На правах рукописи

БЕЛОВ ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ

МОДУЛИ ФУНКЦИЙ ИЗ МОДЕЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ H^2

01.01.01 - математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета.

Научный руководитель	-	доктор физико-математических наук, профессор В.П.Хавин
Официальные оппоненты	-	доктор физико-математических наук, профессор А.М.Коточигов
	-	кандидат физико-математических наук В.В.Капустин
Ведущая организация	-	РГПУ им. А.И.Герцена

Защита состоится "__" ________ 2008 года в ________ час. на заседании Диссертационного Совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического Института им. В.А. Стеклова Российской Академии Наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ РАН.

Автореферат разослан "__" ________ 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук

А.Ю.Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию свойств модулей функций из модельных (их еще называют коинвариантными) подпространств пространства Харди $H^2 = H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}\big|(-\infty,0) = 0\}$, где $\hat{f}$ обозначает Фурье-образ функции f; элемент f пространства $H^2(\mathbb{R})$ можно воспринимать и как граничный след некоторой аналитической функции класса Харди $H^2(\mathbb{C}^+)$, где $\mathbb{C}^+$ - открытая верхняя полуплоскость. Модельное подпространство $K_\Theta \subset H^2$ есть, по определению, $H^2 \ominus \Theta H^2$, где Θ - некоторая внутренняя функция (т.е. такая аналитическая в $\mathbb{C}^+$ ограниченная функция, что $\lim_{y\to 0}|\Theta(x+iy)| = 1$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$). Модельным подпространствам, их векторным и операторным аналогам посвящена обширная литература, затрагивающая ряд важных областей теории функций, теории операторов и разнообразных приложений. Мы интересуемся, прежде всего, тем, насколько малым может быть элемент такого подпространства, не будучи тождественным нулем. Эта постановка вопроса появилась в работах Хавина-Машреги[1] и была подсказана классической теоремой Берлинга-Мальявена о мультипликаторе (так называемой "Первой теоремой Берлинга-Мальявена"), которую можно воспринимать как одно из проявлений "принципа неопределенности", запрещающего чрезмерную и одновременную малость ненулевой функции и ее Фурье-образа (пространства Пэли-Винера, о которых идет речь в теореме Берлинга-Мальявена, суть, с точностью до унимодулярного множителя, модельные подпространства, отвечающие внутренним функциям $e^{i\sigma x}$, $\sigma > 0$). Результаты работ Хавина-Машреги развивались в различных направлениях в работах А.Д.Баранова[2]; А.Д.Баранова, А.А.Боричева, В.П.Хавина[3]; Дж.Машреги, Ф.Л.Назарова, В.П.Хавина[4]. В последней

[1] V.P.Havin, J.Mashreghi, *Admissible majorants for model subspaces of H^2. Part 1: slow winding of the generating inner function.*-Can. J.Math.**55**, 6(2003), 1231-1263.
V.P.Havin, J.Mashreghi, *Admissible majorants for model subspaces of H^2. Part 2: fast winding of the generating inner function.* -Can. J.Math.**55**, 6(2003),1231-1263.

[2] A.D.Baranov, *Polynomials in the de Branges spaces of entire functions.* -Ark.Mat, **44** (2006), no. 1, 16-38.

[3] A.D. Baranov, A.A. Borichev, V.P. Havin, *Majorants of meromorphic functions with fixed poles,* Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), 4, 1595-1628.

[4] Дж. Машреги, Ф.Л. Назаров, В.П. Хавин, *Теорема Берлинга-Мальявена о мультипликаторе:*

работе дано новое доказательство теоремы Берлинга-Мальявена, содержащее, в частности, новый способ построения L^2-функции с ограниченным спектром и с данной мажорантой модуля. Мы, в основном, занимаемся модельными подпространствами K_Θ, порожденными *мероморфной* внутренней функцией Θ. Каждое такое K_Θ тесно связано с некоторым гильбертовым пространством де Бранжа целых функций. Наши основные результаты могут быть переформулированы на языке пространств де Бранжа, играющих большую роль в приложениях к математической физике.

