что

$$S = I_{10} \pm uu^T J_{10} \in \begin{cases} \left\langle \left\{ E^{(1)}_{i,j}(1) \;\middle|\; 1 \leq i \leq j \leq 5 \right\} \right\rangle \subseteq \langle x, y\rangle, & \text{если } u \in U_1, \\ \left\langle \left\{ E^{(2)}_{i,j}(1) \;\middle|\; 1 \leq i \leq j \leq 5 \right\} \right\rangle, & \text{если } u \in U_2. \end{cases}$$

Здесь U_1 и U_2 — подмножества $\mathbb{Z}^{10}$, определенные в (3.7). Также достаточно очевидно, что

$$g^{-1}Sg = g^{-1}(I_{10} \pm uu^T J_{10})g = I_{10} \pm (g^{-1}u)(g^{-1}u)^T g^T J_{10} g = I_{10} \pm (g^{-1}u)(g^{-1}u)^T J_{10}$$

при условии, что $g \in \mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$.

Таким образом, если мы рассмотрим $g \in \langle x, y\rangle \subseteq \mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ и $u \in U_1$ такие, что $g^{-1}u \in U_2$, то матрица $g^{-1}Sg$ принадлежит

$$\left\langle \left\{ E^{(2)}_{i,j}(1) \;\middle|\; 1 \leq i \leq j \leq 5 \right\} \right\rangle \cap \langle x, y\rangle.$$

Определим

$$\begin{aligned}
g_{35} &= y(xy)^2(xy^2(xy)^3)^2(xy)^4(xy^2)^2xyx, \\
g_{36} &= xy(xy^2)^2(xy)^3(xy^2)^2, \\
g_{37} &= y(xy)^2xy^2(xy)^3(xy^2)^2xyx, \\
g_{38} &= (xy)^5(xy^2)^2(xy)^4(xy^2)^5(xy)^3, \\
g_{39} &= y^2xy^2(xy)^2x, \\
g_{40} &= y(xyxy^2)^2(xy^2)^2xy, \\
g_{41} &= y^2xyxy^2xy(xy^2)^4xyx, \\
g_{42} &= yxy^2xy(xy^2)^2xy(xy^2)^4(xy)^3(xy^2)^2(xy)^2(xy^2)^3xyx, \\
g_{43} &= y((xy^2)^3xy)^2xy^2, \\
g_{44} &= (xy^2)^5xyxy^2x,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_{45} &= (xyxy^2)^2xy(xyxy^2)^3xy((xy)^2xy^2)^2(xyxy^2)^3y,\\
g_{46} &= y(xy^2)^2(xyxy^2)^2(xy)^4x,\\
g_{47} &= (xy^2)^3(xyxy^2)^3x,\\
g_{48} &= y(xy)^4(xyxy^2)^3(xy^2)^2,\\
g_{49} &= xyxy^2(xy)^7xy^2(xy)^2x,\\
g_{50} &= y^2(xy^2)^3,\\
g_{51} &= (xy^2xy)^3xyxy^2,
\end{aligned}
$$

а также

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (1,1,2,-1,0,0,0,0,0,0)^T,\\
u_2 &= (-1,1,3,-1,0,0,0,0,0,0)^T,\\
u_3 &= (-2,-7,-20,1,-5,0,0,0,0,0)^T,\\
u_4 &= (-10,-29,-64,3,-4,0,0,0,0,0)^T,\\
u_5 &= (-4,0,-2,3,-1,0,0,0,0,0)^T,\\
u_6 &= (-7,-19,-31,5,-2,0,0,0,0,0)^T,\\
u_7 &= (-3,-3,-11,4,-3,0,0,0,0,0)^T,\\
u_8 &= (-6,-3,13,-4,-1,0,0,0,0,0)^T,\\
u_9 &= (-6,-6,-19,7,-2,0,0,0,0,0)^T,\\
u_{10} &= (1,-3,-8,2,-1,0,0,0,0,0)^T,\\
u_{11} &= (0,-2,-6,1,-1,0,0,0,0,0)^T,\\
u_{12} &= (-3,-2,-4,2,0,0,0,0,0,0)^T,\\
u_{13} &= (-5,0,-2,3,-2,0,0,0,0,0)^T,\\
u_{14} &= (2,-2,-5,0,-1,0,0,0,0,0)^T,\\
u_{15} &= (-8,-11,-29,7,-2,0,0,0,0,0)^T,\\
u_{16} &= (-1,-3,-11,3,-2,0,0,0,0,0)^T,
\end{aligned}
$$

