На правах рукописи

Высоцкий Владислав Вадимович

Предельные теоремы для стохастических моделей взаимодействующих частиц

Специальность 01.01.05 –
теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2008

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Лифшиц Михаил Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Смородина Наталья Васильевна
	кандидат физико-математических наук, Запорожец Дмитрий Николаевич
Ведущая организация:	Московский Государственный университет

Защита состоится "___" __________ 2008 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу 191023, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу 191023, наб. р. Фонтанки, д. 27.

Автореферат разослан "___" ___________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук Зайцев А.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. Диссертация посвящена изучению стохастической модели слипающихся частиц и марковской модели движения частицы в случайной среде.

Исследуемая одномерная модель притягивающихся слипающихся частиц со случайными начальными данными была предложена Мартином и Пясецким [18] в 1996 г. Вскоре выяснилось, что описание процесса слипания частиц в этой модели является интересной и содержательной задачей, для решения которой используются разнообразные методы теории вероятностей. Изучением различных вероятных свойств процесса слипания занимались многие авторы, например, Мартин, Пясецкий, Лифшиц, Ши, Жиро, Суидан, см. [5, 6, 8, 12, 16, 18]. Но несмотря на достаточно большое количество статей, посвященных этому вопросу, такие важные характеристики процесса слипания, как суммарная кинетическая энергия системы частиц, количество существующих в этой системе кластеров, размер типичного кластера, к моменту начала работы автора над диссертацией еще не были изучены.

Системы слипающихся частиц находят различные применения. Они тесно связаны с некоторыми дифференциальными уравнениями в частных производных, возникающими при описании движения жидкостей и газов, например, с уравнением Бюргерса, см. работы И, Рыкова и Синая [10] и Гурбатова и др. [2]. В астрофизике слипающиеся частицы могут быть использованы для описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной, см. Гурбатов и др. [14]. Наконец, в недавних статьях Бертуана [7] и Жиро [13] найдена связь между стохастической моделью притягивающихся слипающихся частиц и случайным процессом аддитивного слипания (additive coalescent).

Изучаемая в диссертации марковская модель движения частицы в случайной среде под действием внешнего поля возникла как приближение классической модели Лоренца. Эта модель, описывающая движение частицы сквозь неподвижные частицы некоторого вещества, была введена в 1905 г. Лоренцем [17] для описания электропроводности в металлах. Сам Лоренц рассматривал лишь абсолютно упругие столкновения, а обобщения этой модели на случай неупругих столкновений можно найти у Вилкинсона и Эдвардса [22]. В случае, когда внешнее поле отсутствует, модель Лоренца с абсолютно упругими столкновениями является моделью бильярдного типа. Изучению математических бильярдов посвящено очень большое количество работ, см. ссылки у Гальперина и Землякова [1]. В частном случае абсолютно упругих столкновений рассматриваемая нами марковская модель движения в случайной среде соответствует модели, изучаемой в статье Равишанкара и Триоло [20].

Нас интересует асимптотика положения частицы в марковской модели движения в случайной среде в момент времени, стремящийся к бесконечности. Это наиболее естественная задача, которая возникает при изучении движения в случайных средах. Результаты о положении частицы в близких к изучаемой моделях движения получены в работах Равишанкара и Триоло [20] и Бунимовича и Синая [9]: в [20] показано, что при должной нормировке движение частицы становится диффузией, а в [9] для положения частицы доказан принцип инвариантности.

Таким образом, исследуемые в диссертации задачи относятся к актуальному и активно развивающемуся направлению современной теории вероятностей.

Цель работы. Целью диссертации является решение следующих задач.

1) Описать количество кластеров, существующих в системе слипающихся частиц в произвольный момент времени.

2) Исследовать суммарную кинетическую энергию системы слипающихся частиц в произвольный момент времени.

3) Описать положение движущейся частицы в марковской модели движения в случайной среде.

Ответы на эти задачи сформулированы в виде предельных теорем, причем в модели слипающихся частиц предел берется по стремящемуся к бесконечности количеству частиц, а в модели движения в случайной среде к бесконечности устремляется время движения частицы.

Методы исследований. Первоначальное изучение стохастических систем слипающихся частиц осуществляется при помощи "метода барицентров". Этот метод, позволяющий свести задачу изучения процесса слипания к изучению свойств случайных блужданий, был разработан в независимых работах Мартина и Пясецкого [18] и И, Рыкова и Синая [10].

