На правах рукописи

ГОРБУЛЬСКИЙ АЛЕКСАНДР ДАВИДОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ МАСШТАБИРОВАННОЙ ЭНТРОПИИ ФИЛЬТРАЦИЙ СИГМА-АЛГЕБР

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2008

Работа выполнена в лаборатории теории представлений и вычислительной математики Санкт-Петербургского Отделения Математического Института им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук.

Научный руководитель	—	доктор физико-математических наук, профессор Вершик А. М.
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, профессор Лифшиц М. А.
	—	кандидат физико-математических наук Гордин М. И.
Ведущая организация	—	Московский Государственный Университет

Защита состоится "___" ____________ 2008 года в __ час. на заседании Диссертационного Совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического Института им. В. А. Стеклова Российской Академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ауд. 311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ РАН

Автореферат разослан "___" __________ 2008 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Зайцев А. Ю.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Диссертация посвящена теории убывающих последовательностей σ-алгебр, или фильтраций σ-алгебр. Важность этой теории отмечаась в статьях А. Н. Колмогорова, В. А. Рохлина, Дж. Дуба, М. Розенблатта и др.*) С позиций общей теории меры и эргодической теории ее исследовали А. М. Вершик, В. Г. Винокуров и их ученики. Изучение фильтраций σ-алгебр стала особенно актуальной при их появлении в теории случайных процессов и в теории апроксимации эргодических преобразований. Одной из первых задач этой теории является классификация фильтраций σ-алгебр.

Вопрос о классификации фильтраций σ-алгебр возник после того, как А. М. Вершиком было доказано, что существует континуум множество метрически неизоморфных однородных (например, диадических) фильтраций †). Инварианты фильтраций могут служить источником для построения инвариантов автоморфизмов и эндоморфизмов, а также для построения характеристик стационарных процессов, которые не меняются при кодировании.

Наиболее удобными инвариантами фильтраций σ-алгебр являются инварианты энтропийного типа‡). Они были определены в работах А. М. Вершика и использовались в работах Д. Рудольфа, К. Хоффмана, Д. Хейклен;

---

*)Е. И. Динабург, Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем Изв. АН СССР. Сер. матем., 1971, 35:2, 324–366

В. А. Рохлин, Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой, УМН, 1967, 22:5(137), 3–56

†)А.М. Вершик, Убывающие последовательности измеримых разбиений, *Докл.Акад.Наук СССР* **193**, вып. 4 (1970), 748-751. А.М. Вершик, Континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей, *Функционал. анализ и прилож.* **5**, вып. 3 (1971), 16-18.

‡)А.М. Вершик, Убывающие последовательности измеримых разбиений *Алгебра и Анализ* **6**, вып.4, (1994), 1-68.

Наиболее простым является энтропия фильтраций (экспоненциальная) которая совпадает в некоторых случаях с энтропией действия групп [§)]

Более глубокий энтропийный инвариант фильтрации - масштабированная энтропия была введена А. М. Вершиком [¶)] и ее изучение является также предметом настоящей диссертации.

В работе исследуется понятие масштабированной энтропии фильтрации σ-алгебр (=монотонно убывающей последовательности σ-алгебр). Предлагается метод вычисления этой энтропии для фильтрации σ-алгебр прошлых марковского процесса, определяемого случайным блужданием по траекториям бернуллиевского действия коммутативной или нильпотентной счетной группы. Для фильтрации, порожденной бернуллиевским действием G, скейлинговая энтропия равна $h(G)$ -энтропии действия G, скейлинг равен

$$c(n,\varepsilon) = (nlog(\frac{1}{\varepsilon}))^{\frac{d}{2}},$$

где d- ранг группы G. Из того, что масштабированная энтропия есть метрический инвариант фильтрации, следует, что последовательности σ-алгебр прошлых случайных блужданий по траекториям бернуллиевского действия решеток $\mathbb{Z}^d$ - метрически неизоморфны при различных d, а так же при одном и том же d, но и при различных значениях энтропии схемы Бернулли. Дается краткий обзор метрической теории фильтраций, в частности приводится формулировка критерия стандартности и его связей с масштабированной энтропией и понятием башни мер.

[§)] А.М. Степин, Об энтропийных инвариантах убывающих последовательностей измеримых разбиений, *Функционал. анализ и прилож.* **5**, вып. 2 (1971), 80-84.

[¶)] А.М. Вершик, Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры, *Успех.мат.наук* **55**, вып. 4 (2000),59-128.

Таким образом, тематика диссертации актуальна.

Цель работы заключается в вычислении масштабированной энтропии фильтрации прошлых случайного блуждания по траекториям действия нильпотентных групп.

Основные результаты работы.

– В работе установлено, что скейлинг в определении комбинаторной энтропии не может быть заменен на субэкспоненциальный, ни для какого класса убывающих фильтраций.

Вычислены скейлинг и скейлинговая энтропия одного класса фильтраций. Подробные определения приведены в тексте диссертации. Опишим,лишь основной объект изучения. Пусть Z - случайное блуждание по случайному сценарию, порожденное простым блужданием на решетке Z^d размерности d, или на счетной нильпотентной группе G размерности d.