Задачи, которым посвящена диссертация, относятся к актуальной и развивающейся области теории функций.

Цель работы заключается в отыскании достаточных и (отдельно) необходимых условий, налагаемых на неотрицательную функцию ω ("мажоранту") и совместимых с неравенством $|f| \le \omega$ (п.в. на $\mathbb{R}$), где f - ненулевая функция из данного модельного подпространства. Если этому неравенству удовлетворяет какая-нибудь ненулевая функция $f \in K_\Theta$, то мажоранта ω называется *допустимой* для K_Θ (или Θ-допустимой).

Структура диссертации. Первая глава состоит из четырех параграфов. В этой главе приводятся общие определения и даются предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. В §1 описаны некоторые свойства модельных подпространств. В §2 обсуждается суть решаемых проблем и дается исторический обзор некоторых результатов. В §3 описывается структура диссертации. В §4 приводятся используемые обозначения и сведения о мероморфных внутренних функциях.

Вторая глава посвящена достаточным условиям допустимости мажорант для некоторых конкретных ситуаций. Эта глава состоит из пяти параграфов. За вводным §1 следует §2, в котором собраны критерии допустимости в терминах преобразования Гильберта $\widetilde{\Omega}$ функции $\Omega = \log(1/\omega)$.

Критерии допустимости, выраженные непосредственно в терминах функции Ω, содержатся в §3; §4 содержит условия B-допустимости, где B - произведение Бляшке (в $\mathbb{C}^+$); рассмотрен случай, когда мнимые

седьмое доказательство, Алгебра и Анализ **17** (2005), 5, 3-68.

части нулей функции B неограниченно растут. В §5 рассматриваются нули произведения Бляшке, касательно расположенные относительно оси $\mathbb{R}$.

Некоторые достаточные условия B-допустимости, существенно более ограничительные, чем у нас, были ранее получены в упомянутых выше работах Хавина-Машреги. Что касается необходимых условий, то они были получены лишь для весьма специальных произведений в цитированной выше статье А.Д.Баранова.

В третьей главе получены некоторые довольно общие необходимые условия допустимости, которые иногда оказываются точными. За вводным §1 мы переходим в §2 к некоторым предварительным результатам. В §3 дано доказательство формулы обращения для обобщенного преобразования Гильберта. Четвертый параграф содержит основные результаты главы, точность которых обсуждается в заключительном §5.

В четвертой главе даны некоторые достаточные условия *строгой* допустимости мажоранты ω (т.е. условия существования модельной функции f, для которой $|f| \asymp \omega$). За вводным §1 следует §2 в котором содержатся все основные результаты главы 4; они доказываются в §§3,4. В §5 даны примеры применения наших теорем в конкретных ситуациях.

Пятая глава посвящена некоторым свойствам преобразования Гильберта, важным в контексте проблемы допустимости мажорант (пятая глава основана на совместной работе с В.П.Хавиным). За вводным §1 следует §2, в котором доказывается существование "устойчиво плохих" по отношению к преобразованию Гильберта функций; §3 посвящен необходимым условиям липшицевости сопряженной функции.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее методы могут быть использованы для дальнейшего исследования свойств функций из модельных подпространтсв на вещественной прямой.

Апробация работы. Результаты работы неоднократно докладывались на семинаре ПОМИ РАН по теории функций; на семинаре в университете NTNU (Трондхейм); на конференциях "16th Summer St. Petersburg Meeting in Mathematical Analysis" и "Spaces of Analytic Functions and their Operators" (CIRM, Марсель, 2006, Франция).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1], [2], [4]. Работа [3] принята к печати.

Организация текста и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на 22 параграфа, изложена на 94 страницах. Список литературы включает 26 названий.

Содержание работы.