На основе метода барицентров автором разработан общий метод получения предельных теорем для различных характеристик процесса слипания. Этот метод опирается на свойство локальности процесса слипания, состоящее в том, что поведение каждой частицы практически полностью определяется движением лишь соседних с нею частиц. Получено количественное описание этой локальности, при помощи которого предельные теоремы для характеристик процесса слипания получаются из стандартных предельных теорем для слабо зависимых случайных величин.

Изучение же движения частицы в случайной среде сводится к исследованию различных свойств некоторой цепи Маркова. В частности, требуется проверить эргодичность этой цепи, а также применимость к ней принципа инвариантности. Для решения этих вопросов использованы методы исследования марковских цепей, основанные на стохастических аналогах функций Ляпунова, см. Мейн и Твиди [19].

Основные результаты и их научная новизна. При изучении одномерной стохастической модели притягивающихся слипающихся частиц были получены следующие результаты.

1) Разработан общий метод доказательства предельных теорем для модели со случайными начальными положениями и нулевыми начальными скоростями частиц (так называемый холодный газ).

2) Для количества кластеров в холодном газе доказаны закон больших чисел в произвольный момент времени и функциональная центральная предельная теорема. Для основных моделей случайных начальных положений частиц предел в законе больших чисел найден в явном виде. Таким образом, получено практически исчерпывающее описание количества кластеров в холодном газе.

Для модели со случайными начальными положениями и случайными начальными скоростями частиц (так называемый теплый газ) получена оценка количества кластеров, свидетельствующая о существенном различии в поведении теплого и холодного газов.

3) Для теплого газа получена близкая к оптимальной оценка размера мгновенно образующихся кластеров.

4) Для моделей холодного и теплого газов получена предельная теорема для кинетической энергии в произвольный момент времени. В частности, в этой теореме показано, что теплый газ мгновенно охлаждается.

При изучении марковской модели движения частицы в случайной среде под действием постоянного внешнего поля были получены следующие результаты.

5) Показано, каким образом рассматриваемая марковская модель движения частицы в случайной среде выводится из положений классической модели Лоренца с неупругими столкновениями. Объяснено, в каком смысле эти модели близки друг к другу.

6) Для траектории движущейся частицы получена функциональная центральная предельная теорема.

Все перечисленные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы, разработанные для исследования стохастических систем слипающихся частиц, могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств этих систем. Полученный результат о движении частицы в случайной среде полезен тем, что он дает микроскопическое описание процесса переноса вещества под действием внешнего поля.

Апробация работы. Результаты были доложены на Санкт-Петербургском городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике, на семинаре по теории представлений и динамическим системам ПОМИ РАН, на семинаре университета г. Билефельд (в 2007 г.), на семинаре Института математической стохастики в г. Геттинген (в 2007 г.) и на семинаре научной школы по математической статистической физике в г. Лез Уш (в 2005 г.). Кроме того, некоторые из полученных результатов докладывались на финальном туре 11-го Конкурса Мебиуса в Москве (в 2007 г.) и на Конкурсе молодых ученых Санкт-Петербургского государственного университета (в 2007 г.).

Результаты диссертации докладывались на семи международных конференциях – это Пиренейский международный симпозиум по статистике, вероятности и исследованию операций (Хака, 2007 г.), Международная конференция “50 лет пространству Скорохода” (Киев, 2007 г.), Международный конгресс по математической физике (Рио-де-Жанейро, 2006 г.), Международный симпозиум Института математической статистики (Рио-де-Жанейро, 2006 г.), 9-я Международная вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 2006 г.), 6-й Всемирный конгресс Общества Бернулли по теории вероятностей и математической статистике (Барселона, 2004 г.) и 4-й Европейский математический конгресс (Стокгольм, 2004 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ [23]–[33].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Ее объем составляет 142 страницы, включая 6 рисунков и список литературы из 56 наименований.

Содержание работы

Во **введении** сформулированы цели и задачи работы, обоснована актуальность темы исследования, кратко изложены полученные результаты.

Глава I посвящена изучению стохастической модели слипающихся частиц.

В **первом** параграфе приведено описание исследуемой модели и ее применений в астрофизике.