– В работе установлено, что фильтрация прошлых такого процесса имеет скейлинг

$$c(\varepsilon, n) = (n \log(\frac{1}{\varepsilon}))^{d/2}$$

И энтропия фильтрации с таким скейлингом равна $h(Z) = h(Z^d)$ $(h(G))$.

Следствие. *Все такие фильтрации попарно неизоморфны для разных d. Для одинаковой размерности фильтрации изоморфны разве что при одинаковой энтропии действия.*

– Сопоставляя полученный результат с результатом Дж. Стейфа и Ф. Холландера о бернуллиевских свойствах СБСС процессов, получаем примеры нестандартной фильтрации бернуллиевского и слабо бернуллиевского процесса.

– Установлено, что стандартная 4-адическая фильтрация может быть интерполированна до диадической фильтрации со скейлингом сколь угодно близким к экспоненциальному. То есть, наличие стандартной 4-адической подфильтрации не накладывает ограничений на скорость роста скейлинга фильтрации.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее методы могут быть использованы для дальнейшего исследования вопросов классификации эндоморфизмов и фильтраций.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинаре ПОМИ РАН по теории представлений и динамическим системам, на конференции "Эйлер и современная комбинаторика". На семинарах в институте Шредингера в Вене и университете Коперника в г.Торунь.

Публикации. Все результаты диссертации опубликованы - работы [1],[2],[3],[4],[5].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на 16 параграфов (нумерация параграфов сквозная), изложена на 98 стр. Список литературы включает 35 названий.

Благодарности. Я глубоко признателен научному руководителю А. М. Вершику за оргомный вклад в мое математическое образование, многолетние обсуждения тематики, постановку задач и научное руководство.

Содержание работы.

В работе исследуется понятие масштабированной энтропии фильтрации σ-алгебр (=монотонно убывающей последовательности σ-алгебр)[‖)]. Предлагается метод вычисления этой энтропии для последовательности σ-алгебр

[‖)] А.М. Вершик, Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры, *Успех.мат.наук* **55**, вып. 4 (2000),59-128.

прошлых марковского процесса, определяемого случайным блужданием по траекториям бернуллиевского действия коммутативной или нильпотентной счетной группы (Теоремы 5,6). Из того, что масштабированная энтропия есть метрический инвариант фильтрации, следует, что последовательности σ-алгебр прошлых случайных блужданий по траекториям бернуллиевского действия решеток - групп $\mathbb{Z}^d$ - метрически неизоморфны при различных размерностях d, а так же при одном и том же d, но и при различных значениях энтропии схемы Бернулли. Дается краткий обзор метрической теории фильтраций, в частности приводится формулировка критерия стандартности и его связей с масштабированной энтропией и понятием башни мер.

Первая глава состоит из четырех параграфов. В этой главе приводятся общие определения и факты энтропийной теории фильтраций. В параграфе 1 дается определение допустимой полуметрики, приводится определение метрики Канторовича на мерах. В параграфе 2 приводится конструкция итерированных полуметрик и критерий стандартности. В третьем параграфе обсуждается конструкция башни мер. В четвертом параграфе приводится эквивалентная формулировка критерия стандартности.

Вторая глава содержит определение основного объекта изучения диссертации - масштабированной энтропии. Эта глава состоит из трех параграфов. В них даются определения энтропии метрического пространства, масштабированной энтропии и экспоненциальной энтропии.

Третья глава состоит из 5 параграфов. В первом параграфе (§8) обсуждается скейлинг фильтрации случайных блужданий.

Основной результат параграфа 9 - теорема о бесконечности роста стандартной фильтрации с субэкспоненциальным скейлингом. Этот результат показывает, что несмотря на то, что существуют нестандартные фильтрации с нулевой экспоненциальной энтропией, попытка заменить скейлинг на меньшую последовательность не приводит к новому инварианту.

Теорема 3.3. *Для стандартной диадической фильтрации* $\mathfrak{F}$ *и любой последовательности положительных чисел* $\alpha_n \to 0$*, найдется двучленное разбиение* γ*, с бесконечной энтропией* $h(\gamma|\{\xi_n\}_n)$ *-*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{h(\gamma|\{\xi_n\}_n)}{2^n \cdot \alpha_n} = \infty$$

В параграфе 10 приведен аналогичный результат для эндоморфизмов - энтропия Колмогорова-Синая**) произвольного эргодического эндоморфизма с субэкспоненциальным скейлингом бесконечна.

Теорема 3.7. *Пусть эргодический эндоморфизм* T *действует на пространстве Лебега* (X,μ)*. Для любой последовательности* $\alpha_n = o(n)$ *найдется такое двучленное разбиение* γ*, что*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{H(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\gamma)}{\alpha_n} = \infty^{\dagger\dagger)}$$

Параграф 11 содержит теорему о связи комбинаторной и масштабированной энтропий.