$$u_{17} \;=\; (-1,0,-1,1,-1,0,0,0,0,0)^T.$$

Рассмотрим теперь матрицы

$$B_i = \begin{cases} g_{34+i}^{-1}\left(I_{10} + u_i u_i^T J_{10}\right) g_{34+i}, & \text{где } 1 \leq i \leq 15, \\ g_{34+i}^{-1}\left(I_{10} - u_i u_i^T J_{10}\right) g_{34+i}, & \text{где } i = 16, 17, \end{cases}$$

которые содержатся в $\left\langle \left\{ E_{i,j}^{(2)}(1) \mid 1 \leq i \leq j \leq 5 \right\} \right\rangle \cap \langle x, y \rangle$. При этом $B_{16} = E_{5,5}^{(2)}(1)$ и $B_{17} = E_{2,2}^{(2)}(1)$. Очевидно, матрицы $B_1, \ldots, B_{17}$ попарно коммутируют друг с другом. Более того, эти матрицы порождают в группе $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ ту же подгруппу, что и $E_{i,j}^{(2)}(1)$, где $1 \leq i \leq j \leq 5$. То есть мы можем выразить $E_{i,j}^{(2)}(1)$ как произведение подходящих степеней матриц $B_1, \ldots, B_{17}$:

$$\begin{aligned}
E_{1,1}^{(2)}(1) &= B_1^{-97} B_2^{-105} B_3^{12} B_4^{2} B_5^{14} B_6^{-21} B_7^{95} B_8^{17} B_9^{2} B_{10}^{137} B_{11}^{10} B_{12}^{-29} \times \\
&\qquad \times B_{13}^{-10} B_{14}^{-277} B_{15}^{-19} B_{16}^{-40} B_{17}^{65}, \\
E_{1,2}^{(2)}(1) &= B_1^{34} B_2^{42} B_3^{6} B_4 B_5^{-9} B_6^{-10} B_7^{30} B_8^{-2} B_9^{-5} B_{10}^{56} B_{11}^{-15} B_{12}^{36} \times \\
&\qquad \times B_{13}^{-14} B_{14}^{-122} B_{15}^{-6} B_{16}^{-48} B_{17}^{16}, \\
E_{1,3}^{(2)}(1) &= B_1^{-160} B_2^{-221} B_3^{-20} B_4^{-3} B_5^{26} B_6^{34} B_7^{-93} B_8^{8} B_9^{22} B_{10}^{-180} B_{11}^{63} B_{12}^{-122} \times \\
&\qquad \times B_{13}^{54} B_{14}^{396} B_{15}^{19} B_{16}^{182} B_{17}^{-45}, \\
E_{1,4}^{(2)}(1) &= B_1^{-111} B_2^{-140} B_3^{-2} B_5^{16} B_6^{3} B_7^{11} B_8^{11} B_9^{10} B_{10}^{-5} B_{11}^{30} B_{12}^{-59} \times \\
&\qquad \times B_{13}^{16} B_{14}^{23} B_{15}^{-2} B_{16}^{52} B_{17}^{15}, \\
E_{1,5}^{(2)}(1) &= B_1^{14} B_2^{18} B_3^{-6} B_4^{-1} B_5^{2} B_6^{10} B_7^{-39} B_8^{-3} B_9^{2} B_{10}^{-65} B_{11}^{3} B_{12}^{-14} \times \\
&\qquad \times B_{13}^{8} B_{14}^{134} B_{15}^{8} B_{16}^{30} B_{17}^{-25}, \\
E_{2,3}^{(2)}(1) &= B_1^{85} B_2^{121} B_3^{13} B_4^{2} B_5^{-17} B_6^{-22} B_7^{63} B_8^{-4} B_9^{-13} B_{10}^{120} B_{11}^{-36} B_{12}^{75} \times \\
&\qquad \times B_{13}^{-32} B_{14}^{-262} B_{15}^{-13} B_{16}^{-111} B_{17}^{31}, \\
E_{2,4}^{(2)}(1) &= B_1^{107} B_2^{163} B_3^{15} B_4^{2} B_5^{-11} B_6^{-26} B_7^{74} B_8^{-2} B_9^{-16} B_{10}^{136} B_{11}^{-45} B_{12}^{69} \times \\