Модель слипающихся частиц представляет собой стохастическую модель одномерного газа. В начальный момент газ состоит из n одинаковых частиц, каждая из которых является материальной точкой массы $\frac{1}{n}$ со случайной начальной скоростью и случайным начальным положением. Частицы газа притягиваются друг к другу, причем *сила взаимного притяжения* равна произведению масс, то есть *не зависит от расстояния.* При столкновениях частицы *слипаются*, образуя новую частицу (называемую *кластером*), масса и скорость которой определяются законами сохранения массы и импульса. Движение частиц между столкновениями подчинено второму закону Ньютона.

Описанная динамика является полностью детерминированной, а случайность входит лишь в начальные данные частиц. Начальные положения частиц описываются при помощи следующих моделей. В *равномерной* модели положения частиц являются независимыми равномерно распределенными на $[0, 1]$ случайными величинами. В модели с *независимыми расстояниями* (далее именуемой *н.р.-моделью*) частицы изначально располагаются в точках $\frac{1}{n}S_1, \ldots, \frac{1}{n}S_n$, где S_i – случайное блуждание с неотрицательными приращениями X_i, для которых $\mathbb{E}X_i = 1$. Здесь можно выделить два особенно интересных частных случая. Модель с независимыми расстояниями, в которой X_i имеют стандартное экспоненциальное распределение, называют *пуассоновской.* Неслучайную модель начальных положений, в которой все $X_i \equiv 1$, называют *решетчатой.* Равномерная и пуассоновская модели являются наиболее естественными и интересными, поэтому их называют *основными* моделями начальных положений.

Для описания случайных начальных скоростей частиц используются две модели. В *холодном газе* все начальные скорости равны нулю. В *теплом газе* начальные скорости частиц равны $\sigma_n v_1, \sigma_n v_2, \ldots, \sigma_n v_n$, где $\sigma_n > 0$ – некоторые нормирующие константы, а v_i – независимые одинаково распределенные случайные величины, независимые со случайными величинами, задающими начальные положения. Предполагается, что $\mathbb{E}v_i = 0$, а $\mathbb{D}v_i = 1$. Случай, когда $\sigma_n \equiv \sigma > 0$, называется *основным.*

Во **втором** параграфе излагается метод барицентров, являющийся базовым инструментом для изучения систем слипающихся частиц.

В **третьем** параграфе дан предварительный анализ процесса слипания в холодном газе. Эти результаты используются в следующих параграфах при получении предельных теорем о поведении числа кластеров в холодном газе. В частности, нами показано, что *процесс слипания локален*, то есть поведение каждой частицы практически полностью определяется движением лишь соседних с нею частиц. Приведена строгая формулировка этого утверждения, а также получено количественное описание указанной локальности.

В **четвертом** параграфе доказывается следующая теорема, являющаяся поточечным законом больших чисел для количества кластеров в холодном газе.

Обозначим $K_n(t)$ количество кластеров в системе; здесь t – это время, а индекс n всегда будет указывать на число начальных частиц. При подсчете $K_n(t)$ мы учитываем и исходные частицы, к моменту t не испытавшие столкновений; таким образом, $K_n(0) = n$. Пусть также

$$\mu := \sup\bigl\{y : \mathbb{P}\{X_i < y\} = 0\bigr\}.$$

Теорема 4.1. *В холодном газе при н.р.-модели начальных положений существует такая неслучайная функция $a(t)$ (зависящая от распределения X_i), что для любого $t \neq 1$ справедливо*

$$\frac{K_n(t)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a(t), \qquad n \to \infty. \tag{1}$$

Функция $a(t)$ не возрастает, $a(t) = 1$ на $[0, \sqrt{\mu})$, $a(t) \in (0, 1)$ на $(\sqrt{\mu}, 1)$ и $a(t) = 0$ на $(1, \infty)$. Если распределение X_i непрерывно, то $a(t)$ непрерывна на $[0, 1)$. Если же $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, то (1) выполняется и при $t = 1$, а из непрерывности распределения X_i следует непрерывность $a(t)$ при всех t.

В холодном газе при равномерной модели начальных положений (1) выполняется для некоторой неслучайной непрерывной $a(t)^{Unif}$ при всех t.