Теорема.*3.11 Для диадической фильтрации, экспоненциальная энтропия совпадает со скейлинговой энтропией, при выборе скейлинга* $c(n,\varepsilon) = 2^n$.

)Колмогоров А.Н., Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега. -*Докл. АН СССР*, **119, вып.(1958) с.861-864.

††)Это показывает, что в определении Колмогоровской энтропии нельзя заменить экспоненциальный рост на произвольный

В параграфе 12 обсуждается основной инвариант и его связь с энтропийными инвариантами. Построен пример интерполяционных последовательностей с большим скейлингом. Оказывается, что стандартность 4-адической подпоследовательности не накладывает ограничений на скорость роста скейлинга.

Теоерма 3.12. *Для любой последовательности $c_n = o(2^n)$, стандартная 4-адическая фильтрация допускает интерполяцию до диадической фильтрации с положительной скейлинговой энтропией со скейлингом $S = c(\varepsilon, n) = c_n$.*

В главе 4 - вычисляется масштабированная энтропия фильтрации прошлых случайных блужданий на действии решеток и нильпотентных групп, это является основным результатом диссертаци.

Глава состоит из четырех параграфов.

В параграфе 13 обсуждаются результаты Ф. Холандера и Дж. Стейфа о свойствах процессов случайного блуждания по случайному сценарию. Свойства процесса резюмированны в следующих утверждениях.

. СБСС процесс на решетке $\mathbb{Z}^d$ в зависимости от ее размерности, имеет следующие свойства.

1. При размерности решетки $d = 1$ процесс СБСС не обладает свойством свободно-бернуллиевости (loosely Bernoulli)

2. При размерности решетки $d = 2$ процесс СБСС не изоморфен бернуллиевскому.

3. При размерности решетки $d = 3; 4$ СБСС процесс изоморфен бернуллиевскому, но не обладает свойстом слабо-бернуллиевского, (weak Bernoulli).

4. Наконец, при размерностях решетки $d \geqslant 5$ СБСС процесс слабо-бернуллиевский.

В параграфе 14 доказана нестандартность фильтрации прошлых случайных блужданий на действии решеток.

Теорема 4.2. *Существует ρ - полуметрика на пространстве X и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого полинома p найдется такой номер n_0, что для всех точек, кроме множества меры ε,*

$$\mu\{y : \rho_n(x, y) < \varepsilon\} < \frac{1}{p(n)}, n > n_0,$$

где ρ_n - итерированная метрика.

В пятнадцатом параграфе приведены доказательства некоторых результатов теоретико-вероятностного характера, которые использованы в последнем параграфе диссертации.

Теорема 4.4. *Среди всех реализаций случайного блуждания по дисретной нильпотентной группе G можно выделить такое множество M меры $1-\delta$ и такое число h_0, что для любого числа $h > h_0$ и любой пары блужданий $\{u_i\}, \{v_i\}$ из M найдется такое число*

$$n \in (h, h^5),$$

что

$$|\sum_{i=1}^{n} u_i| < c\sqrt{n} \text{ и } |\sum_{i=1}^{n} v_i| < c\sqrt{n}$$

В последнем параграфе проводится вычисление скейлинговой энтропии.

Теорема 4.9. *Для счетной нильпотентной группы G, и фильтрации $\Xi = \{\xi_n\}_n^\infty$ прошлых марковского процесса блуждания по траекториям бернуллиевского действия счетной нильпотентной или коммутативной группы G,*

собственная скейлинговая функция эквивалентна следующей функции:

$$c(\varepsilon, n) = (n \log(\frac{1}{\varepsilon}))^{d/2}$$

здесь $d = d(G)$ - взвешенный ранг нильпотентной группы G.

Скейлинговая энтропия фильтрации с таким скейлингом равна $h(G)$ - энтропии действия группы.

Таким образом, скейлинг для абелевых и нильпотентных групп - полиномиальный; для блужданий по траекториям бернуллиевского действия свободных неабелевых групп - экспоненциален и энтропия соответствующих фильтраций есть обычная (экспоненциальная) энтропия. Вопрос о скейлинге для блужданий на разрешимых группах - открыт.

Список литературы

[1] А.Д. Горбульский, Об одном свойстве энтропии убывающей последовательности измеримых разбиений, *Записки науч.сем. ПОМИ* **256** , (1999) 19-23.

[2] А.Д. Горбульский, Взаимосвязь разных определений энтропии убывающих последовательностей разбиений. Скейлинг, *Записки науч.сем. ПОМИ* **283**, (2001) 50-62.

[3] А.Д. Горбульский, Пример интерполяции стандартной последовательности измеримых разбиений с большой скейлинговой энтропией, *Записки науч.сем. ПОМИ* **292**, (2002) 5-10.

[4] А.Д. Горбульский, σ-алгебра прошлых случайного блуждания по орбитам бернуллиевского действия группы Z^D, *Записки науч.сем. ПОМИ* **325**, (2005) 103-112.

[5] А. М. Вершик, А.Д. Горбульский, Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр, *Теор.Вер. и приложения* **3**, (2007) 446-467.