Вторая глава диссертации посвящена достаточным условиям Θ-допустимости для быстро растущего аргумента $\arg\Theta$. Один из основных результатов второй главы следующий ($\mathbf{P}$ - мера Пуассона на $\mathbb{R}$, $d\mathbf{P}(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}dx, x \in \mathbb{R}$):

Теорема 2.2.5. *Пусть функция* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$a)\ \text{функция } f \text{ строго возрастает и дифференцируема};$$

$$b) \quad (f^{-1})'(=h) \in Lip_\alpha(\mathbb{R}), (0<\alpha<1); \quad c) \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+f^2(t)} < +\infty.$$

Предположим, что $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. *Через* B_f *обозначим произведение Бляшке с нулями* $z_k = f(k)+i, k \in \mathbb{Z}$. *Тогда любая гладкая функция* $\omega = e^{-\Omega}$ *такая, что*

$$1) \int_{\mathbb{R}} \Omega d\mathbf{P} < +\infty, \quad 2) \quad \Omega'(x) = O(|x|^\beta) \quad (\text{при некотором } \beta \in (0,1)),$$

$$3) \quad |\widetilde{\Omega}'(x)| \le Ah(x) \text{ при любом } x \in \mathbb{R} \text{ и при некотором } A < 2\pi,$$

допустима для пространства K_{B_f}.

Во второй главе мы также рассматриваем касательные (по отношению к $\mathbb{R}$) расположения нулей. Это в корне меняет поведение аргумента $\arg B$: его рост теперь может быть нерегулярным. Возникает необходимость изменить методы, используемые ранее. Мы доказали некоторые результаты в этом направлении. Например:

Следствие 2.5.4. *Пусть* B *- произведение Бляшке с нулями* $z_k =$

$k+iy_k$ $(k\in\mathbb{Z}, y_k\le 1)$, *а последовательность* $\{y_k\}$ *такова, что частное* y_k/y_{k+1} *отделено от нуля и бесконечности, и*

$$\sum_k \frac{\log(y_k)}{k^2} > -\infty.$$

Тогда любая функция $\omega = e^{-\Omega}$ *такая, что* $\Omega \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbf{P})$, *B-допустима.*

В третьей главе мы даем некоторые необходимые условия Θ-допустимости для широкого класса мероморфных произведений Бляшке $\Theta = B$; наши основные ограничения касаются роста аргумента $|\arg B(x)|$ (мы предполагаем, что он растет не быстрее, чем степень $|x|$).

У этой части диссертации есть две особенности.

1) Необходимые условия допустимости рассматриваются в терминах некоторых *средних* функции $\Omega = -\log\omega$, а не самой функции Ω как таковой. Тем не менее, в некоторых случаях такие условия оказываются точными. Средние, которые мы имеем в виду, определяются следующим образом:

$$S_\lambda(f)(x) = \frac{1}{2\lambda(x)} \int_{|s-x|<\lambda(x)} f(s)ds, \quad x\in\mathbb{R},$$

где f - локально суммируемая функция на вещественной оси $\mathbb{R}$, а λ - положительная непрерывная функция, $\lambda \le 1$.

2) Наш подход основан на уравнении, полученном в работах Хавина-Машреги:

$$\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega} = 2\widetilde{\log m} + 2\pi n + \gamma;$$

оно характеризует Θ-допустимые мажоранты ω. К этому равенству естественно было бы применить преобразование Гильберта h и, используя формулу обращения, извлечь Ω, а затем сделать некоторые выводы из этого представления. Но этот план связан с определенными трудностями, т.к. ни $\arg\Theta$, ни $\widetilde{\Omega}$, вообще говоря, не суммируемы по мере Пуассона. Поэтому мы вынуждены изменить ядро интегрального сингулярного оператора h, чтобы он был применим к (по крайне мере некоторым) растущим функциям. Мы достигаем этой цели, вводя модифицированные преобразования Гильберта h_l, $l = 2, 3, ...$:

$$h_l(u)(x) = \frac{1}{\pi}(v.p.)\int_{\mathbb{R}} u(t)\frac{1}{x-t} \cdot \Re\left(\frac{x+i}{t+i}\right)^l dt,$$

и используя подходящую формулу обращения.

Следуя плану, обозначенному в 2), мы получили некоторые необходимые условия Θ-допустимости в терминах $S_\lambda(\Omega)$. Эти условия имеют некоторые интересные следствия.