В **пятом** параграфе предельная функция $a(t)$ из теоремы 4.1 находится в явном виде для основных моделей начальных положений. Обозначим $a^{Poiss}(t)$ предельную функцию для пуассоновской модели в теореме 4.1.

Теорема 5.1. *В холодном газе для предельных функций при основных моделях начальных положений $a^{Poiss}(t) = a^{Unif}(t) = 1 - t^2$ при $0 \le t \le 1$.*

Существует разительный контраст между простотой формулировки этого результата и сложными вычислениями, которые требуются, чтобы его получить. Сообщим, что для этого потребовалось вычислить вероятность

$$\mathbb{P}\Bigl\{\inf_{k\ge1} \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} S_i \ge t\Bigr\} = \mathbb{P}\Bigl\{\inf_{k\ge1} \sum_{i=1}^{k} (S_i - it) \ge 0\Bigr\},$$

где S_i – экспоненциальное случайное блуждание, то есть блуждание с экспоненциально распределенными приращениями. Подсчет этой вероятности сложен тем, что не сводится к применению предельных теорем, например, таких как принцип инвариантности.

Цель **шестого** параграфа состоит в усилении теоремы 4.1: здесь доказывается функциональная центральная предельная теорема для числа кластеров. Сперва заметим, что траектории изучаемого процесса $K_n(t)$ являются элементами пространства Скорохода D.

Теорема 6.1. *Если в холодном газе при н.р.-модели начальных положений распределение X_i непрерывно и удовлетворяет условию $\mathbb{E}X_i^\gamma < \infty$ при некотором $\gamma > 4$, то существует центрированный гауссовский процесс $K(\cdot)$ на $[0,1)$ (зависящий от распределения X_i) такой, что*

$$\frac{K_n(\cdot) - na(\cdot)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} K(\cdot) \quad \text{в } D[0, 1-\varepsilon] \text{ для всех } \varepsilon \in (0,1) \tag{2}$$

при $n \to \infty$. Его траектории непрерывны с вероятностью 1, а $K(0) = 0$. Ковариационная функция $R(s,t)$ процесса $K(\cdot)$ непрерывна на $[0,1)^2$, $R(s,t) > 0$ на $(\sqrt{\mu}, 1)^2$ и $R(s,t) = 0$ на $[0,1)^2 \setminus (\sqrt{\mu}, 1)^2$.

В холодном газе при равномерной модели начальных положений соотношение (2) выполняется для некоторого центрированного гауссовского процесса $K^{Unif}(\cdot)$ на $[0,1)$. Его траектории непрерывны с вероятностью 1, а $K^{Unif}(0) = 0$. Ковариационная функция $R^{Unif}(s,t)$ процесса $K^{Unif}(\cdot)$ непрерывна на $[0,1)^2$, и кроме того, $R^{Unif}(s,t) = R^{Poiss}(s,t) - s^2t^2$.

Отсюда видно, что хотя $a^{Poiss}(\cdot) = a^{Unif}(\cdot)$, но пуассоновская и равномерная модели приводят к различным предельным процессам $K^{Poiss}(\cdot)$ и $K^{Unif}(\cdot)$. Любопытна и неожиданна положительность $R(s,t)$ для н.р.-модели.

Возникает естественный вопрос: можно ли доказать слабую сходимость траекторий процесса $\frac{K_n(\cdot)-na(\cdot)}{\sqrt{n}}$ в пространстве $D[0,1]$, тем самым усилив (2) в теореме 6.1? В **седьмом** параграфе обсуждается более простой вопрос – сходимость $\frac{K_n(1)-na(1)}{\sqrt{n}} = \frac{K_n(1)}{\sqrt{n}}$ в критический момент времени $t = 1$. Показано, что в холодном газе при пуассоновской модели начальных положений последовательность $\frac{K_n(1)}{\sqrt{n}}$ плотна, то есть $K_n(1)$ действительно имеет порядок $\sqrt{n}$. Интересно сравнить этот результат с результатом Суидана [6], который нашел распределение $K_n(1)$ для теплого газа с $\sigma_n \equiv 1$ при решетчатых начальных положениях частиц и в качестве следствия получил $\mathbb{E}K_n(1) \sim \log n$. Это единственный результат о количестве кластеров, встречающийся в работах других авторов.

При изучении сходимости $\frac{K_n(1)}{\sqrt{n}}$ была сформулирована следующая ниже гипотеза, которая представляет большой интерес и без учета ее приложений к модели слипающихся частиц.