&\qquad \times B_{13}^{-40} B_{14}^{-298} B_{15}^{-15} B_{16}^{-135} B_{17}^{37},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E^{(2)}_{2,5}(1) &= B_1^{49}B_2^{45}B_3^{-12}B_4^{-2}B_5^{-7}B_6^{21}B_7^{-86}B_8^{-12}B_9B_{10}^{-128}B_{11}^{2}B_{12}^{6}\times\\
&\qquad\times B_{13}^{16}B_{14}^{265}B_{15}^{17}B_{16}^{57}B_{17}^{-57},\\
E^{(2)}_{3,3}(1) &= B_1^{36}B_2^{21}B_3^{-18}B_4^{-3}B_5^{-2}B_6^{31}B_7^{-119}B_8^{-12}B_9^{6}B_{10}^{-189}B_{11}^{12}B_{12}^{-21}\times\\
&\qquad\times B_{13}^{27}B_{14}^{393}B_{15}^{24}B_{16}^{99}B_{17}^{-75},\\
E^{(2)}_{3,4}(1) &= B_1^{-102}B_2^{-125}B_3^{4}B_4B_5^{12}B_6^{-7}B_7^{45}B_8^{12}B_9^{6}B_{10}^{57}B_{11}^{21}B_{12}^{-37}\times\\
&\qquad\times B_{13}^{5}B_{14}^{-107}B_{15}^{-9}B_{16}^{13}B_{17}^{35},\\
E^{(2)}_{3,5}(1) &= B_1^{-76}B_2^{-119}B_3^{-20}B_4^{-3}B_5^{16}B_6^{34}B_7^{-108}B_9^{16}B_{10}^{-193}B_{11}^{42}B_{12}^{-86}\times\\
&\qquad\times B_{13}^{43}B_{14}^{414}B_{15}^{22}B_{16}^{152}B_{17}^{-60},\\
E^{(2)}_{4,4}(1) &= B_1^{208}B_2^{244}B_3^{-10}B_4^{-2}B_5^{-30}B_6^{18}B_7^{-106}B_8^{-28}B_9^{-12}B_{10}^{-132}B_{11}^{-40}B_{12}^{88}\times\\
&\qquad\times B_{13}^{-6}B_{14}^{254}B_{15}^{21}B_{16}^{-12}B_{17}^{-80},\\
E^{(2)}_{4,5}(1) &= B_1^{-86}B_2^{-89}B_3^{18}B_4^{3}B_5^{8}B_6^{-31}B_7^{129}B_8^{17}B_9^{-2}B_{10}^{197}B_{11}B_{12}^{-1}\times\\
&\qquad\times B_{13}^{-21}B_{14}^{-404}B_{15}^{-26}B_{16}^{-79}B_{17}^{85}.
\end{aligned}
$$

□

Теперь мы можем перейти к доказательству основной теоремы параграфа.

Доказательство теоремы 3.2. Из утверждений лемм 3.3, 3.4 и 3.5 мы знаем, что $\langle x, y\rangle$ содержит матрицы $E^{(1)}_{i,j}(1)$, $E^{(2)}_{i,j}(1)$, где $1 \le i \le j \le 5$. Тогда, используя равенство (3.5) для матриц, порождающих $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$, мы получаем, что и $E^{(3)}_{i,j}(1)$, где $1 \le i \ne j \le 5$, содержатся в $\langle x, y\rangle$. Тем самым, с учетом замечания 3.4, мы завершаем доказательство теоремы 3.2. □

Список литературы

1. Васильев В. Л. О (2,3)-порождении симплектических групп больших размерностей над кольцом целых чисел // Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В. В. Морозова, (Казань, 25–30 сентября 2011 г.) и молодежной школы-конференции «Современные проблемы алгебры и математической логики» (Казань, 22 сентября – 3 октября 2011 г.).— Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2011.— Стр. 50–51.

2. Васильев В. Л. (2,3)-порождение симплектических групп над кольцом целых чисел // Шестнадцатая Санкт-Петербургская ассамблея молодых ученых и специалистов, СПб.— 2011.— Стр. 34.