Пример 1. *Положим $\Theta(z) = e^{i\sigma z}(\sigma > 0)$. Тогда любая Θ-допустимая мажоранта $\omega = e^{-\Omega}$ удовлетворяет неравенству*

$$|S_1(\Omega)(x)| \le C_1|x \log|x|| + C_2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Эта оценка точна.

Утверждение 4. *Положим $\Theta(z) = e^{i\sigma z}(\sigma > 0)$. Тогда для любой убывающей положительной функции γ такой, что $\lim_{x\to+\infty}\gamma(x) = 0$, существуют Θ-допустимая функция $\omega = e^{-\Omega}$ и последовательность $\{x_n\}_1^\infty(x_n \to +\infty)$ такие, что*

$$|S_1(\Omega)(x_n)| \ge x_n \log(x_n)\gamma(x_n).$$

Мы дадим еще один типичный пример для произведения Бляшке B_α.

Пример 3. *Пусть B_α - произведение Бляшке с нулями $z_k = \operatorname{sgn}(k)|k|^\alpha + i \quad (1/2 < \alpha < 1)$. Если функция $\omega = e^{-\Omega}$ B_α-допустима, то существуют такие константы C_1, C_2, что*

$$|S_1(\Omega)(x)| \le C_1|x|^{\frac{1}{\alpha}}|\log|x|| + C_2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Наши необходимые условия допустимости дают метод построения *положительных* мажорант ω, не Θ-допустимых для широкого класса мероморфных внутренних функций Θ. В §3.4.4 мы доказываем следующий факт:
Если Θ - мероморфная внутренняя функция, и $\arg\Theta \in L^1((1+|x|)^{-l-2})$,

$l \in \mathbb{N}$, то существует такая положительная ограниченная функция ω, что $\int_{\mathbb{R}} \log \omega d\mathbf{P} > -\infty$, но ω недопустима для K_Θ.

В главе 4 мы рассмотрели строгую допустимость. Основные результаты главы 4 - теоремы 4.2.4 и 4.2.5.

Теорема 4.2.5. *Пусть мероморфная внутренняя функция Θ и положительная функция $\omega = e^{-\Omega} \in L^2(\mathbb{R})$ таковы, что*

$$a) \quad \Omega \in L^1(\mathbf{P}); \qquad b) \quad \widetilde{\Omega} \in C^1(\mathbb{R});$$

$$c) \quad 0 < \inf_{\mathbb{R}}((\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega})') \leq \sup_{\mathbb{R}}((\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega})') < +\infty.$$

Тогда ω строго допустима для K_Θ.

Другое доказательство теоремы 4.2.5 следует из результатов работы Любарского-Сейпа[5], посвященной весовым пространствам Пэли-Винера. Нам неизвестно, позволяют ли методы этой статьи получить результаты для других мероморфных внутренних Θ, как в нашей теореме 4.2.4.

Теорема 4.2.4 является обобщением теоремы 4.2.5 для класса мероморфных внутренних функций с быстро растущими аргументами.

Мы дадим пример, иллюстрирующий теорему 4.2.4.

Следствие 4.5.4. *Пусть B_α - произведение Бляшке с нулями $z_k = \mathrm{sgn}(k)|k|^\alpha + i$, $k \in \mathbb{Z}$, $1/2 < \alpha < 1$. Если функция $\omega = e^{-\Omega} \in L^2(\mathbb{R})$ такова, что*

$$a) \quad \Omega \in L^1(\mathbf{P}); \qquad b) \quad |\widetilde{\Omega}'(x)| < C|x|^{1/\alpha - 1} \text{ для некоторого } C < \frac{\pi}{\alpha},$$

то ω строго допустима для K_{B_α}.

Условия строгой допустимости, полученные в главе 4, включают $\widetilde{\Omega}$ (не только Ω). Процедура коррекции (метод Назарова) преобразования

[5] Yu.I.Lyubarskii, K. Seip, *Weighted Paley-Wiener spaces.* J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 4, 979-1006.

Гильберта не сохраняет двусторонний характер отношения $|f| \asymp \omega$, так что отыскание условий, достаточных для строгой допустимости и выраженных в терминах функции Ω, остается открытой проблемой .