Гипотеза 7.1. *Для экспоненциального блуждания S_i существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} k^{1/4}\, \mathbb{P}\Big\{\min_{1\le m\le k} \sum_{i=1}^{m}(S_i - \mathbb{E}S_i) \ge 0\Big\} \in (0,\infty).$$

По-видимому, эта гипотеза справедлива не только для экспоненциального блуждания, а для гораздо более широкого класса блужданий, удовлетворяющих некоторым моментным ограничениям. Для случая простого случайного блуждания несколько более слабое утверждение доказано Синаем [21]. Интересно, что и вероятности односторонних малых уклонений проинтегрированного винеровского процесса на большом интервале $[0,k]$ имеют такой же порядок $k^{-1/4}$ при $k\to\infty$, см. Исозаки и Ватанабе [15].

Приведенные выше результаты позволяют сказать, что в диссертации получено практически исчерпывающее описание числа кластеров в холодном газе. **Восьмой** параграф посвящен рассмотрению процесса слипания в теплом газе. Оказывается, что в теплом газе мгновенно образуются кластеры неограниченного размера, о чем свидетельствует следующее предложение, в котором дается оценка размера образующихся кластеров.

Пусть $T_{[k,k+l];\,n}$ означает момент, когда частицы с номерами $k,\dots,k+l\in[1,n]$ впервые окажутся в одном кластере (считается, что частицы пронумерованы слева направо); второй индекс n указывает на начальное число частиц в системе.

Предложение 8.1. *Если в теплом газе $n^{-1}\ll\sigma_n$ при $n\to\infty$, то тогда при любой из описанных моделей начальных положений верно следующее. Для любого $t>0$ и любой последовательности $a_n\to 0$, удовлетворяющей $a_n l_n\to\infty$, где $l_n := n\wedge(n\sigma_n)^{2/3}$,*

$$\mathbb{P}\Big\{T_{[i-a_nl_n,\,i+a_nl_n];\,n} < t\Big\} \longrightarrow 1, \qquad n\to\infty$$

равномерно по $i\in[a_n^{1/2}l_n,\, n-a_n^{1/2}l_n]$.

Сравнение этого результата с оценкой размера максимального кластера из работы Лифшица и Ши [16] убеждает в том, что полученная оценка размера мгновенно образующихся кластеров близка к оптимальной.

В качестве следствия из предложения 8.1 имеем следующий результат о числе кластеров, который убедительно демонстрирует различие в поведении теплого и холодного газов, см. теорему 4.1.

Утверждение 8.1. *Если в теплом газе* $n^{-1} \ll \sigma_n$ *при* $n \to \infty$, *то при любой из описанных моделей начальных положений для любого* $t > 0$

$$\frac{K_n(t)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \qquad n \to \infty.$$

В **девятом** параграфе изучается суммарная кинетическая энергия газа $E_n(t)$. Прежде, чем сформулировать основной результат, введем следующее условие. Пусть $L_n(t)$ означает размер максимального кластера, существующего в системе в момент t. Соотношение

$$\frac{L_n(t)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{1}_{\{t \geq 1\}}, \qquad n \to \infty$$

будем называть *условием существования макроскопического кластера* в момент t или, кратко, *УСМК*(t). Величина $L_n(t)$ достаточно подробно изучена в работах других авторов, а условие УСМК(t) выполняется в подавляющем большинстве случаев (которые перечислены в начале параграфа) при всех $t \neq 1$.

Теорема 9.1. *При любой из описанных моделей начальных положений, в холодном газе, а также в теплом газе при выполнении* $n^{-1} \ll \sigma_n$ *и* $\sigma_n = O(1)$ *при* $n \to \infty$, *для любого* $t \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$$\text{\textit{УСМК}}(t) \qquad \Longrightarrow \qquad E_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{t^2}{6} \mathbb{1}_{\{t<1\}}, \quad n \to \infty.$$

В частности, из этой теоремы видно, что *теплый газ мгновенно охлаждается*. Действительно, для основного случая $\sigma_n \equiv \sigma > 0$ из закона больших чисел имеем $E_n(0) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (\sigma v_i)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\sigma^2}{2} > 0$, что соответствует положительной начальной температуре газа. Мгновенное охлаждение было обнаружено при помощи компьютерного моделирования и описано в работе Бонвина и др. [8], которая и дала автору диссертации мотивировку для теоретического описания этого явления.