3. Васильев В. Л. О (2,3)-порождении гиперболических симплектических групп // Записки научных семинаров ПОМИ.— 2014.— Т. 423.— Стр. 5–32.

4. Всемирнов М. А. Является ли группа $\mathrm{SL}(6, \mathbb{Z})$ (2,3)-порожденной? // Записки научных семинаров ПОМИ.— 2006.— Т. 330.— Стр. 101–130.

5. Всемирнов М. А. О $(2, 3)$-порождении матричных групп над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ.— 2007.— Т. 19, № 6.— Стр. 22–58.

6. Лузгарев А. Ю., Певзнер И. М. Некоторые факты из жизни $\mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$ // Записки научных семинаров ПОМИ.— 2003.— Т. 305.— Стр. 153–162.

7. Мазуров В. Л., Хухро Е. И. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Изд. 14 // Новосибирск.— 1999.

8. Нужин Я. Н. Об одном вопросе М. Кондера // Математические заметки.— 2001.— Т. 70 (1).— Стр. 79–87.

9. О'Мира О. Лекции о симплектических группах // М.: Издательство «Мир».— 1979.

10. Albert A. A., Thrompson J. Two-element generation of the projective unimodular group // Illinois J. Math.— 1959.— V. 3.— P. 421–439.

11. Bender P. Eine Prasentation der symplektischen Gruppe $Sp(4,\mathbb{Z})$ mit 2 Erzeugenden und 8 definierenden Relationen // Journal of Algebra.— 1980.— V. 65.— P. 328–331.

12. Brahana H. R. Pairs of generators of the known simple groups whose orders are less than one million // Ann. of Math.— 1930.— V. 31.— P. 529—549.

13. Cazzola M., Di Martino L. $(2,3)$-generation of $\mathrm{PSp}(4,q)$, $q = p^n$, $p \neq 2,3$ // Results in Mathematics.— 1993.— V. 23 (3–4).— P. 221–232.

14. Cohen J. On non-Hurwitz groups // Glasgow Math. J.— 1981.— V. 22.— P. 1–7.

15. Di Martino L., Vavilov N. $(2,3)$-generation of $\mathrm{SL}_n(q)$. I: Cases $n = 5,6,7$ // Communications in Algebra.— 1994.— V. 22 (4).— P. 1321—1347.

16. Di Martino L., Vavilov N., $(2,3)$-generation of $\mathrm{SL}_n(q)$. II: Cases $n \geq 8$ // Communications in Algebra.— 1996.— V. 24 (2).— P. 487—515.

17. Dixon J. D. The probability of generating the symmetric group // Math. Z.— 1969.— V. 110.— P. 199–205.

18. Fricke R., Klein F. Vorlesungen uber die Theorie der Elliptischen Modulunktionen // Leipzig: Teubner.— 1890.

19. Garbe D. Uber eine Classe von arithmetisch definierbaren Normalteilern der Modulgruppe // Math. Ann.— 1978.— V. 235.— P. 195–215.

20. Hahn A. J., O'Meara O. T. The classical groups and K-theory // Grundlehren Math. Wiss. Bd.— 1989.— V. 291.

21. Hua L. K., Reiner I. On the generators of the symplectic modular group // Trans. Amer. Math. Soc.— 1949.— V. 65.— P. 415–426.

22. Ishibashi H. Two-element generation of the integral symplectic group $Sp_n(\mathbb{Z})$ // Journal of Algebra.— 1996.— V. 179 (1).— P. 137–144.

23. Kantor W. M., Lubotzky A. The probability of generating a finite classical group // Geom. Ded.— 1990.— V. 36.— P. 67–87.

24. Liebeck M. W., Shalev A. The probability of generating a finite simple group // Geom. Ded.— 1995.— V. 56.— P. 103–113.

25. Liebeck M. W., Shalev A. Classical groups, probabilistic methods and the $(2, 3)$-generation problem // Annals of Math.— 1996.— V. 144 (1).— P. 77–125.

26. Liebeck M. W., Shalev A. Simple groups, probabilistic methods, and a conjecture of Kantor and Lubtotky // Journal of Algebra.— 1996.— V. 184 (1).— P. 31–57.

27. Lucchini A., Tamburini M. C. Classical groups of large rank as hurwitz groups // Journal of Algebra.— 1999.— V. 219 (2).— P. 531–546.