Пятая глава посвящена вопросу, касающемуся отношений между двумя включениями: $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R})$ и $\widetilde{f} \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R})$; мы всегда будем считать, что $f \in L^1(\mathbf{P})$ и $0 < \alpha \leq 1$. Случай $\alpha = 1$ представляет для нас особый интереса. Сходные вопросы для единичной окружности $\mathbb{T}$ были решены И.И.Приваловым в 20-х годах 20-го века. Случай прямой (т.е. относящийся к оператору h) не вполне аналогичен. Если $\alpha \in (0,1)$, то, так же, как и на $\mathbb{T}$, оператор h отображает Lip_α в себя. Но сходство $\mathbb{T}$ и $\mathbb{R}$ исчезает, когда мы обращаемся к случаю $\alpha = 1$. На единичной окружности функция $\widetilde{f}$ (если $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{T})$), вообще говоря, не принадлежит классу $\mathrm{Lip}_1(\mathbb{T})$, но, тем не менее, остается равномерно непрерывной (с оценкой модуля непрерывности). Но на прямой такое сохранение равномерной непрерывности верно только при дополнительном предположении об *ограниченности* функции f. Если функция $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$ не ограничена, то равномерная непрерывность функции $h(f)$ сохраняется только локально, но может быть разрушена в целом. (Отметим, что ограниченность функции $f = -\log \omega$ лишает проблему допустимости мажоранты ω всякого интереса).

Более того, в главе 5 мы доказываем (с помощью явного построения) существование такой функции $f \in L^1(\mathbf{P}) \cap \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, что $h(g)$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$ всегда, когда разность $f - g$ ограничена.

Как показано в работах Хавина-Машреги, ω допустима для $K_{e^{i\sigma x}}$, если $h(\Omega)$ - липшицева функция с достаточно малой константой липшицевости. Но в силу сказанного выше (о возможной утрате липшицевости под действием оператора h) мы, на первый взгляд, не можем непосредственно заключить, что липшицевость самой функции Ω (в сочетании с включением $\Omega \in L^1(\mathbf{P})$) обеспечивает допустимость мажоранты $e^{-\Omega}$ для $\Theta(x) = e^{i\sigma x}$, т.е. не можем получить теорему Берлинга-Мальявена. Однако, если бы в $L^1(\mathbf{P})$ нашлась такая функция Ω_1, что $h(\Omega_1)$ липшицева, и $\Omega_1 \geq \Omega$, то допустимость мажоранты $e^{-\Omega}$ была бы установлена. Естественно пытаться построить функцию Ω_1 (для липшицевой Ω) путем стандартного сглаживания (т.е. свернув Ω с гладкой функцией). Наш пример "устойчиво плохой" функции показывает, что такой способ не может привести к цели, ибо регуляризованная Ω_1 непременно удовлетворяет неравенству $|\Omega_1 - \Omega| \leq const$.

Заметим, что метод Назарова корректировки функции Ω такой, что $h(\Omega) \notin \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, нелинеен.

Пятая глава также содержит некоторые достаточные (и "почти необходимые") условия того, чтобы функция $h(f)$ принадлежала классу $\mathrm{Lip}_1(\mathbb{R})$, и некоторые результаты о равномерной непрерывности функции $h(f)$.

` Литература

[] Публикации автора по теме диссертации:

[1] Ю.С. Белов, В.П. Хавин, *К теореме И.И. Привалова о преобразовании Гильберта липшицевых функций,* Мат. Физ. Анал. Геом. **11** (2004), 4, 380-407.

[2] Ю.С. Белов, *Критерии допустимости мажорант для модельных подпространств с быстро растущим аргументом порождающей внутренней функции,* Записки научных семинаров ПОМИ **345** (2007), 55-85.

[3] Ю.С. Белов, *Необходимые условия допустимости для некоторых модельных подпространств,* Алгебра и Анализ, принято к печати.

[4] Ю.С. Белов, *Модельные функции с почти предписанным модулем,* Алгебра и Анализ, **2** (2008), 3-18.