Завершает главу **десятый** параграф, в котором приведены результаты компьютерного моделирования систем слипающихся частиц. Это сделано для того, чтобы в наглядной форме продемонстрировать полученные предельные теоремы.

Глава II посвящена изучению марковской модели движения в случайной среде.

В **одиннадцатом** параграфе описывается рассматриваемая модель движения в случайной среде и объясняется ее происхождение.

Рассмотрим движение частицы в пространстве $\mathbb{R}^d$ произвольной размерности $d \geq 1$. В начальный момент времени частица, находящаяся в начале координат, обладает неслучайной скоростью v_0. Она начинает двигаться с постоянным ускорением a, время от времени испытывая столкновения с *препятствиями* – частицами, образующими случайную среду. Пусть η_n означает длину пути движущейся частицы между n-м и $(n+1)$-м столкновениями, а η_0 – длину пути до первого столкновения. Будем предполагать, что $\{\eta_n\}_{n\geq 0}$ являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами со средним λ – параметром, равным длине свободного пробега частицы.

Столкновения с препятствиями происходят следующим образом. Пусть $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ – независимые случайные векторы, равномерно распределенные на единичной сфере $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, и пусть все $\{\eta_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ независимы друг с другом. Будем полагать, что при n-м столкновении скорость частицы V_n меняется на $V_n - \frac{1+\alpha}{2}\big(V_n + |V_n|\sigma_n\big)$.

Легко видеть, что V_n – скорости частицы в моменты столкновений – связаны соотношениями

$$V_{n+1} = V_n - \frac{1+\alpha}{2}\big(V_n + |V_n|\sigma_n\big) + aF\Big(V_n - \frac{1+\alpha}{2}\big(V_n + |V_n|\sigma_n\big), \eta_n\Big),$$

где неслучайная функция $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ определяется уравнением

$$\int_0^{F(v,z)} |v + at|dt = z.$$

Поскольку V_n образуют цепь Маркова с начальным распределением $V_1 = v_0 + aF(v_0, \eta_0)$, мы говорим о *марковской* модели движения частицы в случайной среде. По-видимому, эта модель была впервые предложена автором диссертации в работе [24], хотя некоторые ее положения присутствуют у Равишанкара и Триоло [20], которые, однако, рассматривают лишь случай $\alpha = 1$.

В диссертации описанная модель именуется *марковским приближением модели Лоренца* или, кратко, *МПМЛ-моделью*, поскольку ее введение было мотивировано именно моделью Лоренца. Как уже говорилось, последняя модель, давно ставшая классической, была введена Лоренцем [17] еще в 1905 г. В параграфе одиннадцать объяснено, каким образом положения МПМЛ-модели выводятся из предпосылок модели Лоренца и предположения о том, что центры препятствий, составляющих случайную среду, образуют пуассоновский точечный процесс. Конечно, МПМЛ-модель и модель Лоренца отличаются, но все же они достаточно близки друг к другу. Объяснено, что́ следует понимать под этим утверждением и каким образом ему можно придать строгий смысл. При этом использован подход, разработанный Галлавотти [11] и другими авторами для математически строгого вывода уравнения Больцмана в разреженных газах.

Наконец, в параграфе отмечено, что если в размерности $d = 1$ считать, что при столкновениях скорость частицы V_n всегда домножается на $-\alpha$, то получается другая очень содержательная модель движения, которую уместно называть *обобщенным телеграфным процессом.* Действительно, если $\alpha = 1$, а $a = 0$, то движение частицы представляет собой *телеграфный процесс*, подробнее о котором можно узнать, например, из книги Каца [4].

В **двенадцатом** параграфе сформулирован основной результат о движении в МПМЛ-модели – функциональная предельная теорема для траектории частицы, а также начато доказательство этого результата.

Пусть $X(T)$ означает положение частицы в момент времени T. Будем считать, что базис $\mathbb{R}^d$ выбран так, что ускорение a направлено вдоль последней координатной оси. Пространство непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}^d$ будем стандартно обозначать через C.