28. Macbeath A. M., Generators of the linear fractional groups // Symposium on Number Theory.— Houston: Amer. Math. Soc., 1967.— P. 14–32.

29. Miller G. On the groups generated by two operations // Bulletin of the American Mathematical Society.— 1901.— V. 7.— P. 424–426.

30. Milnor J. Introduction to algebraic K-theory // Ann. of Math. Stud.— Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.— N. 72.

31. Pellegrini M. A., Tamburini Bellani M. C., Vsemirnov M. A. Uniform $(2, k)$-generation of the 4-dimensional classical groups // Journal of Algebra.— 2012.— V. 369.— P. 322–350.

32. Room T. G. The generation by two operators of the symplectic group over GF(2) // J. Austral. Math. Soc.— 1959.— V. 1.— P. 38–46.

33. Room T. G., Smith R. J. A generation of the symplectic group // Quart. J. Math. Oxford Ser.— 1958.— V. 9 (2).— P. 177–182.

34. Sanchini P., Tamburini M. C. Constructive $(2,3)$-generation: a permutational approach // Rend. Sem. Math. Fis. Milano LXIV.— 1994.— P. 141–158.

35. Stanek P. Two-element generation of the symplectic group // Bull. Am. Math. Soc.— 1961.— V. 67.— P. 225–227.

36. Stanek P. Two-element generation of the symplectic group // Trans. Amer. Math. Soc.— 1963.— V. 108.— P. 429–436.

37. Tamburini M. C. Generation of certain simple groups by elements of small order // Rendiconti. Scienze Matematiche e Applicazioni. A. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.— 1987.— V. 121.— P. 21–27.

38. Tamburini M. C. The (2,3)-generation of matrix groups over the integers // Bianchi M., Longobardi P., Maj M. (Eds.) / Ischia Group Theory 2008: Proceedings of the Conference in Group Theory.— World Scientific, 2009.— P. 280–287.

39. Tamburini M. C., Vassallo S. (2,3)-generazione di gruppi lineari // Manara C. F. et al. (Eds.) Scritti in onore di Giovanni Melzi Vitae / Sci. Mat.— Milano, Italy: Univ. Cattolica del Sacro Cuore, 1994.— P. 392–399.

40. Tamburini M. C., Wilson J. S. On the generation of finite simple groups by pairs of subgroups // Journal of Algebra.— 1988.— V. 116 (2).— P. 316–333.

41. Tamburini M. C., Wilson J. S. On the $(2,3)$-generation of some classical groups, II // Journal of Algebra.— 1995.— V. 176 (2).— P. 667–680.

42. Tamburini M. C., Wilson J. S., Gavioli N. On the $(2,3)$-generation of some classical groups, I // Journal of Algebra.— 1994.— V. 168 (1).— P. 353–370.

43. Tamburini M. C., Zucca P. On a question of M. Conder // Rend. Mat. Acc. Lincei s. 9.— 2000.— V. 11 (1).— P. 5–7.

44. Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A. On (2,3)-generation of group $\mathrm{Sp}(8, \mathbb{Z})$ // Methods of Logic in Mathematics V, Short abstracts of an international meeting held on June 1–7, 2008.— St. Petersburg, 2008.— P. 16.

45. Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A. On $(2, 3)$-generation of low-dimensional symplectic groups over the integers // Communications in Algebra.— 2010.— V. 38 (9).— P.3469–3483.

46. Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A. The group $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ is (2,3)-generated // Cent. Eur. J. Math.— 2011.— V. 9 (1).— P. 36–49.

47. Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A. On the (2,3)-generation of hyperbolic symplectic groups of large rank // Journal of Pure and Applied Algebra.— 2013.— V. 217 (11).— P. 2036–2049.

48. Vsemirnov M. A. The group $\mathrm{GL}(6, \mathbb{Z})$ is $(2, 3)$-generated // Journal of Group Theory.— 2007.— V. 10 (4).— P. 425–430.

49. Vsemirnov M. On $(2, 3)$-generation of small rank matrix groups over integers // Quaderni del Seminario Matematico di Brescia.— 2008.— No. 30.— P. 1–15.

50. Wielandt H. Finite Permutation Groups // Boston, MA: Academic Press.— 1964.