Теорема 12.1. *Предположим, что $0 < \alpha < 1$, а $a \neq 0$. Тогда существуют такие константы $c_v > 0$ и $c_1, c_2 \geq 0$ (зависящие от $|a|, \alpha, \lambda$ и d), что для движения частицы в МПМЛ-модели при любой начальной скорости $v_0 \in \mathbb{R}^d$ справедливо*

$$\frac{X(sT) - c_v a s T}{\sqrt{T}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \big(c_1 W_1(\cdot), \ldots, c_1 W_{d-1}(\cdot), c_2 W_d(\cdot)\big)^\top \quad \text{в } C[0,1]$$

при $T \to \infty$, где $W_i(\cdot)$ – независимые винеровские процессы.

Кроме того, в размерности $d = 1$ при $0 < \alpha < 1$ и $a \neq 0$ это же утверждение верно и для обобщенного телеграфного процесса, но уже с другими константами $\tilde{c}_v > 0$ и $\tilde{c}_2 \geq 0$.

Таким образом, частица испытывает снос в направлении внешнего поля, двигаясь со средней скоростью $c_v|a|$. После устранении сноса движение частицы становится броуновской диффузией, распределение которой инвариантно относительно вращений вокруг направления поля. Такая инвариантность вызвана симметрией МПМЛ-модели относительно направления a.

Комментарии по поводу вида одномерных распределений предельного процесса можно найти у Вилкинсона и Эдвардса [22], однако их рассуждения проведены лишь на физическом уровне строгости. Уже после того, как теорема 12.1 была доказана, автор ознакомился со статьей Равишанкара и Триоло [20], в которой тоже доказывается слабая сходимость траекторий процесса $X(T)$, но для $X(T)$ использована другая нормировка. Поскольку в этой работе рассматривается только случай $\alpha = 1$, теорема 12.1 и результат статьи [20] удачно дополняют друг друга.

В **двенадцатом** параграфе показано, что доказательство теоремы 12.1 сводится к проверке различных утверждений о некоторой марковской цепи Φ_n. Сложность изучения этой цепи состоит в том, что, во-первых, пространство ее состояний не счетно и не компактно, а во-вторых, эта цепь не удовлетворяет условию Дёблина, поэтому классические результаты (см. Дуб [3]) к ней не применимы. Для преодоления этих трудностей использован подход, который изложен в книге Мейна и Твиди [19] и основывается на стохастических аналогах функций Ляпунова. Этот подход, а также другие необходимые сведения о цепях Маркова изложены в **тринадцатом** параграфе.

В **четырнадцатом** параграфе исследуются свойства цепи Φ_n. Доказывается, что эта цепь эргодична, и самое важное, для нее выполняется принцип инвариантности. Применение полученных свойств цепи Маркова Φ_n завершает доказательство теоремы 12.1 в **пятнадцатом** параграфе.

В **заключении** подводится итог проделанных исследований.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Михаилу Анатольевичу Лифшицу за постановку интересных задач, постоянное внимание к работе и бесчисленные советы, данные в течение почти шестилетнего руководства.

Список литературы

[1] Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды. – М.: Наука, 1990.

[2] Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. – М.: Наука, 1990.

[3] Дуб Дж. Вероятностные процессы. – М.: ИЛ, 1956.

[4] Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. – М.: Наука, 1967.

[5] Куоза Л.В., Лифшиц М.А. Агрегация в одномерной модели газа с устойчивыми начальными данными // Записки научных семинаров ПОМИ, 2004, т. 311, с. 161–178.

[6] Суидан Т.М. Одномерный гравитационно взаимодействующий газ и выпуклая миноранта броуновского движения // Успехи математических наук, 2001, т. 56, с. 73–96.

[7] Bertoin J. Clustering statistics for sticky particles with Brownian initial velocity // J. Math. Pures Appl., 2000, v. 79, pp. 173—194.

[8] Bonvin J.C., Martin Ph.A., Piasecki J., Zotos X. Statistics of mass aggregation in a self-gravitating one-dimensional gas // J. Stat. Phys., 1998, v. 91, pp. 177–197.

[9] Bunimovich L.A., Sinai Ya.G. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers // Comm. Math. Phys., 1981, v. 78, pp. 479–497.

[10] E W., Rykov Yu.G., Sinai Ya.G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // Comm. Math. Phys., 1996, v. 177, pp. 349–380.

[11] Gallavotti G. Rigorous theory of the Boltzmann equation in the Lorentz gas // Nota interna n. 358, Istituto di Fisica, Università di Roma, 1972.

[12] Giraud C. Clustering in a self-gravitating one-dimensional gas at zero temperature // J. Stat. Phys., 2001, v. 105, pp. 585–604.

[13] Giraud C. Gravitational clustering and additive coalescence // Stoch. Proc. Appl., 2005, v. 115, pp. 1302–1322.

[14] Gurbatov S.N., Saichev A.I., Shandarin S.F. The large-scale structure of the universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion // Mon. Not. R. Astr. Soc., 1989, v. 236, pp. 385–402.

[15] Isozaki Y., Watanabe S. An asymptotic formula for the Kolmogorov Diffusion and a refinement of Sinai's estimates for the integral of Brownian motion // Proc. Japan Acad., Ser. A, 1994, v. 70, pp. 271–276.

[16] Lifshits M., Shi Z. Aggregation rates in one-dimensional stochastic systems with adhesion and gravitation // Ann. Probab., 2005, v. 33, pp. 53–81.

[17] Lorentz H.A. The motion of electrons in metallic bodies, I // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings, Amsterdam, 1904/05, v. 7, pp. 438–453.

[18] Martin Ph.A., Piasecki J. Aggregation dynamics in a self-gravitating one-dimensional gas // J. Stat. Phys., 1996, v. 84, pp. 837–857.

[19] Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov Chains and Stochastic Stability. – London: Springer, 1993.

[20] Ravishankar K., Triolo L. Diffusive limit of the Lorentz model with a uniform field starting from the Markov approximation // Markov Processes and Related Fields, 1999, v. 5, pp. 385–421.

[21] Sinai Ya.G. Distribution of some functionals of the integral of a random walk // Theor. Math. Phys., 1992, v. 90, pp. 219–241.

[22] Wilkinson D.R., Edwards S.F. Spontaneous interparticle percolation // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, 1982, v. 381, pp. 33–51.

Публикации автора по теме диссертации

[23] Высоцкий В.В. Энергия и количество кластеров в стохастических системах неупругих притягивающихся частиц // Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, с. 241–265.

[24] Высоцкий В.В. Предельная теорема для положения частицы в модели Лоренца // Записки научных семинаров ПОМИ, 2005, т. 328, с. 42–68.

[25] Высоцкий В.В. Площадь экспоненциального случайного блуждания и частичные суммы порядковых статистик // Записки научных семинаров ПОМИ, 2007, т. 341, с. 48–67.

[26] Vysotsky V. A functional limit theorem for the position of a particle in a Lorentz type model // Markov Proc. Rel. Fields, 2006, v. 12, pp. 767–790.

[27] Vysotsky V.V. Clustering in a stochastic model of one-dimensional gas // Annals of Applied Probability, принята в печать, 35 с. Доступна в виде препринтов на www.imstat.org/aap/future_papers.html и www.arxiv.org.

Тезисы докладов автора по теме диссертации

[28] Vysotsky V. On energy and clusters in stochastic systems of sticky gravitating particles // Programme, Abstracts and Directory of Participants of

6th World Congress of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability and 67th Annual Meeting of the Institute of Mathematical Statistics. Barcelona, 2004, pp. 200–201.

[29] Vysotsky V. The number of clusters in a stochastic model of one-dimensional gas // Abstracts of Communications of 9th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vilnius, 2006, p. 322.

[30] Vysotsky V. A limit theorem for the position of a particle in a Lorentz type model of motion in a random medium // Program Book of 69th Annual Meeting of the Institute of Mathematical Statistics. Rio de Janeiro, 2006, p. 58.

[31] Vysotsky V. A limit theorem for the trajectory of a particle in the Lorentz model // Program and Abstracts of International Congress on Mathematical Physics. Rio de Janeiro, 2006, p. 151.

[32] Vysotsky V.V. Gravitational clustering in stochastic systems of sticky particles // Abstracts of International Conference “Skorokhod Space. 50 Years On”, book II. Kiev, 2007, pp. 151–152.

[33] Vysotsky V. The area of exponential random walk and stochastic systems of sticky particles // Program and Abstracts of the Pyrenees International Workshop on Statistics, Probability and Operations Research. Jaca, 2007, p. 35.